الخليل للرياضيات

سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني رياضي

مسائل
24 مسألة

في الدوال الأسية

مرفقة بحلول مفصلة

+

ملخص بسيط حول الدوال الأسية

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[12 نوفمبر 2021]

ملخص حول الدوال الأسية:

❷ مبرهنة:

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: $f' = f$ و $f(0) = 1$، نرمز إلى هاته الدالة بالرمز "exp" ونسميها الدالة الأسية .

❶ فرضية:

نقبل أنه توجد دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق الشرطين: $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

❸ العدد e والترميز e^x:

- العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e = \exp(1)$، و $e \approx 2.718 \ldots$.
- اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x: $\exp x = e^x$

❹ خواص جبرية:

من أجل كل عددين حقيقين x و y ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$e^0 = 1 \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{nx} = (e^x)^n$$

$$e^x > 0 \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

❺ اتجاه تغير الدالة الأسية:

- من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$.
- الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❻ النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} (e^x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} (x^n e^x) = 0$$

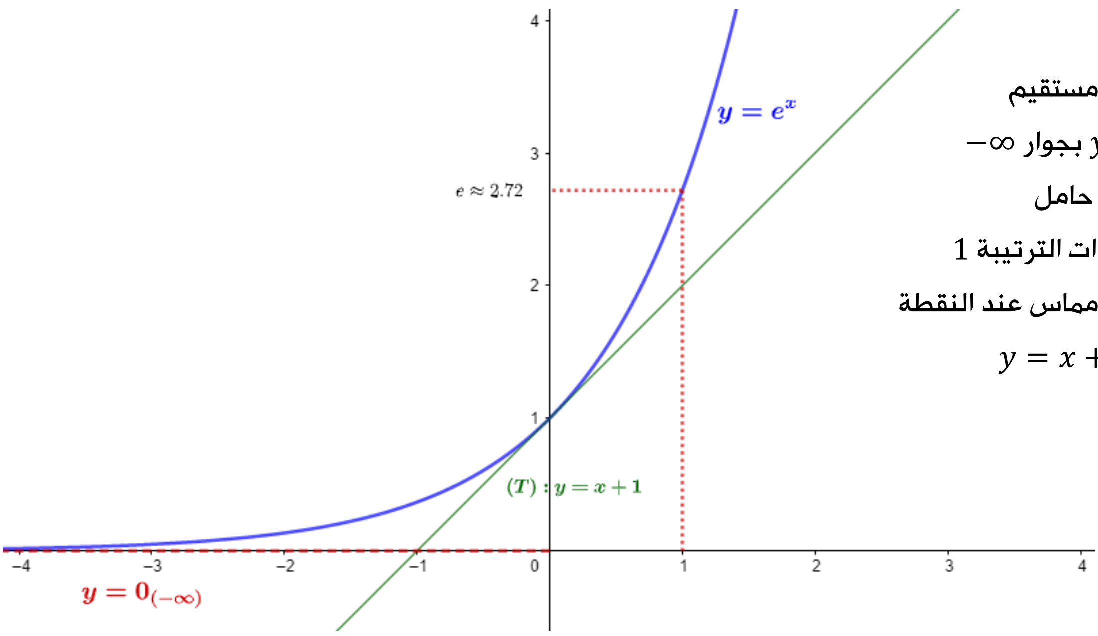
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^n}{e^x}\right) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$$

❼ المشتقة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f \circ u$ (حيث: $f(x) = e^x$) قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا من أجل كل x من المجال I :

$$\boxed{(f \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}}$$

❽ التمثيل البياني:



- منحنى الدالة exp يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$
- منحنى الدالة exp يقطع حامل محور التراتيب في النقطة ذات الترتيبة 1
- منحنى الدالة exp يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته: $y = x + 1$

المسائل:

فهرس المحتويات:

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

المسـألة رقم: 01

مشاهـــدة الحـــل

(I نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g

❷

أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$

❷

أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ فسر النتيجة هندسيا

❸ شكل جدول تغيرات الدالة f

❹ بين أن $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$

❺ مثل بيانيا (C_f) .

(III نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

❷ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

المسـألة رقم: 02

مشاهـــدة الحــل

I) نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

❸

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عيّن $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$ ، مبرر اجابتك.

❹

أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

ب/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

ج/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

❺ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

❻ بيّن أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

❼ بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$ ، ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} .

❽ مثّل بيانيا كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ،

❾ ناقش بيانيا حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(3x - 2)$ (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

❶ ادرس تغيرات الدالة g .

❷ تحقق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ ، ثم بيّن أنّ: $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$

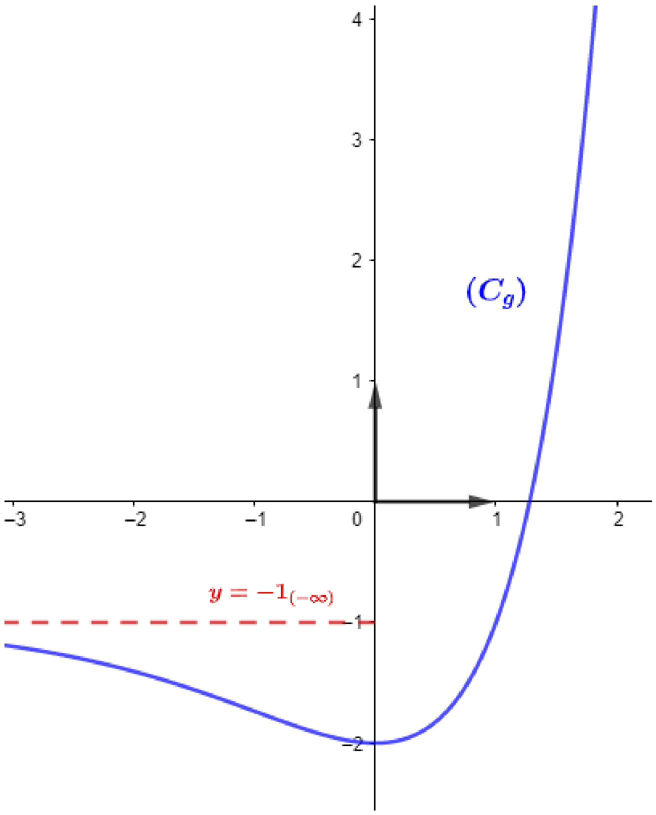
❸ استنتج معادلة المماس (d) لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

❹ تحقق من أن معادلة المستقيم (d) تعطى بـ:

$$y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4}$$

المسألة رقم: 03

مشاهدة الحل



I) a ، b و c أعداد حقيقة، نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=(ax+b)e^x+c$$

ونسمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. كما في الشكل أدناه:

❶ بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب/ $g(0)$ و $g'(0)$.

❷ مما سبق أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c.

❸ نضع: $g(x)=(x-1)e^x-1$.

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2<\alpha<1.3$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستو السابق.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷

أ/ بيّن أنّه من اجل كل x حقيقي:

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❸ عيّن دون حساب، $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

❹ بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

❺ بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha-1$ ، ثم اوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

❻

أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

❼ مثّل بيانيا المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

❽ m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

الخليل للرياضيات

المسألة رقم: 04

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ب/ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

❷ برهن أنّ النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

❸

أ/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

❹ بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.77 < \alpha < -2.76$.

❺ مثّل بيانيا (C_f) .

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(4x+1)$ (عبارة g غير مطلوبة).

❶ عيّن اتجاه تغير الدالة g .

❷ تحقق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$ ، ثم بيّن أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$

❸ استنتج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$.

❹ تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1+\alpha)^2 x - \frac{(1+\alpha)(\alpha^2-1)}{4}$$

III) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = f(|x|)$ ، ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في المستوي السابق

❶ بيّن أن الدالة k زوجية .

❷ بيّن كيف تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه في المعلم السابق

IV) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المستوي السابق

❶ تحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

❷ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه. ثم أنشئ (C_h)

المسألة رقم: 05

مشاهدة الحل

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

❶ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.38 < \alpha < -0.37$

❹ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (2x+1)\big)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y = 2x + 1$.

❷ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'(x) = g(x)$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

❸ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

❹ ارسم (Δ)، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) = 0.8$).

❺ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ات المجهول x:

$$x = (1-m)e^{x}$$

المسـألة رقم: 06

مشاهـــدة الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1. ادرس تغيرات الدالة f' .

1. احسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

2. ادرس تغيرات الدالة f .

3.

أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4.

أ/ بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها.

ب/ بيّن أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:

$1.9 < \alpha < 2$ و $-0.6 < \beta < -0.5$.

5. مثل بيانيا: (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) .

6. نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماما m التالية:

$$f(x) = 2x + \ln m \ldots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

07 المسـألة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (2x+1)e^x - 1$$

1. ادرس تغيرات الدالة g'
2. احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2.
أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحي (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

3.
أ/ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4. اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند المبدأ.
5. مثّل بيانيا كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .
6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x :

$$(E): f(x) = mx$$

الخليل للرياضيات

المسألة رقم: 08

مشاهدة الحل

نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$$

ب/ استنتج أن الدالة f فردية.

❷ احسب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها.

❸

أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

ثم ادرس إشارة $f'(x)$.

ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

❹

أ/ بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x-1\right)=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x+1\right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+1$.

❺ مثّل بيانيا (C_f) .

الخليل للرياضيات

المسألة رقم: 09

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

❷

أ/ بيّن أنّ المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2}-4=0$ ، ثم بيّن أنّ المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;2+\ln 4]$ وتحته على المجال $[2+\ln 4\,;+\infty[$

❸

أ/ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=-(e^{x-2}-1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

❹ احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2;2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

❺ اثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$.

❻ مثّل بيانيا (Δ) والمنحني (C_f) .

المسألة رقم: 10

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

❷

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ـ ثم تحقق أن $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]$.

❷ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

❸ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

❹

أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) .

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) .

❺

أ/ بيّن أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب/ بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$.

❻ مثّل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

❼ ليكن m عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد واشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

المسألة رقم: 11

مشاهدة الحل

I) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x)-2g(1-x)=e^{x}-2e^{1-x}-3x+3$$

❶ أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x .

(ارشاد: ضع $t=x$ تارة و $t=1-x$ تارة أخرى)

❷ نضع: $g(x)=e^{x}-x-1$

أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x)=1-g(-x)$$

❹ اثبت أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1.15<\alpha<-1.14$ وَ $1.84<\beta<1.85$

❺ استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+g(x)}{1+g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷

أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x)=\frac{e^{x}h(x)}{\left(1+g(x)\right)^{2}}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ مثل بيانيا (C_f) .

الخليل للرياضيات

المسـألة رقم: 12

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة f بـ:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. عين مجوعة تعريف الدالة f .
2.
   أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

   ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=\frac{1}{e^{-x}+1}$$

   ج/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

3. اثبت أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها .
4. بين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C_f)
5. عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A .
6. نعتبر الدالة g المعرفة على D_f كما يلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

   أ/ حلل العبارة: $e^{2x}-2e^x+1$.

   ب/ احسب $g'(x)$ و $g(0)$ ثم ادرس تغيرات الدالة g

   ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) .

7. مثل بيانيا (T) و (C_f) .

المسألة رقم: 13

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x + 1 + 2e^{2x}$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

❷ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $[-0.8; -0.7]$

❸ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = -x + 1$

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❷

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f'(x) = -g(x)e^{-2x}$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f

ج/ بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.2 < x_1 < -1.1$ وَ $1.1 < x_2 < 1.2$

❸ بيّن أنّ $f(\alpha) = -\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}$

❹ مثل بيانيا (C_f) ، نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $f(\alpha) \approx 2.9$

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$(1 - m - x)e^{2x} + x + 1 = 0$$

المسألة رقم: 14

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (3-2x)e^x + 2$$

1. علما أنّ $\lim_{x\to-\infty}(xe^x) = 0$ ، احسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1.6; 1.7]$
4. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1.
   أ/ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

   ب/ علما أنّ $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x}) = 0$ ، بيّن أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا
2. اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أنّ

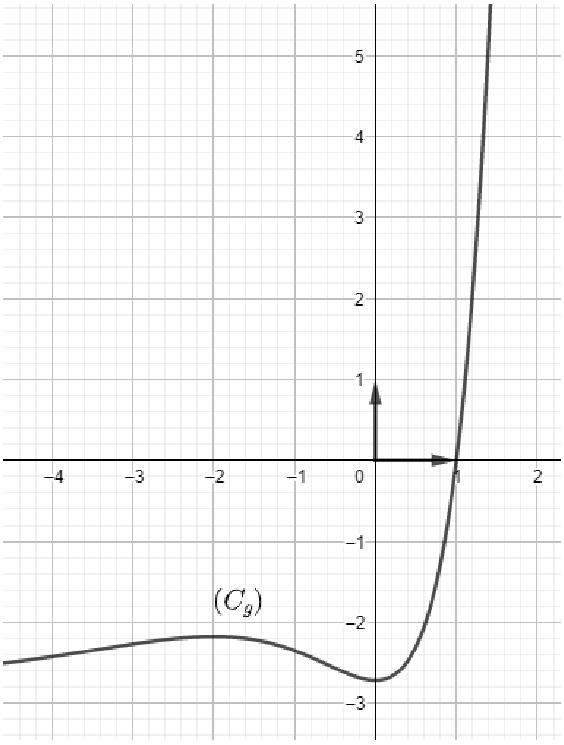
$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$$

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
4.
   أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 4x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

   ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)
5. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
6. بيّن أنّ $f(\alpha) = 4\alpha - 5$، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$
7. أرسم كل من (T)، (Δ) و (C_f)

المسألة رقم: 15

مشاهدة الحل



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^2e^x - e$$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (كما في الشكل المقابل)

- احسب $g(1)$

- بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ احسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته: $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$، ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ).

❸ بين أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا:

$$f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

❹ استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

❺ بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x \longmapsto e^x$، ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

المسألة رقم: 16

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = e^x + x + 1$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.28; -1.27[$

❸ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = (x+2)(1-e^{-x})$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶ احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

❷

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f'(x) = g(x)e^{-x}$$

ب/ استنتج اتجاه تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها

❸ عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

❹

أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

❺

أ/ أثبت أنه يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي (Δ)

ب/ تحقق أن معادلة المماس (T) هي:

$$y_{(T)} = x + 2 - e$$

❻

أ/ بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب/ جد نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

ج/ مثل بيانيا كل من (Δ)، (T) و (C_f)

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة:

$$\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x}$$

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

❶ بيّن أنّ الدالة h زوجية

❷ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f). (لا يطلب إنشاء (C_h))

المسألة رقم: 17

مشاهدة الحل

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2e^x - x^2 - x$$

❶

أ/ احسب $g'(x)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب/ بين أنه، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $g'(x) > 0$.

ج/ احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1.38 < \alpha < -1.37$.

❸ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶

أ/ احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷

أ/ بين أنّ $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

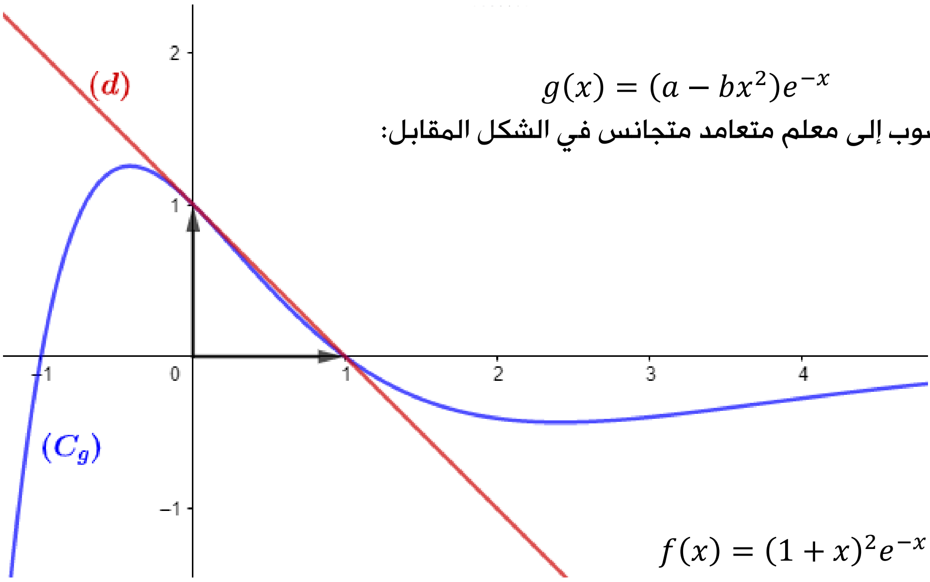
ب/ احسب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج/ أنشئ المنحنى (C_f) (تعطى $f(\alpha) \approx 0.29$).

الخليل للرياضيات

المسـألة رقم: 18

مشاهــدة الحــل



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (a - bx^2)e^{-x}$$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس في الشكل المقابل:

• بقراءة بيانية

❶

أ/ اكتب معادلة للمستقيم (d)

ب/ عيّن $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$

ج/ باستعمال ما سبق، بيّن أنّ

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

❷ عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (1+x)^2 e^{-x}$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوى السابق.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب/ علما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ ، بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

❷

أ/ بيّن أنّه من أجل كل x حقيقي: $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ استنتج أنّ الدالة f موجبة على $\mathbb{R}$

❸

أ/ عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{f(x)-1}{x}\right)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

ب/ اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

❹ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f)

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(1+x)^2 = me^x$

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$

❶ بيّن أنّ الدالة h زوجية

❷ إشرح كيف يمكن إنشاء منحنى الدالة h (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه

المسألة رقم: 19

مشاهدة الحل

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$$

❶

أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷

أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل عدد حقيقي x، $f'(x) = -g(x)$.

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.38$).

د/ عين دون حساب

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(\alpha)}{h}\right)$$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

❷

أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثييهما.

د/ ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$.

ه/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عد وإشارة حلول المعادلة:

$$(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$$

المسألة رقم: 20

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ

$$f(x) = x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$، وفسر النتائج هندسيا

ب/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ج/ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، ثم استنتج أنّ المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

❷

أ/ بيّن أنه من أجل كل $x \neq 0$ لدينا:

$$f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_2) بجوار $+\infty$، محددا معادلته.

ج/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) وكل من المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

❸

أ/ ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

ب/ بين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0.8 < \alpha < 0.9$ و $-1.4 < \beta < -1.3$

❹ من أجل كل $(-x) \in D_f$، بيّن أنّ $f(-x) = 1 - f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

❺ مثل بيانيا كل من (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_f)

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة

$$(m-1)(e^x - 1)e^{-x} + 1 = 0$$

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

❶ بيّن أنّ الدالة h زوجية

❷ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f). (لا يطلب إنشاء (C_h))

الخليل للرياضيات

المسـألة رقم: 21

مشاهــدة الحــل

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = 1 - xe^x$$

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸

أ/ بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$.

ب/ تحقق أنّ $0.5 < \alpha < 0.6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي:

$$f(x) = (x-1)e^x - x - 1$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ لتكن f' مشتقة الدالة f:

أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإنّ: $f'(x) = -g(x)$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

❸ بيّن أنّ: $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$، (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

❹

أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❺

أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.

ب/ أنشئ (Δ) و (C_f) .

الخليل للرياضيات

22 المســألة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x + 2 - e^x$

❶ ادرس تغيرات الدالة g .

❷ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$

❸ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ثم فسر ذلك هندسيا.

❷ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

❸ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

❹ عيّن دون حساب كل من : $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ وَ $\lim\limits_{x\to\beta}\left(\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

❺ بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ ، ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .

❻ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = e^x - xe^x - 1$

- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.

❼ نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$

- تحقق من أنّ: $p(0) = 0$.

❽

أ/ بيّن أن (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) .

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T)

❾ نأخذ: $f(\beta) \approx -1.195$ ، مثّل بيانيا (T) و (C_f) .

❿ m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$

23

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{-x}+x-1$

❶ علما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x})=0$:

عين نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$

ثم استنتج أنّ $e^{-x}+x\geq 1$

II) نعتبر الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{x}{e^{-x}+x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ بيّن أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$

❷

أ/ تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^{x}}}$$

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، فسر النتيجتين هندسيا.

❸

أ/ بيّن أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{(1+x)e^{-x}}{(e^{-x}+x)^{2}}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❹

أ/ اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

ب/ تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$$x-f(x)=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

ثم استنتج إشارة $x-f(x)$

ج/ استنتج الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (T) ذو المعادلة $y=x$

❺ أنشئ (T) و (C_f)

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$\frac{xe^{x}}{xe^{x}+1}-1=m$$

المســألة رقم: 24

مشاهـــدة الحـــل

الحلول (مقترحة) :

فهرس المحتويات:

❤ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ❤

حل المسـألة رقم: 01

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x-e^{-x}]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}-1\right)\right]$

$= -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x-e^{-x}] = +\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

❷

أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(0.6) = 0.05$ و $g(0.5) = -0.1$

ولدينا $g(0.6) \times g(0.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبلا حلا وحيدا α

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶ حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{e^x+1}\right] = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{e^x+1}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$

❷

أ/ حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x+1-e^x(x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x+1-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{1-xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-e^x\,(-e^{-x}+x)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-e^x\,g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ تعيين دون حساب قيمة $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha)$$

$$= \frac{-e^{\alpha}g(\alpha)}{(e^{\alpha}+1)^2}$$

$$= 0$$

- تفسير الهندسي:

منحني الدالة f يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة

α مواز لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$$y = f(\alpha)$$

❸ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط

- جدول التغيرات:

لدينا $f(-1) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$-e^x$	$-$	$-$		$-$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

❹ تبيين أن المعادلة $f(x) = x$

لتبيين أن: $f(x) = x$

يكفي أن نثبت أن: $f(x) - x = 0$

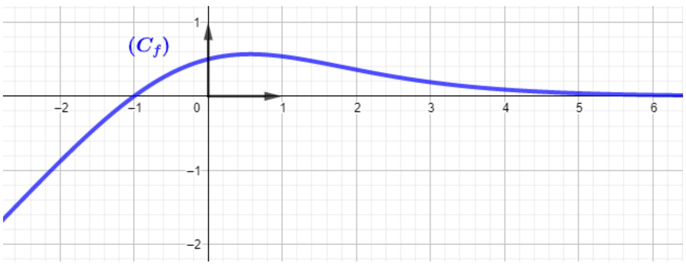
$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x+1}{e^x+1} - x \\ &= \frac{x+1-x(e^x+1)}{e^x+1} \\ &= \frac{1-xe^x}{e^x+1} \\ &= \frac{-e^x(x-e^{-x})}{e^x+1} \\ &= \frac{-e^x g(x)}{e^x+1} \\ &= \frac{-e^x(0)}{e^x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- استنتاج قيمة $f(\alpha)$:

لدينا: $f(x) = x$

ومنه $f(\alpha) = \alpha$

❺ التمثيل البياني:



(III

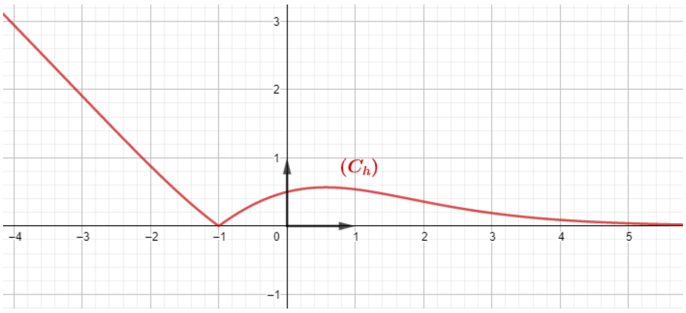
❶ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} h(x) &= |f(x)| \\ &= \begin{cases} f(x) & ; \quad y \geq -1 \\ -f(x) & ; \quad y \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

❷ تمثيل (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \geq 0$

ويناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$



حل المسألة رقم: 02

مشاهدة المسألة

(I

❶ حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x+2-\frac{4}{1+3e^{-x}}\right]$$
$$= +\infty$$

❷ تبيين أنه : $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x+3)-e^x(4e^x)}{(e^x+3)^2}$$
$$= \frac{(e^x+3)^2+12e^x}{(e^x+3)^2}$$
$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$
$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$
$$= \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$
$$= \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

❸

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

ولدينا

$$e^x-3=0 \Rightarrow e^x=3$$
$$\Rightarrow x=\ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها

ومنه

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

ب/ تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

ومنه $f''(\ln 3)=0$

❹

أ/ تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_1]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x-2-\frac{4e^x}{e^x+3}-x+2\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{4e^x}{e^x+3}\right]$$
$$=0$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_2]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}-x+2\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[4-\frac{4e^x}{e^x+3}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{12}{e^x+3}\right]$$
$$=0$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ_1) و (Δ_2) :

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_1) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y_1]$: لدينا:

$$f(x)-y_1 = \frac{-4e^x}{e^x+3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة $(-4e^x)$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)-y_1$	$-$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_2) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y_2]$: لدينا:

$$f(x)-y_2=4-\frac{4e^x}{e^x+3}=\frac{12}{e^x+3}>0$$

ومنه

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)

❺ كتابة معادلة (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$=\left(\frac{e^0-3}{e^0+3}\right)^2(x)+0+2-\frac{4e^0}{e^0+3}$$
$$=\frac{1}{4}x+1$$

❻ تبيين أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر لـ (C_f) :

- نبين أن $(\ln 3+x)\in D_f$ و $(\ln 3-x)\in D_f$:

لدينا: $x\in D_f$ معناه $x\in]-\infty;+\infty[$

ومنه $(\ln\ 3+x)\in]-\infty;+\infty[$

و $(\ln\ 3-x)\in]-\infty;+\infty[$

- نبين أن $f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)=2\ln 3$

$$f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)$$
$$=\left(\ln 3+x+2-\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}\right)$$
$$+\left(\ln 3-x+2-\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}+\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{12e^{x}}{3e^{x}+3}+\frac{12e^{-x}}{3e^{-x}+3}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4+4e^{x}+4+4e^{-x}}{1+e^{x}+e^{-x}+1}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{8}{2}\right)$$
$$=2\ln 3$$

❼ تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1)=0.56$ و $f(-2)=-0.17$

ولدينا $f(-1)\times f(-2)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$

تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$

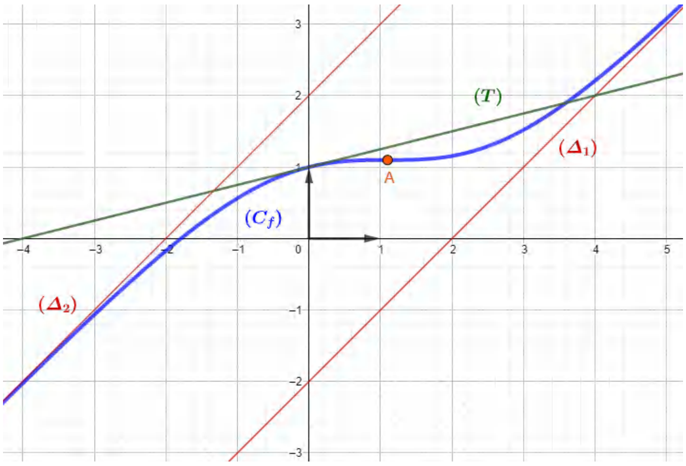
- حصر α :

α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

❽ التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



❾ المناقشة البيانية:

نضع $h(x)=f(-|x|)$

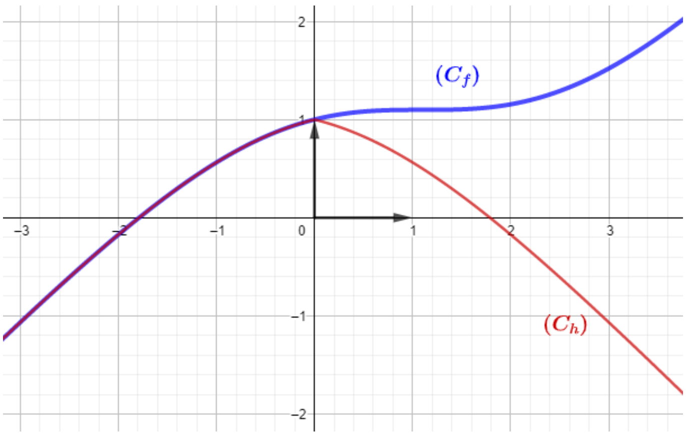
ومنه:

$$h(x)=\begin{cases} f(-(x)); x\geq 0\\ f(-(-x)); x\leq 0\end{cases}$$
$$=\begin{cases} f(-x); x\geq 0\\ f(x); x\leq 0\end{cases}$$

لما $x\leq 0$ المنحنى (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $x\geq 0$ المنحنى (C_h) يناظر المنحنى العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:



ومنه المناقشة كالآتي:

لما: $\ln|m| \le 1$

أي: $|m| \le e$

أي: $-e \le m \le e$

أي لما: $m \in [-e; e]$

المعادلة لا تقبل حلول

لما: $\ln|m| > 1$

أي: $|m| > e$

أي: $m \in]-\infty; e[\cup]e; +\infty[$

المعادلة تقبل حل وحيدا

(II

❶ دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أن

$$g(x) = (f \circ k)(x)$$

حيث: $k(x) = 3x - 2$

❷ التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) &= f\left[3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right] \\ &= f(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- تبيين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x-2)$ ومنه:

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) &= 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) \\ &= 3f'(\alpha) \end{aligned}$$

❸ استنتاج معادلة المماس (d) لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned} (d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + 0 \\ &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha+2) \end{aligned}$$

❹ التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\alpha+2)(e^{\alpha}+3) - 4e^{\alpha} = 0 \\ &\Rightarrow ae^{\alpha} + 3a + 2e^{\alpha} + 6 - 4e^{\alpha} = 0 \\ &\Rightarrow e^{\alpha}(a-2) = -(3a+6) \\ &\Rightarrow e^{\alpha} = \frac{3\alpha+6}{2-\alpha} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} (d): y &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{e^{\alpha}-3}{e^{\alpha}+3}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha} - 3}{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha} + 3}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4} \end{aligned}$$

حل المسألة رقم: 03

مشاهدة المسألة

(I

❶ من البيان نجد

أ/

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty \quad | \quad \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = -1$$

ب/

$$g(0) = -2 \quad | \quad g'(0) = 0$$

❷ ايجاد a ، b و c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a(0)+b)e^0 + c = -2 \\ (a(0)+a+b)e^0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[(ax+b)e^x + c] = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c = -2 \\ a+b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

❸

أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] \times \lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

- التحقق من أن $1.2 < \alpha < 1.3$:

لدينا: $g(1.3) = 0.1$ و $g(1.2) = -0.3$

ولدينا: $g(1.3) \times g(1.2) < 0$

ومنه: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ (نهاية شهيرة)

<u>التفسير الهندسي:</u> المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = -\infty$$

❷

أ/ تبيين أنه: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(1-x)e^x + 1}{(e^x+1)^2} = \frac{-\left((x-1)e^x - 1\right)}{(e^x+1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$ ، ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2} < 0$

ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

❸ تعيين $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha)$$

$$= \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2}$$

$$= 0$$

<u>تفسير الهندسي:</u> المنحنى (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل.

❹ تبيين أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0;0)$ معناه:

$$f'(a)(0-a) + f(a) = 0$$
$$\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0$$
$$\Rightarrow a\frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a+1)^2} + \frac{a}{e^a+1} = 0$$
$$\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a+1) = 0$$
$$\Rightarrow a^2e^a = 0$$
$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = \frac{-g(0)}{(e^0+1)^2}x + \frac{0}{e^0+1}$$
$$y = \frac{1}{2}x$$

❺ تبيين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha = 1$$
$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha+1}$$
$$= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha}$$
$$= \alpha - 1$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$1.2 < \alpha < 1.3$$
$$0.2 < \alpha - 1 < 0.3$$
$$0.2 < f(\alpha) < 0.3$$

❻

أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x - xe^x - x}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x}{e^x+1}\right]$$
$$= 0$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x) - y]$:

$$f(x) - y = \frac{x}{e^x+1} - x$$
$$= \frac{x - xe^x - x}{e^x+1}$$
$$= \frac{-xe^x}{e^x+1}$$

لدينا $e^x > 0$ و $(e^x+1) > 0$

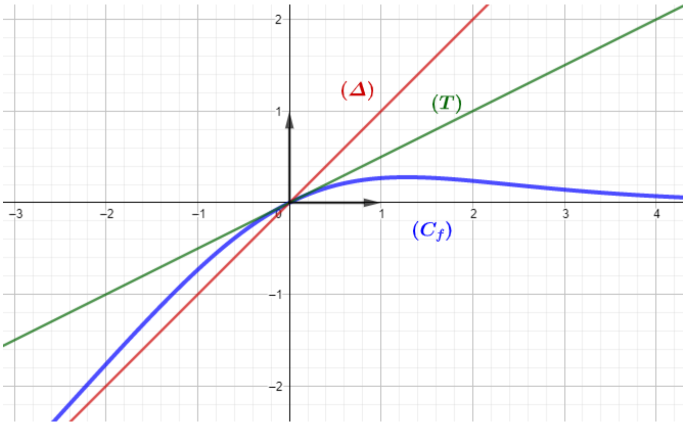
ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $]-\infty;0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0;+\infty[$

❼ التمثيل البياني:



❽ المناقشة البيانية:

لما	$m < 0$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب
لما	$m = 0$	المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما	$0 < m < \alpha$	المعادلة تقبل حلين موجبين
لما	$m = \alpha$	المعادلة تقبل حل مضاعف موجب
لما	$m > \alpha$	المعادلة لا تقبل حلولا

حل المسألة رقم: 04

مشاهدة المسألة

(I

❶

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x}+1-2e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$
$$= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما.

لدينا $f'(0) = 0$ أي المشتقة تنعدم ولا تغير اشارتها

ومنه نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف.

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}\right] = +\infty$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↗ $+\infty$

❷ برهان أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر لـ (C_f) :

- نثبت أن: $(2(0)-x) \in D_f$:

لدينا $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-x) \in \mathbb{R}$

- نثبت أن : $f(2(0)-x)+f(x) = 2(1)$:

لدينا:

$$f(2(0)-x)+f(x)$$
$$= -x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}+x-1+\frac{4}{e^x+1}$$
$$= -2+\frac{4}{e^{-x}+1}+\frac{4}{e^x+1}$$
$$= \frac{-2(e^{-x}+1)(e^x+1)+4(e^x+1)+4(e^{-x}+1)}{(e^{-x}+1)(e^x+1)}$$
$$= \frac{2[2(e^x+1)+2(e^{-x}+1)-(e^{-x}+1)(e^x+1)]}{(e^{-x}+1)(e^x+1)}$$
$$= \frac{2[2(e^x+e^{-x}+2)-(e^x+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^x+1)}$$
$$= \frac{2[2(e^x+e^{-x}+2)-(e^x+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^x+1)}$$
$$= \frac{2[e^x+e^{-x}+2]}{(e^{-x}+1)(e^x+1)}$$
$$= \frac{2[e^x+e^{-x}+2]}{e^x+e^{-x}+2}$$
$$= 2$$

ومنه النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحنى (C_f) .

❸

أ/ تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x+1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}\right] = 0$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x-1$.

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= 3$$

الاستنتاج:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 3 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]-3 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x-3]=0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

❹ تبيين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(-2.76)=0.001$

و $f(-2.77)=-0.3$

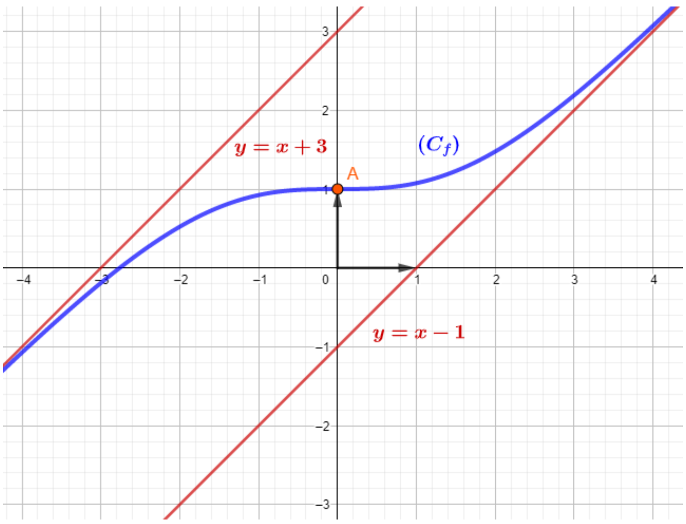
ولدينا: $f(-2.77)\times f(-2.76)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

❺ التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $(y=x-1)$ و $(y=x+3)$
- نعين نقطة A مركز تناظر المنحنى (C_f)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



II)

❶ اتجاه تغير الدالة g :

نلاحظ أن $g(x)=(f\circ\varphi)(x)$ حيث: $\varphi(x)=4x+1$

لدينا الدالة φ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=0$

$$=f(\alpha)$$
$$=0$$

- تبيين أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=4f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x)=4f'(4x+1)$ ومنه :

$$g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=4f'\left(4\frac{\alpha-1}{4}+1\right)$$
$$=4f'(\alpha)$$

❸ استنتاج معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$:

$$(T): y=g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$=4f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+0$$
$$=4f'(\alpha)x-f'(\alpha)(\alpha-1)$$

❹ التحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ: $y=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$:

لدينا:

$$f(\alpha)=0\Rightarrow \alpha-1+\frac{4}{e^\alpha+1}=0$$
$$\Rightarrow \frac{4}{e^\alpha+1}=1-\alpha$$
$$\Rightarrow e^\alpha=\frac{3+\alpha}{1-\alpha}$$

ومنه:

$$(T): y=4\left(\frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}-1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}+1}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$=4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4}$$
$$=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4}$$
$$=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$$

III)

❶ تبيين أن الدالة k زوجية :

لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$

ولدينا:

$$k(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$$

ومنه الدالة k زوجية.

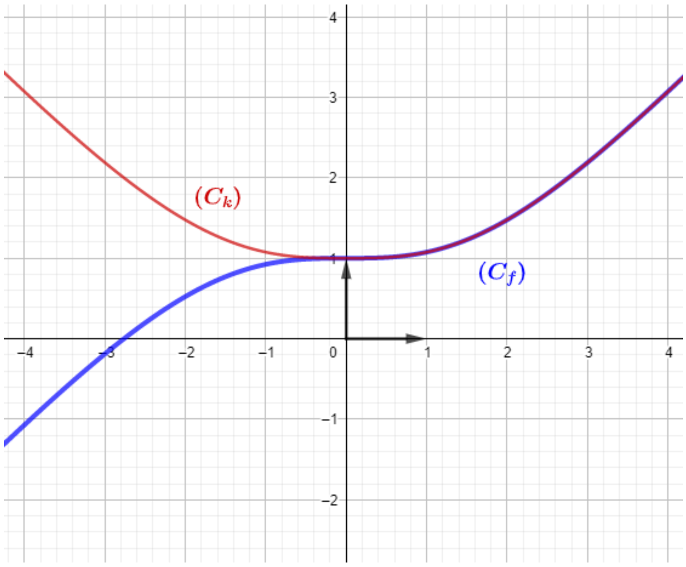
❷

أ/ تبيين كيفية تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) :

لمّا $x \geq 0$: (C_k) ينطبق على (C_f)

ولما $x \leq$: (C_k) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب

❸ التمثيل البياني لـ (C_k) :



(IV

❶ التحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$:

$$f(x) + 1 = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1$$
$$= x + \frac{4}{e^x + 1} = h(x)$$

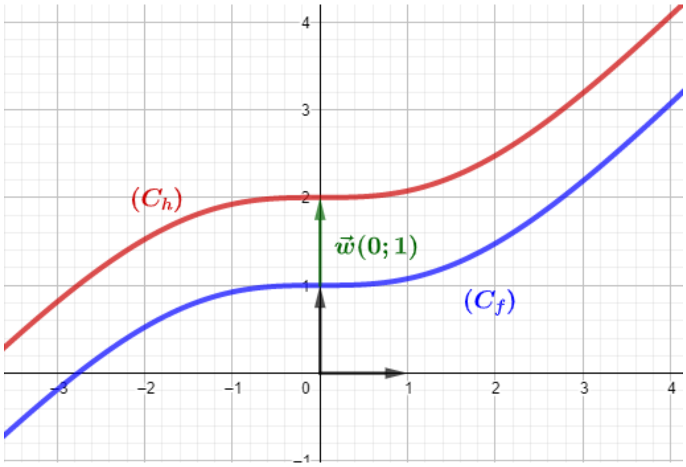
❷

أ/ استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) :

لدينا: $h(x) = f(x) + 1$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب $\vec{w}(0; 1)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :



(I

❶ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{-x}\right) = 0$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة g:

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-x} - e^{-x}(x-1) \\ &= e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x} \\ &= (2-x)e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا: $e^{-x} > 0$ ومنه الإشارة من $(2-x)$

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$2+e^{-2}$	↘ 2

❸ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال

$]-0.38; -0.37[$

ولدينا: $g(-0.37) \times g(-0.38) < 0$

لأن $g(-0.38) = -0.02$ و $g(-0.37) = 0.02$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.38 < \alpha < -0.37$

❹ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty}(-2t+1+te^{t}) = +\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{t\to-\infty}(te^{t}) = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\right) = +\infty$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x}-2x-1) \\ &= \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) = 0 \end{aligned}$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

(C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $y = 2x+1$ مقارب مائل له بجوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow -xe^{-x} = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

لأنّ: $e^{-x} > 0$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; 0[$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x = 0$ أي في النقطة ذات الاحداثيات $(0; 1)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$

❷ تبيين أنه $f'(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - e^{-x} + xe^{-x} \\ &= 2 + (x-1)e^{-x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $f'(x) = g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

وعليه:

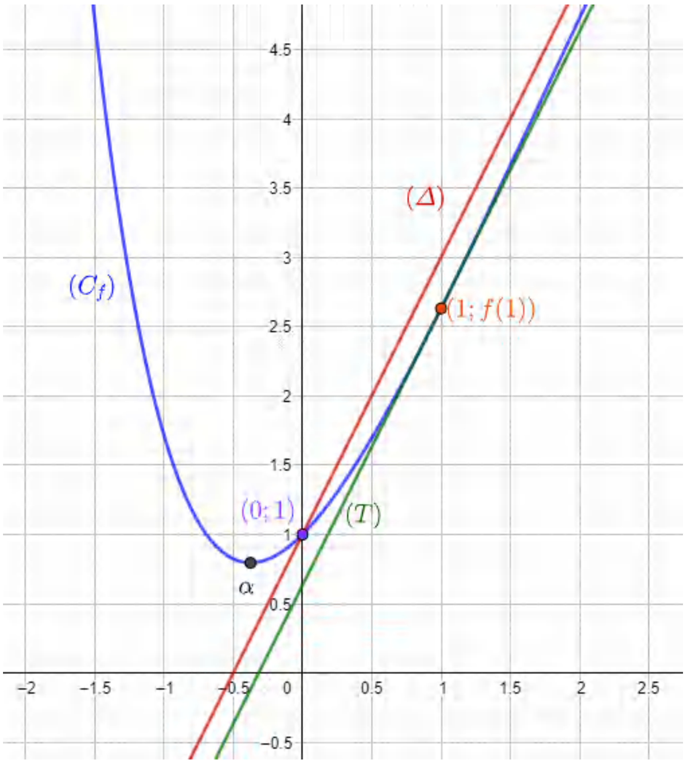
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

❸ كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= 2(x-1) + 3 - e^{-1} \\ &= 2x + 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

❹ التمثيل البياني:

- نعين النقطة $(0;1)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ)
- نرسم المستيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y = 2x+1$ باستعمال جدول القيم المساعدة.
- نعين النقطة $(1;f(1))$ نقطة تقاطع (C_f) مع المماس (T)
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة $2x+1-e^{-1}$ باستعمال جدول القيم المساعدة.
- باستعمال جدول التغيرات نكمل رسم (C_f) .



❺ المناقشة البيانية:

$$x = (1-m)e^x \Rightarrow xe^{-x} = 1-m$$
$$\Rightarrow -xe^{-x} = m-1$$
$$\Rightarrow -xe^{-x} + 2x+1 = m-1+2x+1$$
$$\Rightarrow -xe^{-x} + 2x + 1 = m + 2x$$
$$\Rightarrow f(x) = 2x - m$$

ومنه المناقشة وسيطية مائلة موازية لـ (T) و (Δ).

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع حامل محور الفواصل مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = 2x - m$ وهي:

- لما $-m < 1 - e^{-1}$ أي لما $m > e^{-1} - 1$
المعادلة لا تقبل حلول
- لما $-m = 1 - e^{-1}$ أي لما $m = e^{-1} - 1$
المعادلة تقبل جذر مضاعف
- لما $1 - e^{-1} < -m < 1$ أي لما $-1 < m < e^{-1} - 1$
المعادلة تقبل حلين موجبين تماما
- لما $-m = 1$ أي لما $m = -1$
المعادلة تقبل حل مضاعف
- لما $-m > 1$ أي لما $m < -1$
المعادلة تقبل حل وحيد سالب تماما

❶ دراسة تغيرات الدالة f' :

لدينا:

$$f'(x) = 2 - e^{x-1} - xe^{x-1}$$
$$= 2 - (1+x)e^{x-1}$$

ومنه ندرس تغيرات الدالة f' :

- النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f'(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f'(x)]$
$= 2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f'(x)]$
$= -\infty$

- حساب $f''(x)$:

$$f''(x) = -e^{x-1} - (1+x)e^{x-1}$$
$$= -(2+x)e^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $-(2+x)$:

$$-(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

ومنه:

- جدول تغيرات $f'(x)$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	2 ↗	$f'(-2)$	↘ $-\infty$

❷ حساب $f'(1)$:

$$f'(1) = 2 - (1+1) = 0$$

- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

❸ دراسة تغيرات الدالة f :

- النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^{x-1}] = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(\frac{2x}{e^{x-1}} + \frac{1}{e^{x-1}} - x\right)\right]$
$= -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{e^{x-1}}\right] = 0$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘ $-\infty$

❹

أ/ تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[2x + 1 - xe^{x-1} - 2x - 1]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[-xe^{x-1}]$$
$$= 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -xe^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $(-x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما : $x < 0$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات: $(0;1)$
- (C_f) تحت (Δ) لما : $x > 0$.

❺

أ/ تبيين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ):

المستقيم (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه:

$$f'(a) = 2 \Rightarrow 2 - (1+a)e^{a-1} = 2$$
$$\Rightarrow -(1+a)e^{a-1} = 0$$
$$\Rightarrow -(1+a) = 0$$
$$\Rightarrow a = -1$$

ومنه:

$$(T): y = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1)$$
$$= 2x + 2 + 2(-1) + 1 - (-1)e^{-1-1}$$
$$= 2x + 1 + e^{-2}$$

إذن معادلة المماس (T) هي :

$$y = 2x + 1 + e^{-2}$$

ب/ تبيين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(1.9) \times f(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.9; 2[$

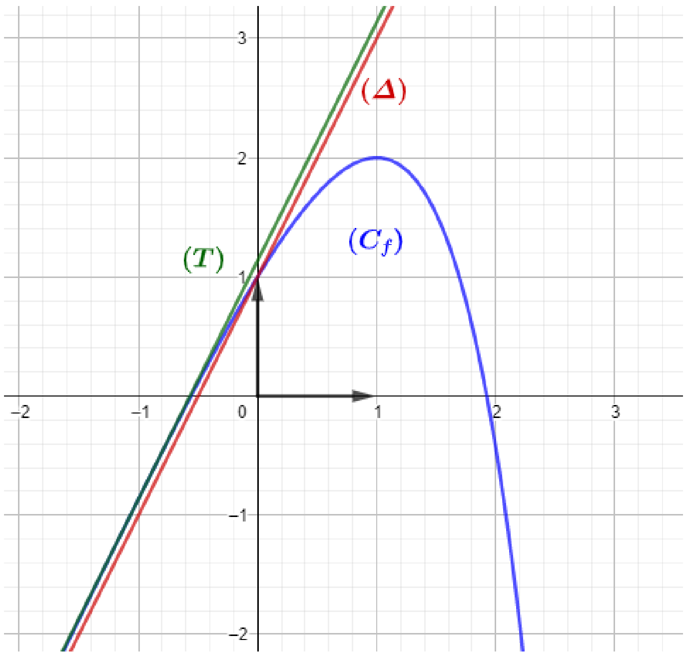
ولدينا: $f(-0.6) \times f(-0.5) <$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-0.6; -0.5[$

❻ التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين α و β نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- نرسم المستقيم المقارب المائل : $(y = 2x + 1)$.
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



❼ المناقشة البيانية:

لدينا: من المعادلة (E) : $m \in \mathbb{R}_+^*$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة:

$$y = 2x + \ln m$$

ومنه:

لما $\ln m < 1$ أي $m < e$ أي لما $m \in]0; e[$

المعادلة تقبل حل وحيد موجب تماما

- لما $\ln m = 1$ أي $m = e$

المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

- لما $1 < \ln m < 1 + e^{-2}$ أي $e < m < e^{1+e^{-2}}$

أي لما $m \in \left]e; e^{1+e^{-2}}\right[$

المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

- لما $\ln m = 1 + e^{-2}$ أي لما $m = e^{1+e^{-2}}$

المعادلة تقبل حل مضاعف

- لما $\ln m > 1 + e^{-2}$ أي $m > e^{1+e^{-2}}$

أي لما $m \in \left]e^{1+e^{-2}}; +\infty\right[$

المعادلة لا تقبل حلول

حل المسـألة رقم: 07

مشاهـدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g' :

- <u>النهايات:</u>

  - $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]=-1$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]=+\infty$

- <u>التفسير الهندسي للنهايات:</u>

منحنى الدالة g يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

- <u>حساب $g'(x)$:</u>

$$g'(x)=2e^x+(2x+1)e^x$$
$$=(2x+3)e^x$$

لدينا $e^x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+3)$:

$$2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

- <u>جدول تغيرات $g(x)$:</u>

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$f\left(\frac{-3}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

❷ حساب $g(0)$:

$$g(0)=(2(0)+1)e^0-1=0$$

- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

❶ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=+\infty$

❷

أ/ تبيين أنّ (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}[x(e^x-1)^2-x]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}[xe^{2x}+x-2xe^x-x]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}[xe^x(e^x-2)]$$
$$=0$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^x]=0$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

<u>دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$:</u>

$$f(x)-y=xe^x(e^x-2)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}xe^x=0\\ e^x-2=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ e^x=2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\ln 2\end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- <u>الوضعية:</u>

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]\ln 2\,;+\infty[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين $A(0;0)$ و $B(\ln 2\,;\ln 2)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x\in\,]0;\ln 2[$.

❸

أ/ تبيين أنه: $f'(x)=(e^x-1)g(x)$:

$$f'(x)=(e^x-1)^2+2xe^x(e^x-1)$$
$$=(e^x-1)(e^x-1+2xe^x)$$
$$=(e^x-1)(e^x(2x+1)-1)$$
$$=(e^x-1)g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في إشارة (e^x-1)

$$e^x-1=0\Rightarrow e^x=1$$
$$\Rightarrow x=\ln 1$$
$$\Rightarrow x=0$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

❹ كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

المماس يمر من المبدأ معناه:

$$f'(a)(0-a) + f(a) = 0$$
$$\Rightarrow -a(e^a - 1)g(a) + a(e^a - 1) = 0$$
$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-g(a) + (e^a - 1)] = 0$$
$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-(2a+1)e^a + 1 + e^a - 1] = 0$$
$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-2ae^a - e^a + 1 + e^a - 1] = 0$$
$$\Rightarrow -2a^2(e^a - 1)e^a = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2a^2 = 0 \\ e^a - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e^a = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \ln 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه:

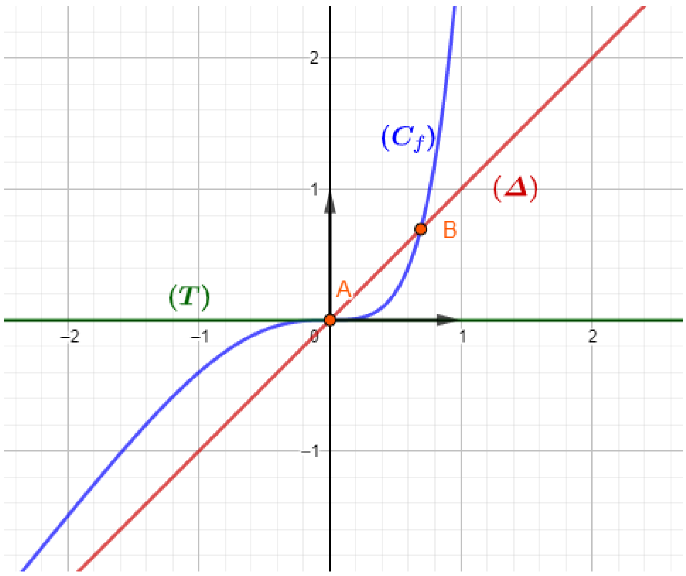
$$(T): y = f'(0)x + f(0)$$
$$y = 0x + 0$$
$$y = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مماس للمنحني (C_f) .

❺ التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) : $(y = x)$.
- نعين A و B نقط تقاطع المنحني (C_f) مع. (Δ)
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



❻ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = mx$ هل فواصل نقط تقاطع (C_f)

مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = mx$

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $x = 0$

لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m \geq 0$ المعادلة تقبل حلان: حل موجب تماما وحل معدوم

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

الخليل للرياضيات

حل المسـألة رقم: 08

مشاهـــدة المسألة

❶

أ/ تبيين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^{x}+1}$:

$$1 - \frac{1}{e^x+1} = \frac{e^x+1-1}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x}{e^x+1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$
$$= \frac{1}{1+e^{-x}}$$

ب/ استنتاج أن الدالة f فردية:

$$f(-x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{e^{-x}+1} - \frac{1}{e^{-x}+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{e^x+1} - 1$$
$$+ \frac{1}{e^x+1}$$
$$= -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x+1}$$
$$= -\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right)$$
$$= -f(x)$$

إذن الدالة f فردية

❷ حساب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$

❸

أ/ تبيين أنه : $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x+1)^2 + 4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{2x} - 1 - 2e^x + 4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{2x} - 1 + 2e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^{2x} + 1 - 2e^x)}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا $-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \leq 0$ ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

ب/ الاستنتاج:

المشتقة الأولى انعدمت ولم تغير اشارتها إذن المنحني (C_f)

يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $O(0;0)$

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا: $f(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

❹

أ/ تبيين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x+1\right)\right] = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x+1\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} + \frac{1}{2}x - 1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{e^x+1}\right]$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} + \frac{1}{2}x + 1\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2 - \frac{2}{e^x+1}\right]$$
$$= 2 - 2$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته:

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

ج/ درسة الوضع النسبي بين (C_f) و (d):

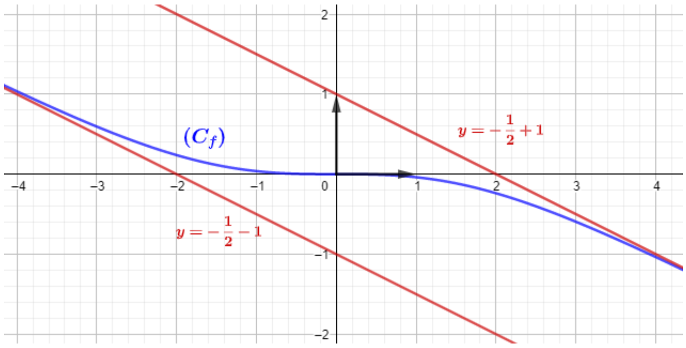
ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1$$
$$= \frac{-2}{e^x + 1}$$

لدينا: $(e^x + 1) > 0$ ومنه :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) - y$	$-$
الوضعية	(C_f) تحت (d)

❺ التمثيل البياني:



حل المسألة رقم: 09

مشاهـــدة المسألة

❶ تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}[x-2] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[e^x] = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right] = +\infty \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[x-2] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}\right] = -\infty \end{cases}$$

❷

أ/ تبيين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right] = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2}-4=0$:

$$e^{x-2}-4=0 \Rightarrow e^{x-2}=4$$
$$\Rightarrow x-2=\ln 4$$
$$\Rightarrow x=\ln 4+2$$

- تبيين أن (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty; 2+\ln 4[$ وتحته على المجال $]2+\ln 4\,;+\infty[$:

دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$:

$$f(x)-y = -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$$

لدينا $-\frac{1}{2}e^{x-2} < 0$ ولدينا:

$$e^{x-2}-4=0 \Rightarrow x=\ln 4+2$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\ln 4+2$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	$-$		$-$
$e^{x-2}-4$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x\in]-\infty; 2+\ln 4[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $2+\ln 4$
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x\in]2+\ln 4\,;+\infty[$

❸

أ/ تبيين أنه: $f'(x) = -(e^{x-2}-1)^2$:

$$f'(x) = -1-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)-\frac{1}{2}e^{2(x-2)}$$
$$= -\left(1+\frac{1}{2}e^{2(x-2)}-2e^{x-2}+\frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right)$$
$$= -(1+e^{2(x-2)}-2e^{x-2})$$
$$= -(e^{x-2}-1)^2$$

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x)\le 0$

ولدينا:

$$f'(x)=0 \Rightarrow -(e^{x-2}-1)^2=0$$
$$\Rightarrow (e^{x-2}-1)^2=0$$
$$\Rightarrow e^{x-2}-1=0$$
$$\Rightarrow e^{x-2}=1$$
$$\Rightarrow x-2=0$$
$$\Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

❹ حساب $f''(x)$:

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2}-1)$$

دراسة $f''(x)$:

لدينا $-2e^{x-2}<0$

ولدينا:

$$e^{x-2}-1=0 \Rightarrow x=2$$

ومنه:

الخليل للرياضيات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	$-$	0	$-$
$e^{x-2}-1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

المشتقة الثانية انعدمت وغيرت اشارتها معناه أن المنحنى

(C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 2

❺ اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$:

لدينا الدالة f رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(2+\ln 4)=-0.83$

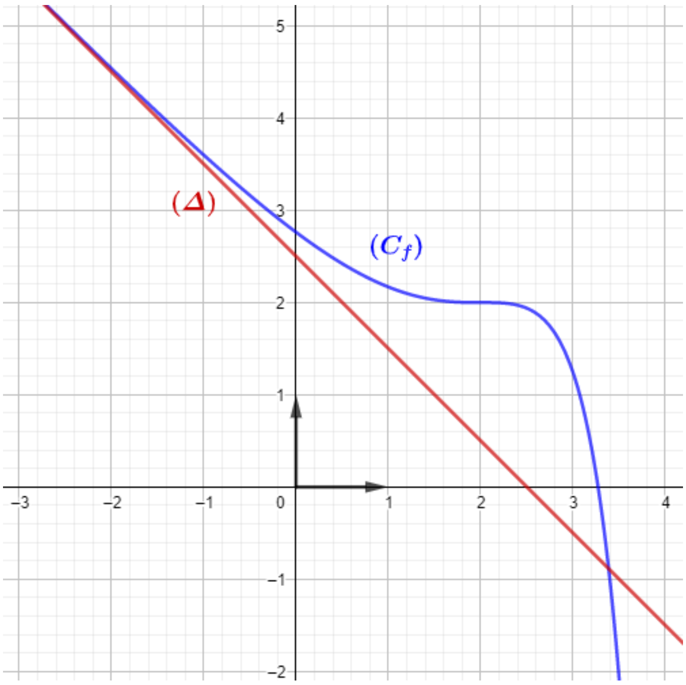
و $f(2+\ln 3)=0.93$

ولدينا: $f(2+\ln 4)\times f(2+\ln 3<0)$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2+\ln 3\,;2+\ln 4[$

❻ التمثيل البياني:



حل المسألة رقم: 10

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)\right] = +\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = e^x + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$:

ومنه:

- جدول تغيرات $g'(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷

أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-2.2) = -0.08$

و $g(-2.1) = 0.02$

ومنه: $g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶

أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \frac{1}{1} = 1$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $-\infty$.

ب/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$:

$$f(x) = \frac{1-xe^x}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}-x\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{e^x}-x}{\frac{1}{e^x}+1}$$
$$= \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$$

- حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}\right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e^x}\right] = 0$

❷ التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(-e^x - xe^x)(e^x+1) - e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x(1+x)(e^x+1) - e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x[-(1+x)(e^x+1) - (1-xe^x)]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x[-e^x - 1 - xe^x - x - 1 + xe^x]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x[e^x + x + 2]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$$

❸ دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(e^x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	1 ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

❹

❺

أ/ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-xe^x}{e^x+1}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-xe^x+xe^x+x}{e^x+1}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+x}{e^x+1}\right]$$
$$=0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) :

- دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$

$$f(x)-y=\frac{1+x}{e^x+1}$$

لدينا: $(e^x+1)>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1+x=0\Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]-\infty;-1[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;-1)$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]-1;+\infty[$.

❻

أ/ تبيين أن: $f(\alpha)=-(\alpha+1)$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0\Rightarrow e^\alpha+\alpha+2=0$$
$$\Rightarrow e^\alpha=-(\alpha+2)$$

ولدينا:

$$f(\alpha)=\frac{1-\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}$$
$$=\frac{1-\alpha(\alpha+2)}{-(\alpha+2)+1}$$
$$=\frac{\alpha^2+2a+1}{-(\alpha+1)}$$
$$=\frac{(\alpha+1)^2}{-(\alpha+1)}$$
$$=-(\alpha+1)$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$-2.2<\alpha<-2.1$$
$$-1.2<\alpha+1<-1.1$$
$$1.1<-(\alpha+1)<1.2$$

اذن:

$$1.1<f(\alpha)<1.2$$

ب/ تبيين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5<\beta<0.6$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(0.6)=-0.03$

و $f(0.5)=0.06$

ومنه: $f(0.4)\times f(0.6)<0$

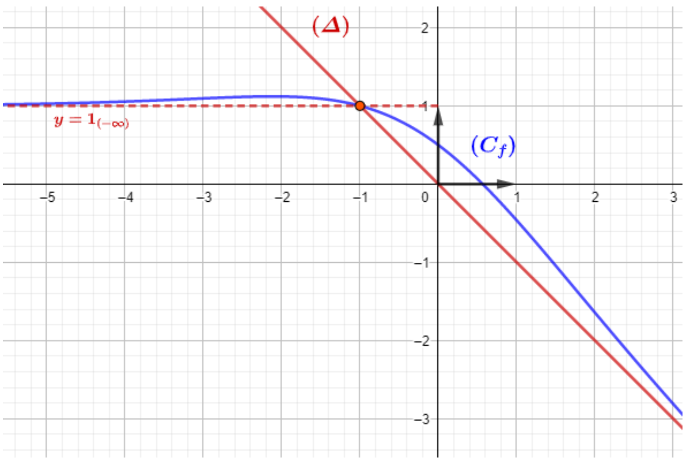
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال $]0.5;0.6[$

ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة β .

❼ التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و(C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $(y=-1)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ): $(y=-x)$
- نعين نقطة A تقاطع المنحنى (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



❽ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\ln m+(x+\ln x)e^x-1=0$$
$$\Rightarrow \ln m+xe^x+e^x\ln m-1=0$$
$$\Rightarrow \ln m\,(1+e^x)=1-xe^x$$
$$\Rightarrow \ln m=\frac{1-xe^x}{1+e^x}$$
$$\Rightarrow f(x)=\ln m$$

ومنه مجموعة الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=\ln m$

لما $\ln m < \frac{1}{2}$ أي $m < \sqrt{e}$

المعادلة تقبل حل وحيد موجب تماما

لما $\ln m = \frac{1}{2}$ أي $m = \sqrt{e}$ المعادلة

تقبل حل وحيد معدوم

لما $\frac{1}{2} < \ln m < 1$ أي $\sqrt{e} < m < e$ المعادلة

تقبل حل وحيد سالب تماما

لما $1 < \ln m < f(\alpha)$ أي $e < m < e^{f(\alpha)}$

المعادلة تقبل حلان سالبان تماما

لما $\ln m = f(\alpha)$ أي $m = e^{f(\alpha)}$ المعادلة

تقبل حل مضاعف سالب

لما $\ln m > f(\alpha)$ أي $m > e^{f(\alpha)}$ المعادلة

لا تقبل حلول

حل المسألة رقم: 11

مشاهدة المسألة

(I

❶ ايجاد عبارة $g(x)$ بدلالة x :

نضع: $x = t$ نجد:

$$g(t) - 2g(1-t) = e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$$
$$\Rightarrow\ -2g(1-t) = -g(t) + e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t) = g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3} \ldots (1)$$

نضع : $t = 1 - x$ معناه: $x = 1 - t$ ، نجد:

$$g(1-t) - 2g(1-1+t)$$
$$= e^{1-t} - 2e^{1-1+t} - 3(1-t) + 3$$
$$\Rightarrow g(1-t) - 2g(t) = e^{1-t} - 2e^t + 3t$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t) - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t} \ldots (2)$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 - 4g(t)$$
$$= 2e^{1-t} - 4e^t + 6t$$
$$\Rightarrow -3g(t) = -3e^t + 3t + 3$$
$$\Rightarrow g(t) = e^t - t - 1$$

إذن : $g(x) = e^x - x - 1$

❷

أ/ حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} [e^x - x - 1] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)\right] = +\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا: $g'(x) = e^x - 1$

ولدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة h:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

نضع: $u(x) = -x$

و $v(x) = g(u(x)) = g(-x)$

أي $v(x) = (g \circ u)(x)$

لدينا الدالة g متناقصة على المجال $\underbrace{]-\infty; 0]}_{I\text{ المجال}}$ والدالة u

متناقصة على المجال $\underbrace{[0; +\infty[}_{g(I)\text{ المجال}}$

كيف وجدنا المجال $g(I)$:

لدينا: $I =]-\infty; 0]$ و $u(x) \in I$

معناه $u(x) \leq 0$ أي $-x \leq 0$

ومنه $x \geq 0$ أي $x \in [0; +\infty[$

ومنه: $g(I) = [0; +\infty[$.

وبما أنّ الدالة g متناقصة على $]-\infty; 0]$

والدالة u متناقصة على $[0; +\infty[$

إذن الدالة k متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بنفس الفكرة نجد: الدالة k متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$

واضح أن: $g(-x) = k(x)$

أي: $-g(-x) = -k(x)$

وعليه: $-k(x)$ متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$

ومتناقصة على المجال $[0; +\infty[$

ولدينا: $h(x)$ و $-k(x)$ لهما نفس اتجاه التغير

لأن: $h(x) = 1 - k(x)$

اذن:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

❹ اثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β:

لدينا الدالة h مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $h(-1.14) \times h(-1.15) < 0$

لأنّ: $h(-1.14) = 0.01$

و $h(-1.15) = -0.08$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.15;-1.14[$

ولدينا: $h(1.84)\times h(1.85)<0$

لأنّ: $h(1.85)=-0.007$

و $h(1.84)=0.001$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1.84;1.85[$

اذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلين α و β

5 استنتاج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x :

إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات $g(x)$ لدينا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

إشارة $h(x)$:

من جدول تغيرات $h(x)$ لدينا:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II

1 حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+e^x-x-1}{1+e^x-x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]=\frac{-1}{+\infty}=0$$
- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}\right]=1$$

لأنّ: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$.

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$.

2

أ/ اثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{x+g(x)}{1+g(x)}$$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام كذلك.

ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- اثبات أن: $f'(x)=\frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$:

لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned}h(x)&=1-g(-x)\\&=1-e^{-x}-x+1\\&=2-x-e^{-x}\end{aligned}}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}\\&=\frac{e^x[e^x-x-(1-e^{-x})(e^x-1)]}{(e^x-x+1-1)^2}\\&=\frac{e^x(e^x-x-e^x+1+1-e^{-x})}{\left(1+g(x)\right)^2}\\&=\frac{e^x(2-x-e^{-x})}{\left(1+g(x)\right)^2}\\&=\frac{e^x h(x)}{\left(1+g(x)\right)^2}\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $e^x>0$ و $\left(1+g(x)\right)^2>0$

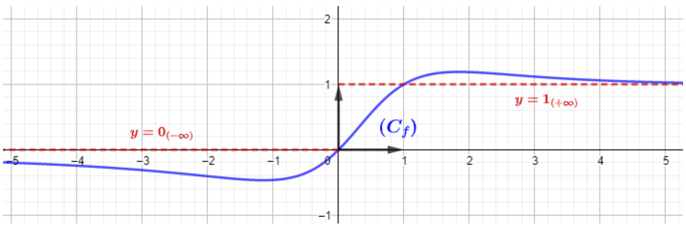
ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

ولدينا $f(0)=0$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

3 التمثيل البياني:



حل المسألة رقم: 12

مشاهدة المسألة

❶ تعيين مجموعة تعريف الدالة f :

الدالة f معرفة لما : $e^x + 1 \neq 0$

ولدينا $e^x + 1 > 0$

ومنه الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

❷

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = 0$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+1}$:

لدينا:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

ج/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right] = 1$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

① اثبات أن الدالة f متزايدة تماما:

- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

❸ تبيين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f):

- نبيّن أن $(2(0) - x) \in D_f$:

واضح أنّ $(-x) \in \mathbb{R}$

- نبيّن أن $f(2(0)-x) + f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$f(2(0)-x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{e^x(e^{-x}+1) + e^{-x}(e^x+1)}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} = \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1} = \frac{2}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

❹ تعيين معادلة (T) عند النقطة A :

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{e^0}{(e^0+1)^2}x + \frac{e^0}{e^0+1} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

❺

أ/ تحليل العبارة: $e^{2x} - 2e^x + 1$:

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x-1)^2$$

ب/ حساب $g'(x)$ و $g(0)$

$$\bullet\ g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{4(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{4(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1-2e^x}{4(e^x+1)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

ولدينا:

- $g(0) = 0$

- دراسة تغيرات الدالة g :

حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)\right]$
$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right] - \lim_{x\to-\infty}[f(x)]$
$= -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)\right]$
$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right] - \lim_{x\to+\infty}[f(x)]$
$= +\infty$

لدينا: $g'(x) \geq 0$

ولدينا:

$$(e^x-1)^2 = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

ج/ استنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) والمماس (T) :

لدينا:

$$g(x) = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) - \left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right) = -g(x)$$

ومنه الوضعية من إشارة $-g(x)$:

لدينا من جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

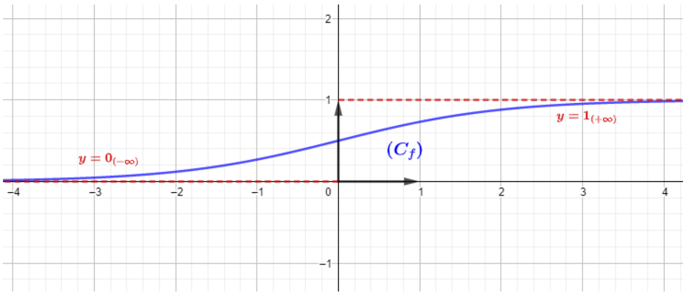
- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-\infty; 0[$.
- (C_f) يقطع (T) في النقطة A .
- (C_f) فوق (T) لما $x \in]0; +\infty[$.

❻ التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- نعين نقطة A تقاطع (C_f) مع (T)
- نرسم المماس (T)

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



الخليل للرياضيات

حل المسـألة رقم: 13

مشاهـــدة المسألة

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

  - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 + 2e^{x} = 2(1 + e^{x})$$

لدينا: $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α:

لدينا: الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[-0.8; -0.7]$

ولدينا: $g(-0.7) \times g(-0.8) < 0$

لأنّ $g(-0.8) \approx -0.2$ و $g(-0.7) \approx 0.09$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا في المجال $]-0.8; -0.7[$

❸ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

❶

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{e^{-2x}}_{+\infty}\left(\underbrace{e^{2x}}_{0} - \underbrace{\frac{2x}{2}e^{2x}}_{0} + \underbrace{x+1}_{-\infty}\right)\right)$$

$$= -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \underbrace{x}_{+\infty} - \frac{1}{2}\underbrace{(-2x)e^{-2x}}_{0} + \underbrace{e^{-2x}}_{0}\right)$$

$$= -\infty$$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to+\infty}[(x+1)e^{-2x}]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\underbrace{(-2x)e^{-2x}}_{0} + \underbrace{e^{-2x}}_{0}\right]$$

$$= 0$$

إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته

$y = -x + 1$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow (x+1)e^{-2x} = 0$$
$$\Rightarrow x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = -1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$.
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = -1$.
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; +\infty[$.

❷

أ/ تبيين أنه: $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$

$$f'(x) = -1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}(x+1)$$
$$= -1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$
$$= -(1 + e^{-2x} + 2xe^{-2x})$$
$$= -(e^{2x} + 1 + 2x)e^{-2x}$$
$$= -g(x)e^{-2x}$$

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

لدينا $e^{-2x} > 0$، إذن إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

ج/ تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2:

- لدينا: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1.2; -1.1]$

ولدينا: $f(-1.1) \times f(-1.2) < 0$

لأنّ: $f(-1.2) \approx -0.8$ و $f(-1.1) \approx 0.05$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا x_1 في المجال $]-1.2; -1.1[$

- لدينا: الدالة f مستمرة متناقصة تماما على المجال $[1.1; 1.2]$

ولدينا: $f(1.1) \times f(1.2) < 0$

لأنّ: $f(1.2) \approx -0.023$ و $f(1.1) \approx 0.13$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 في المجال $]1.1;1.2[$

❸ تبيين أنّ $f(\alpha)=-\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}$:

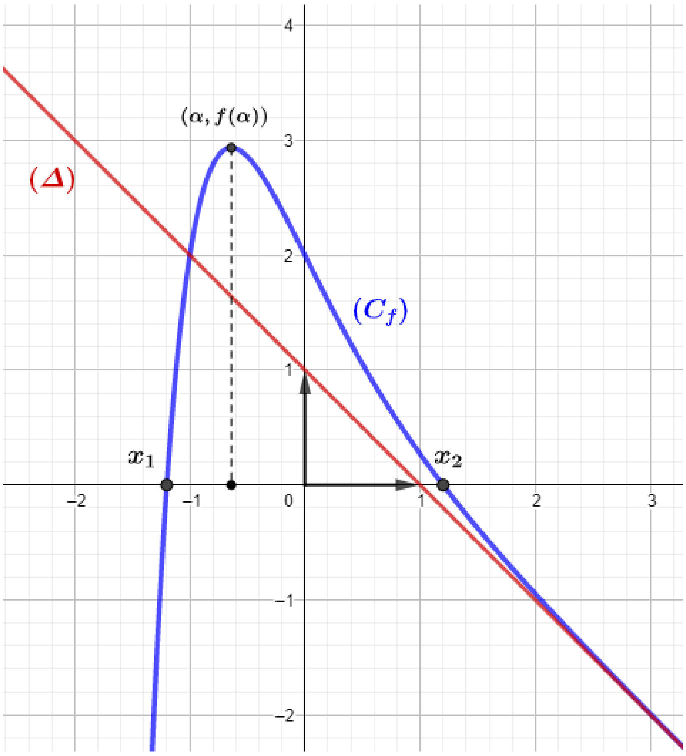
لدينا: $g(\alpha)=0$ أي: $e^{2\alpha}+1+2\alpha=0$

ومنه: $e^{2\alpha}=-1-2\alpha$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 1-\alpha+(\alpha+1)e^{-2\alpha} \\ &= 1-\alpha+\frac{\alpha+1}{e^{2\alpha}} \\ &= 1-\alpha+\frac{\alpha+1}{-1-2\alpha} \\ &= \frac{-1-2\alpha+\alpha+2\alpha^2+\alpha+1}{-(1+2\alpha)} \\ &= -\frac{2\alpha^2}{1+2\alpha} \end{aligned}$$

❹ التمثيل البياني:



❺ المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned} &(1-m-x)e^{2x}+x+1=0 \\ &\Rightarrow (1-m-x)e^{2x}=-(x+1) \\ &= 1-m-x=-(x+1)e^{-2x} \\ &\Rightarrow -m \Rightarrow -1+x-(x+1)e^{-2x} \\ &\Rightarrow m=1-x+(x+1)e^{-2x} \\ &\Rightarrow m=f(x) \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=m$

وهي:

لما $m<2$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

لما $m=2$ المعادلة تقبل حل معدوم وحل سالب

لما $2<m<f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

لما $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب تماما

لما $m>f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول

حل المسألة رقم: 14

مشاهدة المسألة

I)

❶ حساب نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$:

- $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{3e^x}_{0} - \underbrace{2xe^x}_{0} + 2\right) = 2$$
- $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة g:

$$g'(x) = -2e^x + (3-2x)e^x$$
$$= (1-2x)e^x$$

لدينا: $e^x > 0$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-2x)$:

$$1-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

❸ تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1.6;1.7]$:

لدينا: الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1.6;1.7]$

ولدينا: $g(1.6)\times g(1.7) < 0$

لأنّ $g(1.6)\approx 1.01$ و $g(1.7)\approx -0.19$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1.6;1.7[$

❹ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = \frac{e^x+4x-1}{e^x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

❶

أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

ب/ تبيين أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+4e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$

❷ اثبات أنه: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(e^x+4)(e^x+1) - e^x(e^x+4x-1)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x}+5e^x+4-e^{2x}-4xe^x+e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{6e^x+4-4xe^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{2\left((3-2x)e^x+2\right)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$$

❸ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $(e^x+1)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

❹

أ/ تبيين أنّ (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(4x-1)]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+4x-1-(4x-1)(e^x+1)}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+4x-1-4xe^x-4x+e^x+1}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2e^x-4xe^x}{e^x+1}\right]$$
$$= 0$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[-4xe^{x}]=0$

إذن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=0 \Rightarrow \frac{2e^{x}-4xe^{x}}{e^{x}+1}=0$$
$$\Rightarrow 2e^{x}(1-2x)=0$$
$$\Rightarrow 1-2x=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$+$	0	$-$

- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=\frac{1}{2}$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

❺ كتابة معادلة (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)}=f'(0)x+f(0)$$
$$=\frac{5}{2}x$$

❻ تبيين أنّ $f(\alpha)=4\alpha-5$

لدينا: $g(\alpha)=0$

ومنه: $(3-2\alpha)e^{\alpha}+2=0$

إذن: $e^{\alpha}=\frac{2}{2\alpha-3}$

ولدينا:

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}+4\alpha-1}{e^{\alpha}+1}$$
$$=\frac{\frac{2}{2\alpha-3}+4\alpha-1}{\frac{2}{2\alpha-3}+1}$$
$$=\frac{\frac{2+8\alpha^{2}-12\alpha-2\alpha+3}{2\alpha-3}}{\frac{2+2\alpha-3}{2\alpha-3}}$$
$$=\frac{8\alpha^{2}-14\alpha+5}{2\alpha-1}$$
$$=\frac{8\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\alpha-\frac{5}{4}\right)}{2\alpha-1}$$
$$=\frac{(2\alpha-1)(4\alpha-5)}{2\alpha-1}$$
$$=4\alpha-5$$

- حصر العدد $f(\alpha)$:

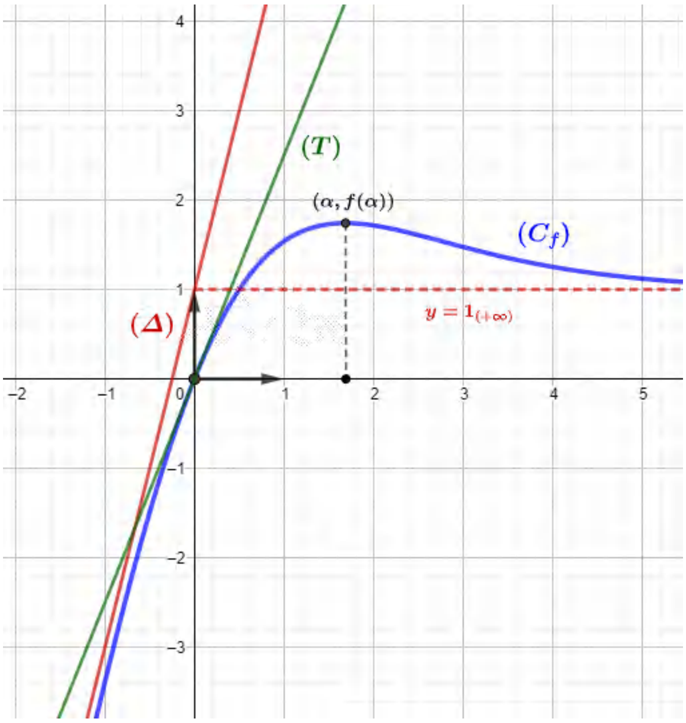
لدينا: $1.6<\alpha<1.7$

ومنه: $6.4<4\alpha<6.8$

ومنه: $1.4<4\alpha-5<1.8$

إذن: $1.4<f(\alpha)<1.8$

❼ رسم كل من (T)، (Δ) و (C_f):



حل المسألة رقم: 15

مشاهـــدة المسألة

I) - حساب $g(1)$:

$$g(1) = 1^2e^1 - e = 0$$

- تعيين إشارة $g(x)$:

من البيان نجد:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

- استنتاج إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II)

❶ حساب النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = +\infty$
- $\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$

بعد حساب النهايات نجد أن المنحني (C_f) يقبل:

- مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 0$
- مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = -2$

❷ تبيين أن (γ) و (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - y_{(\gamma)}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} - e^{-x} + 2\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e}{x}\right) = 0$$

- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ):

$$f(x) - y_{(\gamma)} = -\frac{e}{x}$$

إشارة الفرق عكس إشارة $(-x)$ ومنه:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y_{(\gamma)}$		$+$	||	$-$	

الوضعية:

- (C_f) فوق (γ) لما $x \in]-\infty; 0[$
- (C_f) تحت (γ) لما $x \in]0; +\infty[$

❸ تبين أنّ: $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$:

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2e^{-x} + e}{x^2}$$
$$= -\frac{(x^2e^{-x} - e)}{x^2}$$
$$= -\frac{g(-x)}{x^2}$$

❹ استنتاج تغيرات الدالة f

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$ لأنّ $x^2 > 0$

ولدينا إشارة $(g(-x))$ كالآتي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

ومنه إشارة $(-g(-x))$ كالآتي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-g(-x)$		$-$	0	$+$	

إذن

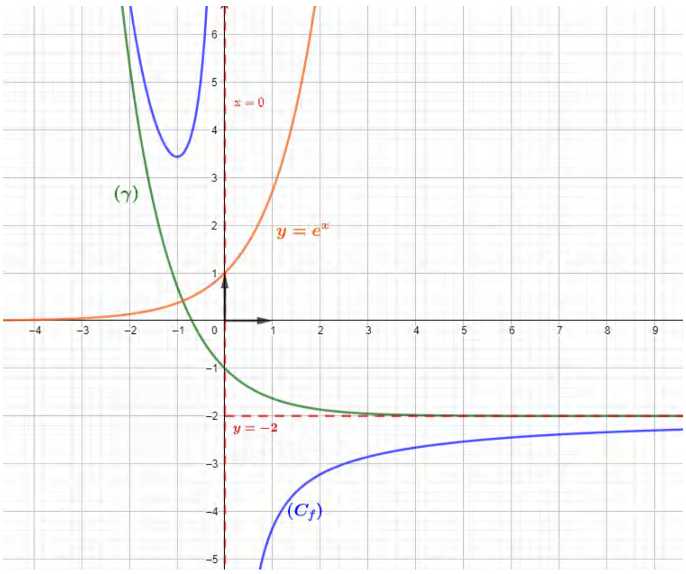
- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-2

❺ تبيين كيف يمكن إنشاء (γ) :

نرسم منحنى الدالة $x \longmapsto e^x$ ثم نناظره بالنسبة لمحور التراتيب، ثم نسحبه بالانسحاب الذي شعاعه $(0; -2)$

- التمثيل البياني:



حل المسألة رقم: 16

مشاهدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g،وتشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

• $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ • $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$f'(x) = e^x + 1 > 0$$

لدينا: $f'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷ تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

• لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-1.28; -1.27[$

• ولدينا: $g(-1.28) \times g(-1.27) < 0$ لأنّ

$g(-1.28) \approx -0.001$ و $g(-1.27) = 0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حل وحيدا α في المجال $]-1.28; -1.27[$

❸ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶ حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{(x+2)}_{-\infty}\underbrace{(1-e^{-x})}_{-\infty}\right] = +\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{(x+2)}_{+\infty}\underbrace{(1-e^{-x})}_{1}\right] = +\infty$

❷

أ/ تبيين أنه : $f'(x) = g(x)e^{-x}$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 - e^{-x} - (-e^{-x})(x+2)\\ &= 1 - e^{-x} + xe^{-x} + 2e^{-x}\\ &= 1 + e^{-x} + xe^{-x}\\ &= \left(\frac{1}{e^{-x}} + 1 + x\right)e^{-x}\\ &= (e^x + 1 + x)e^{-x}\\ &= g(x)e^{-x}\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f:

لدينا: $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

❸ تعيين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$:

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right) = f'(\alpha) = g(\alpha)e^{-\alpha} = 0$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة α معادلته $y = f(\alpha)$

❹

أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$

مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x+2)]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[(x+2)(1-e^{-x}) - (x+2)]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[(x+2)(1-e^{-x}-1)]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[-e^{-x}(x+2)]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{-xe^{-x}}_{0} - 2e^{-x}\right]\end{aligned}$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

$$\begin{aligned}f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow -e^{-x}(x+2) = 0\\ &\Rightarrow -(x+2) = 0\\ &\Rightarrow x = -2\end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$+$	0	$-$

• (C_f) فوق (Δ) لما $x \in \ ]-\infty; -2[$

• (C_f) يقطع (Δ) لما $x = -2$

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in \ ]-2; +\infty[$

❺

أ/ اثبات أنه يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي (Δ):

يوجد مماس وحيد يوزي (Δ) معناه يوجد عدد حقيقي وحيد a يحقق: $f'(a) = 1$

$$\begin{aligned}f'(a) = 1 &\Rightarrow e^{-a}(e^a + a + 1) = 1\\ &\Rightarrow e^a + a + 1 = e^a\\ &\Rightarrow a + 1 = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = -1$$

ب/ التحقق أن معادلة (T) هي: $y_{(T)} = x + 2 - e$:

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1) \\ &= 1(x+1) + (1)(1-e) \\ &= x + 1 + 1 - e \\ &= x + 2 - e \end{aligned}$$

❻

أ/ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$:

لدينا: $g(\alpha) = 0$

ومنه: $e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0$

إذن: $e^{\alpha} = -(\alpha + 1)$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (\alpha+2)(1-e^{-\alpha}) \\ &= \frac{(\alpha+2)(1-e^{-\alpha})e^{\alpha}}{e^{\alpha}} \\ &= \frac{(\alpha+2)(e^{\alpha}-1)}{e^{\alpha}} \\ &= \frac{(\alpha+2)(-\alpha-1-1)}{-(\alpha+1)} \\ &= \frac{(\alpha+2)(\alpha+2)}{\alpha+1} \\ &= \boxed{\frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}} \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-1.28 < \alpha < -1.27$

إذن: $-1.97 < f(\alpha) < -1.85$

أ/ ايجاد نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(1-e^{-x}) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ \text{أو} \\ 1 - e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ e^{-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ x = 0 \end{cases}$$

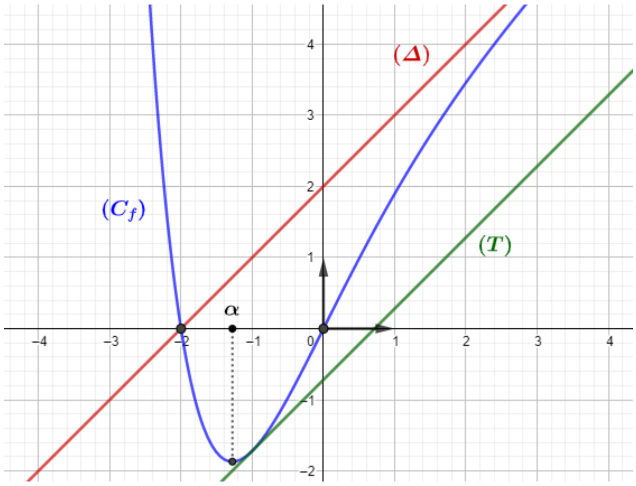
إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{-2; 0\}$

- مع حامل محور التراتيب:

$f(0) = 0$

إذن: $(C_f) \cap (yy') = \{0\}$

ب/ التمثيل البياني:



❼ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x} \Rightarrow m - 2 = -e^{-x}(x+2)$$
$$\Rightarrow m = -e^{-x}(x+2) + 2$$
$$\Rightarrow m + x = -e^{-x}(x+2) + 2 + x$$
$$\Rightarrow m + x = (x+2)(1-e^{-x})$$
$$\Rightarrow m + x = f(x)$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x + m$

وهي:

لما	$m < 2 - e$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = 2 - e$	المعادلة تقبل حل وحيد
لما	$2 - e < m < 2$	المعادلة تقبل حلين متمايزين
لما	$m \geq 2$	المعادلة تقبل حل وحيد

(III

❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية

❶ شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \ x > 0 \\ f(-x) & ; \ x < 0 \end{cases}$$

لما $x > 0$ (C_h) ينطبق على (C_f)، وبما أنّ الدالة h زوجية، فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

الخليل للرياضيات

حل المسألة رقم: 17

مشاهـــدة المسألة

I)

❶

أ/ حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2e^x - 2x - 1$$

- دراسة اتجاه تغير الدالة g' :

• النهايات:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2e^x - 2x - 1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{2e^x}\right)\right)$

$= +\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2e^x - 2x - 1)$

$= +\infty$

• دراسة $g''(x)$:

$g''(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - 2 = 0$

$\Rightarrow e^x = 1$

$\Rightarrow x = 0$

ومنه:

• جدول تغيرات الدالة g':

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

ب/ تبيين أنه، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $g'(x) > 0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g' تبلغ قمة حدية صغرى عند 0 و $g'(0) = 1$

ومنه فهي موجبة تماما أي $g'(x) > 0$

ج/ حساب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2e^x - x^2 - x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x\left(2 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x}\right)\right)$

$= +\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^n}{e^x}\right) = 0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2e^x - x^2 - x)$

$= -\infty$

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-1.38) \times g(-1.37) < 0$

لأنّ: $g(-1.38) \approx -0.02$

وَ $g(-1.37) \approx 0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.38 < \alpha < -1.37$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2e^x}{e^x - x}\right) = 0$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^ne^x) = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2e^x}{e^x - x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{1 - xe^{-x}}\right) = +\infty$

ب/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2xe^x + x^2e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{2xe^{2x} - 2x^2e^x + x^2e^{2x} - x^3e^x - x^2e^{2x} + x^2e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{xe^x(2e^x - x^2 - x)}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{xe^xg(x)}{(e^x - x)^2}$$

الخليل للرياضيات

ج/ دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}=0$$

لدينا: $\frac{e^x}{(e^x-x)^2}>0$

ومنه الإشارة من $xg(x)$، وعليه:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

❷

أ/ تبيين أنّ $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$:

لدينا:

$$g(x)=0 \Rightarrow g(\alpha)=0$$
$$\Rightarrow 2e^\alpha-\alpha^2-\alpha=0$$
$$\Rightarrow e^\alpha=\frac{\alpha^2+\alpha}{2}$$

ومنه:

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2e^\alpha}{e^\alpha-\alpha}$$
$$=\frac{\alpha^2\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha\right)}$$
$$=\frac{\alpha^4+\alpha^3}{\alpha^2+\alpha-2\alpha}$$
$$=\frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$$
$$=\frac{\alpha^3-\alpha^2+2\alpha^2}{\alpha-1}$$
$$=\frac{\alpha^3-\alpha^2+2\alpha^2}{\alpha-1}$$
$$=\frac{\alpha^3-\alpha^2+2\alpha^2-2\alpha+2\alpha-2+2}{\alpha-1}$$
$$=\frac{\alpha^3-\alpha^2}{\alpha-1}+\frac{2\alpha^2-2\alpha}{\alpha-1}+\frac{2\alpha-2}{\alpha-1}+\frac{2}{\alpha-1}$$
$$=\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{\alpha-1}+\frac{2\alpha(\alpha-1)}{\alpha-1}+\frac{2(\alpha-1)}{\alpha-1}+\frac{2}{\alpha-1}$$
$$=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$$

- حصر العدد $f(\alpha)$:

لدينا:

$$-1.38<\alpha<-1.37 \Rightarrow 1.37<-\alpha<1.38$$
$$\Rightarrow 1.37^2<\alpha^2<1.37^2$$

ولدينا:

$$-1.38<\alpha<-1.37 \Rightarrow -2.76<2\alpha<-2.74$$
$$\Rightarrow -0.76<2\alpha+2<-0.74$$

ولدينا:

$$-1.38<\alpha<-1.37 \Rightarrow -2.38<\alpha-1<-2.37$$
$$\Rightarrow \frac{1}{-2.37}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{-2.38}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{-2.37}<\frac{2}{\alpha-1}<\frac{2}{-2.38}$$

ومنه:

$$1.37^2-0.76+\frac{2}{-2.37}<\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$$
$$<1.37^2-0.74+\frac{2}{-2.38}$$

أي: $0.273<f(\alpha)<0.324$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$:

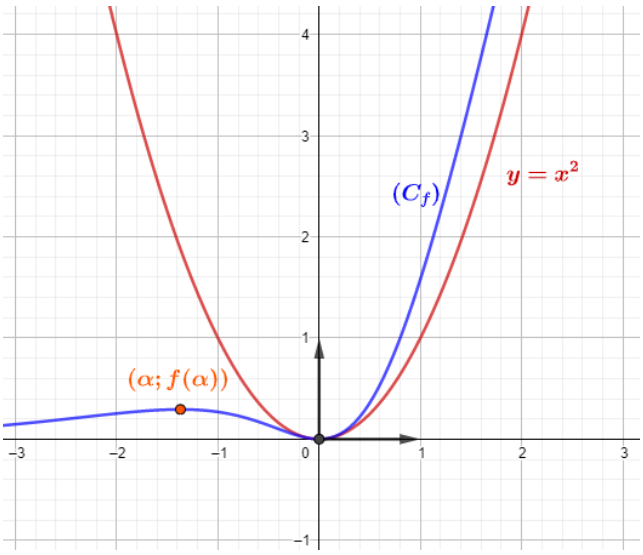
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{e^x-x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3e^{-x}}{1-xe^{-x}}\right]$$
$$=\frac{0}{1}=0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^ne^x]=0$

- تفسير النتيجة بيانيا:

منحنى الدالة f يقارب منحنى الدالة مربع $x\longmapsto x^2$ بجوار $+\infty$

ج/ انشاء المنحنى (C_f) :



18 حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I

❶

أ/ كتابة معادلة للمستقيم (d):

المستقيم (d) مستقيم تآلفي ميله (-1) لأنه موازي للمنصف الثاني، ويمر من الترتيبة 1

إذن: $y_{(d)} = -x + 1$

ب/ تعيين $g(-1)$، $g(0)$ و $g'(0)$

$$g(-1) = 0$$
$$g(0) = 1$$
$$g'(0) = -1$$

ج/ تبيين أنّ $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$:

لدينا: $g(0) = 1$

ومنه: $(a + b(0)^2)e^{-0} = 1$

إذن: $a = 1$

ولدينا: $g(-1) = 0$

ومنه: $(1 + b(-1)^2)e^{-(-1)} = 0$

ومنه: $1 + b = 0$

إذن: $b = -1$

وعليه: $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

❷ تعيين إشارة $g(x)$ حسب قيم x:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❸

أ/ حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[\underbrace{(1+x)^2}_{+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{+\infty} \right] = +\infty$$

ب/ علما أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$، تبيين أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [(1 + x + x^2)e^{-x}]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{e^{-x}}_{0} + \underbrace{xe^{-x}}_{0} + \underbrace{x^2 e^{-x}}_{0} \right]$$
$$= 0$$

• التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم حامل محور الفواصل كمقارب أفقي بجوار $+\infty$

❹

أ/ تبيين أنّه من أجل كل x حقيقي: $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = 2(1+x)e^{-x} - (1+x)^2 e^{-x}$$
$$= e^{-x}(1+x)(2 - 1 - x)$$
$$= e^{-x}(1+x)(1-x)$$
$$= e^{-x}(1-x^2)$$
$$= g(x)$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f:

لدينا: $f'(x) = g(x)$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

ج/ استنتاج أن الدالة f موجبة على $\mathbb{R}$:

من جدول التغيرات: أقصى قيمة حدية صغرى تبلغها الدالة f هي 0، ومنه فالدالة f موجبة على $\mathbb{R}$

❺

أ/ تعيين دون حساب $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \right)$:

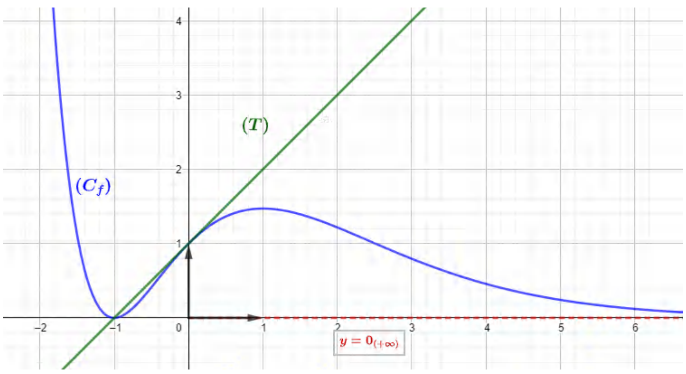
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0)$$
$$= g(0) = 1$$

• التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه 1

ب/ كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)} = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$= x + 1$$

❻ التمثيل البياني:



❼ المناقشة البيانية:

$$(1+x)^2 = me^x \Rightarrow (1+x)^2 e^{-x} = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$، وهي:

لما	$m < 0$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = 0$	المعادلة تقبل حل مضاعف سالب قيمته -1
لما	$0 < m < 1$	المعادلة تقبل حل موجب وحلين سالبين
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب
لما	$1 < m < 4e^{-1}$	المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب
لما	$m = 4e^{-1}$	المعادلة تقبل حل سالب وحل مضاعف موجب قيمته 1
لما	$m > 4e^{-1}$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب

(II

❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية

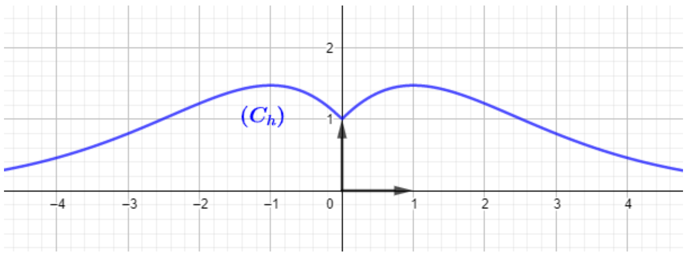
❷ شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \ x > 0 \\ f(-x) & ; \ x < 0 \end{cases}$$

لما $x > 0$ (C_h) ينطبق على (C_f)، وبما أنّ الدالة h زوجية، فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

- إنشاء (C_h):



حل المسألة رقم: 19

مشاهـــدة المسألة

(I

❶

أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$:

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+(x^2+x-1)e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} (1+x^2e^{-x}) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (1+(x^2+x-1)e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} (1+x^2e^{-x}) = +\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x+1)e^{-x} - e^{-x}(x^2+x-1) \\ &= 2xe^{-x} + e^{-x} - x^2e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x} \\ &= e^{-x}(-x^2+x+2) \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow e^{-x}(-x^2+x+2) = 0 \\ &\Rightarrow -x^2+x+2 = 0 \end{aligned}$$

لدينا $\Delta = 1-4(-1)(2) = 9$ ومنه:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{-2} = -1 \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	1

❷

أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(0) &= 1+(0^2+0-1)e^{-0} \\ &= 1-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل معدوم لأنّ $g(0) = 0$

ولدينا : $g(-1.52) \times g(-1.51) < 0$

لأنّ: $g(-1.52) \approx 0.04$

وَ $g(-1.51) \approx -0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حل وحيد في المجال $]-1.52;-1.52[$.

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلين حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.52 < \alpha < -1.51$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(II

❶

أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [-x+(x^2+3x+2)e^{-x}] = \lim_{x\to+\infty} [-x+(x^2)e^{-x}] = -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [-x+(x^2+3x+2)e^{-x}] = \lim_{x\to-\infty} [-x+(x^2)e^{-x}] = +\infty$

ب/ تبيين أنه من أجل عدد حقيقي x، $f'(x) = -g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1+(2x+3)e^{-x} - e^{-x}(x^2+3x+2) \\ &= -1+e^{-x}(-x^2-x+1) \\ &= -[1+e^{-x}(x^2+x-1)] \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

وعليه:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0.38	↗	$f(0)$	↘	$-\infty$

د/ تعيين دون حساب $\lim_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(\alpha)}{h}$:

$$\lim_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(\alpha)}{h} = f'(0) = -g(0) = 0$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

(C_f) يقبل مماس مواز لمحور الفواصل معادلته $y = f(\alpha)$.

❷

الخليل للرياضيات

أ/ تبيين أن (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) عند $+\infty$:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_{(\Delta)}]\\&=\lim_{x\to+\infty}[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}-(-x)]\\&=\lim_{x\to+\infty}[(x^2+3x+2)e^{-x}]\\&=0\end{aligned}$$

ومنه قيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=0\Rightarrow e^{-x}(x^2+3x+2)=0$$
$$\Rightarrow x^2+3x+2=0$$

لدينا: $\Delta=3^2-4(2)(1)=1$

ومنه:

$$f(x)-y_{(\Delta)}=0\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-3+1}{2}=-1\\ \text{أو}\\ x=\dfrac{-3-1}{2}=-2\end{cases}$$

وعليه:

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$+$	0	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x\in\{-2;-1\}$ أي في النقطتين ذات الاحداثيات: $(-1;1)$ و $(-2;2)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]-2;-1[$

ج/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف:

لدينا:

$$f''(x)=-g'(x)$$

ومنه جدول إشارة $f''(x)$:

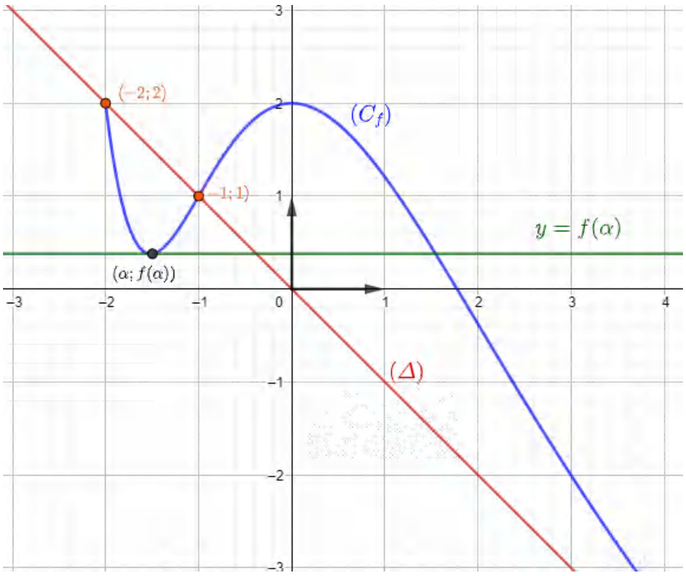
x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

المشتقة الثانية انعدمت مرتين لما $x=\{-1;2\}$ وغيرت اشارتها

ومنه الدالة f تقبل نقطتي انعطاف هما: $(-1;1)$ و $(2;f(2))$ حيث: $f(2)\approx-0.38$

د/ رسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$:

- نعين النقطة $(-1;1)$ و النقطة $(-2;2)$ نقطتي تقاطع (C_f) مع (Δ)
- نرسم المستقيم (Δ) المقارب المائل ذو المعادلة $y_{(\Delta)}=-x$
- نعين النقطة $(\alpha;f(\alpha))$ نقطة تماس المماس مع (C_f)
- نرسم المماس ذو المعادلة $y=f(\alpha)$
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم المنحنى (C_f) مع الاستعانة بجدول الوضعية



ه/ المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned}&(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0\\&\Rightarrow me^x-xe^x+(x^2+3x+2)=\\&\Rightarrow m-x+e^{-x}(x^2+3x+2)=0\\&\Rightarrow -x+e^{-x}(x^2+3x+2)=-m\\&\Rightarrow f(x)=-m\end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=-m$ وهي:

لما $-m<f(\alpha)$ أي لما $m>-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

لما $-m=f(\alpha)$ أي لما $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين: حل مضاعف وحل موجب

لما $f(\alpha)<-m<2$ أي لما $-2<m<-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين سالبين وحل موجب

لما $-m=2$ أي لما $m=-2$ المعادلة تقبل حل مضاعف والآخر سالب

لما $-m>2$ أي لما $m<-2$ المعادلة لا تقبل حلول

حل المسـألة رقم: 20

مشاهـــدة المسألة

(I

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$، وتفسير النتائج

هندسيا :

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 1 - \dfrac{1}{0^+} = -\infty$

$$= 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته:

$x = 0$

أ/ تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x + 1 - \frac{e^x}{e^x(1 - e^{-x})}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x + 1 - \frac{1}{1 - e^{-x}}\right)$$
$$= +\infty$$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

- استنتاج أنّ المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x + 1)]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} - x - 1\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{e^x}{e^x - 1}\right] = 0$$

إذن: المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

❷

أ/ تبيين أنه : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$:

$$f(x) = x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1}$$
$$= x + \frac{e^x - 1 - e^x}{e^x - 1}$$
$$= x - \frac{1}{e^x - 1}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_2) بجوار $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x - 1}\right) = 0$$

إذن: المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ_1) و (Δ_2):

- الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ_1):

$$f(x) - y_{(\Delta_1)} = \frac{-e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x}{1 - e^x}$$

لدينا: $e^x > 0$،

إذن إشارة الفرق من إشارة المقام

لدينا $1 - e^x \neq 0$

معناه: $e^x \neq 1$

ومنه: $x \neq 0$

إذن

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$	$+$		$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ_1)		(C_f) تحت (Δ_1)

- الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ_2):

$$f(x) - y_{(\Delta_2)} = -\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^x}$$

لدينا $1 - e^x \neq 0$

معناه: $e^x \neq 1$

ومنه $x \neq 0$

إذن:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$	$+$		$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ_2)		(C_f) تحت (Δ_2)

❸

أ/ دراسة تغيرات الدالة f ، وجدول تغيراتها:

لدينا:

$$f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

ومنه:

$$f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x-1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

لدينا: $f'(x) > 0$

ومنه:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

ب/ تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0.8 < \alpha < 0.9$ وَ $-1.4 < \beta < -1.3$:

• لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]0.8; 0.9[$

ولدينا $f(0.8) \times f(0.9) < 0$ لأنّ: $f(0.8) \approx -0.01$ و $f(0.9) \approx 0.21$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.8; 0.9[$

• لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]-1. ; -1.3[$

ولدينا $f(-1.4) \times f(-1.3) < 0$ لأنّ: $f(-1.4) \approx -0.07$ و $f(-1.3) \approx 0.07$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-1.4; -1.3[$

❹ تبيين أنّ $f(-x) = 1 - f(x)$:

$$\begin{aligned}1 - f(x) &= 1 - x + \frac{1}{e^x - 1}\\ &= -x + \frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1}\\ &= -x + \frac{e^{-x}e^x}{e^{-x}(e^x - 1)}\\ &= -x + \frac{1}{1 - e^{-x}}\\ &= -x - \frac{1}{e^{-x} - 1}\\ &= f(-x)\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

لدينا: $f(-x) = 1 - f(x)$

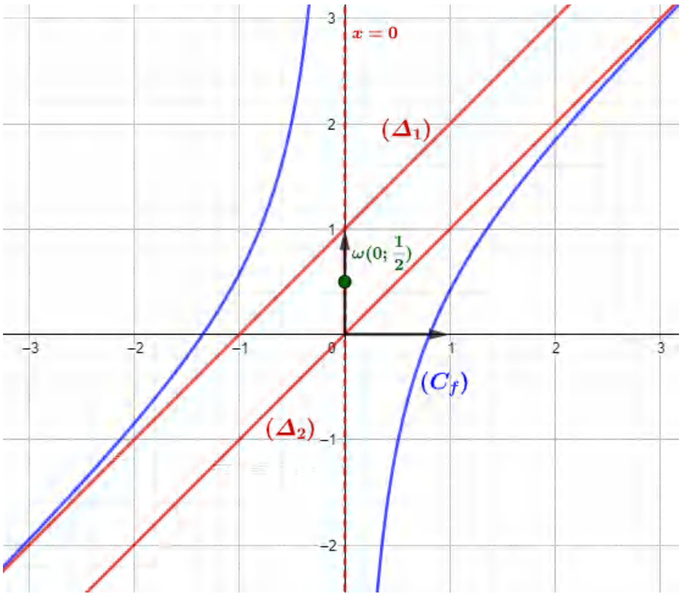
ومنه: $f(x) + f(x) = 1$

ومنه: $f(2(0) - x) + f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$

ولدينا: $(-x) \in D_f$

ومنه (C_f) يقبل النقطة ذات الاحداثيات $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ كمركز تناظر له.

❺ التمثيل البياني لكل من (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_f)



❻ المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned}&(m-1)(e^x-1)e^{-x} + 1 = 0\\ &\Rightarrow (m-1)(e^x-1)e^{-x} = -1\\ &\Rightarrow (m-1)(e^x-1) = -e^x\\ &\Rightarrow m - 1 = -\frac{e^x}{e^x-1}\\ &\Rightarrow m = -\frac{e^x}{e^x-1} + 1\\ &\Rightarrow m + x = -\frac{e^x}{e^x-1} + 1 + x\\ &\Rightarrow f(x) = x + m\end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x + m$، وهي:

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حل موجب

لما $0 < m < 1$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m > 1$ المعادلة تقبل حل سالب

(II

❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية

❷ شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \ x > 0 \\ f(-x) & ; \ x < 0 \end{cases}$$

لما $x > 0$ (C_h) ينطبق على (C_f)، وبما أنّ الدالة h زوجية، فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

21 حل المسـألة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$:

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - xe^x)$
$= -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 - xe^x)$
$= 1$

لأنّ: $\lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 0$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة g:

$$g'(x) = -e^x - xe^x$$
$$= -(1+x)e^x$$

لدينا: $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(1+x)$:

$$-(1+x) = 0 \Rightarrow 1 + x = 0$$
$$\Rightarrow x = -1$$

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1 + e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$

❸

أ/ تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1; +\infty[$:

لدينا: الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1; +\infty[$

ولدينا: $g(-1) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1; +\infty[$

ب/ التحقق أنّ $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا: $g(0.5) \times g(0.6) < 0$

لأنّ $g(0.5) \approx 0.18$

وَ $g(0.6) \approx -0.09$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.5 < \alpha < 0.6$

- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

(II

❶ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left((x-1)e^x - x - 1\right)$
$= \lim_{x\to-\infty} (xe^x - e^x - x - 1)$
$= +\infty$

لأنّ: $\lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 0$

❷

أ/ تبيين أنه $f'(x) = -g(x)$:

$$f'(x) = e^x + e^x(x-1) - 1$$
$$= -1 + xe^x$$
$$= -(1 - xe^x)$$
$$= -g(x)$$

ب/ استنتاج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(2)$

❸ تبيين أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 - \alpha e^\alpha = 0$$
$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

ومنه:

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)e^\alpha - \alpha - 1$$
$$= \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \alpha - 1$$
$$= \frac{\alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha}{\alpha}$$
$$= -\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$$

- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا:

$$0.5 < \alpha < 0.6$$
$$\Rightarrow (0.5)^2 < \alpha^2 < (0.6)^2$$

$$\Rightarrow (0.5)^2+1<\alpha^2+1<(0.6)^2+1$$

ولدينا:

$$0.5<\alpha<0.6$$
$$\Rightarrow \frac{1}{0.6}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{0.5}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{0.5}<-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{0.6}$$

ومنه:

$$-\frac{(0.5)^2+1}{0.5}<-\frac{\alpha^2+1}{\alpha}<-\frac{(0.6)^2+1}{0.6}$$

أي:

$$-2.5<f(\alpha)<-2.26$$

4

أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_{(\Delta)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^x\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(xe^x-e^x)$$
$$=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=(x-1)e^x$$

لدينا $e^x>0$

إذن إشارة الفرق من إشارة $(x-1)$:

$$x-1=0$$
$$\Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in\ ]-\infty;1[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=1$ أي في النقطة ذات الاحداثيات $(1;-2)$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in\ ]1;2]$

5

أ/ تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 :

• لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة على المجال $[-1.6;-1.5]$

ولدينا: $f(-1.6)\times f(-1.5)<0$

لأنّ $f(-1.6)\approx 0.08$ و $f(-1.5)\approx -0.06$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_1 في المجال $[-1.6;-1.5]$ حيث $-1.6<x_1<-1.5$

• لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة على المجال $[1.5;1.6]$

ولدينا: $f(1.6)\times f(1.5)<0$

لأنّ $f(1.5)\approx -0.26$

و $f(1.6)\approx 0.37$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 في المجال $[1.5;1.6]$ حيث $1.5<x_2<1.6$

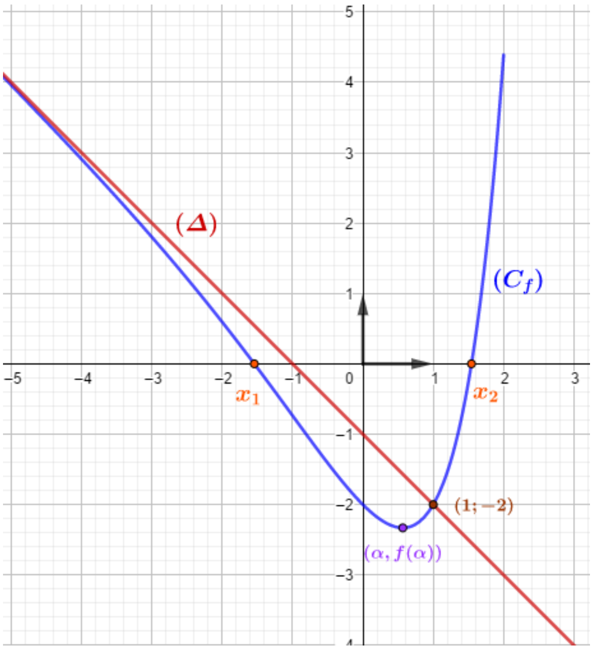
• إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان x_1 و x_2

حيث: $-1.6<x_1<-1.5$

و $1.5<x_2<1.6$.

ب/ انشاء (Δ) و (C_f) :

- نعين النقطة $(1;-2)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ).
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y_{(\Delta)}=-x-1$ باستعمال جدول القيم المساعدة.
- نعين النقطتين x_1 و x_2 نقطتي تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha;f(\alpha))$.
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) مع الاستعانة بجدول الوضعية



الخليل للرياضيات

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-1\right)\right] = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ نهاية شهيرة)

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 - e^x$$

لدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0$$
$$\Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = \ln 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(1.15) = -0.008$

و $g(1.14) = 0.01$

ولدينا: $g(1.14) \times g(1.15) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حل وحيد α في المجال $]1.14; 1.15[$:

ولدينا: $g(-1.8) = 0.03$

و $g(-1.9) = -0.04$

ولدينا: $g(-1.9) \times g(-1.8) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حل وحيد β في المجال $]-1.9; -1.8[$:

❸ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II

❶ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = -1$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -1$.

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$.

❷ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x+1)^2}$$
$$= \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{2x} + 2e^x + xe^x}{(xe^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

❸ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(xe^x+1)^2 > 0$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ولدينا : $f(0) = 0$ ومنه جدول التغيرات كالآتي:

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

❹ تعيين دون حساب كل من : $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$

و $\lim_{x\to\beta}\left[\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]$:

- $\lim_{x\to\alpha}\left[\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]=f'(\alpha)=0$
- $\lim_{x\to\beta}\left[\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]=f'(\beta)=0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و β . معادلة كل منها $y=f(\alpha)$ و $y=f(\beta)$ على الترتيب

❺ تبيين أنّ: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0\Rightarrow \alpha+2-e^{\alpha}$$
$$\Rightarrow e^{\alpha}=\alpha+2$$

ومنه:

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}\\&=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}\\&=\frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}\\&=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}\\&=\frac{1}{\alpha+1}\end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$1.14<\alpha<1.15$$
$$1.14+1<\alpha+1<1.15+1$$
$$\frac{1}{2.15}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{2.14}$$

ومنه:

$$0.46<f(\alpha)<0.46$$

❻ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)\leq 0$:

لدينا $h(0)=0$

ولدينا:

- $\lim_{x\to+\infty}[h(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-x-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]=-\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}[h(x)]=-\infty$

ولدينا:

$$h'(x)=-xe^x$$

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

من جدول التغيرات نجد أعلى قيمة تأخذها الدالة h هي 0 ومنه $h(x)\leq 0$.

❼ التحقق من أن: $p(0)=0$:

$$p(0)=1-2+1=0$$

❽

أ/ تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x+5$:

◀ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ▶

ومنه:

$$\begin{aligned}&f'(a)\times -1=-1\\&\Rightarrow f'(a)=1\\&\Rightarrow \frac{e^a(a+2-e^a)}{(ae^a+1)^2}=1\\&\Rightarrow e^a(a+2-e^a)=(ae^a+1)^2\\&\Rightarrow (ae^a+1)^2-e^a(a+2-e^a)=0\\&\Rightarrow a^2e^{2a}+1+2ae^a+e^{2a}-2e^a-ae^a=0\\&\Rightarrow (a^2+1)e^{2a}+(a-2)e^a+1=0\\&\Rightarrow p(a)=0\\&\Rightarrow a=0\end{aligned}$$

المعادلة تقبل حل، ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x+5$

ب/ كتابة معادلة للمماس (T) :

$$\begin{aligned}(T):y&=f'(0)(x-0)+f(0)\\&=x+f(0)\\&=x\end{aligned}$$

ج/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T):

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$

$$\begin{aligned}f(x)-y&=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x\\&=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}\\&=\frac{e^x(1-x^2)-(1+x)}{xe^x+1}\\&=\frac{e^x(1-x)(1+x)-(1+x)}{xe^x+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{(1+x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$$

$$= \frac{(1+x)h(x)}{xe^x + 1}$$

لدينا: $h(x) \le 0$

ولدينا:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$

- ندرس إشارة $(xe^x + 1)$:

نضع $\varphi(x) = xe^x + 1$

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$e^x > 0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $(1+x)$

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

- جدول تغيرات $\varphi(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	1 ↘	0.6	↗ $+\infty$

من جدول تغيرات $\varphi(x)$ نلاحظ أنّ $\varphi(x) > 0$ ومنه:

اذن إشارة الفرق $f(x) - y$ كالآتي

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	$-$		$-$
$1+x$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

• (C_f) فوق (T) لما $x \in]-\infty; -1[$

• (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(-1; -1)$

• (C_f) تحت (T) لما $x \in]-1; +\infty[$

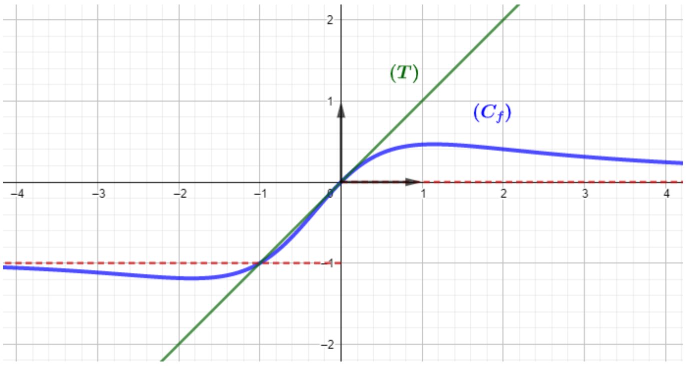
❾ التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة: $(y = -1)$ و $(y = 0)$

• نرسم المماس (T).

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



❿ المناقشة البيانية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^x - mx^2e^x + mx - 1 = 0$$
$$\Rightarrow mx(1 - xe^x) = 1 - e^x$$
$$\Rightarrow mx = \frac{1 - e^x}{1 - xe^x}$$
$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{xe^x - 1} = mx$$
$$\Rightarrow f(x) = mx$$

حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة : $f(x) = mx$ ، ومنه:

لما $m \le 0$ المعادلة تقبل حل وحيدا معدوم

لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل حل موجب تماما وحل معدوم وحل سالب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حلا معدوما وحلا سالب تماما

لما $m > 1$ المعادلة تقبل حلا معدوما

حل المسألة رقم: 23

مشاهدة المسألة

(I

❶ تعيين نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}(1+xe^{x}-e^{-x})\right) = +\infty$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = -e^{-x}+1$$

لدينا:

$$g'(x)=0 \Rightarrow -e^{-x}+1=0$$
$$\Rightarrow e^{-x}=1$$
$$\Rightarrow -x=0$$
$$\Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

❸ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$

من جدول التغيرات الدالة تبلغ قيمة حدية دنيا عند $(0;0)$

إذن $g(x)\geq 0$

- استنتاج أنّ $e^{-x}+x\geq 1$:

لدينا: $g(x)\geq 0$ أي: $e^{-x}+x-1\geq 0$

إذن: $e^{-x}+x\geq 1$

(II

❶ تبيين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$:

لدينا: $e^{-x}+x\geq 1$ إذن: $e^{-x}+x>0$

وعليه: $D_f=\mathbb{R}$

❷

أ/ التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^{x}}}$:

$$f(x)=\frac{x}{e^{-x}+x}=\frac{x}{x\left(\frac{e^{-x}}{x}+1\right)}=\frac{1}{\frac{e^{-x}}{x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{xe^{x}}+1}$$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x})=0$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$

❸

أ/ تبيين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{(1+x)e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^{-x}+x-x(-e^{-x}+1)}{(e^{-x}+x)^2}=\frac{e^{-x}+x+xe^{-x}-x}{(e^{-x}+x)^2}=\frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f:

لدينا: $e^{-x}>0$ و $(e^{-x}+x)^2>0$

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+1$

$$x+1=0\Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$\frac{1}{1-e}$	↗ 1

❹

أ/ كتابة معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)=x$$

ب/ التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $x-f(x)=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$:

$$x-f(x)=x-\frac{x}{e^{-x}+x}=\frac{x(e^{-x}+x)-x}{e^{-x}+x}=\frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x-1+1}=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

- استنتاج إشارة $x-f(x)$:

إشارة $x-f(x)$ من إشارة x

لأنّ: $g(x)>0$

و: $g(x)+1>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x-f(x)$	$-$	0	$+$

ج/ استنتاج الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (T) :

لدينا:

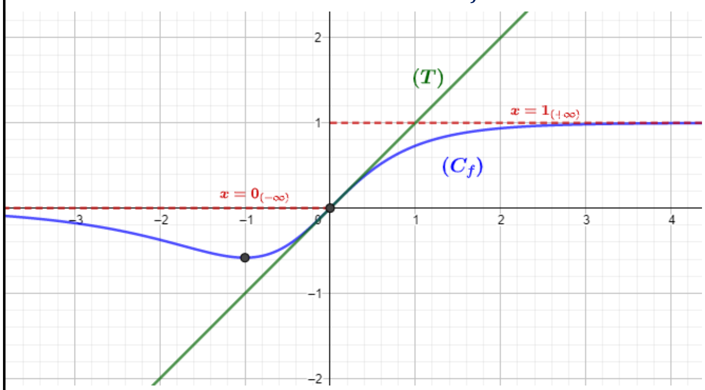
$$f(x)-y_{(T)}=-\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_{(T)}$	$+$	0	$-$

- (C_f) فوق (T) لما $x\in\ ]-\infty;0[$
- (C_f) يقطع (T) لما $x=0$
- (C_f) تحت (T) لما $x\in\ ]0;+\infty[$

❺ إنشاء (T) و (C_f):



❻ المناقشة البيانية:

$$\frac{xe^x}{xe^x+1}-1=m\Rightarrow\frac{xe^xe^{-x}}{(xe^x+1)e^{-x}}=m+1$$
$$\Rightarrow\frac{x}{x+e^{-x}}=m+1$$
$$\Rightarrow f(x)=m+1$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=m+1$

- لما $y_m<\frac{1}{1-e}$ أي لما $m<\frac{1}{1-e}-1$

أي لما $m<\frac{e}{1-e}$ المعادلة لا تقبل حلول

- لما $y_m=\frac{1}{1-e}$ أي لما $m=\frac{e}{1-e}$

المعادلة تقبل حل مضاعف سالب

- لما $\frac{1}{1-e}<y_m<0$ أي لما $\frac{e}{1-e}<m<-1$

المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

- لما $y_m=0$ أي لما $m=-1$

المعادلة تقبل حل معدوم

- لما $0<y_m<1$ أي لما $-1<m<0$

المعادلة تقبل حل موجب تماما

- لما $y_m\geq 1$ أي لما $m\geq 0$

المعادلة لا تقبل حلول

حل المسـألة رقم: 24

مشاهـــدة المسألة

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

لا تنسونا من صالح دعائكم

#الخليل_للرياضيات