الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

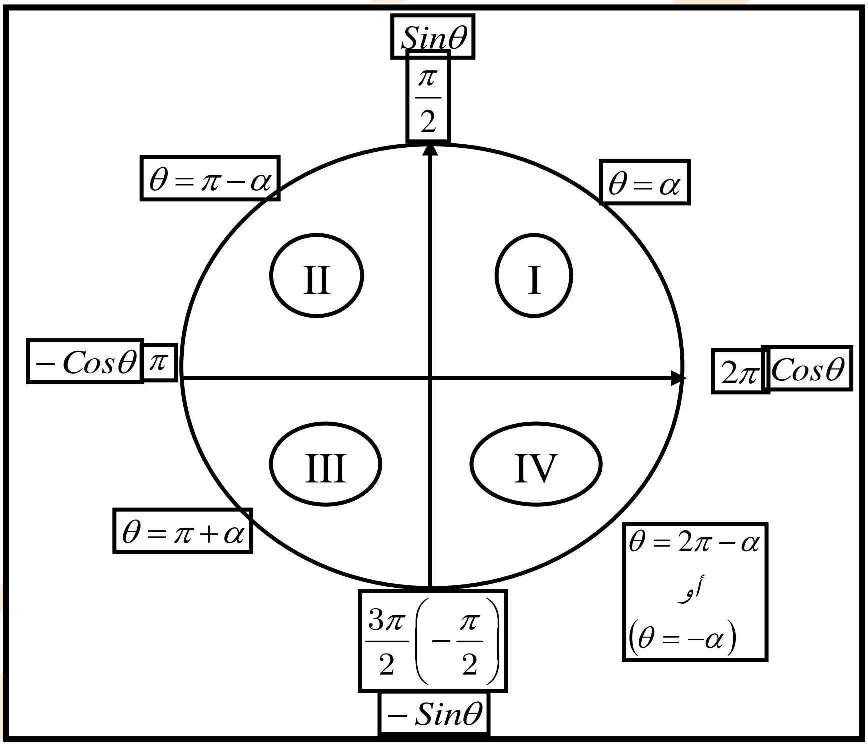
- وزارة التربية الوطنية –

سلسلة - حاقـة - في الرياضيات

ملخص شامل وتمارين متنوعة وهادفة في رحاب الأعداد المركبة

-موجه إلى جميع الشعب العلمية –

BAC 2019



الأستاذ : محمد حاقة

خريج المدرسة العليا للأساتذة القبة القديمة -الجزائر- ENS -

ثانوية عبد العزيز الشريف - الوادي -

مارس 2019

إنمـا الأعمـال العظيمـة هـــي أعمـال صغيـرة كتب لهـــا الاستمرار

أولا: دليل الحساب في مجموعة الأعداد المركبة

☒ كل عدد مركب z يكتب بصورة وحيدة على الشكل: $\boxed{z = x + iy}$

حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

☒ تسمى الكتابة: $\boxed{z = x + iy}$ **الشكل الجبري** للعدد المركب z

☒ يسمى x الجزء الحقيقي لـ z ونرمز له بـ: $\mathrm{Re}(z) = x$

☒ يسمى y الجزء التخيلي لـ z ونرمز له بـ: $\mathrm{Im}(z) = y$

☒ أ/ إذا كان : $\mathrm{Im}(z) = 0$ ، فان $z = x$ ونقول أن: z **حقيقي**

ب/ إذا كان: $\mathrm{Re}(z) = 0$ ، فان $z = y$ ونقول أن: z **تخيلي صرف (بحت)**

ج/ إذا كان: $z = 0$ ، فإن العدد 0 هو في آن واحد حقيقي و تخيلي صرف

ملحوظة: 0 هو العدد المركب الوحيد الذي يحقق هذه الميزة

☒ **مرافق عدد مركب:**

مرافق العدد المركب: $\boxed{z = x + iy}$ هو العدد المركب: $\boxed{\overline{z} = x - iy}$

(نغيّر إلاّ في إشارة الجزء التخيّلي)

☒ **خواص المرافق:**

1/ $\overline{\overline{z}} = z$ 2/ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ 3/ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

4/ $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ 5/ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ، $z_2 \neq 0$ 6/ $\overline{k.z} = k.\overline{z}$ ، $k \in \mathbb{R}$

7/ $\overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\overline{z}}$ ، $k \in \mathbb{R}$ و $z \neq 0$ 8/ $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$ ، $n \in \mathbb{Z}$

☒ **نتائج**: ليكن z عدد مركب حيث: $z = x + iy$

1/ $z + \overline{z} = 2x$ 2/ $z - \overline{z} = 2yi$ 3/ $z . \overline{z} = x^2 + y^2$

4/ z حقيقي يكافئ $\overline{z} = z$ 5/ z تخيلي صرف يكافئ $\overline{z} = -z$

☒ **طويلة وعمدة عدد مركب:**

من أجل كل عدد مركب غير معدوم $z = x + iy$ لدينا: r طويلة z و $\arg(z)$ عمدة z حيث:

1/ $\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

2/ $\boxed{\arg(z) = \theta = \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \theta = ... + 2k\pi}$

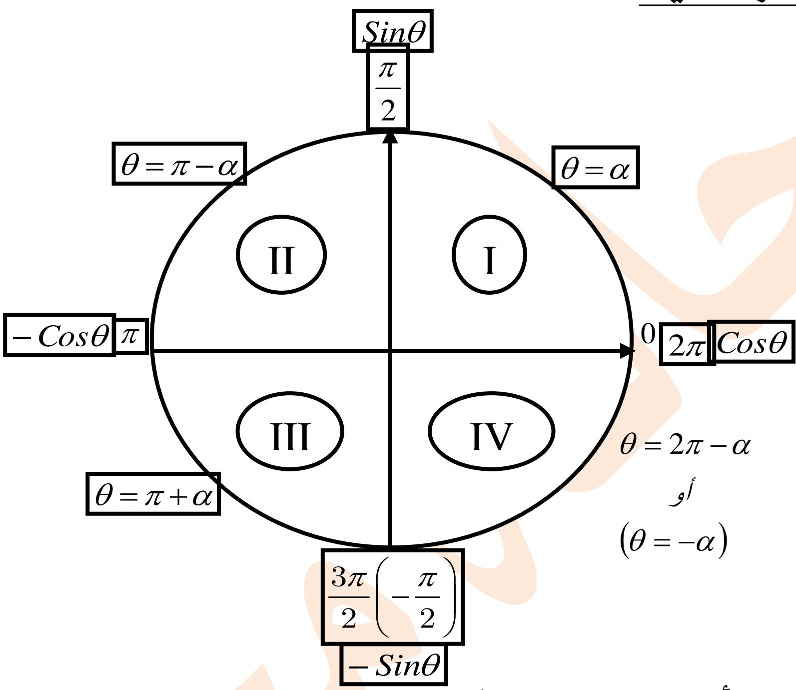
☒ الشكل الـمثلثي وَالآسي لِـعدد مركب z :

الشكل الأسي	الشكل الـمثلثي	الشكل الـجبري
$z = re^{i\theta}$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = x + iy$

ما يجب معرفته وعدم نسيانه للانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي والآسي

☒ البحث عن عمدة عدد مركب (الدائرة المثلثية + جدول الزوايا الشهيرة):

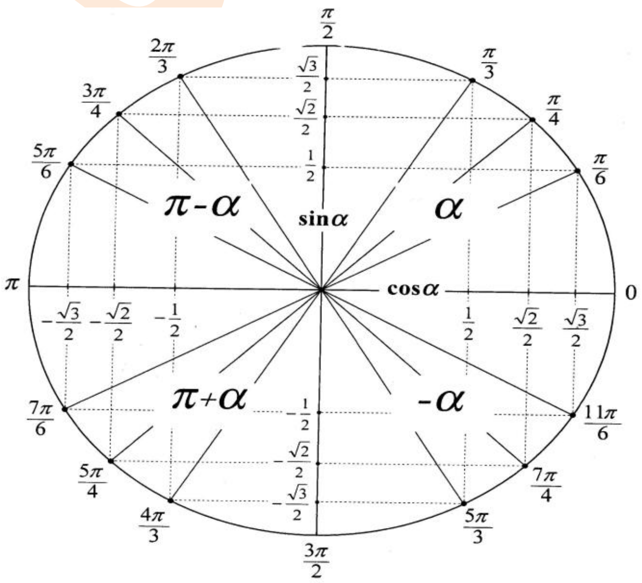
أولاً: ميزة كل ربع الدائرة المثلثية:



ثانياً: النسب المثلثية لأقياس الزوايا الشهيرة التي تستعملها لحساب العمدة:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	π
$Cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1
$Sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	0

☒ الدائــرة المثلثية



☒ علاقات مثلثية مهمة

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ | $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ | $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ | $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

☒ خواص العمدة:

1/ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ 2/ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

3/ $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$ 4/ $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

5/ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ 6/ $\arg(z^n) = n.\arg(z) + 2k\pi$ حيث n من $\mathbb{Z}$

☒ خواص الطويلة: z_1 و z_2 عددان مركبان غير معدومين

1/ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ 2/ $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$ 3/ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 4/ $|z_1^n| = |z_1|^n$

ملحوظة هامة جدا: $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$ وأيضا: $|z_1 - z_2| \neq |z_1| - |z_2|$

والصواب: $\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$ و $\boxed{|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|}$

☒ دستور موافر (MOIVER):

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{n\theta i} = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

العدد الفردي يكافئ الزاوية π يعني: $\pi = \pi \times$ عدد فردي

العدد الزوجي يكافئ الزاوية 0 يعني: $0 = \pi \times$ عدد زوجي

لدينا: $z^n = [r^n, n\theta] = r^n e^{in\theta}$

z^n حقيقي	z^n حقيقي موجب	z^n حقيقي سالب	z^n تخيلي صرف
$n\theta = k\pi$	$n\theta = (2k)\pi$	$n\theta = (2k+1)\pi$	$n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

☒ التحويل من الشكل الآسي إلى الشكل الجبري في حالات خاصة:

الشكل الآسي	الشكل الجبري
$e^{2\pi i}$	1
$e^{\pi i}$	-1
$e^{\frac{\pi}{2}i}$	i
$e^{\frac{3\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$	$-i$

ومنه

الشكل الآسي	الشكل الجبري
$ke^{2\pi i}$	k
$ke^{\pi i}$	$-k$
$ke^{\frac{\pi}{2}i}$	ki
$ke^{-\frac{\pi}{2}i}$	$-ki$

☒ **هـــام جـــداً**: $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1/ قيس الزاوية $\frac{\pi}{n}$ صورته من الربع الأول

2/ قيس الزاوية من الشكل $\frac{(n-1)\pi}{n}$ صورته تقع في الربع الثاني

3/ قيس الزاوية من الشكل $\frac{(n+1)\pi}{n}$ صورته تقع في الربع الثالث

4/ قيس الزاوية من الشكل $-\frac{\pi}{n}$ صورته تقع في الربع الرابع

☒ ملاحظات بخصوص بعض المعادلات في $\mathbb{C}$

1) المعادلات $az^2 + bz + c = 0$: a ، b و c أعداد حقيقية دوما وتقبل حلين مترافقين أي $(z_2 = \overline{z_1})$

2)المعادلات $z^2 = a + bi$: تقبل حلين متعاكسين دوما أي $(z_2 = -z_1)$ وهما الجذران التربيعيان للعدد $a + bi$

– طريقة الحل: نضع $z = x + iy$ ، ونشكل الجملة التالية

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \ldots.(1) \\ x^2 - y^2 = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ 2xy = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3) \end{cases}$$

3) المعادلات الأعلى من الدرجة الثانية حلها يعود لشكل المعادلة وصياغة التمرين

ثانيا: دليل هندسة الأعداد المركبة

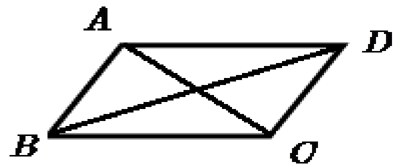
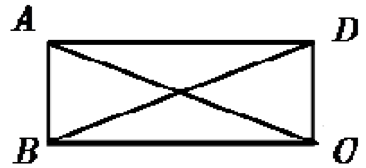
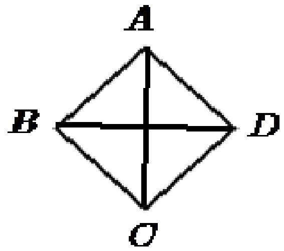
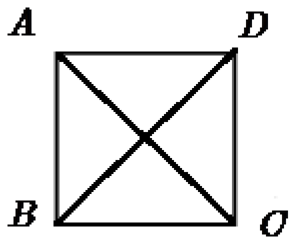
1ـ دليل التفسيرات الهندسية المختلفة للأعداد المركبة

التفسير الهندسي بالأعداد المركبة (الكتابة المركبة)	المفهوم الهندسي
$AB = \|Z_B - Z_A\|$	الطول (مسافة) AB
$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$	لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$
$Z_G = \dfrac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$	لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$
$Z_H = \dfrac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$	لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC
$Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$	لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$
$Z_C = \dfrac{Z_A + Z_B}{2} \Rightarrow Z_B = 2Z_C - Z_A$	لاحقة النقطة B نظيرة A بالنسبة إلى C
$Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = \overline{Z}_M = x - iy$	لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل
$Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = -x + iy$	لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور التراتيب
$Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = -x - iy$	لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمبدأ المعلم
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)$	قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
$\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} =$ عدداً حقيقياً	النقاط A, B, C على استقامة واحدة $((\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}))$
$\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} =$ عدداً تخيلياً صرفاً	الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ متعامدان $((\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}))$
$\left\|\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right\| = \dfrac{AB}{AC}$	طويلة النسبة $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$

ملاحظات مهمة

- معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث القائم، يكون الوتر قطرا لهذه الدائرة ومنه مركزها هو منتصف الوتر ونصف قطرها هو طول الوتر على 2
- معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع، مركز ثقل المثلث هو مركز الدائرة ونصف قطرها هو بعد المركز عن أحد رؤوس المثلث
- إذا كان $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ فان النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها r
- إذا كان $|Z_A - Z_\omega| = |Z_B - Z_\omega| = |Z_C - Z_\omega| = |Z_D - Z_\omega| = r$ فان النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ ω ونصف قطرها r

2ـ دليل التعرف على طبيعة رباعي الأضلاع

طرق الإثبات / نوع الرباعي	الطريقة (1) للإثبات	الطريقة (2) للإثبات
$ABCD$ متوازي أضلاع 	شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{DC}}$ معناه: $Z_B-Z_A=Z_C-Z_D$	القطران متناصفان $\dfrac{Z_A+Z_C}{2}=\dfrac{Z_B+Z_D}{2}$
$ABCD$ مستطيل 	شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متعامدان أي: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$	القطران متناصفان ومتساويان أي: $\dfrac{Z_A+Z_C}{2}=\dfrac{Z_B+Z_D}{2}$ $AC=BD$ معناه $\lvert Z_C-Z_A\rvert=\lvert Z_D-Z_B\rvert$
$ABCD$ معين 	شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متساويان أي: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $AB=AD$	القطران متناصفان ومتعامدان أي: $\dfrac{Z_A+Z_C}{2}=\dfrac{Z_B+Z_D}{2}$ $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ معناه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$
$ABCD$ مربع 	شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متساويان ومتعامدان أي: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ و $AB=AD$	القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي $\dfrac{Z_A+Z_C}{2}=\dfrac{Z_B+Z_D}{2}$ و $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ معناه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ و $AC=BD$ معناه $\lvert Z_C-Z_A\rvert=\lvert Z_D-Z_B\rvert$

3ـ التفسير الهندسي لطويلة وعمدة النسبة $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ واستنتاج طبيعة المثلث ABC

☒ إذا كان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\pm i$ فان $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\\-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$

التفسير الهندسي للطويلة: $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{\left|z_B-z_A\right|}{\left|z_C-z_A\right|}=\frac{AB}{AC}=1\Rightarrow\boxed{AB=AC}$ (1)

التفسير الهندسي للعمدة: $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\\-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}}$

نستنتج من (1) و(2) أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

☒ إذا كان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=ai$ حيث $a\in\mathbb{R}^*-\{-1,1\}$ فان $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=|a|\neq1$

و $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,a>0\\-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,a<0\end{cases}$

التفسير الهندسي للطويلة: $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{\left|z_B-z_A\right|}{\left|z_C-z_A\right|}=\frac{AB}{AC}=|a|\neq1\Rightarrow\boxed{AB\neq AC}$ (1)

التفسير الهندسي للعمدة:

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,a>0\\-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,a<0\end{cases}}$

نستنتج من (1) و(2) أن المثلث ABC قائم في A

☒ إذا كان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ فان $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+2k\pi\\-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$

التفسير الهندسي للطويلة: $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{\left|z_B-z_A\right|}{\left|z_C-z_A\right|}=\frac{AB}{AC}=1\Rightarrow\boxed{AB=AC}$ (1)

التفسير الهندسي للعمدة: $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+2k\pi\\-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}}$

نستنتج من (1) و(2) أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

☒ إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = [1;\theta]$ حيث: $\theta \neq \left\{\pm\frac{\pi}{2};\pm\frac{\pi}{3}\right\}$ فان $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$

و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \theta + 2k\pi$

التفسير الهندسي للطويلة: (1) $\boxed{AB = AC} \Leftarrow 1 = \frac{AB}{AC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$

التفسير الهندسي للعمدة: $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$ ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \theta + 2k\pi}$

نستنتج من (1) و(2) أن المثلث ABC متساوي الساقين

4ـ دليل مجموعات النقط M في المستوي المركب

A ، B و M ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z حيث $M \neq A$ و $M \neq B$

☒ $(E): MA = k > 0$ **مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها** $r = k$

☒ $(E): |z - z_A| = |z - z_B|$ **مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة** $[AB]$ **ملاحظة:** $|z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow MA = MB$

☒ $(E): \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ **مجموعة النقط M هي دائرة قطرها** $[AB]$

☒ $(E): \arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$ **مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة** A **باستثناء** A **بالترميز :** $(E): [AB) - \{A\}$

☒ $(E): \arg(z - z_A) = \theta + k\pi$ **مجموعة النقط M هي مستقيم باستثناء** A

بالترميز : $(E): (AB) - \{A\}$

☒ $\frac{z_B - z}{z_A - z}$ **عددا حقيقيا : معناه** $k\pi = \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right)$

مجموعة النقط M هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A بالترميز $(E): (AB) - \{A\}$

☒ $\frac{z_B - z}{z_A - z}$ **عددا حقيقيا موجبا: معناه** $2k\pi = \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right)$

مجموعة النقط M هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $]AB[$

بالترميز $(E): (AB) -]AB[$

☒ $\frac{z_B - z}{z_A - z}$ **عددا حقيقيا سالبا: معناه** $\pi + 2k\pi = \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right)$

مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $\left[AB\right]$ باستثناء النقطة A

بالترميز $(E):\left[AB\right]-\{A\}$

☒ $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف معناه:**

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\\-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}}$$

مجموعة النقط M هي دائرة قطرها $\left[AB\right]$ باستثناء النقطة A

☒ $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف (جزؤه التخيلي موجب) معناه:**

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$

مجموعة النقط M هي نصف دائرة قطرها $\left[AB\right]$ باستثناء النقطة A بحيث يكون MAB في الاتجاه المباشر

☒ $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف (جزؤه التخيلي سالب) معناه:**

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$

مجموعة النقط M هي نصف دائرة قطرها $\left[AB\right]$ باستثناء النقطة A بحيث يكون MAB في الاتجاه غير المباشر

☒ $z=z_A+ke^{i\theta}$ حيث k عدد حقيقي موجب تمام (معلوم) و θ يتغير (يمسح) في $\mathbb{R}$

لدينا $z=z_A+ke^{i\theta}\Leftarrow\left|z-z_A\right|=\left|ke^{i\theta}\right|$ ومنه $AM=k$

مجموعة النقط M هي دائرة لاحقة مركزها z_A ونصف قطرها k

☒ $z=z_A+ke^{i\theta}$ حيث k يتغير (يمسح) في $\mathbb{R}$ و θ عدد حقيقي معلوم

لدينا: $z=z_A+ke^{i\theta}\Leftarrow z-z_A=ke^{i\theta}$ ومنه $z_{\overline{AM}}=ke^{i\theta}$ أي $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\theta$

مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة z_A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\theta$

☒ $z=z_A+ke^{i\theta}$ حيث k يتغير (يمسح) في $\mathbb{R}_+$ و θ عدد حقيقي معلوم

لدينا: $z=z_A+ke^{i\theta}\Leftarrow z-z_A=ke^{i\theta}$ ومنه $z_{\overline{AM}}=ke^{i\theta}$ أي $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\theta$

مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة ذات اللاحقة z_A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\theta$

5ـ دليل المرجح في المستوي المركب

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C

☒ لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC هي: $z_H = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$

☒ لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ هي $\boxed{z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$

2°) كيفية تحويل العلاقة الشعاعية من الشكل: $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM}$

علمًا أن: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

بإدخال نقطة المرّجح G نجد : $\boxed{\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}}$

- **التعميم** $\overrightarrow{\text{المرّجح M}}\times$(مجموع المعاملات)

- **ملاحظة:** إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فلا يوجد مرّجح للنقط A ، B و C ويكون الشعاع: $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM}$ شعاعا ثابتًا مستقلا عن النقطة M ويتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة واستعمال علاقة شال **Chasles**

3°) كيفية تحويل العلاقة العددية من الشكل $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$

بإدخال نقطة المرّجح G نجد

$$\boxed{\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2}$$

- **التعميم:** اجعل مكان M نقطة المرّجح + $[\text{ المرّجح M }]^2 \times$(مجموع المعاملات)

6ـ دليل التحويلات النقطية

F : تحويل نقطي من المستوي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

$$F:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$M(z)\longrightarrow M'(z')$$

مع $z' = az + b$ ، a و b عددان مركبان و $a \neq 0$

1) كيفية التعرف على التحويل النقطي واستخراج عناصره المميزة

✍ إذا كان $a = 1$ فان F انسحاب لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}} = b$

✍ إذا كان $a \neq 1$ و $a \in \mathbb{R}$ فان F تحاكي نسبته a ولاحقة مركزه $z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$

✍ إذا كان $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$ فان F دوران زاويته $\theta = \arg(a)$ ولاحقة مركزه $z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$

✍ إذا كان $a \in \mathbb{C}$ و $|a| \neq 1$ فان F تشابه مباشر زاويته $\theta = \arg(a)$

ولاحقة مركزه $z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$ ونسبته $|a|$

2) في حالة الشكل المركب (الصيغة المبسطة) : $(z' - z_\omega) = a(z - z_\omega)$

✍ $(z' - z_\omega) = k(z - z_\omega)$ تحاكي نسبته k ولاحقة مركزه z_ω

✍ $(z' - z_\omega) = e^{i\theta}(z - z_\omega)$ دوران زاويته θ ولاحقة مركزه z_ω

✍ $(z' - z_\omega) = ke^{i\theta}(z - z_\omega)$ تشابه مباشر زاويته θ ولاحقة مركزه z_ω ونسبته k

3) أوجد التحويل F الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D

نحل الجملة : $\begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_D = az_C + b & (2) \end{cases}$ بضرب الثانية في (-1) والجمع نجد $a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$

نعوض بعد ذلك قيمة a في (1) أو (2) نجد b

4) أوجد التحويل F الذي يحول A إلى B ومركزه C

نحل الجملة : $\begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_C = az_C + b & (2) \end{cases}$ بضرب الثانية في (-1) والجمع نجد $a = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

نعوض بعد ذلك قيمة a في (1) أو (2) نجد b

5) استنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل

إذا كان: $a=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ فان $z_B-z_A=a\left(z_C-z_A\right)$ وهذا يعني أن B صورة C بالتحويل الذي مركزه A ، نعرف طبيعة التحويل من خلال a

6) مركب التحويلات

أ) مركب انسحابات هو انسحاب شعاعه مجموع أشعتها

ب) مركب تحاكيات لها نفس المركز هو تحاك له نفس المركز ونسبته جداء النسب

ج) مركب دورانات لها نفس المركز هو دوران له نفس المركز وزاويته مجموع الزوايا

د) مركب تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر له نفس المركز وزاويته مجموع الزوايا ونسبته جداء النسب

7) التقايسات

أ) الانسحاب والدوران تقايسان فصورة شكل هندسي بتقايس هو شكل هندسي يقايسه طولا ومساحة

ب) التحاكي والتشابه المباشر ليسا تقايسين:

– صورة دائرة بتحاك مركزها ω ونصف قطرها r هي دائرة مركزها ω' ونصف قطرها r'

حيث $\omega'=h(\omega)$ و $r'=\left|k\right|\times r$

– صورة دائرة بتشابه مباشر مركزها ω ونصف قطرها r هي دائرة مركزها ω' ونصف قطرها r'

حيث $\omega'=S(\omega)$ و $r'=k\times r$

– صورة مربع طول ضلعه a بتشابه مباشر أو تحاكي هو مربع طول ضلعه $k\times a$ أو $\left|k\right|\times a$ على الترتيب

– لتكن S مساحة شكل هندسي و S' مساحة صورته بتشابه مباشر أو تحاك أذن لدينا $S'=k^2\times S$

انتهى الملخص ،،، والله ولي التوفيق ،،،

المحطـــة الأولـــى إعداد الأستـاذ محمـد حاقة King

لكي تنجح يجب على رغبتك في النجاح أن تفوق خوفك من الفشل

التمرين الأول

☒ أعط مرافق لكل من الأعداد المركبة التالية:

$$z_1 = 1+4i \quad ، \quad z_2 = 3-i \quad ، \quad z_3 = \sqrt{2}\,i - 5 \quad ، \quad z_4 = -\frac{3}{2}i \quad ، \quad z_5 = 3$$

☒ أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري:

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i} \quad ، \quad z_2 = \frac{1+i}{3-\sqrt{2}\,i} \quad z_3 = \frac{4-6i}{3+2i} \quad ، \quad z_4 = \frac{5}{1+2i}$$

☒ دون إجراء الحساب برر أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي و $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف حيث:

$$z_1 = \frac{3-i}{2+5i} \quad ، \quad z_2 = \frac{3+i}{2-5i}$$

التمرين الثاني :

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

I. تعطى الحلول على الشكل الجبري

1) $2z-1+i = (3+i)z-2-i$ 2) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$ 3) $2z + i\bar{z} = -2-5i$

4) $z.\bar{z} + 2z - 4 - 2i = 0$ 5) $z.\bar{z} - 5\bar{z} = 5+15i$

II. 1) $z^2 + z + 1 = 0$ 2) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ 3) $z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0$

III. 1) $z^2 = -3+4i$ 2) $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

IV. 1) نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود: $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$

أ/ أحسب $P(1)$، ماذا تستنتج ؟

ب/ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $P(z) = (z-1)(z^2+az+b)$

ج/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة؛ $P(z) = 0$

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود: $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + (5+2i)z - 5i$

أ/ بيّن أنّ المعادلة؛ $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيليا صرفاً z_0 يطلب تعيينه

ب/ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $P(z) = (z-z_0)(z^2+az+b)$

ج/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة؛ $P(z) = 0$

التمرين الثالث

نرفق بكل عدد مركب z حيث $z \neq -2i$ العدد المركب L حيث؛ $L = \frac{z-2+i}{z+2i}$

نضع $z = x + iy$ و M صورته في المستوي المركب $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$

1) برهن أنّ : $R\acute{e}(L) = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+\left(y+2\right)^2}$ و $\mathrm{Im}(L) = \frac{-x+2y+4}{x^2+\left(y+2\right)^2}$

2) استنتج طبيعة المجموعتين E_1 و E_2 حيث:

أ/ E_1 هي مجموعة النقط M حيث: L حقيقي

ب/ E_2 هي مجموعة النقط M حيث: L تخيلي صرف

عمــــل منــزلــي

I. نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود: $P(z) = z^3 - (1+\sqrt{2}\,i)z^2 + (1+\sqrt{2}\,i)z - \sqrt{2}\,i$

أ/ بيّن أنّ المعادلة؛ $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيليا صرفاً z_0 يطلب تعيينه

ب/ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$

ج/حل في $\mathbb{C}$ المعادلة؛ $P(z) = 0$

II. ليكن L العدد المركب المعرف كما يلي : $L = \frac{z-2-3i}{z+i}$ حيث : $z = x + iy$ و $z \neq -i$

1) بيّن أن : $R\acute{e}(L) = \frac{x^2+y^2-2x-2y-3}{x^2+\left(y+1\right)^2}$ و $\mathrm{Im}(L) = \frac{-4x+2y+2}{x^2+\left(y+1\right)^2}$

2) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: L حقيقي

3) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: L تخيّلي صرف

المحطـــــة الثـــانية

إعداد الأستـــاذ محمـــد حاقة King

لكي تنجح يجب على رغبتك في النجاح أن تفوق خوفك من الفشل

التمرين الأول

☒ أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل المثلثي ثم الأسي

1) $z = 1 + i$ 2) $z = -2\sqrt{3} - 2i$ 3) $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ 4) $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}\,i$

5) $z = 2$ 6) $z = -3$ 7) $z = 2i$ 8) $z = -5i$

☒ **أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري**

1) $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ 2) $z = e^{\frac{5\pi}{4}i}$ 3) $z = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$ 4) $z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ 5) $z = 3e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

6) $z = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$ 7) $z = 5e^{2\pi i}$ 8) $z = 6e^{\pi i}$ 9) $z = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$ 10) $z = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$

التمرين الثاني :

نعتبر العددين المركبين : $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$

1) أحسب طويلة وعمدة الأعداد المركبة التالية: z_1 ، z_2 ، $\bar{z}_1$ ، $\frac{1}{z_2}$ ، $L = \frac{z_2}{z_1}$ ، $Z = z_1 \times z_2$

2) أحسب : $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{1440} + \left(\frac{z_2}{4}\right)^{2019}$

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{8n} + \left(\frac{z_2}{4}\right)^{3n} = 2$

4) أكتب Z و L على الشكل الجبري ، ثم استنتج القيم المضبوطة لكل من :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ ، } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ و } \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

5) أ/ برهن أن من أجل كل عدد مركب غير معدوم z : إذا كان $|z| = 1$ فان : $\bar{z} = \frac{1}{z}$

ب/ نضع : $\alpha = \frac{z_1}{\sqrt{2}}$ و $\beta = \frac{z_2}{4}$ تحقق أن : $|\alpha| = |\beta| = 1$، ثم بيّن أن العدد المركب : $\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha.\beta}$ تخيلي صرف

التمرين الثالث :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط :

A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $z_A = -i$ ، $z_B = 2 + 3i$ ، $z_C = -2 + 5i$ و

$z_D = -4 + i$

1) عين طويلة وعمدة العدد المركب $Z = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$

2) استنتج طبيعة المثلث ABD

3) عين المعادلة الديكارتية للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABD

4) أكتب معادلة وسيطية (بدلالة الوسيط الحقيقي θ) للدائرة (Γ)

5) حدد طبيعة الرباعي $ABCD$ – **مع التعليل** –

6) عين لاحقة النقطة H مركز ثقل الرباعي $ABCD$

7) عيّن طبيعة المجموعات (E_1) ، (E_2) و (E_3) للنقط M ذات اللاحقة z من المستوي؛ التي تحقق:

$(E_3): |z+i| = |iz+3-2i|$ ، $(E_2): |z+i| = |z+4-i|$ ، $(E_1): \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 8$

8) عين لاحقة النقطة F نظيرة النقطة B بالنسبة للمبدأ O

9) عين لاحقة النقطة G نظيرة النقطة B بالنسبة لحامل محور الفواصل

10) عين لاحقة النقطة K نظيرة النقطة B بالنسبة لحامل محور التراتيب

11) عين لاحقة النقطة I نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة A

12) عين لاحقة النقطة N حتى يكون : $FGKN$ متوازي أضلاع

التمرين الرابع: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط : A ، B، C و D لواحقها على الترتيب: $z_A = -2i$ ، $z_B = -\sqrt{3}+i$ ، $z_C = \sqrt{3}+i$ و $z_D = \overline{z_C}$

1) بيّن أن النقط A ، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها r

2) نعتبر (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $\arg(z+2i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E_1)، عيّن حينئذ المجموعة (E_1)

3) عيّن طبيعة (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z ؛ التي تحقق: $(z-z_A)\overline{(z-z_A)} = z_D.\overline{z_D}$

مع تعيين العناصر المميزة

4) عيّن طبيعة (E_3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z ؛ التي تحقق: $|z-z_A|^2 + |z-z_D|^2 = 5$

مع تعيين العناصر المميزة

المحطة الثالثة — إعداد الأستاذ محمد حاقة King

لكي تنجح يجب على رغبتك في النجاح أن تفوق خوفك من الفشل

التمرين الأول

F : تحويل نقطي من المستوي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z'

تعرف على طبيعة التحويل F في كل حالة مما يلي ، مع ذكر عناصره المميزة

1) $z' = 3z-2+6i$ 2) $z' = -2iz-3-i$ 3) $z' = z+1-4i$

4) $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2$ 5) $z' = (1+i)z+3-2i$ 6) $z' = -iz+2+i$

التمرين الثاني

1) أكتب العبارة المركبة للانسحاب " T " الذي شعاعه $\vec{V}$ ذا اللاحقة : $z_{\vec{V}} = -2+i$

2) أكتب العبارة المركبة لتحاكي "h" الذي مركزه ω ذي اللاحقة : $z_\omega = \frac{\sqrt{2}}{3} - i$ ونسبته: -2

3) أكتب العبارة المركبة لدّوران "R" الذي زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، ومركزه ω ذي اللاحقة : $z_\omega = 2 - i$

4) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر "S"الذي زاويته $\frac{2\pi}{3}$ ونسبته 2 ومركزه ω ذا اللاحقة : $z_\omega = -i$

التمرين الثالث

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$ نعتبر النقط : A ، B ، C و D

لواحقها على الترتيب : $z_A = -i$ ، $z_B = 1 + i$ ، $z_C = 2 - i$ ، $z_D = 1 + 2i$

*/ عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر "S" الذي " يحوّل النقطة A إلى النقطة B"

و " يحوّل النقطة C إلى النقطة D "

التمرين الرابع: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط

A ، B ، C لواحقها على الترتيب : $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ ، $z_C = \sqrt{3} - i$

*/ عيّن العبارة المركبة للدّوران "R" الذي مركزه B " يحوّل النقطة C إلى النقطة A"

التمرين الخامس

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط : A ، B ، C

لواحقها على الترتيب : $z_A = -2 - 3i$ ، $z_B = -4 - 2i$ و $z_C = -3 - 5i$

1) أحسب العدد المركب : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي

"F" يطلب تعيينه ، مع ذكر عناصره المميزة

2) أكتب العبارة المركبة للتحويل النقطي "F"

3) عيّن لاحقة النقطة D ، صورة النقطة E بالتحويل " F " حيث ؛ $z_E = 1 + 3i$

التمرين السادس :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$ نعتبر النقط

A ، B ، D لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + \sqrt{3}\, i$ ، $z_B = 1 - \sqrt{3}\, i$ و $z_D = 4 + \sqrt{3}\, i$

1) بيّن أنّ : $\frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحويل نقطي

"F" يطلب تعيينه ، مع ذكر عناصره المميزة

2) أكتب العبارة المركبة للتحويل النقطي "F"

التمرين السابع

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقط : A ، C ، D لواحقها على الترتيب : $z_A=-4+i$ ، $z_C=-i$ ، $z_D=-6+2i$

1) أحسب العدد المركب : $\dfrac{z_D-z_C}{z_A-z_C}$ ، ثم استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي "F" يطلب تعيينه ، مع ذكر عناصره المميزة

2) أكتب العبارة المركبة للتحويل النقطي "F"

3) استنتج أن النقط A ، C ، D في استقامية.

ازرع جميلاً ولو في غير موضعه فلا يضيع جميل أينما زُرعا

،،، البصمة الجميلة تبقى وإنّ غاب صاحبها ،،،

المحطة الرابعة إعداد الأستاذ محمد حاقة King

مجموعات النقط في الأعداد المركبة

(كل الحالات وأفكار متنوعة ومتوقعة في البكالوريا)

التمرين الأول: في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=-\sqrt{3}-i$ و $z_D=1+i$

عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة مما يلي

1) $(E_1):|z-z_A|=2$ ، $(E_2):|z-z_A|=|z-z_B|$ ، $(E_3):|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ ، $(E_4):|iz+2|=|z_B|$

2) $(E_5):(z-z_D)(\overline{z-z_D})=3$ ، $(E_6):(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=z_C.\overline{z_C}$

3) $(E_7):z=-\sqrt{3}+i+4e^{i\theta}\ /\ \theta\in\mathbb{R}$ ، $(E_8):z=-\sqrt{3}+i+|z_B|e^{i\theta}\ /\ \theta\in[0;\pi[$

4) $(E_9):z=1+i+ke^{i\frac{3\pi}{4}}\ /\ k\in\mathbb{R}^+$ تحقق أن $A\in(E_8)$

" عيّن مجموعة النقط في حالة $k\in\mathbb{R}_+^*$ و $k\in\mathbb{R}$ "

5) أ/ $(E_{10}):\arg(z-2i)=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$ ، تحقق من أن $B\in(E_9)$

ب/ $(E_{11}):\arg(\overline{z}-z_C)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، تحقق من أن $C\in(E_{10})$

ج/ $(E_{12}):\arg(z-1-i)^2=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ، تحقق من أن $A\in(E_{11})$

د/ $(E_{13}):\arg(z-1-i)=\arg(z_D)-\arg(z_C)$

هـ/ $(E_{14}):\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، تحقق من أن $D\in(E_{13})$

و/ $(E_{15}):\arg(z^2+4)=\arg(z+2i)+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

6) $L=\frac{z_A-z}{z_B-z}$

" أ/ L حقيقي ب/ L حقيقي سالب تماما ج/ L حقيقي موجب د/ L تخيلي صرف هـ/ $|L|=1$ "

7) $(E_{15}):\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، $(E_{16}):\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=k\pi$

8) عيّن لاحقة النقطتين G و I حيث G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$

أ/ $(E_{17}):\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=1$ ، $(E_{18}):\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

ب/ $(E_{19}):\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

ج/ $(E_{20}):2|z-z_A|^2+|z-z_B|^2-|z-z_C|^2=30$

المحطـــة الخامسة إعداد الأســتاذ محمـد حاقة King

التمرين الأول:

I/ عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث؛ $\begin{cases}2z_1-z_2=-3\\2z_1+z_2=-3+2\sqrt{3}i\end{cases}$

II/ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و I لواحقها على الترتيب $z_A=2$ ، $z_B=1-i$ ، $z_I=i$ ، نضع من أجل كل عدد مركب z

حيث $z\neq 2$: $z'=\frac{iz-i-1}{z-2}$ حيث M هي صورة z و M' صورة z'

1) تحقق من أن : $z'=\frac{i(z-1+i)}{z-2}$

2) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z-z_A|=|z-z_B|$

3)بين انه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة$[AB]$ فان M' تنتمي إلى دائرة (C)يطلب تحديد عناصرها المميزة

4) تحقق من أن: $z'-i=\dfrac{-1+i}{z-2}$ واستنتج أن : $IM'\times AM=\sqrt{2}$

التمرين الثاني:

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-2)\left(z^2+2z+4\right)=0$

II) في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=-1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=2$

1)أ/ أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الآسي ثم علم النقط A ، B و C

ب/ بيّن أن؛ $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ج/ عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

2) أ/ عين مجموعة النقط (Γ) من المستوي التي تحقق $2\left(z+\bar{z}\right)+z.\bar{z}=0$

ب/ تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ)

3)ليكن R الدوران الذي مركزه A وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$

أ/ عين صورة النقطة B بالدوران R

ب/ عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

ج/ عيّن (Γ') صورة المجموعة (Γ) بالدوران R

التمرين الثالث:

$I-$ 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}\,z+4=0$

2) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $\left(z-2i\right)^2-2\sqrt{3}\left(z-2i\right)+4=0$

$II-$ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $z_A=-2i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\sqrt{3}+i$ و$z_D=\sqrt{3}-i$ (وحدة الطول $1\,cm$)

1) أكتب على الشكل الآسي z_B ، ثم استنتج الشكل الآسي لـ z_D

2)اكتب على الشكل الجبري العدد المركب : $Z=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

ـما طبيعة المثلث ABC ، ثم تحقق أنّ مساحته $a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}cm^2$

3)أ/ عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول النقطة D إلى النقطة C

ب/ عين $z_{C'}$ و $z_{B'}$ لاحقتا النقطتين C' و B' صورتي C و B على الترتيب بالتشابه المباشر S

ج/ بين أنّ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر S تساوي: $a'=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}cm^2$

4)عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $|z|=\left|iz+1-\sqrt{3}i\right|$

5)نعتبر (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $\arg(z+2i)^2=\arg(z_C)-\arg(z_D)$

☒ تحقق أنّ النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E)

☒ عين المجموعة (E)

6)عين (E_1) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $\arg(z+2i)=\arg(z+\sqrt{3}-i)$

عين (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $\left(z-z_A\right)\left(\overline{z}-\overline{z_A}\right)=4$

التمرين الرابع:

1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+5=0$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و I

لواحقها على الترتيب $z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ و $z_I=1-2i$

أ/ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب: $Z=\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث IAB

ب/ بيّن أنّ A هي صورة B بالدوران R الذي مركزه I ، يطلب تعيين زاويته

ج/ احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2

3) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

4) عيّن المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق: $(z-z_D)\overline{(z-z_D)}=3$

نضع: $z_E=\sqrt{3}+i$ ، عيّن المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ التي

تحقق: $\arg\left(z-\sqrt{3}-i\right)^2=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

التمرين الخامس:

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث؛ $P(z)=z^3-8z^2+25z-26$

أ/ تحقق أنّ 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$

ب/ جد العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z؛ $P(z)=(z-2)(z^2+\alpha z+\beta)$

ج/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $P(z)=0$

2) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=-1+6i$

أ/ احسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع

ب/ احسب z_F لاحقة النقطة F صورة النقطة C بالتشابه المباشر الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ج/ اكتب الشكل الجبري ثم الآسي للعدد المركب: $Z=\dfrac{z_C-z_F}{z_B-z_F}$

د/ ما طبيعة الرباعي $BFCD$ ؟ مع التبرير

3) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و O لاحقتها z ولتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $\dfrac{z-z_B}{z}$ عددا تخيليا صرفا. أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z-z_B}{z}$ ، ثم عيّن مجموعة النقط (E)

4)عيّن المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق: $\left|z-z_B\right|^2+\left|z-z_C\right|^2=18$

<u>التمرين السادس:</u>

I- $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث؛ $P(z)=z^3-(4+2i)z^2+8(1+i)z-16i$

1) بيّن أنّ المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلاً تخيّليا صرفًا z_0 يطلب تعيينه

نضع : $f(z)=z^2+\alpha z+\beta$ جد العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-2i)\times f(z)$

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $P(z)=0$

II- المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=2+2i$ و $z_C=\overline{z_B}$

1)أكتب : z_A ، z_B و z_C على الشكل الآسي

2)بيّن أنّ العدد $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2018}+\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1962}$ تخيلي صرف

3)أ/ أحسب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC وأحسب مساحته

ب/ استنتج أنّ C هي صورة A بالتشابه المباشر S الذي مركزه B، يطلب تعيين نسبته وزاويته

4)أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S

5)عيّن لاحقة النقطة C' صورة النقطة C ،ثم استنتج صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر S وأحسب مساحته

6)عيّن المجموعة (Γ)للنقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق: $|f(z)-4|=3$

التمرين السابع:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ تعطى النقط A، B، C و Dالتي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=2$ ، $z_C=-1+i$ ، $z_D=1-3i$

1) أثبت أنّ D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,5);(B,3);(C,-6)\}$

2)عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z+2|=|z+1-i|$

3)أكتب العدد المركب $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الآسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث BCD

4)أ/ أكتب العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الآسي.

ب/ استنتج أن D هي صورة C بتحويل نقطي f يُطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة

ج/ استنتج $|z_A - z_{B'}|$ حيث B'هي صورة B بالتحويل f ثم أحسب عندئذ مساحة المثلث ABB'

5)لتكن النقطة ω ذات اللاحقة $z_\omega=-\frac{1}{2}$ عيّن العبارة المركبة للتحاكي hالذي مركزه ω ويحول D إلى C

التمرين الثامن:

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $\bar{z}-3iz-3+6i=0$ ، $\bar{z}$ هو مرافق z

2) نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $4-2i$. عيّن الشكل الجبري للاحقة النقطة B بحيث يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع وذا اتجاه مباشر

3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة $2i$

أ/ مثل المجموعة (E_1) للنقط $M(z)$ و $z \neq 2i$ بحيث: $\arg\left(z-2i\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ب/ مثل المجموعة (E_2) للنقط $M(z)$ بحيث: $z=2i+2e^{i\theta}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

4) نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{z-1}{z+2}$

عيّن مجموعة النقط M بحيث يكون: $\left|z'\right|=1$

التمرين التاسع:

1/ أ/ أكتب على الشكل الآسي العدد: $a=-2+2\sqrt{3}\,i$

ب/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$

2/ ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، A، B وC النقط لواحقها على الترتيب $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}\,i$ و $z_C=1+\sqrt{3}\,i$

أ/ أحسب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث ABC

3/ لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $\arg\left(\overline{z}+2\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

أ/ تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (E)

ب/ عيّن المجموعة (E)

التمرين العاشر:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A وB لاحقتاهما:

$z_A=\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(-1+\sqrt{3}\right)i$ و $z_B=\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i$

1) أ/ اكتب العدد المركب $z_C=z_A+z_B$ على الشكل الآسي

ب/ بيّن أن العدد z_C^{1438} تخيلي صرف

2) أ/ تحقق أن : $z_A^2=4\left(\sqrt{3}+i\right)$ و $z_B=i\overline{z_A}$

ب/ اكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z_A^2

ج/ بيّن أن: $|z_A| = |z_B|$ و $\arg(z_A) + \arg(z_B) = \frac{\pi}{2}$ ، استنتج الشكل المثلثي لكل من z_A و z_B

3) عيّن قيس للزاوية $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

4) جد مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $|z - z_A| = |z - z_B|$

التمرين الحادي عشر:

α عدد مركب حيث: $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}\, i$

1)أ/ أحسب α^2 و α^4 ثم أكتب العدد α^4 على الشكل الآسي

ب/ استنتج طويلة وعمدة العدد α

2)استنتج القيم المضبوطة لكل من: $\cos\frac{13\pi}{8}$ ، $\sin\frac{13\pi}{8}$ و $\tan\frac{13\pi}{8}$

3)المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$

-عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|\alpha z| = 6$

التمرين الثاني عشر:

1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - 2\left(1-\sqrt{3}\right)z + 8 = 0$

لاحظ أنّ: $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$، A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = \left(1-\sqrt{3}\right) + \left(1+\sqrt{3}\right)i$ و $z_B = \overline{z_A}$

أ/ بيّن أن: $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{12}i}$ ، ثم استنتج عمدة للعدد المركب z_A و z_B

ب/ استنتج القيم المضبوطة لكل من: $\cos\frac{7\pi}{12}$ ، $\sin\frac{7\pi}{12}$

التمرين الثالث عشر:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: $z^2 + 4z + 13 = 0$

1) تحقق أنّ العدد $-2-3i$ حل للمعادلة (E) ثم جد الحل الأخر

2) A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب S التشابه المباشر الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{2}$ ومركزه A ويحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$

أ/ بيّن أنّ : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$ ب/ احسب z_C لاحقة النقطة C، علما أنّ C صورة B بالتشابه S

ج/ استنتج طبيعة التحويل SoS وعناصره المميزة

3) لتكن النقطة D حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

أ/ بيّن أن D هي مرجح النقطتين A، B المرفقين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما

ب/ احسب z_D لاحقة النقطة D ج/ بين أن : $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

التمرين الرابع عشر:

I- يعطى في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)=z^3+4z^2+8z+8$

أ/ أحسب $P(-2)$؛ ماذا تستنتج ؟

ب/ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $P(z)=(z-z_0)(z^2+az+b)$

ثم استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z)=0$

II- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=-1+\sqrt{3}\,i$، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-z_0$

1/ بيّن أن النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

2/ أ/ أحسب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

ب/ استنتج أن B هي صورة C بتحويل نقطي F يطلب تعيينه وذكر عناصره المميزة

ج/ أكتب العبارة المركبة للتحويل النقطي F

3/ أ/ جد لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$

ب/ ما طبيعة الرباعي $ADBC$ معللا جوابك؟

4/ لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $\arg\left(z+2\right)^2=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

أ/ تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (E) ب/ عيّن المجموعة (E)

5/ لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z

أ/عيّن (Δ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z_B - z}{z_C - z_A}$ حقيقي

ب/عيّن (Δ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z_B - z}{z_C - z_A}$ تخيلي صرف

ملاحظة: يطلب إيجاد معادلة ديكارتية لكل من (Δ_1) و (Δ_2)

ج/عيّن (Δ_3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z_B - z}{z_C - z_A}$ حقيقي موجب

التمرين الخامس عشر:

1/ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \quad \text{حيث} \quad (z \neq 2-3i)$$

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، A، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $z_A = 1+\sqrt{5}\,i$، $z_B = 1-\sqrt{5}\,i$

تحقق أنّ A، B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها

3/ نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ النقط C، D و E لواحقها على الترتيب $z_C = -2i$، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$

أ/ عبر عن المسافة OM' بدلالة CM و DM

ب/ استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فانّ M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها - تحقق أنّ النقطة E تنتمي إلى (γ)

التمرين السادس عشر:

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 10z + 29 = 0$

2/ في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A = 3$، $z_B = 5-2i$ و $z_C = \overline{z_B}$

أ/ أحسب طويلة وعمدة العدد L حيث: $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، استنتج طبيعة المثلث ABC

ب/ عيّن z_H لاحقة النقطة H مركز الدائرة (δ) المحيطة بالمثلث ABC

ج/ أكتب معادلة وسيطية للدائرة (δ) (بدلالة θ و r)

د/ أكتب العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه ω ذات اللاحقة $2-i$ وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$

3/ لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون $\dfrac{z-3}{z-5+2i}$ عددا حقيقيا سالبا تماما حيث $z \neq z_A$ و $z \neq z_B$

أ/ تحقق أن النقطة D ذات اللاحقة $4-i$ تنتمي إلى المجموعة (E)

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z-3}{z-5+2i}$ ، ثم عيّن المجموعة (E)

التمرين السابع عشر:

1/ $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث؛ $P(z)=z^3-8z^2+25z-26$

أ/ تحقق أنّ 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$

ب/ جد العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z

$$P(z)=(z-2)(z^2+\alpha z+\beta)$$

ج/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $P(z)=0$

2/ المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=-1+6i$

أ/ احسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع

ب/ احسب z_F لاحقة النقطة F صورة النقطة C بالتشابه المباشر الذي مركزه B وزاويته $-\dfrac{\pi}{4}$ ونسبته $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ج/ اكتب الشكل الجبري ثم الآسي للعدد المركب: $Z=\dfrac{z_C-z_F}{z_B-z_F}$

د/ ما طبيعة الرباعي $BFCD$ ؟ مع التبرير

3/ لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و O لاحقتها z ولتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $\dfrac{z-z_B}{z}$ عددا تخيليا صرفا. أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z-z_B}{z}$ ، ثم عيّن مجموعة النقط (E)

4/ عيّن المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق: $|z-z_B|^2+|z-z_C|^2=18$

التمرين الثامن عشر:

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2-2\sqrt{2}\,z+3=0$

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ،D و G لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{2}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2\sqrt{2}$ ، $z_D=-\sqrt{2}+3i$ و $z_G=2i$

أ/ أثبت أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى دائرة مركزها C يطلب تعيين نصف قطرها

ب/ تحقق أن $z_C=z_A+z_B$ و $|z_A|=|z_B|$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $OACB$ واحسب مساحته

ج/ بين أنّ النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(C,1);(D,2)\}$

3/ عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق: $\sqrt{(iz+2)\overline{(iz+2)}}=6$

4/ S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي

النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=3e^{\frac{\pi}{2}i}z+4+2i$

☒ عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S، ثم أوجد صورة (Γ) بالتحويل S

5/ عين (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $|z-z_C|^2+2|z-z_D|^2=24$

التمرين التاسع عشر:

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}\,z+4=0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الآسي

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث : $z'=e^{\frac{2\pi}{3}i}z$

أ/ ما طبيعة التحويل النقطي T

ب/ لتكن A النقطة ذات اللاحقة $z_A=\sqrt{3}-i$ ،عيّن اللاحقتين z_B و z_C للنقطتين B و C على الترتيب حيث : $T(A)=B$ و $T(B)=C$

ج/ بيّن أن $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

د/ عيّن مركز ثقل المثلث ABC ثم اكتب المعادلة الديكارتية للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

هـ/ بيّن أن المثلث ABC صامد بالتحويل T ، ثم استنتج صورة الدائرة (C) بالتحويل النقطي T

3/ لتكن المجموعة Γ_M للنقط M من المستوي حيث $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=K\ .....(E)$ و $K\in\mathbb{R}$

أ/ بيّن أن العلاقة (E) تكافئ $OM^2=\dfrac{K-12}{3}$

ب/ ناقش حسب قيم العدد الحقيقي K طبيعة مجموعة النقط Γ_M محددًا عناصرها

ج/ عيّن قيمة العدد الحقيقي K حتى تكون الدائرة (C) عنصر من المجموعة Γ_M

التمرين العشرون:

I– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $(iz-2+i)(z^2-2i)=0$

II– المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، A ، B و C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $z_A=1-i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=\sqrt{3}\left(1+i\right)$

1) أكتب على الشكل الآسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و z_C

2) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الآسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

3) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معين، ثم احسب مساحته

4) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=(-1+i)z+1-3i$

أ/ حدد طبيعة التحويل T وعناصره المميزة ب/ استنتج طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة

5) (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق: $z=-1+i+\sqrt{2}\,e^{i\theta}$

أ/ تحقق أنّ المبدأ O ينتمي إلى (γ) ب/ عين ثم أنشئ مجموعة النقط (γ) لما θ يتغير في $\mathbb{R}$