1/. الدالة الأصلية.

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f.

من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

خواص:

* إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

2. الدوال الأصلية لـ $f+g$ و kf (k عدد حقيقي)

خواص:

* إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k \in \mathbb{R})$

3. الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

c عددا حقيقي كيفي.

f دالة معرفة على I بِـ $f(x)=$	الدوال الأصلية لِـ f على I هي الدوال المعرفة بِـ $F(x)=$	المجال I هو
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$

4. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x) \neq 0$

من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	$\dfrac{u'}{u^n}\ (n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2)$
من أجل كل x من I، $u(x)>0$	$2\sqrt{u}+c$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

2/. الحساب التكاملي

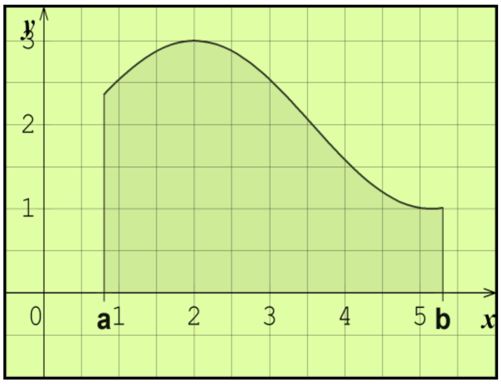
1.الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن:

خاصية

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان

من I حيث $a\leq b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لِـ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.



ملاحظات:

الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

تعريف:

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I. يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية لِـ f على I، التكامل من a إلى b لِـ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

ملاحظات:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

2. يمكن تبديل المتغير x بأحد الحروف t، q،.... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

نتيجة:

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\leq b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لِـ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$

2. خواص التكامل:

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I.

أ-الخطية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

ب- الترتيب

خواص: a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\le b$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\ge 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\le g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

ج- علاقة شال

خواص: من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

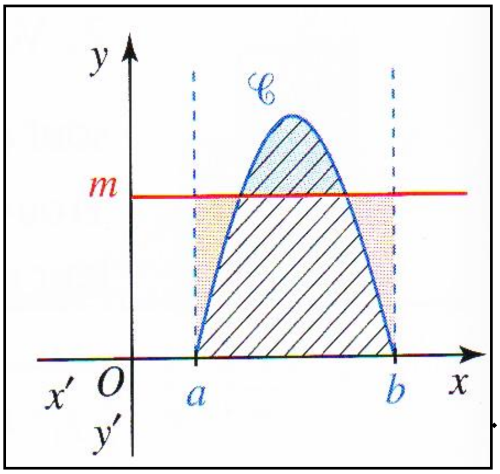
3.القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف:

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a<b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

التفسير البياني:



نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$.

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{يعني} \quad m(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

و هكذا فإن m، القيمة المتوسطة لِ f على $[a;b]$، هي " ارتفاع " المستطيل الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.

من اعداد الأستاذ:

شعبان أسامة