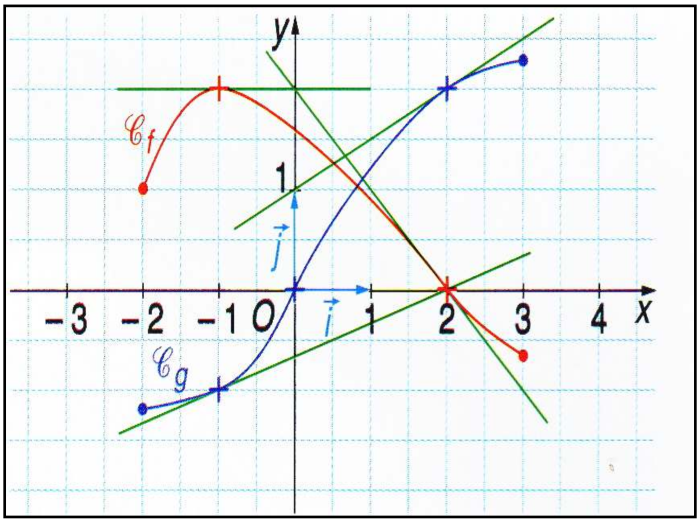
دروس: حول الاشتقاقية والاستمرارية// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 03 ع؛ ت.

❶ الاشتقاقية:

① مناقشة النشاط 01 ص 40:



1.حساب الأعداد المشتقة:

نعلم أنّ العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي يُمثل معامل توجيه المماس عند هذا العدد.

بصفة عامة:

$f'(x_0)$ هو **معامل توجيه المماس للمنحنى** (C_f) عند ذات **الفاصلة** x_0، ولحسابه **نختار نقطتين من المماس** مثلا: $A(x_A;y_A)$ وَ $B(x_B;y_B)$ نجد: $\boxed{f'(x_0)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}}$.

- $f'(-1)=0$.
- $g'(-1)=\frac{0+1}{2+1}=\frac{1}{3}$.
- $f'(2)=\frac{0-2}{2-0}=-1$.
- $g'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$.
- $(f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=\frac{1}{3}$.
- $(f.g)'(2)=f'(2).g(2)+g'(2).f(2)=\frac{2}{3}$.
- $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)=\frac{-3f'(-1)}{[f(-1)]^2}=0$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2).g(2)-g'(2).f(2)}{[g(2)]^2}=-\frac{1}{2}$.

2.حساب $h'(0)$ وَ $h'\left(\frac{3}{2}\right)$، حيث من أجل $x\in[0;2]$

لدينا $h(x)=f(2x-1)$:

لدينا: $\boxed{h'(x)=2f'(2x-1)}$.

- $h'(0)=2f'(-1)=0$.
- $h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'(2)=-2$.

② العدد المشتق –الدّالة المشتقة:

تعريف:

f دالّة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

x_0 وَ x_0+h عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.

▪ **f تقبل الاشتقاق عند x_0** إذا قبلت النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية **محدودة** لما يؤول h إلى 0.

تسمى هذه النهاية **العدد المشتق للدّالة f عند x_0**، ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

ملاحظات:

▪ **العدد المشتق:** $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

بوضع $x=x_0+h$ **نجد:** $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

▪ إذا قبلت **f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I** نقول أنّها **تقبل الاشتقاق على I وَدالّتها المشتقة** هي $f':x\mapsto f'(x)$.

مثال: ● حل التمرين 01 ص58)

f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

أ.التحقق أنّه من أجل كل h غير معدوم يكون:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}:$$

لدينا:
$$\begin{cases} f(1+h)=\sqrt{(1+h)^2+3}=\sqrt{h^2+2h+4} \\ f(1)=\sqrt{1^2+3}=\sqrt{4}=2 \end{cases}$$

ومنه:
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{h^2+2h+4}-2\right)\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}{h\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}^2-2^2}{h\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}$$
$$=\frac{h^2+2h+4-4}{h\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}$$
$$=\frac{h(h+2)}{h\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

بـاستنتاج أنّ الدّالة f تقبل الاشتقاق عند 1:

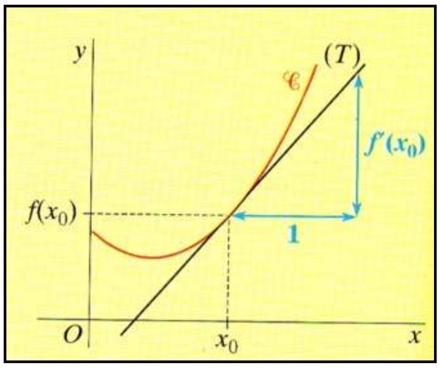
لدينا: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=f'(1)$

إذن: f قابلة للاشتقاق عند 1، وعددها المشتق عند 1 هو: $\boxed{f'(1)=\frac{1}{2}}$.

③ التفسير البياني (مماس منحنى دالّة):

تعريف وخاصية:

إذا قبلت الدالّة f **الاشتقاق عند x_0**، فإنّ **منحناها البياني يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا** معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



مثال 01: (● حل التمرين 04 ص58)

لدينا: f معرّفة على $\mathbb{R}$ وَ**قابلة للاشتقاق عند 0**، أي: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=l\in\mathbb{R}$؛ حيث $l=f'(0)$.

1) **تحديد** $f(0)$ **وَ** $f'(0)$:

المستقيم (T) ذو المعادلة $y=2-3x$، هو مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(0;2)$ معناه: $\begin{cases} y=-3x+2 \\ y=f'(0)(x-0)+f(0) \end{cases}$،

ومنه: $\begin{cases} y=-3x+2 \\ y=f'(0)\times x+f(0) \end{cases}$

بالمطابقة نجد: $\boxed{\begin{cases} f'(0)=-3 \\ f(0)=2 \end{cases}}$.

2) **تفسير هندسيا العدد** $\frac{f(x)-2}{x}$ **من أجل** $x\neq0$:

نلاحظ أنّ: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-2}{x}$، إذن: $\frac{f(x)-2}{x}$ هي **نسبة تزايد الدالّة f** بين العددين x وَ 0.

3) **تبرير وجود** $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}$:

لدينا: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-3$

لأنّ: f **قابلة للاشتقاق عند 0.**

مثال 02:

(● دراسة قابلية اشتقاق دالّة عند قيمة من اليسار ومن اليمين)

f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=|x^2-4|$.

لدينا: $f(x)=|x^2-4|$

$=\begin{cases} x^2-4\,;x^2-4\geq0 \\ -(x^2-4)\,;x^2-4\leq0 \end{cases}$

$=\begin{cases} x^2-4\,;x\in\,]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[\\ -x^2+4\,;x\in[-2;2] \end{cases}$

⌫ **لندرس قابلية اشتقاق الدالّة f عند** (-1):

بمأنّ: $-1\in[-2;2]$، فإنّ: $f(x)=-x^2+4$.

لدينا: $f(-1)=-(1)^2+4=3$

ومنه: $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+4-3}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+1}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(1-x)(1+x)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(1-x)=2=f'(-1)$

إذن: f **قابلة للاشتقاق** عند (-1)، وعددها المشتق عند (-1) هو: $\boxed{f'(-1)=2}$.

2) **التفسير الهندسي:**

(C_f) **يقبل مماساً** عند النقطة ذات الفاصلة (-1)،

معامل توجيهه: $\boxed{f'(-1)=2}$؛

ومعادلته: $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$،

أي: $\boxed{y=2x+5}$.

⌫ **لندرس قابلية اشتقاق الدالّة f عند** 2:

أ- على المجال $[-2;2]$، لدينا: $f(x)=-x^2+4$.

لدينا: $f(2)=-(2)^2+4=0$

ومنه: $\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{-x^2+4-0}{x-2}$

$=\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{-x^2+4}{x-2}$

$=\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{(2-x)(2+x)}{x-2}$

$=\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{-(x-2)(2+x)}{x-2}$

$=\lim_{x\overset{<}{\to}2}[-(2+x)]=-4=f_g'(2)$

إذن: f **قابلة للاشتقاق** عند 2 **من اليسار**، وعددها المشتق عند 2 من اليسار هو: $\boxed{f_g'(2)=-4}$.

ب- على المجال $]2;+\infty[$، لدينا: $f(x)=x^2-4$.

لدينا: $f(2)=(2)^2-4=0$

ومنه: $\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{x^2-4-0}{x-2}$

$=\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{x^2-4}{x-2}$

$=\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\overset{>}{\to}2}(x+2)=4=f_d'(2)$

إذن: f **قابلة للاشتقاق** عند 2 **من اليمين**، وعددها المشتق عند 2 من اليمين هو: $\boxed{f_d'(2)=4}$.

نتيجة:

بمأنّ: $\boxed{f_g'(2)\neq f_d'(2)}$، فإنّ: f **غير قابلة للاشتقاق** عند 2.

2) **التفسير الهندسي:**

(C_f) **يقبل نصفي مماسين** عند النقطة ذات الفاصلة 2،
وتسمى هذه النقطة **نقطة زاوية** للمنحنى (C_f).

معامل توجيه كل منهما: $\boxed{f'_g(2)=-4}$؛ وَ $\boxed{f'_d(2)=4}$.

ومعادلة كل منهما:

$\begin{cases} x\le 2 \\ y=f'_g(2)(x-2)+f(2)\end{cases}$، **أي:** $\boxed{y=-4x+8}$.

وَ $\begin{cases} x\ge 2 \\ y=f'_d(2)(x-2)+f(2)\end{cases}$، **أي:** $\boxed{y=4x-8}$.

تمارين: 04؛ 07؛ 08 ص58.

❷ الاستمرارية:

نشاط مقترح من طرف الأستاذ:

نعتبر الدّالتان f وَ g المعرّفتان على المجال $[-2;2]$ كما يلي:

$\begin{cases} f(x)=x+2; x\in[-2;0[\\ f(x)=x^2+1; x\in[0;2]\end{cases}$ وَ $g(x)=|x|+1$.

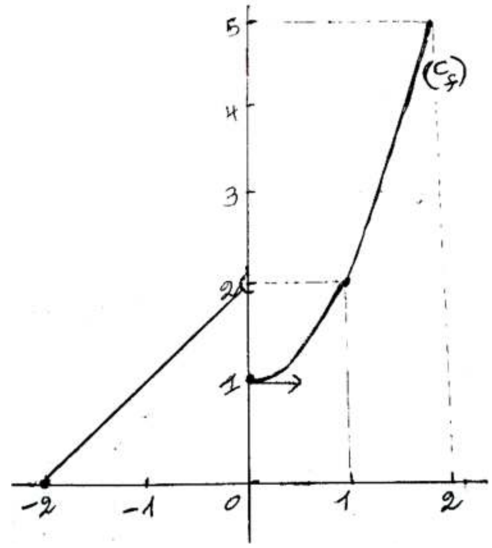
وليكن (C_f) وَ (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب.

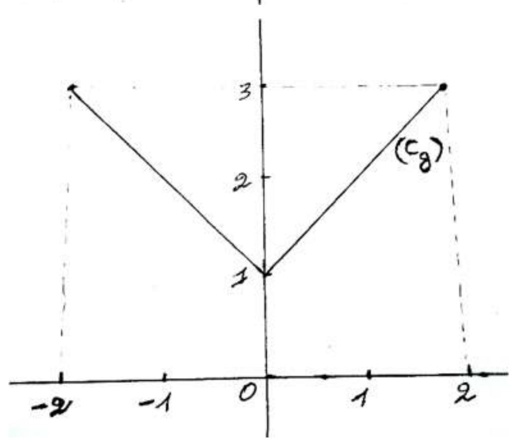
1) أنشئ في معلمين مختلفين (C_f) وَ (C_g).

2) هل يُمكنك إنشاء المنحنيين (C_f) وَ (C_g) بدون رفع القلم (اليد)؟

حل النشاط:

1) **إنشاء** (C_f) **وَ** (C_g):





2) **لا يُمكن** رسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2;2]$ **بدون رفع القلم (اليد)**، بينما **يُمكن** رسم المنحنى (C_g) على المجال $[-2;2]$ **بدون رفع القلم (اليد)**.

الخلاصة:

- **الدّالة f غير مستمرة على مجال $[-2;2]$.**
- **الدّالة g مستمرة على مجال $[-2;2]$.**

① الاستمرارية:

التفسير البياني:

تكون **الدّالة f مستمرة على مجال I**، عندما **يُمكن رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).**

② خواص (تُقبل دون برهان):

نقبل بأنّ كل الدّوال المقررة في هذا المستوي والمُحصل عليها بالعمليات على دّوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج:

- **الدّوال المرجعية مستمرة** على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- **الدّوال كثيرات الحدود، sin وَ cos مستمرة** على ℝ
- **الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة** على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- **مجموع؛ جداء؛ وَمُركب دّوال مستمرة** هو دّالة مستمرة.

مثال: (● حل التمرين 47 ص29)

f دّالة معرّفة على ℝ بـ: $f(x)=(x^2-x)\sin x$.

⌫ الدّالة f مستمرة على ℝ، لأنّها عبارة عن جداء دّالتين مستمرتين على ℝ؛ وهما الدّالة sin وَ $x\mapsto x^2-x$.

تمرين: 49 ص29. (التعرف على الدّالة الجزء الصحيح)

❸ مبرهنة القيم المتوسطة:

حل النشاط 4 ص7:

1.الدّالتان f وَ g مستمرتان على المجال $[-1;2]$، أما h فهي غير مستمرة على المجال $[-1;2]$.

2.بواسطة قراءة بيانية تحديد، حسب قيم العدد الحقيقي k، عدد حلول كل معادلة:

بصفة عامة:

حلول المعادلة $f(x)=k$ بيانياً هي **فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم** ذو المعادلة $y=k$.

بالنسبة للمعادلة $f(x)=k$ (1)

من أجل	فإنّ المعادلة $f(x)=k$
$-2\le k\le 3$	تقبل حل وحيد.

بالنسبة للمعادلة $g(x)=k$ (2)

من أجل	فإنّ المعادلة $g(x)=k$
$-2\le k<0$ أو $1<k\le 3$	تقبل حل وحيد.
$k=0$ أو $k=1$	تقبل حلين.
$0<k<1$	تقبل ثلاث حلول.

بالنسبة للمعادلة $h(x)=k$ (3)

من أجل	فإنّ المعادلة $h(x)=k$
$-2\le k\le 0$ أو $2<k\le 3$	تقبل حل وحيد.
$0<k\le 2$	لا تقبل حلول.

3. تُمثل القيمتان 2- و3 حدود المجال $[-2;3]$، صورتي القيمتان 1- وَ2 حدود المجال $[-1;2]$.
4. **من أجل كل عدد حقيقي k من المجال** $[-2;3]$،

- المعادلتان $f(x)=k$ وَ $g(x)=k$ **تقبلان حلا على الأقل** في المجال $[-1;2]$، أما المعادلة $h(x)=k$ فلا.
- المعادلة $f(x)=k$ **تقبل حلا وحيدا** في المجال $[-1;2]$، أما المعادلتان $g(x)=k$ وَ $h(x)=k$ فلا.

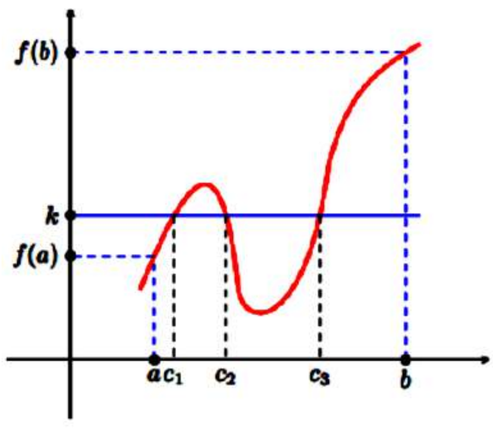
① مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان):

مبرهنة:

f دالّة معرّفة ومستمرة على مجال $[a;b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$، **يوجد على الأقل** عدد حقيقي c محصور بين a وَ b بحيث $f(c)=k$.

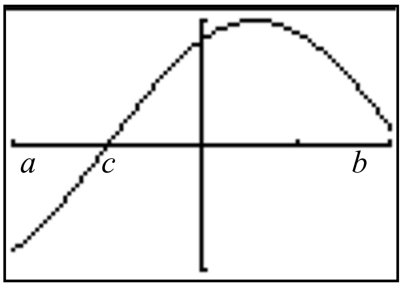
② التفسير البياني:

f دالّة معرّفة ومستمرة على مجال $[a;b]$، وليكن (C) منحناها البياني في معلم $(O;I;J)$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a وَ b.
(بالنسبة للشكل التالي (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



حالة خاصة:

إذا كانت f دالّة معرّفة ومستمرة على مجال $[a;b]$، وكان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$)، فإنّه **يوجد على الأقل** عدد حقيقي c محصور بين a وَ b بحيث $f(c)=0$.
أي أنّ: f **تنعدم على الأقل مرة واحدة** على مجال $[a;b]$.



③ المعادلة $f(x)=k$:

إذا كانت f دالّة معرّفة ومستمرة على مجال $[a;b]$، فإنّه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة:

مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وُجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثال: (● حل التمرين 50 ص29)

طريقة:

لإثبات وُجود **حلول معادلة** على مجال $[a;b]$ **باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة** نتبع الخطوات التالية:
- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.
- نتحقق من **استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أنّ العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

البرهان باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أنّ المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$:

الطريقة الأولى: يُمكن كتابة المعادلة $x^3-4x=-2$ على الشكل $f(x)=-2$ حيث f هي الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-4x$.

- الدّالة f دّالة كثير حدود وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ومن ثَمّ على $[-3;-2]$.
- لدينا: $\begin{cases} f(-3)=-15\\ f(-2)=0\end{cases}$، كما نلاحظ أن العدد -2 محصور بين العددين $f(-3)$ وَ $f(-2)$.

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $[-3;-2]$.

الطريقة الثانية: يُمكن كتابة المعادلة $x^3-4x=-2$ على الشكل $f(x)=0$ حيث f هي الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-4x+2$.