الطريق الى البكالوريا

عدد التمارين : 93

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

الأستاذ مرنيز وليد

Maths
Without pain

3 conseils pour devenir bon en maths

Ne pas apprendre, comprendre !

Faire des exercices

Ne pas regarder les solutions

اخر تحديث : 2 فيفري 2021

السنة الدراسية

2021 - 2020

المحتويات

...

القسم I

بطاقة تعريفية للمتتاليات العددية

المتتاليات العددية

◄ طريقة توليد متتالية عددية

يوجد طريقيتين لتعريف متتالية عددية :

- عبارة الحد العام $u_n = f(n)$
- علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

◄ التمثيل البياني لمتتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

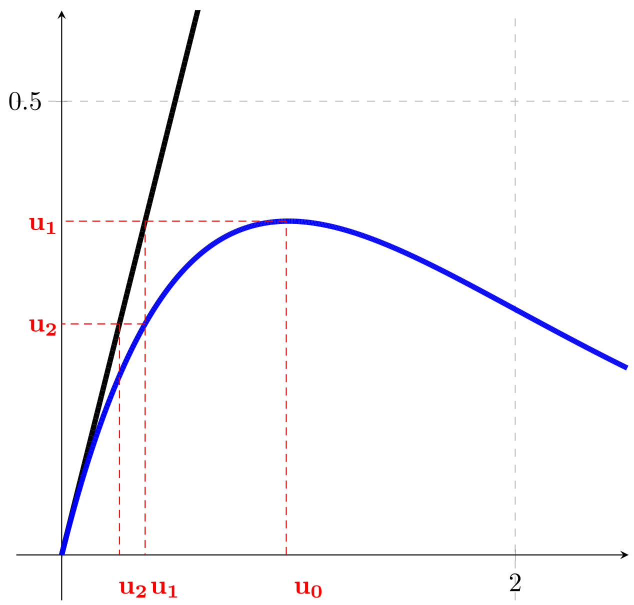
طريقة :

نقوم برسم التمثيل البياني (C_f) للدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

مثال :

لتكن المتتالية u_n معرفه:

بحدها الاول $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$



◄ دراسة اتجاه تغير متتالية عددية

لدراسة اتجاه تغير متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ نتبع احدى الطرق الاتية :

- ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ (اخراج العامل المشترك و استعمال جدول الاشارة)
  - اذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n \geq 0$ اذن المتتالية متزايدة
  - اذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n \leq 0$ اذن المتتالية متناقصة.
- اذا كانت جميع الحدود **موجبة**، نقوم بحساب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
  - اذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ، اذن المتتالية متزايدة
  - اذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ اذن المتتالية متناقصة
- باستعمال مبدأ **البرهان بالتراجع**، نثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

◄ المتتالية الحسابية

عبارة الحد العام

1. متتالية حسابية (u_n) معرفة :
   - بحدها الاول u_0 او u_p
   - من اجل كل عدد طبيعي n

   $u_n = u_0 + nr$ أو $u_n = u_p + (n-p)r$

   حيث r هو أساس (u_n)

2. نقول ان المتتالية (u_n) حسابية حدها الاول u_0 و اساسها r اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n ، الفرق بين كل حدين متتابعين هو ثابت اي

$$u_{n+1} - u_n = r$$

الوسط الحسابي

اذا كانت a ، b و c اعداد حقيقية ماخوذة بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية فان : $a + c = 2b$

المجموع

مجموع متتالية حسابية:

- حدها الاول u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

- حدها الاول u_p

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

حيث : $(n-p+1)$ عدد حدود المتتالية من u_p حتى u_n.

بصفة عامة

$$S_n = (\text{عدد الحدود}) \times \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الاول}}{2} \right)$$

اتجاه التغير

- اذا كان $r > 0$ فان المتتالية u_n متزايدة تماما
- اذا كان $r < 0$ فان المتتالية u_n متناقصة تماما
- اذا كان $r = 0$ فان المتتالية (u_n) ثابتة

◂ المتتالية الهندسية

عبارة الحد العام

1. متتالية هندسية (u_n) معرفة

- بحدها الاول v_0 او v_p
- من اجل كل عدد طبيعي n

$v_n = v_0 \times r^n$ أو $v_n = v_p \times r^{(n-p)}$

2. نقول ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية حدها الاول v_0 و اساسها $q \neq 0$ اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

حيث q عدد ثابت يمثل اساس المتتالية.

الوسط الهندسي

اذا كانت a ، b و c اعداد حقيقية ماخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فان : $a \times c = b^2$

المجموع

مجموع متتالية هندسية:

- حدها الاول v_0 :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- حدها الاول v_p

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

حيث : $(n-p+1)$ عدد حدود المتتالية من v_p حتى v_n.

عدد حدود المتتالية = دليل الحد الاخير - دليل الحد الاول +1

بصفة عامة

$$S_n = (\text{الحد الاول}) \times \left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$

اتجاه التغير

- اذا كان $q > 1$ ، المتتالية (q^n) متزايدة
- اذا كان $0 < q < 1$ ، المتتالية (q^n) متناقصة.

ومن اجل متتالية هندسية كيفية، ناخذ بعين الاعتبار الحد الاول v_0

- اذا كان $v_0 > 0$ ، (v_n) و (q^n) لهما نفس اتجاه التغير
- اذا كان $v_0 < 0$ ، (v_n) و (q^n) لهما اتجاه تغير متعاكسان
- اذا كان $q = 1$ او $q = 0$ المتتالية (q^n) ثابتة
- اذا كان $q < 0$ المتتالية (q^n) غير رتيبة

نهاية متتالية هندسية

- اذا كان $q > 1$ فان $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ (متباعدة)
- اذا كان $q = 1$، $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$ (متقاربة)
- اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ (متقاربة)
- اذا كان $q \leq -1$ فان النهاية غير موجودة (متباعدة)

◂ كيفية حساب نهاية متتالية عددية

1. **متتالية معرفة بعلاقة تراجعية** $u_{n+1} = f(u_n)$.
لحساب نهاية متتالية نتبع احدى الطرق التالية:

- **الطريقة 1** :(متتالية محدودة)
اذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى $u_n \leq M$ فهي **متقاربة** نحو عدد حقيقي $l \leq M$
- اذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الاسفل $u_n \geq m$ فهي **متقاربة** نحو عدد حقيقي $l \geq m$
- **الطريقة 2** :
اذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة **(الطريقة 1)** نحو عدد حقيقي l و f مستمرة عند l ، اذن l هو حل للمعادلة $f(l) = l$
- **الطريقة 3** :
استعمال مبرهنة الحصر في حساب النهايات
- **الطريقة 4** :
حساب النهايات باستعمال المقارنة تسمح لنا باثبات ان المتتالية متباعدة

2. **متتالية معرفة بعبارة الحد العام** $u_n = f(n)$.

نقوم بحساب نهاية المتتالية (u_n) اي $\lim_{n\to+\infty} u_n$

- اذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ فهي متقاربة
- اذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = \mp\infty$ فهي متباعدة.

النهاية اذا وجدت فهي وحيدة.

متتاليتان متجاورتان

نقول عن متتاليتين (u_n) و (v_n) انهما متجاورتان اذا وفقط اذا كان

- (u_n) متزايدة
- (v_n) متناقصة
- $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

مبدأ البرهان بالتراجع

يستعمل مبدأ البرهان بالتراجع لاثبات خاصية متعلقة بالاعداد الطبيعية n.
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من اجل **كل** عدد طبيعي n يكفي :

1. نتاكد من ان $P(n_0)$ صحيحة من اجل n_0
2. اذا كانت $P(n)$ صحيحة من اجل n اكبر من او يساوي n_0 فان $P(n+1)$ صحيحة من اجل $n+1$
3. اذن الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

تطبيق :

لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

الحل:

من اجل كل عدد طبيعي n نسمي الخاصية: $P(n) : 0 < u_n < 2$

1. **المرحلة 1 : (الخاصية الابتدائية)**
من اجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1$ اذن $0 < u_0 < 2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

2. **المرحلة 2 : (الوراثية)**
من اجل عدد طبيعي $n > 0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ اي $0 < u_n < 2$ ونبرهن ان الخاصية $P(n+1)$ صحيحة اي $0 < u_{n+1} < 2$.
من **فرضية التراجع** لدينا :

$$0 < u_n < 2$$
$$2 < 2 + u_n < 4$$
$$\sqrt{2} < \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{4}$$
$$\underbrace{0 < \sqrt{2}}_{\text{بالتعدي}} < u_{n+1} < 2$$

اي ان الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل $n+1$

3. **المرحلة3 : (الاستنتاج)**
اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع و من اجل كل عدد طبيعي n فان : $0 < u_n < 2$.

...

القسم II

تمارين تدريبية

رموز مفتاحية

تمارين للتدرب في المنزل — فكرة تستحق المحاولة

تمارين للتدرب تتضمن افكار اساسية — تمارين للتعمق

تمرين رقم 1:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية بحدها الاول $u_0 = 2$ و بالعلاقة : $u_2 + u_5 = 25$

1) عين اساس المتتالية الحسابية (u_n).

2) اكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3) احسب قيمة الحد الذي رتبته 11.

4) احسب المجموع : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

تمرين رقم 2:

(u_n) متتالية حسابية حيث : $\begin{cases} u_0 + u_3 = 6 \\ u_2 + u_5 = 22 \end{cases}$

1) اوجد الحد الاول u_0 و الاساس r لهذه المتتالية.

2) اكتب الحد العام (u_n) بدلالة n.

3) هل العدد 2013 هو حد من حدود المتتالية؟

4) ماهي قيمة و رتبة الحد الذي نبدء منه حتى يكون مجموع 20 حدا متتابعا من هذه المتتالية مساويا 1100 ؟

5) احسب بدلالة n الجداء : $P_n = 2011^1 \times 2011^5 \times 2011^9 \times \cdots \times 2011^{4n+1}$.

تمرين رقم 3:

1) برهن بالتراجع على ان من اجل كل عدد طبيعي n : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

2) استنتج قيمة المجموع : $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 101$.

تمرين رقم 4:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة : بـ: $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1. اثبت ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان $u_n > 1$
2. اثبت ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

تمرين رقم 5:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$
اثبت ان المتتالية (u_n) ثابتة اثبت ان المتتالية

تمرين رقم 6:

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 2$

تمرين رقم 7:

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$
اثبت ان من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$

تمرين رقم 8:

α عدد حقيقي ينتمي الى المجال $]0;1[$ ولتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$

اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

تمرين رقم 9:

(u_n)متتالية حسابية متزايدة حدها الاول : $u_1 = -4$ و $u_2^2 + u_3^2 = 37$.

1) اوجد r اساس هذه المتتالية.
2) اكتب الحد العام (u_n) بدلالة n.
3) هل يوجد حد من حدود المتتالية يساوي 486 ؟
4) ماهي رتبته؟

5) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

6) اوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 282$.

تمرين رقم 10:

(v_n)متتالية حسابية حدها الاول v_1 و

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \dfrac{3}{4} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 6 \end{cases}$$

1) عين الحدود v_1 ، v_2 و v_3 للمتتالية واساسها.

2) احسب الحد العام v_n بدلالة n.

3) عبر بدلالة n عن المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

4) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = -21$.

تمرين رقم 11:

(u_n)متتالية هندسية اساسها $\frac{3}{2}$ ومجموع حدودها الثلاثة الاولى u_0 ، u_1 و u_2 يساوي 38.

1) احسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2.

2) احسب الحد العام u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
ثم استنتج المجموع S_5 (يعطى S_5 على شكل كسر غير قابل للاختزال).

تمرين رقم 12:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة بحدها الاول u_0 و الاساس q بحيث : $8u_6 = 125u_9$.

1) احسب الاساس q. احسب بدلالة u_0 و n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

2) عين u_0 بحيث : $\lim_{n\to+\infty} S_n = 150$.

3) نفرض $u_0 = 90$ ، عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق $u_n \leq 10^{-3}$.

تمرين رقم 13:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 3u_n - 6$.
من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$

1) بين ان المتتالية (v_n) هندسية، ثم عين اساسها وحدها الاول.
2) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$ ، ثم استنتج بدلالة n المجموع: $S' = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.

تمرين رقم 14:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

ا) نفرض $\alpha = 3$.
1) احسب u_1 ، u_2 و u_3. ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم اثبت صحة تخمينك.
2) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$
1) اثبت ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.
2) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3) بين ان المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها.
4) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) نفرض $\alpha = 6$. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

تمرين رقم 15:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \alpha(u_n - 2)$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

1) عين العدد α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.
2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + 4$.
ا) عين العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الاول و اساسها.
ب) من اجل قيمة α المحصل عليها في السؤال (أ).
- احسب بدلالة n كل من المجموعين: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $T_n = (v_0)^3 + (v_1)^3 + (v_2)^3 + \cdots + (v_n)^3$.

تمرين رقم 16:

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1) احسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3. (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).

2) (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

ا) قارن بين الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (u_n) و الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (w_n).

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n$.

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

ا) بين ان : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

ب) ليكن S_n المجموع المعرف كمايلي : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

- اكتب S_n بدلالة n ، ثم عين نهاية المجموع S_n لما n يؤول الى $+\infty$.

تمرين رقم 17:

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كمايلي : $u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$ نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) اثبت ان المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

2) احسب w_n بدلالة n.

3) اثبت ان المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.

4) اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و ان المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

5) عين u_n و v_n بدلالة n.

6) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

تمرين رقم 18:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$$

1) احسب الحدود : u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5. (يطلب كتابة هذه الحدود على الشكل 2^α)

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية معينا اساسها وحدها الاول.

ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) احسب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

د) عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق : $u_n > 3.96$

تمرين رقم 19:

I) (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما و بحيث : $\ln u_3 - \ln u_4 = -1$ و $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$

1) عين اساس المتتالية (u_n) وحدها الاول u_1

2) اكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$

II) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n$

ا) بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

ج) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\ln S_n = 0$

تمرين رقم 20:

1) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = xe^{-x}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

ا) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) انشئ المنحني (C)

د) بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]0;\frac{1}{e}\right[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين.

ه) حل المعادلة $f(x) = m$ في الحالتين : $m = 0$ و $m = \frac{1}{e}$

2) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

ا) اثبت بالتراجع انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 0$ اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة

ب) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

3) (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = \ln u_n$

ا) اثبت انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = w_n - w_{n+1}$

ب) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ، اثبت ان : $S_n = w_0 - w_{n+1}$

ج) استنتج $\lim_{n\to+\infty} S_n$

...

القسم III

مواضيع بكالوريات جزائرية

...

1

شعبة علوم تجريبية

تمرين رقم 21:

© | علوم تجريبية - 2020 - الموضوع الأول (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي) ، ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$

1. نفرض ان $\alpha = -4$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4$

2. نفرض ان $\alpha \neq -4$ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 4$

(ا) اثبت ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{3}{4}$

(ب) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم بين ان المتتالية (u_n) متقاربة

(ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

تمرين رقم 22:

© | علوم تجريبية - 2020 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

1. احسب كلا من u_1 و u_2 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - n + 1$

(ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها 3 ، يطلب حساب حدها الاول

(ب) اكتب (v_n) بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

(ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$

(ب) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

تمرين رقم 23:

© | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

1) ا) برهن بالتراجع انه : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$

اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين انه : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ و احسب عندئذ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \cdots \times \cdots (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

تمرين رقم 24:

© | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجال $[4; 7[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

1) ا) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7[$

ب) استنتج انه : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فان $f(x) \in [4; 7[$

2) برهن انه : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فان $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$

ثم استنتج انه : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فان $f(x) - x > 0$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

ا) برهن بالتراجع انه : من اجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين انها متقاربة.

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$

5) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 25:

علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول u_0 حيث $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n + 5}$

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

ب) بين ان (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و استنتج انها متقاربة

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$

- اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الاول

3) عبر بدلالة n عن v_n و u_n ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

تمرين رقم 26:

© | علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي : $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3.

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = 2n + 1$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب المجموعين S_n و T_n حيث :

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \text{ و } T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \cdots + e^{u_{2018}}$$

تمرين رقم 27:

© | علوم تجريبية - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتاليتين u_n و v_n المعرفتين على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1) احسب الحدين : u_1 و v_1

2) ا) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = u_n - v_n$

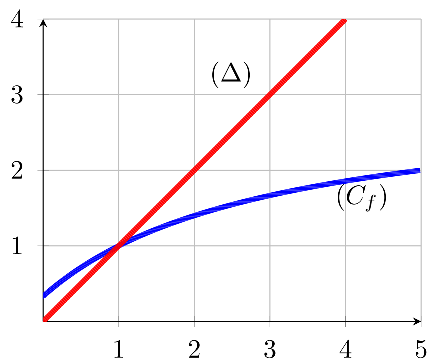
برهن ان المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n

4) بين ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان

تمرين رقم 28:

© | علوم تجريبية - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$



α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول u_0 حيث $u_0 = \alpha$

و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

II) نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$

1) ا) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

ا) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الاول

ب) عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + \frac{1}{u_{n+2}+1} + \cdots + \frac{1}{u_{n+2016}+1}$

تمرين رقم 29:

علوم تجريبية - 2017 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي :
$u_0 = \frac{1}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$

1) ا) برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

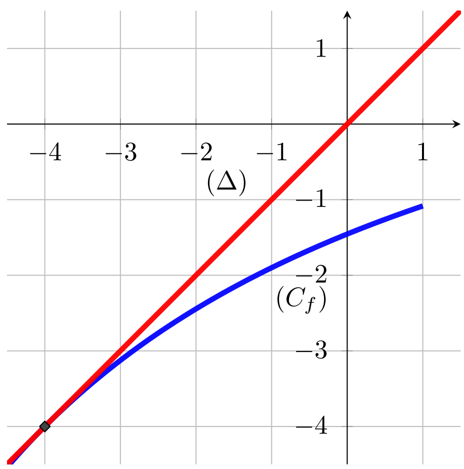
2) ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n

ب) اثبت ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين رقم 30:

علوم تجريبية - 2017 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
f الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها،
(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



I) تحقق ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$ ثم بين ان : من اجل كل $x \in [-4; 1]$ فان $f(x) \in [-4; 1]$

II) (u_n) متتالية معرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 (لا يطلب حساب الحدود)
ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $-4 < u_n \leq 0$
ثم بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$
اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم احسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 \cdots v_{2016} \times u_{2016}$

تمرين رقم 31:

علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الأول (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0;4]$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{13x}{9x+13}$

1) ا) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال I

ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى I

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ ، من اجل كل عدد طبيعي n

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n\leq 4$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة

3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$

ا) برهن ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_0

ب) اكتب v_n بدلالة n

ج) استنتج ان : $u_n=\dfrac{52}{36n+13}$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

تمرين رقم 32:

علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الثاني (4.50 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية بحدها الاول $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}$ و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول v_0

2) ا) عبر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n

ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3) احسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

4) تحقق ان : $\dfrac{1}{3}(1-v_n)=\dfrac{1}{u_n+2}$ و ذلك من اجل كل عدد طبيعي n

5) استنتج بدلالة n المجموع : $S'=\dfrac{1}{u_0+2}+\dfrac{1}{u_1+2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n+2}$

تمرين رقم 33:

© | علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الأول (05 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$ (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم

المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) ا) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) عين احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له.

3) ارسم (C) و (Δ).

II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 (بدون حسابها) موضحا خطوط الانشاء.

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n، $0\leq u_n<4$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n، $4-u_{n+1}\leq \frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د) استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين رقم 34:

علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

.1 f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$

I) ا) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$

.2 (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=1$ و من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=1-\frac{3}{u_n}$

ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{5}$ يطلب حساب حدها الاول v_0

ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n)

د) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S'_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$

تمرين رقم 35:

علوم تجريبية - 2015 - الموضوع الأول (04.5 نقطة)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3.

2) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

3) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$

ا) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج) بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

تمرين رقم 36:

© | علوم تجريبية - 2015 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المستوى منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1) ا) انشئ على حامل محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ؛ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 دون حسابها.

ب) خمن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

2) ا) اثبت انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث : $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

3) ا) اثبت انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب) بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

ج) استنتج ان : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ؛ ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n)

تمرين رقم 37:

علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الأول (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$
و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$.

1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.
2) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.
3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.
4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$.
   ا) بين ان المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
   ب) احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$.

تمرين رقم 38:

علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2} - n}$
(e هو اساس اللوغاريتم النيبيري).
   ا) بين ان (u_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.
   ب) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟
   ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
2) نضع، من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز الى اللوغاريتم النيبيري).
   1) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).
   2) ا) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n)$.
   ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

تمرين رقم 39:

علوم تجريبية - 2013 - الموضوع الاول (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.
1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول.
2) احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

1) برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

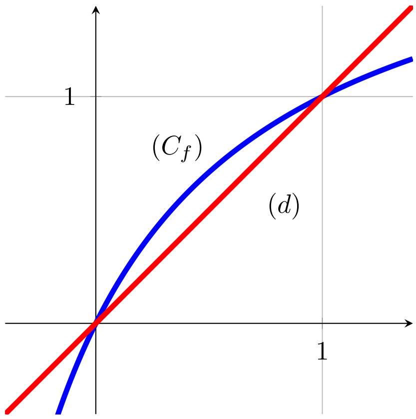
3) ا) برهن انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين رقم 40:

علوم تجريبية - 2013 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

في الشكل المقابل ، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; 1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



1) u_n المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول، $u_0 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

ا) اعد رسم هذا الشكل في ورقة الاجابة، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) ا) اثبت ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$.

ب) برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الاول v_0.

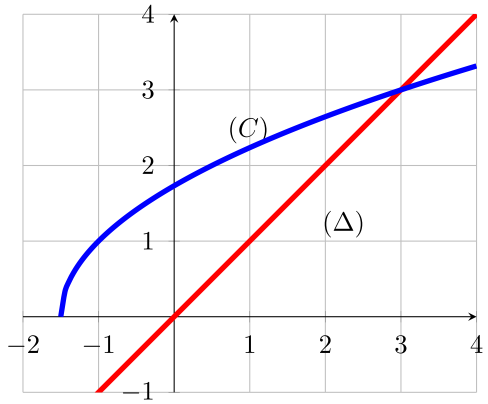
ب) احسب نهاية (u_n)

تمرين رقم 41:

علوم تجريبية - 2012 - الموضوع الأول (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كمايلي : $h(x) = \sqrt{2x+3}$ ، (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس. (انظر الشكل المقابل).



ا) اعد رسم الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها و موضحا خطوط الانشاء)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3) ا) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم 42:

علوم تجريبية - 2012 - الموضوع الثاني (04.5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج ان (u_n) متزايدة تماما.

3) برر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول.

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$.
اكتب P_n بدلالة n ، ثم بين ان $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

تمرين رقم 43:

علوم تجريبية - 2011 - الموضوع الأول (03 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الاتية اقترحت ثلاث اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) :

أ) حسابية — ب) هندسية — ج) لا حسابية و لا هندسية

2) نهاية المتتالية (u_n) هي :

أ) $+\infty$ — ب) $-\frac{1}{2}$ — ج) $-\infty$

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \cdots + e^{n\ln 3}\right]$.

أ) $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ — ب) $S_n = \frac{1-3^n}{4}$ — ج) $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

تمرين رقم 44:

علوم تجريبية - 2011 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

1) **ا)** بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها α

ب) اكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n.

ج) عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من اجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$

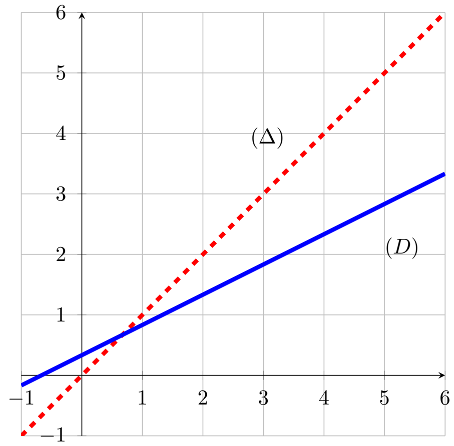
- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

تمرين رقم 45:

علوم تجريبية - 2010 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

ا) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

ج) أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) ا) باستعمال الاستدلال بالتراجع, أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq \frac{2}{3}$

ب) إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

ا) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n, وإستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, ثم إستنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

تمرين رقم 46:

علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الاول (03.5 نقطة)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$.

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) أحسب v_0 و v_1.

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) ا) أحسب بدلالة n المجموع S_n: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1$

ج) بين أن (u_n) متقاربة.

تمرين رقم 47:

علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1) ا) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و إستنتج الحد الأول u_1 .

ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ج) أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$.

ا) أحسب v_2 و v_3.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين أن (w_n) متتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج) أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n.

تمرين رقم 48:

علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الأول (04 نقاط)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

ا) بين أن الدالة f متزايدة على I.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I.

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي الى I.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$.

ب) عين النهاية : $\lim_{x \to +\infty} u_n$.

تمرين رقم 49:

علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = \frac{5}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1) ا) أرسم في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

ب) باستعمال الرسم السابق, مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود: u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4.

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية u_n و تقاربها.

2) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leq 6$

ب) تحقق أن (u_n) متزايدة.

ج) هل (u_n) متقاربة ؟برر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 6$

ا) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

...

2

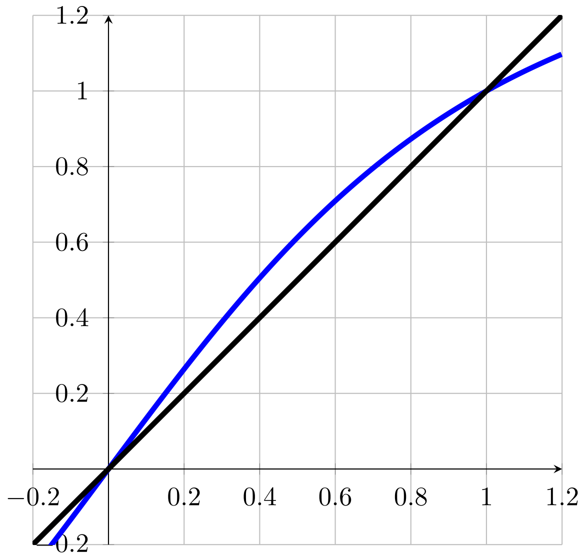
شعبة تقني رياضي

تمرين رقم 50:

تقني رياضي - 2020 - الموضوع الأول (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الاول u_0 حيث : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$



1. (ا) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الانشاء

   (ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2. (ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$
(ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج انها متقاربة

3. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n^2}$
برهن ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{9}{5}$ يطلب تعيين حدها الاول v_0

4. (ا) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
(ب) احسب نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 51:

تقني رياضي - 2020 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الاول u_0 حيث : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n+2}$

1. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$

2. (ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$
(ب) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة

3. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n+\alpha}{u_n+1}$ ، حيث α عدد حقيقي
(ا) اوجد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{4}$ ، ثم احسب حدها الاول v_0
(ب) بين عندئذ انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2\times 4^n - 1}{4^n+1}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم 52:

تقني رياضي - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{e.x+1}$ (e اساس اللوغاريتم النيبيري)
و (u_n) المتتالة العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$.
ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n(\frac{1}{e}-u_n)}{e.u_n+1}$
ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر انها متقاربة.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n-1}$
اثبت ان (v_n) متتالية هندسية اساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الاول v_0 و عبارة v_n بدلالة n

3) ا) تحقق انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n-1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

تمرين رقم 53:

تقني رياضي - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)

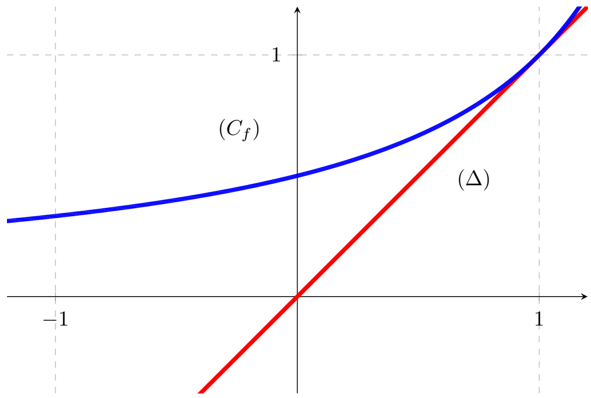
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{a}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an}u_n$
حيث a عدد حقيقي اكبر من او يساوي 2 .

1) ا) بين ان : من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$.
   ب) بين ان المتتالية u_n متناقصة تماما ثم استنتج انها متقاربة .
2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $v_n = \frac{1}{an}u_n$
   (ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{a}$ و عين حدها الاول v_1 بدلالة a .
   (ب) جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3) احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n$
   ثم عين قيمة a حيث $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

تمرين رقم 54:

تقني رياضي - 2017 - الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2-x}$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، وليكن; (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.
(u_n) المتتالية العدية المعرفة بحدها الاول u_0 حيث $u_0 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

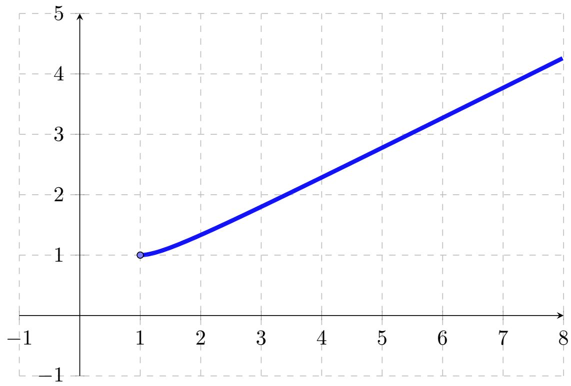


1) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
2) برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$
3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة.
4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{2}{1-u_n}$
   ا) برهن ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها 2 ثم عين عبارة حدها العام v_n بدلالة n
   ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم 55:

تقني رياضي - 2016 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، الشكل المقابل



1) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

ا) انقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الانشاء.

ب) اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n: $1\leq u_n\leq 6$

د) ادرس اتجاه تغير المتاالية (u_n)

ه) برر تقارب المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$

(ا) برهن ان (w_n) متتالية هندسية اساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الاول.

(ب) اكتب w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n

(ج) بين ان: $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n=\dfrac{1}{w_0}+\dfrac{1}{w_1}+\cdots+\dfrac{1}{w_n}$

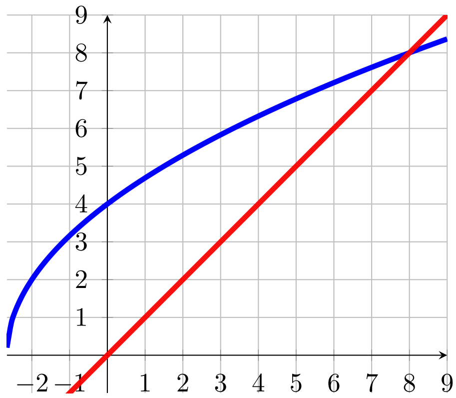
تمرين رقم 56:

تقني رياضي - 2015 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحده الاول: $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{6u_n+16}$

1) h الدالة المعرفة على $\left]-\dfrac{8}{3};+\infty\right[$ بمايلي: $h(x)=\sqrt{6x+16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم

متعامد و متجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل)



ا) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 8$

ب) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$

ج) استنتج اتجاه تغير (u_n)

2) ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(8-u_n)$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم 57:

تقني رياضي - 2014 - الموضوع الأول (04 نقاط)

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$

1) حدد حسب قيم x ، اشارة $f(x) - x$

2) ا) عين اتجاه تغير f

ب) بين انه اذا كان $x \in [2; e+1]$ فان $f(x) \in [2; e+1]$

II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = e+1$ و من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \in [2; e+1]$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم احسب نهايتها.

تمرين رقم 58:

تقني رياضي - 2014 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

f هي دالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$

ادرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج اشارة $f(x)$.

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$

2) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، فان u_n عدد طبيعي.

3) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

تمرين رقم 59:

تقني رياضي - 2013 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي :

$u_0 = e^2$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$.

1) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول.

2) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3) احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4) احسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

تمرين رقم 60:

تقني رياضي - 2011 - الموضوع الأول (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج ان : $u_n > 1$

2) ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بين انها متقاربة، احسب نهاية (u_n)

3) ليكن الجداء p_n المعرف كمايلي : $p_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$
اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = \ln u_n$ حيث $\ln$ دالة اللوغاريتمية النيبيري
عبر بدلالة p_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n يتنتهي الى $+\infty$

تمرين رقم 61:

تقني رياضي - 2008 - الموضوع الأول (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

1) ا) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$

ب) انشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $4cm$)

ج) برهن انه اذا كان $x\in[0;2]$ فان $f(x)\in[0;2]$

2) نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالاتي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

ا) برر وجود المتتالية (u_n). احسب الحدين u_1 و u_2

ب) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

3) ا) برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n ان : $0\le u_n\le\sqrt{3}$

ب) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي n فان : $u_{n+1}>u_n$

ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (u_n) ؟

ج) تحقق ان : $u_{n+1}-\sqrt{3}\le\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

عين عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث : $|u_{n+1}-\sqrt{3}|\le k|u_n-\sqrt{3}|$

بين انه من اجل $n\in\mathbb{N}^*$: $|u_n-\sqrt{3}|\le k^n|u_0-\sqrt{3}|$. استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

تمرين رقم 62:

تقني رياضي - 2008 - الموضوع الثاني (08 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ كماياتي : $f(x)=\frac{x^2+5}{x+2}$

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الاطوال $2cm$)

ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين ان المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-2$ مقارب للمنحنى (C_f) ثم ارسم (C_f) و (D)

د) بين ان صورة المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$

ا) باستخدام (C_f) و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ، مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل (ox).

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $1\le u_n\le\frac{5}{2}$ و ان المتتالية (u_n) متزايدة.

د) استنتج ان (u_n) متقاربة و احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

...

3

شعبة رياضيات

تمرين رقم 63:

رياضيات - 2020 - الموضوع الاول (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[1;4]$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x+4}{9-x}$

1. (ا) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;4]$
   (ب) اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$ فان : $f(x)\in[1;4]$
2. المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الاول u_0 حيث : $u_0=2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$
   (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<4$
   (ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج انها متقاربة
3. المتتالية العددية (v_n) معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ، كمايلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-4}$
   (ا) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_0
   (ب) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$
4. المجموع S_n معرف بـ: $S_n=v_0+8v_1+8^2v_2+\cdots+8^nv_n$. احسب S_n بدلالة n

تمرين رقم 64:

رياضيات - 2020 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases}$$
(α عدد حقيقي)

المتتالية العددية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = v_n - u_n$

1. (أ) احسب w_0 ثم احسب w_1 بدلالة α
   (ب) بين ان (w_n) متتالية هندسية اساسها $(6\alpha - 1)$
   (ج) اكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثم عين قيم α حتى تكون : $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

نفرض في كل ما يلي : $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

2. (أ) اثبت ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما و ان (v_n) متناقصة تماما
   (ب) استنتج ان (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l.
3. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n + v_n = 2$ ، و استنتج قيمة l.
4. احسب بدلالة α المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2020}$

تمرين رقم 65:

رياضيات - 2019 - الموضوع الاول (04 نقاط)

1) حل المعادلة (E) ... $505x - 673y = 1$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

(لاحظ أن: $2019 = 3 \times 673$ و $2020 = 4 \times 505$) .

2) بين أنه من أجل كل ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن : x و y من نفس الإشارة .

3) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ:
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases}$$

- أكتب u_α بدلالة α ثم أكتب v_β بدلالة β حيث α و β عددان طبيعيان .

4) ا) عين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بين ان هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
   ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$
   أحسب بدلالة n الجداء $p = X_1.X_2 \dots X_n$

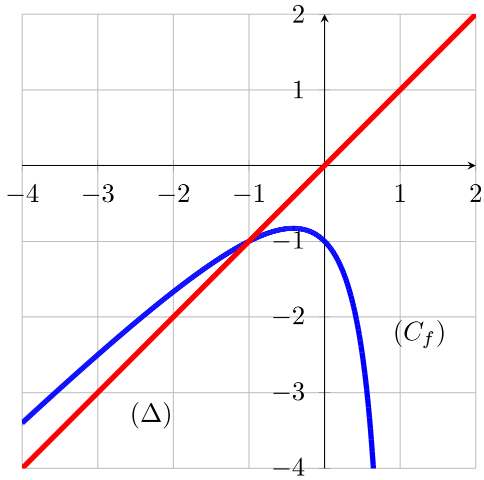
تمرين رقم 66:

رياضيات - 2018 - الموضوع الاول (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=-3$ و من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (انظر الشكل المقابل).



1) اعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $-3\leq u_n<-1$

3) ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}+1\geq\dfrac{3}{4}(u_n+1)$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n+1\geq-2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) نضع $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

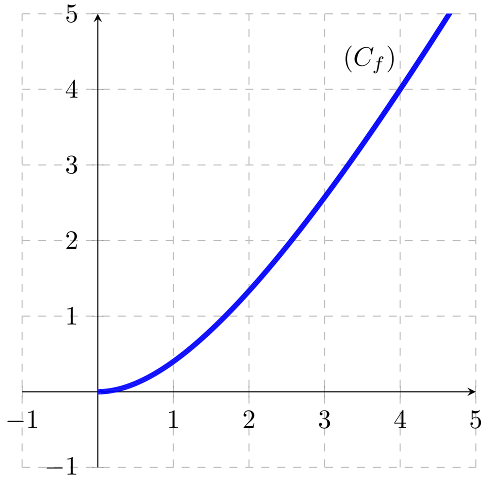
- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $8\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$

واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

تمرين رقم 67:

رياضيات - 2014 - الموضوع الثاني (04.5 نقاط)

الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل ادناه.



1) بين ان الدالة f متزايدة تماما.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$
(Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

ا) باستعمال المنحني (C_f) و المستقيم (Δ) مثل ، على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 دون حسابها

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_n \leq 3$

ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة

ج) استنتج ان (u_n) متقاربة.

4) ا) ادرس اشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ و استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n الى $+\infty$

تمرين رقم 68:

رياضيات - 2009 - الموضوع الأول (06 نقاط)

1) نعرف الدالة العددية f على المجال $[1;5]$ بالعبارة: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$
ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة على المحورين $3cm$

ا) ادرس تغيرات الدالة f

ب) انشئ المنحنى البياني (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في نفس المعلم.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = 5$ و بالعبارة: $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$

ا) احسب u_1 و u_2

ب) استعمل المنحنى (C) و المستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل.

3) ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \sqrt{5}$

ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (u_n) ؟

4) ا) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي n فان : $(u_{n+} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$

ب) استنتج ان : $(u_0 - \sqrt{5}) \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq (u_n - \sqrt{5})$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم 69:

رياضيات - 2008 - الموضوع الاول (06 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ يرمز (C) الى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $2cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ا) ادرس تغيرات الدالة f

ب) باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" ، انشئ المنحنى (C)

ج) ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$

2) نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالاتي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

ا) باستعمال (D) و (C) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

3) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : : $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$

ب) استنتج ان (u_n) متقاربة. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم 70:

رياضيات - 2008 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الاول $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1) احسب u_1 و u_2 و u_3

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع ان (v_n) متتالية ثابتة
- استنتج عبارة u_n بدلالة n
- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) (w_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث : $S = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

...

القسم IV

مواضيع بكالوريات أجنبية

تمرين رقم 71:

بكالوريا المغرب 2020

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$ لكل n من $\mathbb{N}$

.1 احسب u_1

.2 بين بالتراجع ان لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$

.3 (ا) بين ان $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج ان $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

(ب) احسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

.4 نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

(ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{5}$

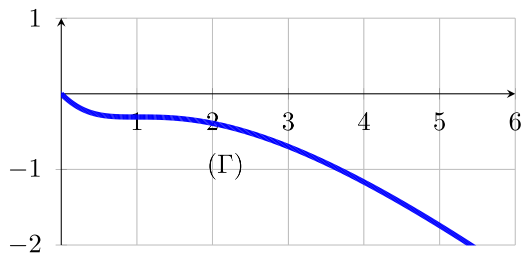
(ب) حدد v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$

تمرين رقم 72:

بكالوريا تونس 2016

المنحنى (Γ) المقابل هو التمثيل البياني ، في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ للدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x + \ln(1 + x^2)$$



(Γ) يقطع محور الفواصل، فقط عند المبدأ O

1) بقراءة بيانية، برر انه من اجل كل x من $[0; +\infty[$: $\ln(1 + x^2) \leq x$

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1 + u_n^2) \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ا) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

ب) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة، واعط نهايتها.

3) لتكن المتتالية S_n المعرفة على بـ: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

ا) بين ان المتتالية (S_n) متزايدة تماما.

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n \leq 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج) استنتج ان المتتالية (S_n) متقاربة.

تمرين رقم 73:

بكالوريا تونس 2015

1) لتكن المتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الاول $u_0 = \frac{1}{3}$ و اساسها $q = \frac{1}{3}$

ا) احسب u_1

ب) عين $\lim_{n\to+\infty} u_n$

ج) من اجل كل عدد طبيعي n، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بين ان $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

2) بدراسة تغيرات الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = e^x - 1 - x$ بين انه مهما يكن $x \in \mathbb{R}$: $1 + x \leq e^x$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة، من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = (1+u_0)(1+u_1)\times\cdots\times(1+u_n)$

ا) احسب v_0 و v_1

ب) بين ان المتتالية v_n متزايدة

ج) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n \leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$

د) بين ان المتتالية (v_n) متقاربة.

هـ) لتكن l نهاية المتتالية (v_n). بين ان $1 < l < \sqrt{e}$

تمرين رقم 74:

بكالوريا تونس 2010

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$ و $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$ حيث α عدد حقيقي مع $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = v_n - u_n$

ا) احسب w_0 و w_1

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = (2\alpha - 1)^n$

ج) استنتج نهاية المتتالية (w_n)

2) ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq v_n$

ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة و ان المتتالية (v_n) متناقصة

ج) استنتج ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية

د) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + v_n = 3$ و استنتج قيمة النهاية

تمرين رقم 75:

بكالوريا المغرب 2016

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) ا) تحقق من ان $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب) بين بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ان $u_n < 3$

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

ب) استنتج ان $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج) بين ان $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ ، لكل من n من $\mathbb{N}$ ثم اكتب u_n بدلالة n

د) حدد نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 76:

بكالوريا فرنسا 2017

(Antilles Guyane)

1) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ا) ادرس تغيرات الدالة f ثم استنتج القيم الحدية للدالة f ؟

2) اثبت انه من اجل كل $n \geq 3$ ، المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا α_n على المجال $[1, e]$

ا) على البيان لدينا التمثيلات البيانية لكل من المستقيمات D_3 ، D_4 و D_5 ذو المعادلات $y = \frac{1}{3}$ ، $y = \frac{1}{4}$ و $y = \frac{1}{5}$ على التوالي.

ب) ضع تخمينا لاتجاه تغير المتتالية (α_n)

ج) قارن بين $f(\alpha_n)$ و $f(\alpha_{n+1})$ وذلك من اجل كل $n \geq 3$

د) حدد اتجاه تغير المتتالية (α_n)

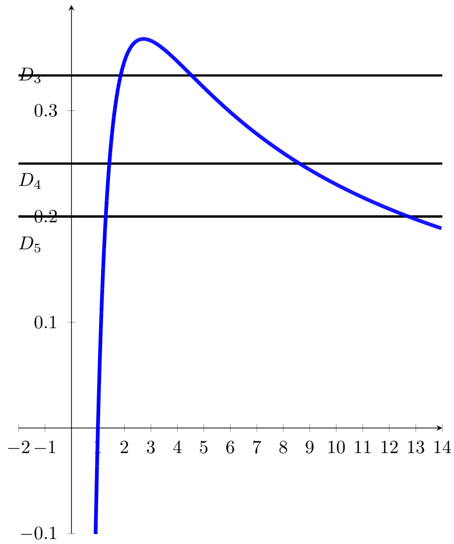
هـ) استنتج ان المتتالية (α_n) متقاربة

3) نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ ، المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا اخر β_n حيث $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$

ا) نفرض ان المتتالية β_n متزايدة.

اثبت انه من اجل كل $n \geq 3$ فان $\beta_n \geq n\frac{\beta_3}{3}$

ب) استنتج نهاية المتتالية (β_n)



تمرين رقم 77:

بكالوريا فرنسا 2015

(Polynésie)

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n = e^{v_n}$ و المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_1 = \ln(2)$ و من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n})$

ا) تحقق ان $u_1 = 2$ و ان من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$

ب) احسب كل من u_2 ، u_3 و u_4. (تعطى النتائج على شكل كسور)

ج) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_1 = \ln(2)$ و من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n})$

ا) عبر عن v_n بدلالة u_n ثم بدلالة n

3) ا) لتكن المتتالية (S_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $Sn = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

ب) تحقق ان $S_3 = \ln(4)$

ج) عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية (S_n)

تمرين رقم 78:

بكالوريا فرنسا 2015

(Centres étrangers)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = a$ ، و من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$. حيث a عدد حقيقي ثابت غير معدوم.

1) لتكن g الدالة المعرفة، من اجل كل عدد حقيقي x بـ: $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

ا) احسب $g'(x)$ ، وتحقق انه، من اجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

ب) حدد تغيرات الدالة g ، واعط قيمتها الحدية الصغرى.

ج) بملاحظة ان $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ ، ادرس اتجاه تغير المتتالية u_n

2) في هذا السؤال، نفرض ان $a\leq 0$

ا) برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ، ان $u_n\leq 0$

ب) استنتج، من الاسئلة السابقة، ان (u_n) متقاربة.

ج) اعط نهاية المتتالية (u_n) ، في حالة $a=0$

3) في هذا السؤال، نفرض ان $a>0$

ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n\geq g(a)$

ب) برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq a+n\times g(a)$

ج) عين نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 79:

بكالوريا فرنسا 2014
(Polynésie)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=0$ و من اجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=u_n+2n+2$

1) احسب u_1 و u_2

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_{n+1}-u_n$

ا) اكتب v_n بدلالة n.

ب) ماهي طبيعة المتتالية (v_n) ؟

ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=(n+1)(n+2)$

د) بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n=u_{n+1}-u_0$ ثم استنتج u_n بدلالة n

تمرين رقم 80:

بكالوريا فرنسا 2013
(Métropole)

لتكن المتتاليةالعددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=2$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) ا) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\leq n+3$

ب) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - n$

ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{3}$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n)

4) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $Sn = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

ا) عبر عن S_n بدلالة n.

ب) عين نهاية المتتالية (T_n)

تمرين رقم 81:

بكالوريا فرنسا 2012

(Antilles Guyane)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$

1) احسب u_2 ، u_3 و u_4

2) ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان u_n موجب تماما

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج انها متقاربة، ثم احسب نهايتها l

3) من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $v_n = \frac{u_n}{n}$

ا) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_1

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n ، $u_n = \frac{n}{2^n}$

4) نعتبر الدالة f و المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - x \ln 2$

ا) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

تمرين رقم 82:

بكالوريا فرنسا 2010

(Antilles Guyane)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) احسب u_2 ثم استنتج ان (u_n) لا هي هندسية و لا هي حسابية.

2) نعرف المتتالية (v_n) من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

ا) احسب v_0

ب) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

ج) استنتج ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

د) عبر عن v_n بدلالة n.

3) نعرف المتتالية (w_n) من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

ا) احسب w_0

ب) باستعمال العلاقة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $w_{n+1} = w_n + 2$

د) عبر عن w_n بدلالة n

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5) من اجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

...

القسم ٧

مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس أشبال الأمة

...

4

شعبة علوم تجريبية

تمرين رقم 83:

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+2} \end{cases}$

1. برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $1 \leq u_n < 2$
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل هي متقاربة؟
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$
   (ا) برهن ان المتتالية (v_n) يطلب تعيين عبارة حدها العام v_n بدلالة n
   (ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n، ثم جد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   (ج) احسب المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$
4. (ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $|u_{n+1} - 2| \leq |u_n - 2|$
   (ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $|u_n - 2| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم 84:

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = e^{-1}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{eu_n - 1}{2}$ ، e هو اساس اللوغاريتم النيبيري

1. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{1}{e-2}$
2. عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)
3. (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 2u_n + \frac{2}{2-e}$
   (ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول
   (ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{e-2}\left[1 - \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1}\right]$
   (ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) ماذا تستنتج.
4. نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$
   (ا) عبر عن S_n بدلالة n
   (ب) احسب المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n

تمرين رقم 85:

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n + 3$
   ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
   ج) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الاسفل. هل هي متقاربة؟ برر.
2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - n$
   ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول.
   ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.
   ج) احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
3) نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة بـ: $t_n = \ln(v_n)$
   ا) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول.
   ب) احسب المجموع : $S_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$

تمرين رقم 86:

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = x - \ln(x+2)$.

1) أدرس تغيرات الدالة f.

2) (u_n) متتالية معرفة كمايلي : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

ا) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

3) (v_n) متتالية معرفة كمايلي: $v_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :
$v_n = \ln\left[(u_0+2)\times(u_1+2)\times\cdots(u_{n-1}+2)\right]$

ا) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_n$

ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(u_0+2)\times(u_1+2)\times\cdots\times(u_{n-1}+2)\right]$

تمرين رقم 87:

© | بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq n$

ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = u_n - n + 1$

ا) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية ثم اكتب v_n و u_n بدلالة n

ب) احسب قيمة المجموع : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{n-1}^2$ بدلالة n.

ج) احسب قيمة المجموع : $K_n = (u_0)^2 + (u_1-1)^2 + (u_2-2)^2 + \cdots + (u_{n-1}-n+1)^2$ بدلالة n.

تمرين رقم 88:

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 6 \\ 3u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases} n \in \mathbb{N}$

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{2}$

ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج انها متقاربة.

ج) عين نهاية المتتالية (u_n)

2) لنعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

ا) بين ان (v_n) متتالية حسابية، يطلب تحديد اساسها r وحدها الاول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) عين نهاية ثانية للمتتالية (u_n)

تمرين رقم 89:

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$
حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[-\{0\}$
نضع و من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

1) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول بدلالة α.

2) هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

3) احسب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما ان $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$
- استنتج عندئذ (u_n) بدلالة n ثم بين ان (u_n) متقاربة.

5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ و من اجل كل عدد طبيعي n: $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \cdots v_n$

ا) بين ان: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب) عين اصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

...

5
شعبة رياضيات

تمرين رقم 90:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الأول (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ المعرفة كمايلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1. (أ) بين انه من احل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$
(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n + 1)(u_n - 4)$
(ج) استنتج ان المتتالية (u_n) متزايدة.
2. (أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} = \dfrac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$
(ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$
(ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
(د) اوجد عندئذ نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 91:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ و $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$

1. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي : $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$ حيث α و β عددان حقيقيان غير معدومين

(ا) احسب u_2 و u_3

(ب) احسب v_1 ، v_2 و v_3 بدلالة α و β

(ج) بين انه اذا كانت v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فان : $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

2. نضع $\alpha = \beta$:

(ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(ب) استنتج انه من اجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n + u_{n-1} = 3^n$

تمرين رقم 92:

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

1) (u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = 5$ واساسها 4

ا) اكتب الحد العام u_n بدلالة n

ب) احسب قيمة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n.

ج) اذا كان مجموع خمسة حدود متعاقبة من (u_n) هو 2025 فما هو الحد الاول من هذه الحدود

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = (2n+1) \times 2^{(4n+5)}$

ا) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7

ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3

ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

د) استنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$ بدلالة n

تمرين رقم 93:

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

a و b عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$. (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و من اجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) اثبت من اجل كل عدد طبيعي n ان $0 \le u_n \le v_n$

2) بين من اجل كل عدد طبيعي n ان $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. (يمكن استعمال النتيجة $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le 1$. حيث $x > 0$ و $y > 0$)

3) استنتج ان $v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b-a)$ من اجل كل عدد طبيعي n.

4) اثبت ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

5) فيما يلي نضع $a = 2$ و $b = 5$.

بواسطة الة حاسبة احسب u_3 ثم استنتج قيمة مقربة بالنقصان الى 10^{-3} للنهاية المشتركة للمتتاليتين