الدالة اللوغارتمية النيبيرية

1- تعريف

رمزها $\ln$، معرفة على $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ وهي الدالة العكسية للدالة exp أي إذا كان $y = e^x$ فإن $x = \ln y$

2- نتائج

$\ln(e^x) = x$	$e^{\ln(x)} = x; (x > 0)$
$\ln(e) = 1$	$\ln(1) = 0$

3- خواص جبرية

الخاصية الأساسية $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
$\ln(a^n) = n\ln(a)$	$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

فيما يلي تنبيهات لتجنب الوقوع في أخطاء

$$\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a+b) \neq \ln(a) \times \ln(b)$$

$$\ln(a-b) \neq \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a-b) \neq \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

4- النهايات

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty$

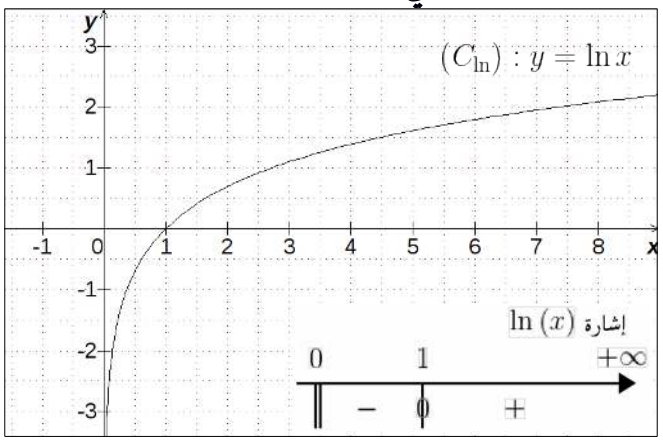
5- اتجاه التغير

مهما كان x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا: $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

ومنه الدالة $\ln$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ وجدول تغيراتها هو:

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$		$+$	
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$

6- التمثيل البياني



7- نهايات شهيرة

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$	$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

8- الدوال من الشكل $\ln \circ u$

أ- تعريف:

$$(\ln \circ u)(x) = \ln[u(x)] \; / x \in D_u \; ; \; u(x) > 0$$

ب- المشتقة:

مهما كان x من $D_{\ln \circ u}$ لدينا:

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغير على كل مجال من $D_{\ln \circ u}$

ج- الإشارة:

إذا كان...	فإن...
$u(x) > 1$	$\ln[u(x)] > 0$
$u(x) = 1$	$\ln[u(x)] = 0$
$0 < u(x) < 1$	$\ln[u(x)] < 0$

9- الدالة اللوغارتمية ذات الأساس a

أ- تعريف:

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \; / x, a \in \mathbb{R}_*^+$$

ب- حالة خاصة:

إذا كان $a = 10$ تسمى الدالة $\log_{10}$ دالة اللوغاريتم العشري ونكتب اختصارا $\log$ أي:

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10} \; / x \in \mathbb{R}_*^+$$

ج- ملاحظات:

* الدالة $\log_a$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية ذات الأساس a
* تبقى خواص الدالة $\ln$ صالحة بالنسبة للدالة $\log_a$