مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية)
الدروس// الشعبة: الثالثة علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

دروس: حول الدّوال الأسية// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 03 ع؛ تر.

❶ الدّوال الأسية:

① النشاط 01 ص 76:

مقدمة:

تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية والاقتصادية وغيرها **باستعمال دّالة f متناسبة مع دّالتها المشتقة f'**. سوف نهتم هنا بدّالة من هذا النوع وهي **دّالة تساوي دّالتها المشتقة**.

فرضية:

نقبل أنّه توجد دّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتُحقق الشرطين التاليين:

(1) $\boxed{f' = f}$ وَ **(2)** $\boxed{f(0) = 1}$

1) باستعمال طريقة أولر وباختيار خطوة $h = 0{,}005$ أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لـ$f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$، ثمّ أنشئ تمثيلا تقريبيا للدّالة f.

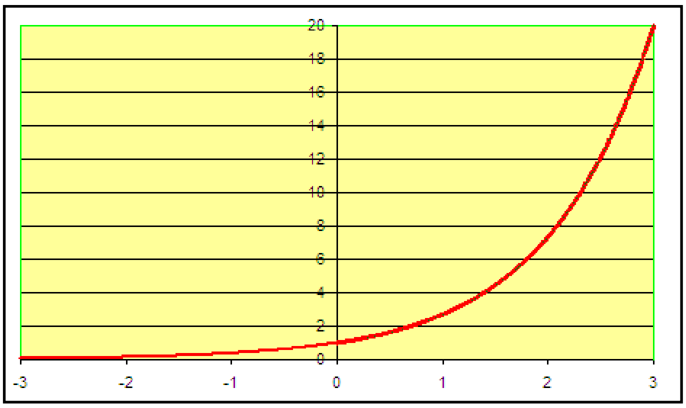
⌫ **نذكر أنّ:** $\boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$

وبما أنّ: $f' = f$، فإنّ: $\boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0)(1+h)}$.

⌫ **لدينا كذلك:** $\boxed{f(x_0-h) \simeq f(x_0) - hf'(x_0)}$

وبما أنّ: $f' = f$، فإنّ: $\boxed{f(x_0-h) \simeq f(x_0)(1-h)}$.

h	x	f(x-h)=f(x)*(1-h)	x	f(x+h)=f(x)*(1+h)
0,005	0	1	0	1
	-0,01	0,995	0,01	1,005
	-0,01	0,990025	0,01	1,010025
	-0,02	0,985074875	0,02	1,015075125
	-0,02	0,980149501	0,02	1,020150501
	-0,03	0,975248753	0,03	1,025251253
	-0,03	0,970372509	0,03	1,030377509
	-0,04	0,965520647	0,04	1,035529397
	-0,04	0,960693044	0,04	1,040707044
	-0,05	0,955889578	0,05	1,045910579
	-0,05	0,95111013	0,05	1,051140132
	-0,06	0,94635458	0,06	1,056395833
	-0,06	0,941622807	0,06	1,061677812
	-0,07	0,936914693	0,07	1,066986201



2) نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ:

$h(x) = f(x) \times f(-x)$.

● بيّن أنّ h دّالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

استنتج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) \times f(-x) = 1$ **(3)**

● برهن بالخُلف أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) \neq 0$ **(4)**

3) نفرض أنّه توجد دّالة ثانية g تُحقق $g' = g$ و $g(0) = 1$.

بما أنّ الدّالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$، نعتبر الدّالة k المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

● بيّن أنّ k دّالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

● استنتج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x) = f(x)$.

4) ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدّالة i المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $i(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$.

● بيّن أنّ i دّالة ثابتة على $\mathbb{R}$ وأنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x) = f(y)$.

● استنتج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$،

(5) $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

● استنتج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$،

(6) $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$

5) ليكن n عدداً صحيحا نسبيا ولتكن j الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $j(x) = \frac{f(nx)}{[f(x)]^n}$.

● عيّن الدّالة المشتقة للدّالة j.

● استنتج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

(7) $f(nx) = [f(x)]^n$

تعريف:

تسمى **الدّالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$** بحيث $\boxed{f' = f}$ و $\boxed{f(0) = 1}$ الدالة الأسية (النيبيرية).

ونرمز إليها بالرمز " exp ".

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) = \exp(x)$.

6) أكتب باستعمال الترميز السابق كل النتائج **(1)**، **(2)**، ...، **(7)**.

مناقشة النشاط 01 ص 76:

إثبات خواص الدّالة f:

f دّالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f' = f$ و $f(0) = 1$.

2) لدينا: h دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $h(x) = f(x) \times f(-x)$.

● **تبيان أنّ h دّالة ثابتة على $\mathbb{R}$، واستنتاج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\times f(-x)=1$ (3):**

من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$h'(x)=f'(x)\times f(-x)-f'(-x)\times f(x)$$

وبما أنّ: $f'(x)=f(x)$،

إذن: $h'(x)=f(x)\times f(-x)-f(x)\times f(-x)$

أي: $h'(x)=0$

وهذا يعني أنّ: h دّالة ثابتة.

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)=h(0)$،

إذن: $h(x)=h(0)=f(0)\times f(-0)=1$

والتالي: $f(x)\times f(-x)=1$.

أي: $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$.

● **البرهان بالخُلف أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0$ (4):**

نفرض أنّه يوجد عدد حقيقي x حيث: $f(x)=0$

$f(x)=0$ معناه: $h(x)=0$ **(وهذا تناقض)**

لأنّ: $h(x)=1$

ومنه: $f(x)\neq 0$.

3) بفرض أنّه توجد دّالة ثانية g تُحقق $g'=g$ و $g(0)=1$.

بما أنّ الدّالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$، نعتبر الدّالة k المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $k(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$.

● **تبيّان أنّ k دّالة ثابتة على $\mathbb{R}$:**

من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$k'(x)=\frac{g'(x)\times f(x)-f'(x)\times g(x)}{[f(x)]^2}$$

أي: $k'(x)=\frac{g(x)\times f(x)-f(x)\times g(x)}{[f(x)]^2}$

ومنه: $k'(x)=0$

والتالي: k دّالة ثابتة.

● **استنتاج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$:**

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $k(x)=k(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=1$

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{g(x)}{f(x)}=1$

أي: $f(x)=g(x)$.

4) y عدد حقيقي كيفي ثابت. i دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $i(x)=\frac{f(x+y)}{f(x)}$.

● **تبيان أنّ i دّالة ثابتة على $\mathbb{R}$ وأنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x)=f(y)$:**

من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$i'(x)=\frac{f'(x+y)\times f(x)-f'(x)\times f(x+y)}{[f(x)]^2}$$

ومنه: $i'(x)=\frac{f(x+y)\times f(x)-f(x)\times f(x+y)}{[f(x)]^2}=0$

إذن: i دّالة ثابتة.

ولدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x)=i(0)$

إذن: $i(x)=i(0)=\frac{f(y)}{f(0)}=f(y)$

ومنه: $i(x)=f(y)$.

● **استنتاج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ (5):**

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x)=\frac{f(x+y)}{f(x)}$

أي: $f(y)=\frac{f(x+y)}{f(x)}$

ومنه: $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

● **استنتاج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ (6):**

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$f(x-y)=f(x)\times f(-y)$$

وبما أنّ: $f(-y)=\frac{1}{f(y)}$

إذن: $f(x-y)=f(x)\times\frac{1}{f(y)}$

ومنه: $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$.

5) n عدداً صحيحاً نسبياً و j دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $j(x)=\frac{f(nx)}{[f(x)]^n}$.

● **تعيين الدّالة المشتقة للدّالة j، استنتاج أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx)=[f(x)]^n$ (7):**

من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$j'(x)=\frac{nf'(nx)\times[f(x)]^n-nf'(x)\times[f(x)]^{n-1}\times f(nx)}{([f(x)]^n)^2}$$

ومنه:

$$j'(x)=\frac{nf(nx)\times[f(x)]^n-nf(x)\times[f(x)]^{n-1}\times f(nx)}{[f(x)]^{2n}}$$

وعليه:

$$j'(x)=\frac{nf(nx)\times[f(x)]^n-n[f(x)]^n\times f(nx)}{[f(x)]^{2n}}=0$$

إذن: j دّالة ثابتة.

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $j(x)=\boldsymbol{j(0)}=\frac{f(n\times 0)}{[f(0)]^n}=\mathbf{1}$

والتالي: $\frac{f(nx)}{[f(x)]^n}=1$

أي: $f(nx)=[f(x)]^n$.

تعريف:

تسمى **الدّالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$** بحيث $\boxed{f'=f}$ و $\boxed{f(0)=1}$ الدالة الأسية (النيبيرية).

ونرمز إليها بالرمز " exp ".

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\exp(x)$.

6) **كتابة باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)، .... (7):**

(1) $\exp'(x)=\exp(x)$ (2) $\exp(0)=1$
(3) $\exp(x)\times\exp(-x)=1$ (4) $\exp(x)\neq 0$
(5) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$
(6) $\exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
(7) $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$

مع تحيات الأستاذ المعد

① عموميات:

مبرهنة وتعريف:

توجد دالّة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:
$\boxed{f'=f}$ وَ $\boxed{f(0)=1}$.
نرمز إلى هذه الدّالة بالرمز " exp " ونسميها **الدّالة الأسية (النيبيرية).**

ملاحظة:
الدّالة الأسية هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تُحقق $y(0)=1$.

نتائج: من التعريف ينتج لدينا:
❑ $\exp(0)=1$.
❑ من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp'(x)=\exp(x)$.

② العدد e والترميز e^x:

⌫ **العدد e هو صورة العدد 1 بالدّالة الأسية،**
أي: $e=\exp(1)$.
تُعطينا الحاسبة $e\simeq 2{,}718281828$.
⌫ من أجل كل **عدد صحيح نسبي n**،
$\exp(n)=\exp(n\times 1)=[\exp(1)]^n$
إذن: من أجل كل **عدد صحيح نسبي n**، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحاً:
نرمز، من أجل كل **عدد حقيقي x**، إلى $\exp(x)$ بـ e^x.
إذن: $\boxed{\exp(x)=e^x}$ تُقرأ e^x: " أسية x ".

③ خواص الدّالة الأسية:

قواعد الحساب:

من أجل كل عددين حقيقيين x، y ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:
(1) $\exp'(x)=e^x>0$ (2) $e^0=1$
(3) $e^x\times e^{-x}=1$ $\left(e^{-x}=\frac{1}{e^x}>0\right)$
(4) $e^x\neq 0$ (5) $e^{x+y}=e^x\times e^y$
(6) $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ (7) $e^{nx}=(e^x)^n$

التمرين 01 ص102:
في كل حالة من الحالات التالية عيّن مجموعة تعريف الدّالة f للمتغير الحقيقي x:
1) $f(x)=e^{-x}$؛ 2) $f(x)=e^{x^2+x}$؛
3) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$؛ 4) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$؛
5) $f(x)=\frac{1}{xe^x}$؛ 6) $f(x)=e^x-e^{-x}$.

● **حل التمرين 01 ص102**

مجموعة التعريف:
1) $\mathbb{R}$، 2) $\mathbb{R}$، 3) $\mathbb{R}^*$، 4) $\mathbb{R}_+$، 5) $\mathbb{R}^*$، 6) $\mathbb{R}$.

التمرين 02 ص102:
بسط العبارات التالية:
1) $\left(e^x\right)^3\times e^{-5x}$، 2) $\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}}$، 3) $\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$.

● **حل التمرين 02 ص102**

تبسيط العبارات:
1) $(e^x)^3\times e^{-5x}=e^{3x}\times e^{-5x}=e^{3x-5x}=e^{-2x}$.
2) $\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}}=e^{(2x+3)-(-2x)}=e^{4x+3}$.
3) $\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}=\frac{e^x}{e^{2x}}+\frac{e^{-x}}{e^{2x}}=\frac{1}{e^x}+e^{(-x)-(2x)}=e^{-x}+e^{-3x}$.

التمرين 03 ص102:
بيّن من أجل كل عدد حقيقي x ما يلي:
1) $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ 2) $e^{-x}-e^{-2x}=\frac{e^x-1}{e^{2x}}$
3) $(e^x+e^{-x})^2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}$ 4) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

● **حل التمرين 03 ص102**

1) $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^{2x}}}}{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^{2x}}}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
2) $e^{-x}-e^{-2x}=\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^x-1}{e^{2x}}$.
3) $(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}+2$.
4) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^x}}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

❷ دراسة الدّالة الأسية:

① اتجاه تغيّر الدّالة الأسية:

خواص:
❶ من أجل كل **عدد حقيقي x**، $e^x>0$.
❷ الدّالة الأسية **متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$.

البرهان:
❶ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، لدينا: $e^x=e^{2\left(\frac{x}{2}\right)}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$.

بما أنّ: $e^x \neq 0$ فإنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x > 0$.

❷ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(e^x)' = e^x$

وكون $e^x > 0$ فإنّ: $(e^x)' > 0$

ومنه: الدّالة الأسية **متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$.

نتائج:

❑ من أجل كل **عددين حقيقيين** a و b لدينا:

$a < b$ **يعني** $e^a < e^b$

$a = b$ **يعني** $e^a = e^b$

$a > b$ **يعني** $e^a > e^b$

❑ من أجل كل **عدد حقيقي** x لدينا:

$x < 0$ **يعني** $0 < e^x < 1$

$x > 0$ **يعني** $e^x > 1$

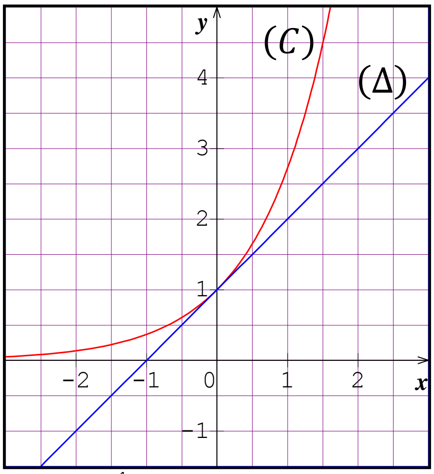
② النهايات:

خواص:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$.

③ جدول التغيّرات –التمثيل البياني:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
e^x	0^+ ↗	1	↗ $+\infty$



⌫ المنحنى (C) المُمثل للدّالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.

⌫ لدينا: $\exp'(0) = 1$ و $e^0 = 1$، إذن: يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً $(\Delta): y = x + 1$.

⌫ من تعريف العدد المشتق لدينا:

$$\lim_{x\to0}\frac{\exp(0+x)-\exp(0)}{x} = \exp'(0)$$

إذن: ❸ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$.

نتيجة:

الدّالة $x \longmapsto x+1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \longmapsto e^x$ بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x \simeq x + 1$.

طريقة 01.

المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ **تعني** $u(x) = v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$ **تعني** $u(x) \geq v(x)$.

طريقة 02.

لحل معادلة من الشكل $ae^{2x} + be^x + c = 0$ مع $a \neq 0$

نضع $\boxed{X = e^x}$.

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$، ثمّ نستنتج قيم x في حالة وجودها.

التمرين 05 ص102:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{2x} = 1$، 2) $e^{-5x} = e$، 3) $e^x = e^{-2x}$.

● **حل التمرين 05 ص102**

1) $e^{2x} = 1$ تُكافئ: $e^{2x} = e^0$

أي: $2x = 0$

ومنه: $x = 0$، إذن: $\boxed{S_1 = \{0\}}$.

2) $e^{-5x} = e$ تُكافئ: $e^{-5x} = e^1$

أي: $-5x = 1$

ومنه: $x = -\frac{1}{5}$، إذن: $\boxed{S_2 = \left\{-\frac{1}{5}\right\}}$.

3) $e^x = e^{-2x}$ تُكافئ: $x = -2x$

أي: $3x = 0$

ومنه: $x = 0$، إذن: $\boxed{S_3 = \{0\}}$.

التمرين 07 ص102:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$، 2) $e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$

3) $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0$.

● **حل التمرين 07 ص102**

1) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$ تُكافئ: $x^2 = -3(x+1)$

أي: $x^2 + 3x + 3 = 0$

المعادلة $x^2 + 3x + 3 = 0$ مميزها $\Delta = -3 < 0$

ومنه: ليس لها حلول، إذن: $\boxed{S_1 = \{\ \ \}}$.

2) $e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$، لتكن D_2 مجموعة تعريفها.

تكون المعادلة (2) **معرّفة** إذا وفقط إذا كان $x \neq 0$ و $6 - x \neq 0$.

أي: $x \neq 0$ و $x \neq 6$.

إذن: $D_2 = \mathbb{R} - \{0; 6\}$.

$e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$ تُكافئ: $\frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x}$

ومنه: $x^2 + 4x = 6 - x$

وعليه: $x^2 + 5x - 6 = 0$،

المعادلة $x^2 + 5x - 6 = 0$ مميزها $\Delta = 49 > 0$

ومنه: لها حلين متمايزين هما 1 و (-6)،

إذن: $\boxed{S_2 = \{-6; 1\}}$.