ملخصات الباك • شعب علمية
المحور الأول • الدوال العددية
الدرس الثاني • الاستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة

الاستمرارية

1 استمرارية دالة عند عدد حقيقي:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ويشمل a.

f ذات شكل واحد

f مستمرة عند a معناه $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

التفسير البياني

في جوار العدد a ، يمكن رسم (C_f) دون رفع القلم (اليد)

f تغير شكلها عند a

- f مستمرة عند a من اليسار معناه $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$
- f مستمرة عند a من اليمين معناه $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$
- f مستمرة عند a إذا وفقط إذا كانت مستمرة عنده من اليمين ومن اليسار ، معناه

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$$

2 استمرارية دالة على مجال

- f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ إذا كانت مستمرة عند كل عدد حقيقي منه.
- f مستمرة على المجال المغلق $[a;b]$ إذا كانت مستمرة على المجال $]a;b[$ ومستمرة عند a من اليمين وعند b من اليسار.

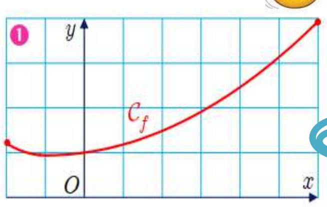
التفسير البياني

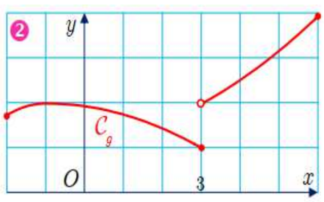
f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ معناه يمكن رسم (C_f) دون رفع القلم (اليد) على هذا المجال

مثال

1. f مستمرة على المجال $[-2;6]$.
2. g ليست مستمرة على المجال $[-2;6]$ لأنها غير مستمرة عند 3 .

الاستمرار في المحاولة هو الطريق الحتمي للنجاح





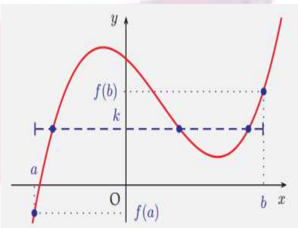
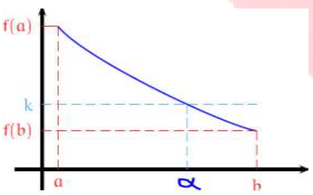
3 خواص الدوال المستمرة

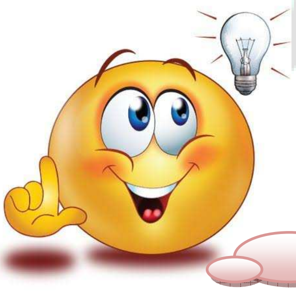
- الدوال كثيرات الحدود ، $\cos$ و $\sin$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة ، الصماء، الأسيّة و اللوغاريتمية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال الناتجة عن مجموع، جداء، حاصل قسمة، مركب دوال مستمرة هي دوال مستمرة.

مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة القيم المتوسطة لا تهتم بتعيين قيم الحلول للمعادلة $f(x)=k$ على مجال $[a;b]$ حيث f دالة معطاة و k عدد حقيقي بل بإثبات وجود أو وحدانية هذه الحلول.

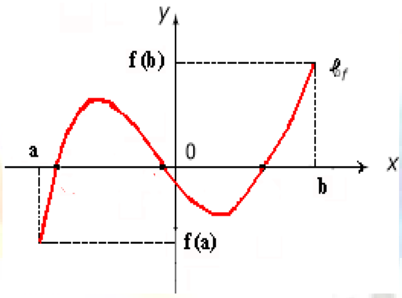
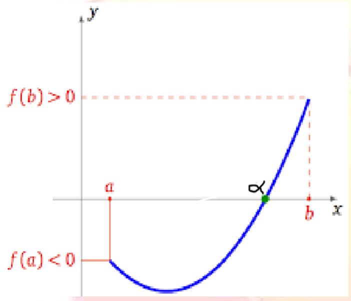
الحالة العامة: المعادلة $f(x)=k$

المطلوب	وجود الحلول	وحدانية الحل
الشروط	1 f معرفة ومستمرة على $[a;b]$ 2 k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$	1 f معرفة ومستمرة على $[a;b]$ 2 f رتيبة تماما على $[a;b]$ 3 k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
النتيجة	المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا $\alpha\in]a;b[$	المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]a;b[$
التفسير البياني	(C_f) يقطع المستقيم ذا المعادلة $y=k$ على الأقل في نقطة فاصلتها $\alpha\in]a;b[$ 	(C_f) يقطع المستقيم ذا المعادلة $y=k$ في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha\in]a;b[$ 



لما يكون أحد أطراف المجال $[a;b]$ هو $\pm\infty$ ولا في زوج $\pm\infty$ باااااالاك تكتب(ي) $f(\pm\infty)$!!!
رح تغضب عليك الـ MATH إلى ∞ !!!
هنا كي الشاطر(ة) تعوض(ي) الصور بحساب النهايات $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

حالة خاصة: المعادلة $f(x)=0$

المطلوب	وجود الحلول	وحدانية الحل
الشروط	❶ f معرفة ومستمرة على $[a;b]$ ❷ $f(a)\times f(b)<0$	❶ f معرفة ومستمرة على $[a;b]$ ❷ f رتيبة تماما على $[a;b]$ ❸ $f(a)\times f(b)<0$
النتيجة	المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha\in\,]a;b[$	المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in\,]a;b[$
التفسير البياني	(C_f) يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة فاصلتها $\alpha\in\,]a;b[$  	(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha\in\,]a;b[$ 

إيجاد حصر لحل معادلة باستعمال خوارزمية التنصيف

مبدأ التنصيف

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$

فإنه، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $a<\alpha<b$.

لإيجاد حصر للعدد α يمكن اتباع خوارزمية التنصيف (Dichotomie) كما يلي:

1. نحسب $m=\dfrac{a+b}{2}$ مركز المجال $[a;b]$.
   - ↲ إذا كان $f(a)\times f(m)<0$ فإنّ $a<\alpha<m$.
   - ↲ إذا كان $f(m)\times f(b)<0$ فإنّ $m<\alpha<b$.
2. نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه. (سعة الحصر غالبا تحدّد في السؤال)

لا يأس مع الأمل ولا فشل مع العمل ... فقط حاول وستنجح بلا جدال