الدالة الأسية

1- تعريف

رمزها exp وهي الدالة الوحيدة المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ التي تحقق: $\begin{cases} exp' = exp \\ exp(0) = 1 \end{cases}$

نكتب $exp(x) = e^x$ حيث $e \approx 2,718$

لدينا $e^0 = 1$ و $e^1 = e$

2- خواص جبرية

$e^x > 0$	$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$	$(e^x)^n = e^{nx}\ (n \in \mathbb{N})$
$e^{x+y} = e^x . e^y$	$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	

3- النهايات

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

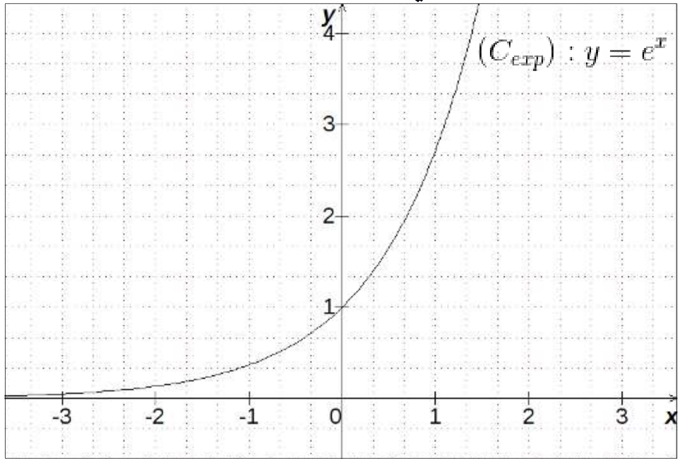
4- اتجاه التغير

مهما كان x من $\mathbb{R}$ لدينا: $exp'(x) = e^x > 0$

ومنه الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وجدول تغيراتها هو:

x	$-\infty$	$+\infty$
$exp'(x)$	$+$	
$exp(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

5- التمثيل البياني



6- نهايات شهيرة

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	

7- الدوال من الشكل $exp \circ u$

أ- تعريف:

$$(exp \circ u)(x) = e^{u(x)};\ x \in D_u$$

ب- المشتقة:

مهما كان x من D_u لدينا:

$$(exp \circ u)'(x) = u'(x) . e^{u(x)}$$

للدالتين u و $exp \circ u$ نفس اتجاه التغير على كل مجال من D_u

ج- الإشارة:

مهما كان x من D_u لدينا: $e^{u(x)} > 0$

8- الدالة الأسية ذات الأساس a

أ- تعريف:

$$a^x = e^{x \ln a} \ /x \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R}_+^*$$

ب- حالة خاصة:

$$10^x = e^{x \ln 10} \ /x \in \mathbb{R}$$

ج - ملاحظات:

* الدالة الأسية ذات الأساس a ليس لها رمز خاص بها

* تبقى خواص الدالة exp صالحة للدالة الأسية ذات الأساس a

9- حل بعض المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية	حلها
$y' = ay \ /a \in \mathbb{R}^*$	$y = Ce^{ax} \ /C \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b \ /a \in \mathbb{R}_+^*;\ b \in \mathbb{R}$	$y = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a} \ /C \in \mathbb{R}$
$y'' + ay' + by = 0 \ /a, b \in \mathbb{R}$	1- نرفقها بالمعادلة $g^2 + ag + b = 0$ 2- نحسب المميز $\Delta = a^2 - 4b$ 3- نحل حسب إحدى الحالات التالية: $\Delta = 0$ ، نحسب g_0 الحل مضاعف ومنه: $y = (C_1 x + C_2)e^{g_0 x} \ /C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $\Delta > 0$ ، نحسب $g_1 ; g_2$ الحلين المتمايزين ومنه: $y = C_1 e^{g_1 x} + C_2 e^{g_2 x} \ /C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $\Delta < 0$ ، نحسب أحد الحلين المركبين المترافقين $g_1 = \alpha + i\beta\ ;\ g_2 = \alpha - i\beta$ حيث ومنه: $y = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))e^{\alpha x} \ /C_1, C_2 \in \mathbb{R}$