الخليل للرياضيات

التحضير الجيد للبكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

مسائل شاملة حول الدوال اللوغارتمية

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 29

◄ الإصدار الأول ►

1
المسائل الشاملة

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)]$.

2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

3) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

4) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

6) مثل بيانيا المنحني (C_f) .

المسألة الشاملة رقم: 02

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=1+x^2+\ln x$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32<\alpha<0.33$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=-x+\frac{2+\ln x}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنه من أجل كل x من D_f:

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن: $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

5) اثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها.

6) مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحني (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين x_0 و x_1 حيث: $0.1<x_0<0.2$ وَ $1.5<x_1<1.6$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$h(x)=-x+1+\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال D_h :

$$h(x)=f(x+1)+2$$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

2) أ/ بين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه .

ب/ مثل بيانيا المنحني (C_h) .

3) m وسيط حقيقي غير معدوم، (T_m) مستقيم معادلته:

$$y = \ln(|m|)\,x + 1$$

أ/ برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$h(x) = \ln(|m|)\,x + 1 \ldots (E)$$

03 المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln|x|}+x;x\in\mathbb{R}_-^*-\{-1\}\\ \dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{2(\ln x)^2};x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\\ 0;x=0\end{cases}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$ ، فسر النتيجة هندسيا.

2) ادرس تغيرات الدالة f .

3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

ب/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^*-\{-1\}$.

4) حل المعادلة: $f(x)=0$ في المجال $\mathbb{R}_+^*-\{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $\left]-2;-\frac{3}{4}\right[$.

6) مثل بيانيا (Δ) و المنحني (C_f) .

7) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$f(x)=-(m^2-e)\;...\;(E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد واشارة حلول المعادلة (E) .

المسألة الشاملة رقم: 04

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=(\ln x)^3+1$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) حل المعادلة $g(x)=0$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=(\ln x)^2+1-\frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون:

$$f'(x)=2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=(\ln x)^2+1$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة h .

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

4) بين أن (C_h) يقبل نقطة انعطاف A يُطلب احداثييها .

5) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

6) احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

7) مثل بيانيا في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

8) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m(\ln x)^3+e^m(\ln x)-\ln x-2e^m=0\ ...(E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

الخليل للرياضيات

المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	...	...		1	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	...	0	$-$		...	0	$+$
$f(x)$		$-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$	$-\infty$			...	$+\infty$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) علما أن الدالة f فردية:

أ/ عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}[f(x)]=+\infty$ و $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$

ج/ أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

2) نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.

أ/ مثّل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) . نأخذ: $f(\sqrt{3})\cong3$ و $(\sqrt{3})\cong1.7$

3) نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x)=ax+b+\ln\left(c+\frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: c,b,a أعداد حقيقية.

- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بيّن أنّ: $a=1$ ، $b=0$ و $c=1$.

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x-\frac{e^m+e^x}{e^m-e^x}=0\ ...(E)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln(f(x))$$

- ادرس تغيرات الدالة g .

المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{(lnx)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ مبينا المستقيبات المقاربة لـ (C_f) .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) m عدد حقيقي موجب تماما.

لتكن النقط A_m ذوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .

أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0;0)$.

ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.

3) مثّل بيانيا المستقيمات (T_m) والمنحني (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{(ln|x|)^2}{x}$$

1) بيّن أن الدالة g فردية.

2) بيّن أنه يمكن رسم (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)]$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بين أن لكل x من المجال $]0;1]$ $(x-1)+\ln x\leq 0$ وأن لكل x من المجال $[1;+\infty[$:

$(x-1)+\ln x\geq 0$.

ب/ بين أنه من أجل كل من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ والمنحني (C_f) .

4) عين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة المستقيم (T) .

5) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

6) مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x)=x-2m$$

المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$$

1) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ/ احسب $g(0)$.

ب/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72<\alpha<-0.71$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال: $D_f=]-1;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن:

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

ثم أعط حصر للعدد $f(\alpha)$ بالتدوير إلى 10^{-2} .

4) مثل بيانيا (C_f) .

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد واشارة حلول المعادلة (E) حيث: $m>0$.

$$f(x)=\ln m \ldots (E)$$

09 المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/بين أن:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتج $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) و المنحني (C_f) .

4) بين أن ω نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

5) اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ.

6) مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي حيث: $m > 0$.

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x - \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{me^x+2m}\right) = 0 \ldots (E)$$

المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = \ln x + x - 3$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2 < \alpha < 2.21$.

3) عين إشارة $g(x)$ على المجال : $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}[f(x)]$.

2) أ/ احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس اشارتها.

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) عين دون حساب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\right]$$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) بين أن:

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

5) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

6) بأخذ: $f(\alpha) \cong -0.66$ ، مثل بيانيا المنحني (C_f) على المجال $]0;10]$.

المسألـــة الشامـــلة رقم: 11

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x^2-2+\ln x$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) أ/ بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

ب/ تحقق من أن $1.31<\alpha<1.32$

3) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) بين أن: $f(\alpha)=\alpha^2(1+\alpha^2)$

5) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال: $]0;+\infty[$.

(III) نسمي (C_h) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x)=\ln x$$

ولتكن النقطة A ذات الاحداثيات $(0;2)$. و M نقطة من المنحني (C_h) فاصلتها x_m .

1) بين أن المسافة AM تُعطى بـ:

$$AM=\sqrt{f(x)}$$

2) نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$k(x)=\sqrt{f(x)}$$

أ/ برهن أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ برهن أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) ، يُطلب تعيين احداثييها.

ج/ برهن أن: $AB=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

3) هل المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحني (C_h) في النقطة B ؟ برر اجابتك.

2

حلول المسائل الشاملة

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

حل المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

• $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [g(x)] = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = -\infty$$

• $$\lim_{x \to +\infty} [g(x)] = \lim_{x \to +\infty} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1)+1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2+2x+2x+2+1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2+4x+3}{x+1} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

- جدول التغيرات:

x	-1 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\underbrace{x}_{-1} - \overbrace{\frac{\ln(x+1)}{\underbrace{x+1}_{0^+}}}^{-\infty} \right]$$
$$= +\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$.

- $$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right]$$
$$= +\infty - 0$$
$$= +\infty$$

2) تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[- \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مقائل بجوار $+\infty$.

3) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا:

$$-\ln(x+1) = 0 \Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0$$
$$\Rightarrow x + 1 = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- المنحني (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1;0[$.

- المنحني (C_f) يقطع (Δ) في $O(0;0)$.
- المنحني (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0;+\infty[$.

4) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+1+2x-1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) تبيين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

$$f''(x)=\frac{\left(2x+2+\frac{1}{x+1}\right)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+\ln(x+1))}{(x+1)^4}$$
$$=\frac{\left(2(x+1)+\frac{1}{x+1}\right)(x+1)-2(x^2+2x+\ln(x+1))}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2(x+1)^2+1-2x^2+4x+2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{3-2\,ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

لدينا: $(x+1)^3>0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

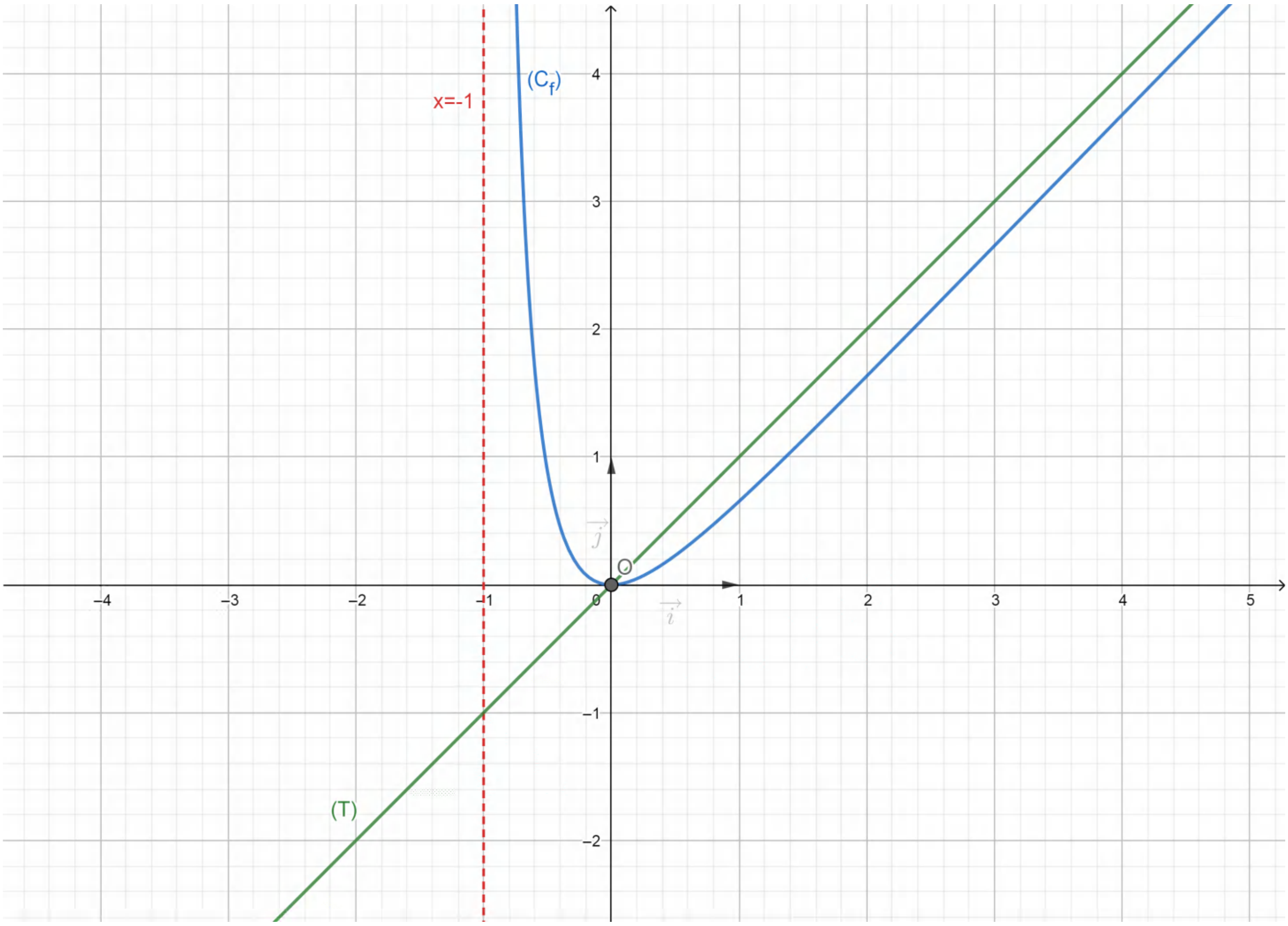
$$3-2\,ln(x+1)=0 \Rightarrow 2ln(x+1)=3$$
$$\Rightarrow \ln(x+1)=\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow x+1=e^{\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}-1$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير اشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $e^{\frac{3}{2}}-1$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = -1$
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



02 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to 0}[g(x)] = \lim_{x\to 0}[1 + x^2 + \ln x] = 0 - \infty = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}[g(x)] = \lim_{x\to +\infty}[1 + x^2 + \ln x] = +\infty + \infty = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(0.33) = 0.0002$ و $g(0.32) = -0.03$

ولدينا: $g(0.33) \times g(0.32) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

3) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[-x+\frac{\overbrace{2+\ln x}^{-\infty}}{\underbrace{x}_{0^+}}\right]$$
$$= -\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}}{1}\right]$$
$$= -\infty$$

لان: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$

2) تبيين أنه من أجل كل x من D_f: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$:

$$f'(x) = -1+\frac{\frac{1}{x}x-(2+\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2-1-\ln x}{x^2}$$
$$= -\frac{x^2+1+\ln x}{x^2}$$
$$= -\frac{g(x)}{x^2}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول التغيرات:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$+\infty$

3) تبيين أن: $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha^2+1+\ln\alpha=0$$
$$\Rightarrow \ln\alpha=-(\alpha^2+1)$$

ولدينا:

$$f(\alpha)=-\alpha+\frac{2+\ln\alpha}{\alpha}$$
$$=\frac{-\alpha^2+2-(\alpha^2+1)}{\alpha}$$
$$=\frac{-2\alpha^2+1}{\alpha}$$
$$=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$0.32<\alpha<0.33$$
$$-0.33<-\alpha<-0.32 \ldots (1)$$

ولدينا:

$$0.32<\alpha<0.33$$
$$0.64<2\alpha<0.66$$
$$\frac{1}{0.66}<\frac{1}{2\alpha}<\frac{1}{0.64}$$
$$1.51<\frac{1}{2\alpha}<1.66 \ldots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18<\frac{1}{2\alpha}-\alpha<1.34$$
$$2.18<2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)<2.34$$

إذن:

$$2.18<f(\alpha)<2.34$$

4) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}+x\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+\ln x}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right]$$

$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2 + \ln x}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$2 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -2$$
$$\Rightarrow x = e^{-2}$$

ومنه:

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; e^{-2}[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e^{-2}; +\infty[$.

5) اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه: $f'(a) = -1$ ومنه:

$$f'(a) = -1 \Rightarrow -\frac{a^2 + 1 + \ln a}{a^2} = -1$$
$$\Rightarrow a^2 + 1 + \ln a = \alpha^2$$
$$\Rightarrow 1 + \ln \alpha = 0$$
$$\Rightarrow \ln a = -1$$
$$\Rightarrow a = e^{-1}$$

ومنه:

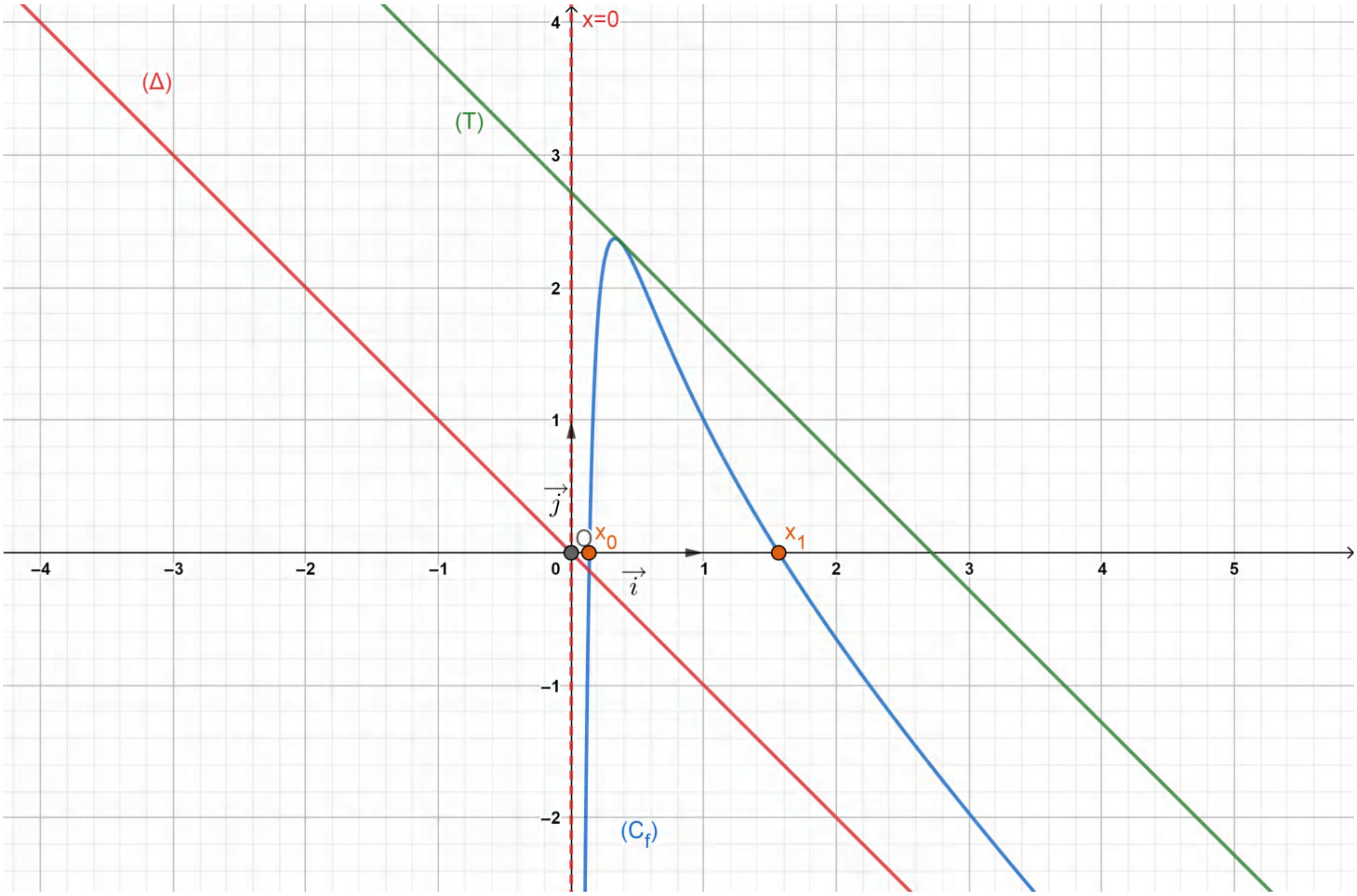
$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(\alpha)$$
$$= -x + e^{-1} - e^{-1} + \frac{2 + \ln e^{-1}}{e^{-1}}$$
$$= -x + e$$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = 0$
- نعين نقط x_0 و x_1 تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ):

- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III)

1) أ/ تبيين أنّه من أجل كل x من المجال D_h : $h(x) = f(x+1)+2$:

$$\begin{aligned} f(x+1)+2 &= -(x+1) + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x-1+\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}+2 \\ &= -x+1+\frac{2+\ln(x+1)}{x+1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ب/ تبيين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}[h(x)-(-x+1)] &= \lim_{x\to+\infty}\left[-x+1+\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}-(-x+1)\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}\right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

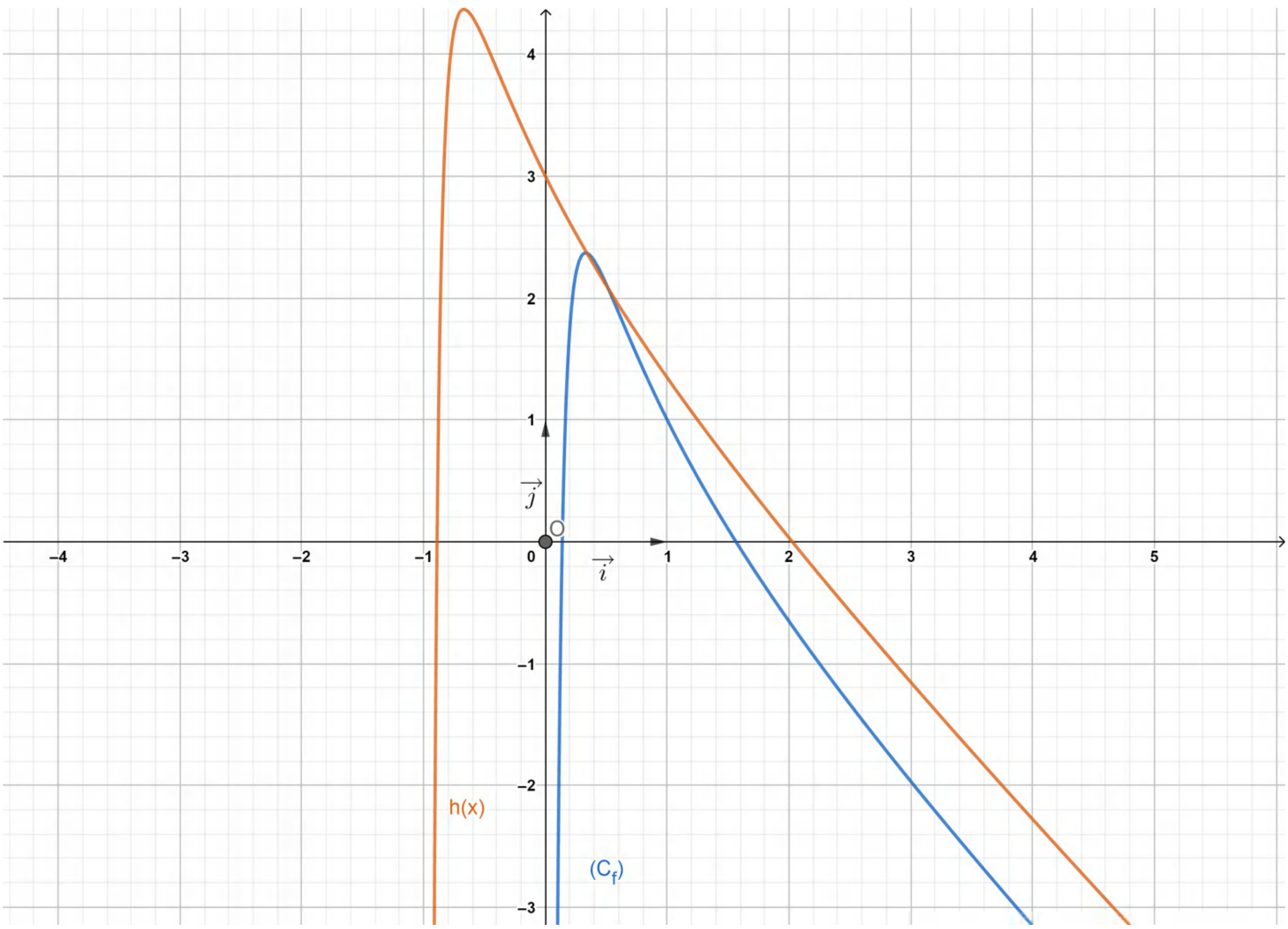
2) أ/ تبيين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه :

$$h(x) = f(x+1)+2$$
$$= f\big(x-(-1)\big)+2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1;2)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :

تمثيل (C_f) و (C_h) :



3) أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها:

نفرض أن النقطة $A(x_1;y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m) ونبرهن أنها ثابتة:

لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناه:

$$y_1 = \ln(|m|)\,x_1+1$$
$$\Rightarrow \ln(|m|)\,x_1-y_1+1=0 \ldots (3)$$

المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا انعدمت جميع معاملاته

أي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0;1)$

ب/ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_h) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = \ln(|m|)\,x + 1$$

ومنه:

لما	$\ln\|m\| = -1$	أي	$\|m\| = e^{-1}$	أي	$m = e^{-1}$ وَ $m = -e^{-1}$	المعادلة تقبل حلا وحيدا
لما	$\ln\|m\| < -1$	أي	$\|m\| < e^{-1}$	أي	$-e^{-1} < m < e^\wedge - 1$	المعادلة تقبل حلا وحيدا
لما	$\ln\|m\| > -1$	أي	$\|m\| > e^{-1}$	أي	$m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty$	المعادلة تقبل حلان

حل المسألة الشاملة رقم: 03

مشاهـــدة المسألة

1) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{\frac{1}{\ln|x|} + x - 0}{x - 0}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{1}{x \ln|x|} + \frac{x}{x}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{1}{x \ln(-x)} + 1\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{-1}{-x \ln(-x)} + 1\right]$$

$$= -\infty$$

لأن: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} [-x \ln(-x)\ ] = 0^+$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليسار

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} - 0}{x - 0}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{2x(\ln x)^2}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{x \ln x}\left(1 - \frac{1}{2 \ln x}\right)\right]$$

$$= +\infty$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليمين

- التفسير الهندسي:

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنه (C_f) يقبل مماس عمودي معادلته $x = 0$

2) دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

- $\lim_{x \to -\infty} [f(x)] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{\ln|x|} + x\right]$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x\right]$$

$$= -\infty$$

- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} [f(x)] = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x\right]$
$$= \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} \left[\frac{1}{0^+} + x\right]$$
$$= +\infty$$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} [f(x)] = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x\right]$
$$= \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} \left[\frac{1}{0^-} + x\right]$$
$$= -\infty$$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} [f(x)] = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$
$$= \frac{1}{0^-} - \frac{1}{2(0^-)^2}$$
$$= -\infty$$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} [f(x)] = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$
$$= \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \left[\frac{1}{\ln x}\left(1 - \frac{1}{2\ln x}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{0^+}\left(1 - \frac{1}{2(0^+)}\right)$$
$$= -\infty$$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = -1$ بجوار $\pm\infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = 1$ بجوار $-\infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y = 0$ بجوار $+\infty$.

- حساب $f'(x)$:

لمّا $x \in \mathbb{R}_-^* - \{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2} + 1$$
$$= \frac{-1}{x(\ln(-x))^2} + 1$$

لاحظ أنّ $x<0$ ومنه: $f'(x)>0$

اذن:

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖

لمّا $x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right)-\left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right)\\&=-\frac{1}{x(\ln x)^2}+\frac{1}{x(\ln x)^4}\\&=\frac{-\ln x+1}{x(\ln x)^3}\\&=\frac{-\ln x+1}{[x(\ln x)^2]\ln x}\end{aligned}$$

لدينا: $x(\ln x)^2>0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $\frac{-\ln x+1}{\ln x}$:

لدينا:

$$\ln x=0\Rightarrow x=1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}-\ln x+1=0&\Rightarrow \ln x=1\\&\Rightarrow x=e\end{aligned}$$

ومنه:

x	0		1		e		$+\infty$
$-\ln x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x$	‖	$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

3) أ/ تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$:

تذكير

إذا استطعنا كتابة عبارة دالة f على الشكل:

$$f(x) = y + \varphi(x)$$

حيث:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [\varphi(x)] = 0$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته y

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{\ln(-x)} \\ &= y + \varphi(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{\ln(-x)} \\ y = x \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^* - \{-1\}$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= x + \frac{1}{\ln(-x)} - x \\ &= \frac{1}{\ln(-x)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \ln(-x) = 0 &\Rightarrow -x = e^0 \\ &\Rightarrow -x = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0
$f(x) - y$	$+$	$\parallel$	$-$ $\parallel$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.

4) حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2\ln x - 1}{2(\ln x)^2} = 0$$

لدينا: $2(\ln x)^2 > 0$ ومنه:

$$2\ln x - 1 = 0 \Rightarrow 2\ln x = 1$$
$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{e}$$

- **الاستنتاج:**

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$

5) تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77; -1.76[$:

المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77; -1.76[$ معناه المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا في نفس المجال

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1.77; -1.76[$

لدينا: $f(-1.77) = -0.01$ وَ $f(-1.76) = 0.008$

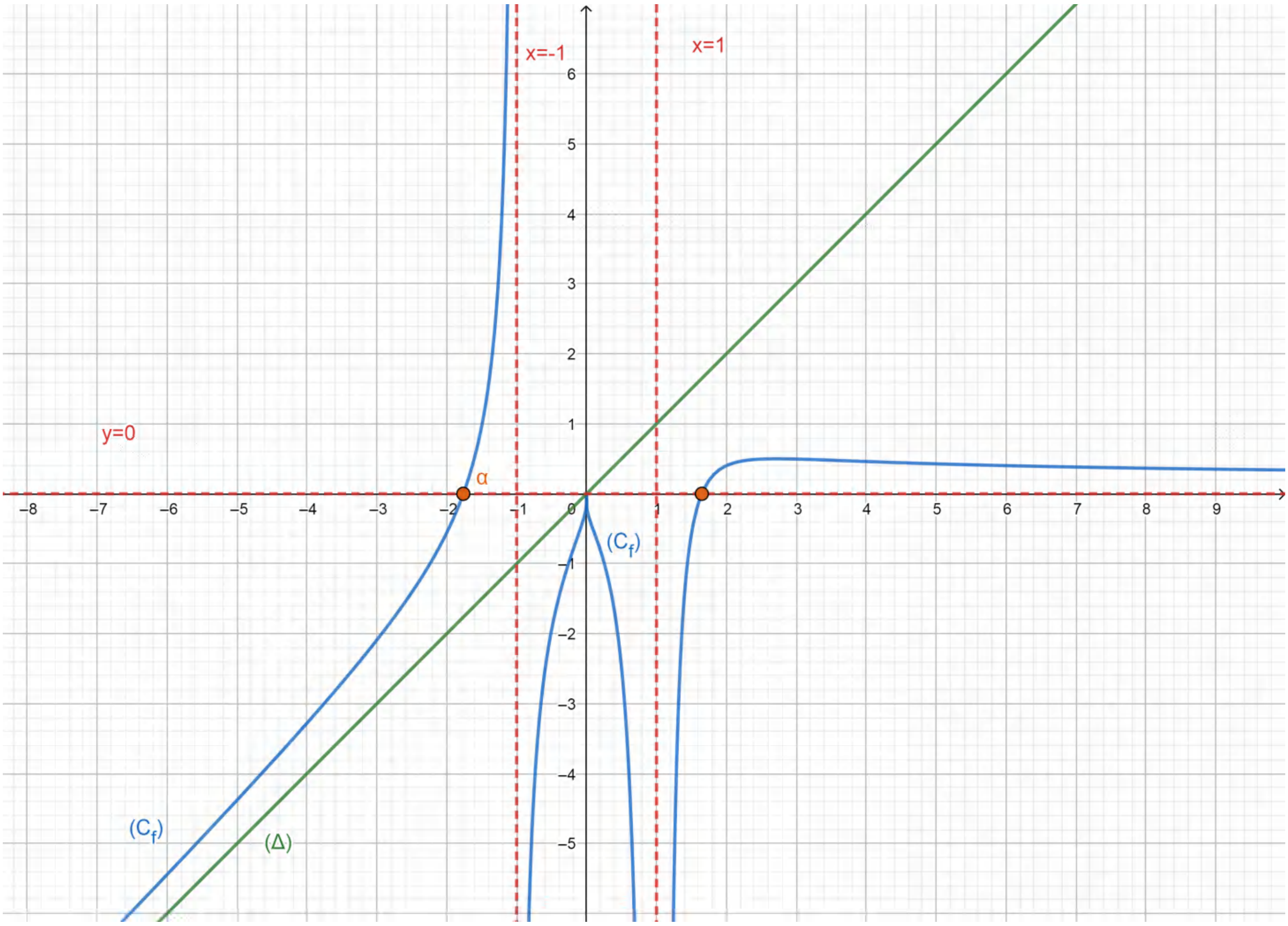
لدينا: $f(-1.77) \times f(-1.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا في المجال $]-1.77; -1.76[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = -1$ و $x = 1$ و $y = 0$
- نعين نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)
- ثُمّ باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -(m^2 - e)$

- لما $-(m^2 - e) < 0$ أي $m^2 - e > 0$ أي $m^2 > e$ أي $|m| > \sqrt{e}$

أي $m \in]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.

- لما $-(m^2 - e) = 0$ أي $m^2 - e = 0$ أي $m^2 = e$ أي $|m| = \sqrt{e}$

أي $m = \sqrt{e}$ و $m = -\sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب .

- لما $0 < -(m^2 - e) < \frac{1}{2}$ أي $-\frac{1}{2} < m^2 - e < 0$ أي $e - \frac{1}{2} < m^2 < e$

أي $\sqrt{e - \frac{1}{2}} < |m| < \sqrt{e}$ أي $|m| < \sqrt{e}$ و $|m| > \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $-\sqrt{e} < m < \sqrt{e}$

و $\left]-\infty; -\sqrt{e - \frac{1}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{e - \frac{1}{2}}; +\infty\right[$ $m \in$ أي

$$m \in \left]-\sqrt{e - \frac{1}{2}}; -\sqrt{e}\right[\cup \left]\sqrt{e}; \sqrt{e + \frac{1}{2}}\right[$$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

- لما $\frac{1}{2} = -(m^2 - e)$ أي $m^2 - e = -\frac{1}{2}$ أي $m^2 = e - \frac{1}{2}$ أي $|m| = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$

أي $m = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ و $m = -\sqrt{e - \frac{1}{2}}$ المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب

- لما $\frac{1}{2} < -(m^2 - e)$ أي $m^2 - e < -\frac{1}{2}$ أي $m^2 < e - \frac{1}{2}$ أي $|m| < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$

أي $-\sqrt{e - \frac{1}{2}} < m < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $m \in \left]-\sqrt{e - \frac{1}{2}}; \sqrt{e - \frac{1}{2}}\right[$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب

04

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[g(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[(\ln x)^3 + 1] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}[g(x)] = \lim_{x\to +\infty}[(\ln x)^3 + 1] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3\frac{1}{x}(\ln x)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$ و $g'(1) = 0$

ومنه

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

2) حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$: $s = \{e^{-1}\}$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

الخليل للرياضيات

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right]$
$= +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right]$
$= -\frac{2}{0^-}$
$= +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right]$
$= -\frac{2}{0^+}$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right]$
$= +\infty$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

2) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون: $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$:

$$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2}\right)$$
$$= \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$$
$$= 2\left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2}\right]$$
$$= \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3) استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

(III)

1) دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [h(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [h(x)] = \lim_{x \to +\infty} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty$$

- دراسة $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه :

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) حساب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)]$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} - (\ln x)^2 - 1 \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{2}{\ln x} \right]$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_h) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x)$:

$$f(x) - h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - h(x)$		$+$		$-$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (C_h) لما $x \in]0;1[$.
- (C_f) تحت (C_h) لما $x \in]1;+\infty[$

4) تبيين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف:

لدينا:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{-2}{x^2}\ln x + \frac{1}{x} \times \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2\ln x + 2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2}(1 - \ln x) \end{aligned}$$

لدينا $\frac{2}{x^2} > 0$ ومنه الإشارة من $(1 - \ln x)$:

$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$
$$\Rightarrow x = e$$

x	0	e	$+\infty$
$h''(x)$	$+$	0	$-$

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيرت اشارتها ومنه المنحني (C_h) يقبل نقطة انعطاف احداثييها $A(e;2)$

5) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= h'(e)(x - e) + h(e) \\ &= \frac{2}{e}\ln e\,(x - e) + (\ln e)^2 + 1 \\ &= \frac{2}{e}x \end{aligned}$$

6) حساب $f(e)$:

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$

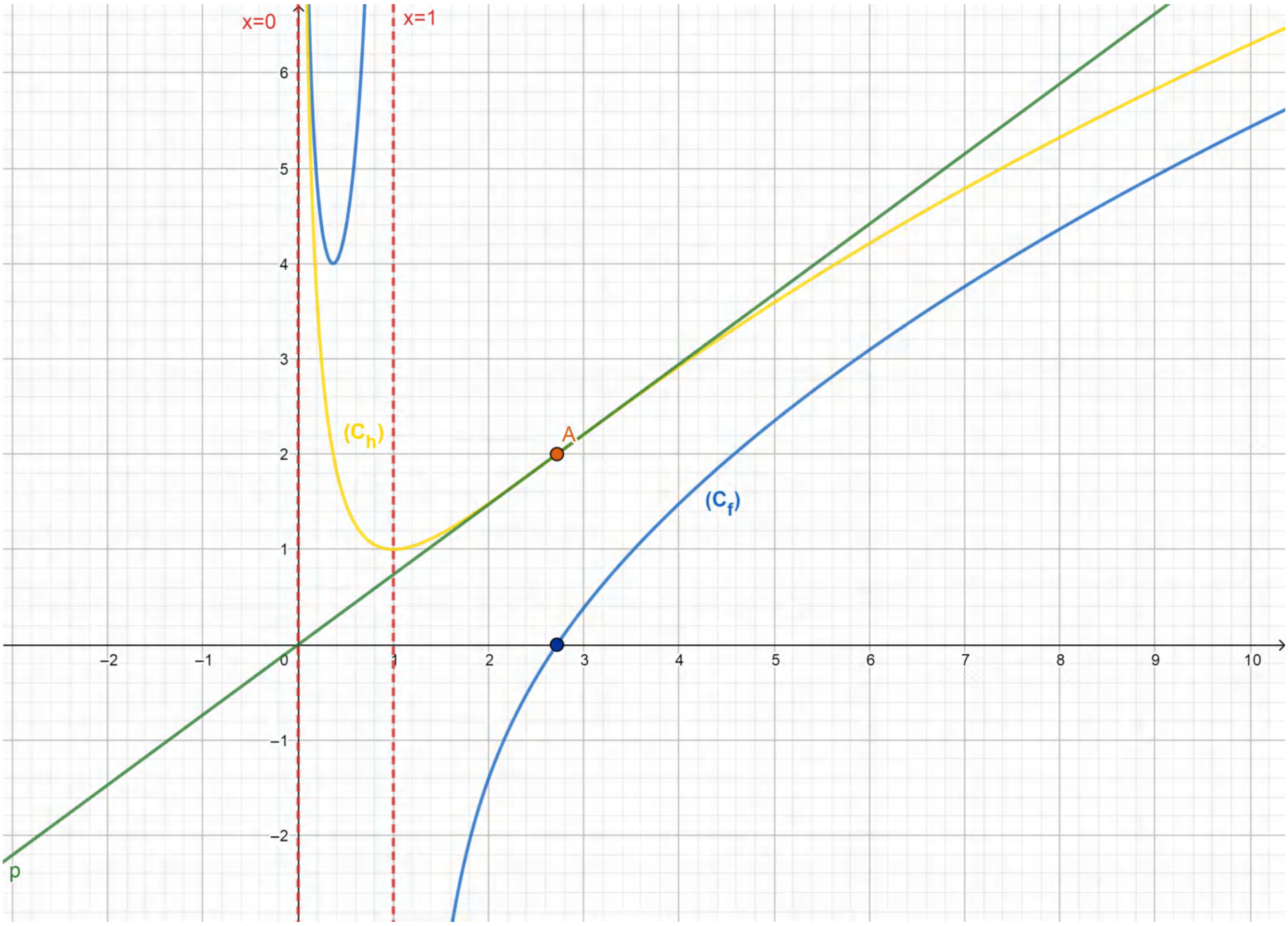
- الاستنتاج:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$ و $x = 0$
- نرسم المماس (T)
- نعين نقطة A انعطاف المنحني (C_h)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



8) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}&e^m(\ln x)^3+e^m\ln x-\ln x-2e^m=0\\&\Rightarrow e^m[(\ln x)^3+\ln x-2]=\ln x\\&\Rightarrow e^m\left[(\ln x)^2+1-\frac{2}{\ln x}\right]=1\\&\Rightarrow e^m[f(x)]=1\\&\Rightarrow f(x)=e^{-m}\end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=e^{-m}$

اذن:

لما $e^{-m}<4$ أي $-m<\ln 4$ أي $m>-\ln 4$ المعادلة تقبل حل وحيد

لما $e^{-m}=4$ أي $-m=\ln 4$ أي $m=-\ln 4$ المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف

لما $e^{-m}>4$ أي $-m>\ln 4$ أي $m<-\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

حل المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) أ/ تعيين إشارة $f'(x)$ مع التبرير:

نضع γ, β, α حيث:

x	$-\infty$	α		β		1		$\sqrt{3}$		γ
$f'(x)$	$\dots$	0	$-$				$\dots$	0	$+$	

لدينا الدالة f فردية ، معناه:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$f'(x) < 0$ لما $x \in]\alpha;\beta[$

$\Leftarrow \quad \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0 \quad$ لما $\quad -x \in]\alpha;\beta[$

$\Leftarrow \quad f'(x) < 0 \quad$ لما $\quad x \in]-\beta;-\alpha[$

ولدينا كذلك:

$f'(x) > 0$ لما $x \in]\sqrt{3};\gamma[$

$\Leftarrow \quad \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0 \quad$ لما $\quad -x \in]\sqrt{3};\gamma[$

$\Leftarrow \quad f'(x) > 0 \quad$ لما $\quad x \in]-\gamma;-\sqrt{3}[$

ولدينا: $f'(x) = 0$ لما $x = \sqrt{3}$ معناه $f'(-x) = 0$ لما $-x = \sqrt{3}$ ومنه $x = -\sqrt{3}$

ومنه: $\alpha = -\sqrt{3}$ و $\beta = -1$ و $\gamma = +\infty$

اذن:

$f'(x) > 0$ لما: $x \in \left]-\infty;-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in \left]-\sqrt{3};-1\right[\cup \left]1;\sqrt{3}\right[$

ب/ تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = -\infty$:

لدينا من الجدول السابق: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = +\infty$

نضع $x=-t$ (الدالة f فردية أي: $f(-t)=-f(t)$)

ومنه:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)] &= \lim_{-t\to-\infty}[f(-t)]\\ &= \lim_{t\to+\infty}[f(-t)]\\ &= \lim_{t\to+\infty}[-f(t)]\\ &= -\underbrace{\lim_{t\to+\infty}[f(t)]}_{\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=+\infty}\\ &= -(+\infty)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

- تبيين أن: $\lim_{\substack{x\to1\\>}}[f(x)]=+\infty$:

بنفس الفكرة السابقة (نضع $x=-t$) نجد: $\lim_{\substack{x\to1\\>}}[f(x)]=+\infty$

- تبيين أن: $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$:

لدينا:

$$\underbrace{f(-\sqrt{3})}_{f(-\sqrt{3})=-f(\sqrt{3})}=-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow -f(\sqrt{3})=-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$$

ج/ اكمال جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	$\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

2) التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة

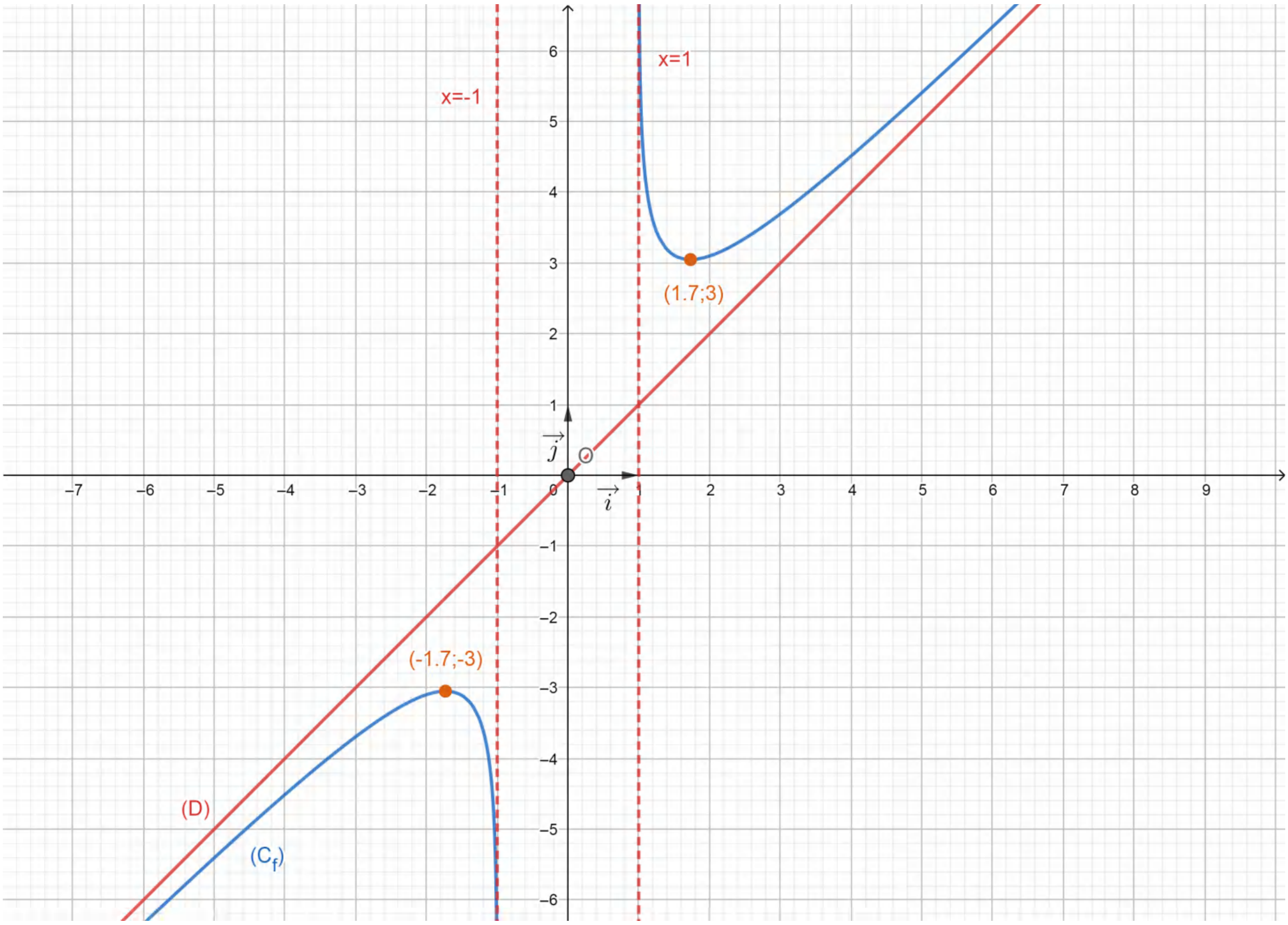
لدينا:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=-1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=1$.

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$ و $x=-1$

- نرسم القارب المائل (D)
- نعين النِقط الحدية
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



3) تبيين أنّ : $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$:

لدينا:

$$f'(x) = a + \frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{c + \frac{2}{x-1}}$$

$$= a - \frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{c(x-1)+2}{x-1}}$$

$$= a - \frac{\frac{2}{x-1}}{c(x-1)+2}$$

$$= a - \frac{2}{c(x-1)^2 + 2(x-1)}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3}) = 0 \\ f'(-\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \dfrac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \\ a - \dfrac{2}{c(-\sqrt{3}-1)^2 + 2(-\sqrt{3}-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \dfrac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \dots (*) \\ a - \dfrac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0 \dots (**) \end{cases}$$

بطرح $(*)$ من $(**)$ نجد:

$$-\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} + \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0$$

$$\Rightarrow c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) = c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)$$

$$\Rightarrow c(4+2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} - 2 = c(4-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2$$

$$\Rightarrow c(4+2\sqrt{3}) - c(4-2\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow c(4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1}$$

نعوض قيمة c في $(*)$ نجد:

$$a - \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{4-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

ولدينا:

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3} + b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2\sqrt{3} - 2 + 3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

4) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0 \Rightarrow \frac{xe^m - xe^x - e^m - e^x}{e^m - e^x} = 0$$

$$\Rightarrow xe^m - xe^x - e^m - e^x = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x-1) - e^x(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x-1) = e^x(x+1)$$

$$\Rightarrow e^m = e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = \ln\left[e^x \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow m = \ln(e^x) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(\frac{x+1+1-1}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$

ومنه:

لما $m < f(-\sqrt{3})$ أي $m \in]-\infty; f(-\sqrt{3})[$ للمعادلة حلان سالبان

لما $m = f(-\sqrt{3})$ للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\sqrt{3}$

لما $f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$ أي $m \in]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})[$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = f(\sqrt{3})$ للمعادلة حل مضاعف هو $x = \sqrt{3}$

لما $m > f(\sqrt{3})$ أي $m \in]f(\sqrt{3}); +\infty[$ للمعادلة حلان موجبان

(II) دراسة تغيرات الدالة g:

لدينا: $g(x) = \ln(f(x))$

نلاحظ أن : $g(x) = k \circ f = k(f(x))$ حيث: $k(x) = \ln x$

- حساب النهايات:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} [f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [k(x)] = +\infty$

اذن:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} [g(x)] = +\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [k(x)] = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 1} [g(x)] = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

لدينا: $f(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

حل المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} 0}[f(x)] = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left[\frac{(lnx)^2}{x}\right] = +\infty$$

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \to +\infty}[f(x)] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{(lnx)^2}{x}\right]$$

نضع $t = \ln x$ نجد:

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{(lnx)^2}{x}\right] = \lim_{t \to +\infty}\left[\frac{t^2}{e^t}\right] = 0$$

لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\frac{t^n}{e^t}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)(x) - (\ln x)^2}{x^2}$$
$$= \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$
$$= \frac{(2 - \ln x)\ln x}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

$$1)\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$2)\ 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2$$
$$\Rightarrow x = e^2$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-\ln x$	||	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

2) أ/ كتابة معادلة المماس (T_m) :

$$
\begin{aligned}
(T_m): y &= f'(m)(x-m)+f(m)\\
&= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)(x-m)+\frac{(\ln m)^2}{m}\\
&= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x-\frac{(2-\ln m)\ln m}{m}+\frac{(\ln m)^2}{m}\\
&= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x+\frac{2(\ln m)^2-2\ln m}{m}\\
&= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x+\frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}
\end{aligned}
$$

ب/ تعيين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0;0)$:

(T_m) يشمل المبدأ معناه:

$$
\begin{aligned}
&0=\left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)(0)+\frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}\\
&\Rightarrow \frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}=0\\
&\Rightarrow 2\ln m\,(\ln m-1)=0\\
&\Rightarrow \begin{cases}2\ln m=0\\ \ln m-1=0\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases}\ln m=0\\ \ln m=1\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases}m=1\\ m=e\end{cases}
\end{aligned}
$$

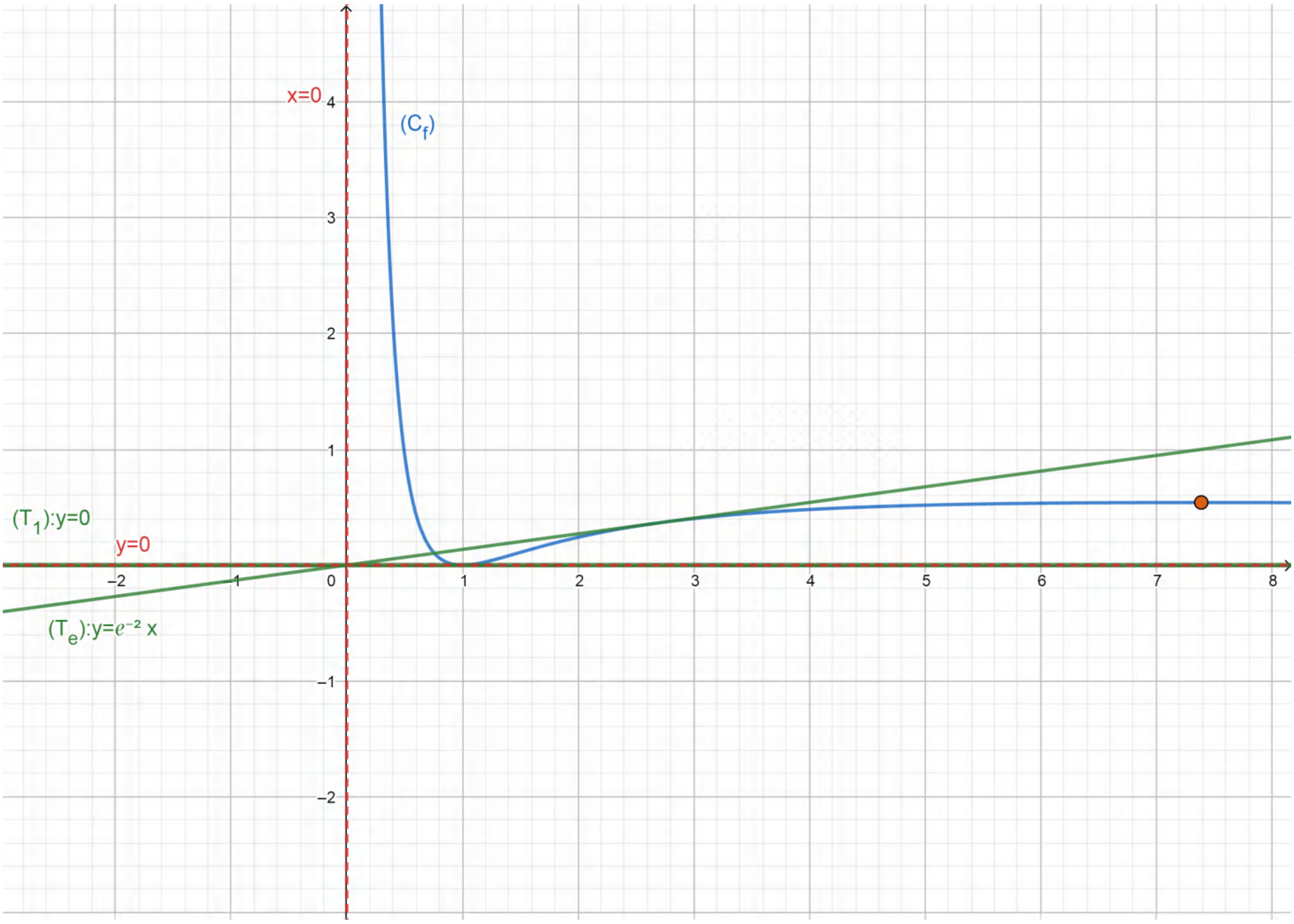
ج/ كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها:

$$
\begin{aligned}
(T_1): y &= 0x+0\\
&=0\\
(T_e): y &= \left(\frac{(2-1)\times 1}{e^2}\right)x+\frac{2(1-1)}{e}\\
&=\frac{1}{e^2}x\\
&=e^{-2}x
\end{aligned}
$$

3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=0$ و $y=0$
- نعين النقطة الحدية ذات الاحداثيات $(e^2;4e^{-2})$
- نرسم المماسين: (T_1) و (T_e)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(II)

1) تبيين أن الدالة g فردية:

تذكير

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

لتبيين أنّ الدالة f فردية نبين أنّ $\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

لتبيين أنّ الدالة f زوجية نبين أنّ $\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

2) تبيين أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f) :

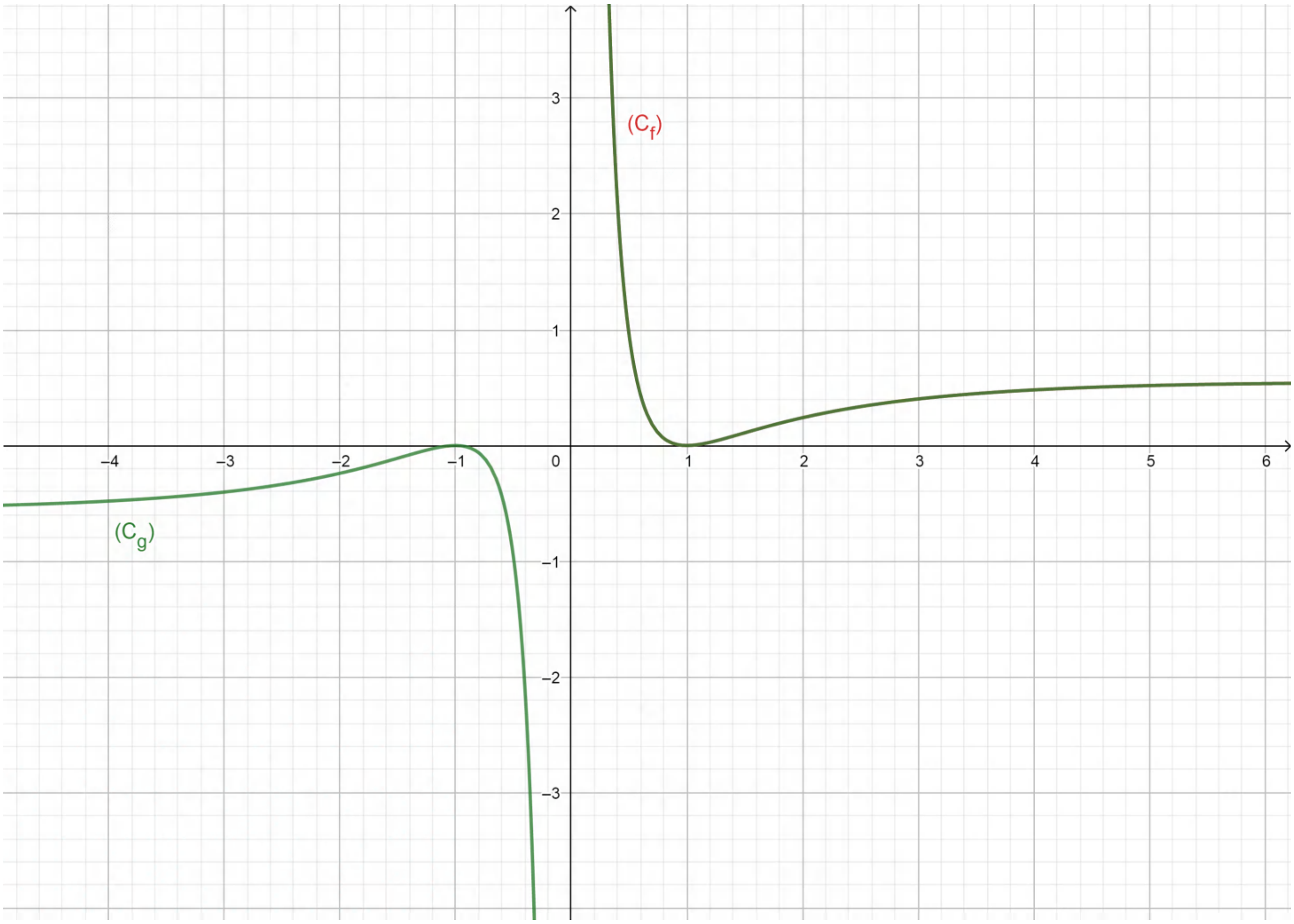
لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \frac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\frac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$: (C_g) ينطبق على (C_f)

ولما $x < 0$: (C_g) يناظر (C_g) بالنسبة للمبدأ

- تمثيل (C_g)



(C_f)
(C_g)

حل المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهـــدة المسألة

1) أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[f(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left[x + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{-\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)}_{-\infty}\right]$$

$$= +\infty$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$.

ب/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \to +\infty}[f(x)] = \lim_{x \to +\infty}\left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\underbrace{x}_{+\infty} + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)}_{+\infty}\right]$$

$$= +\infty$$

2) أ/ تبيين أن لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$ وأنّ لكل x من $[1; +\infty[$:

$(x-1) + \ln x \geq 0$:

نضع: الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $\quad h(x) = x - 1 + \ln x$

لدينا:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

لدينا: $h'(x) > 0$ ولدينا: $h(1) = 0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$

وأنّ لكل x من المجال $[1;+\infty[$: $(x-1)+\ln x \geq 0$

ب/ تبيين أنّه من أجل كل من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{2}{x}\ln x$$
$$=\frac{x-1+\ln x}{x}$$

$x>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $h(x)$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحني (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=0 \Rightarrow \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x=0 \\ \frac{1}{2}\ln x-1=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \ln x=2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=e^2 \end{cases}$$

ومنه:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{2}\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما: $]0;1[\cup]e^2;+\infty[$
- (C_f) يقطع (D) في النقطتين: $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$ وَ $B\left(e^2;e^2+\frac{1}{2}\right)$
- (C_f) تحت (D) لما: $]1;e^2[$.

4) تعيين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيه المماس (T) موازيا للمستقيم (D):

المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$f'(a)=1 \Rightarrow \frac{a-1+\ln a}{a}=1$$
$$\Rightarrow a-1+\ln a=a$$
$$\Rightarrow \ln a=1$$
$$\Rightarrow a=e$$

ومنه:

$$(T): y=f'(e)(x-e)+f(e)$$
$$=x-e+e+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}$$
$$=x$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة $\omega(e;e)$

5) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$:

$$f''(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x-1+\ln x)}{x^2}$$
$$=\frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب/ استنتاج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها:

لدينا: $x^2>0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2-\ln x)$

$$2-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=2$$
$$\Rightarrow x=e^2$$

ومنه:

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

لدينا $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $B\left(e^2;e^2+\frac{1}{2}\right)$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x=0$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعين A و B نقط تقاطع (D) مع (C_f)
- نرسم المماس: (T)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)

الخليل للرياضيات

7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = x - 2m$:

ومنه:

لما $-2m < 0$ أي $m > 0$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $-2m = 0$ أي $m = 0$ المعادلة تقبل حل مضاعف

لما $0 < -2m < \frac{1}{2}$ أي $-\frac{1}{4} < m < 0$ المعادلة تقبل حلان

لما $-2m = \frac{1}{2}$ أي $m = -\frac{1}{4}$ المعادلة تقبل حلان أحدهما مضاعف

لما $-2m > \frac{1}{2}$ أي $m < -\frac{1}{4}$ المعادلة تقبل حلان

حل المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [g(x)] = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)\right]$
$= -\infty$

لأن: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{x}{x+1}\right] = -\frac{1}{0^+} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)\right]$
$= -\infty$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2\frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{1-2x-2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

$$-(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x = -1$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ/ حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

ب/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 < \alpha < -0.71$:

لدينا $h(0) = 0$

اذن منحنى الدالة g يقطع محور الفواصل في المبدا

ولدينا: $g(-0.71) = 0.02$ و $g(-0.72) = -0.02$

ولدينا $g(-0.72) \times g(-0.71) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.72; -0.71[$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها وتفسير النتائج:

- $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = -\infty$$
- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$$

نضع: $k(x) = \ln(x+1)$

لدينا:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{k(x) - k(0)}{x - 0}\right] = \lim_{x \to 0} [\ln(x+1)] = k'(0) = 1$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
- $$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = 0$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=-1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x=0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$.

2) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}x^2-2x\ln(x+1)}{x^4}$$
$$=\frac{\frac{1}{x+1}x-2\ln(x+1)}{x^3}$$
$$=\frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x^3		$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

3) تبيين أن: $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0\Rightarrow\frac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)$$
$$\Rightarrow 2\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{\alpha+1}$$
$$\Rightarrow \ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$$

ولدينا:

$$f(\alpha)=\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$$
$$=\frac{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^2}$$
$$=\frac{\alpha}{2\alpha^2(\alpha+1)}$$
$$=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$-0.72 < \alpha < -0.71$$
$$0.28 < \alpha + 1 < 0.29 \dots (*)$$

ولدينا:

$$-1.44 < 2\alpha < -1.42 \dots (**)$$

بضرب $(*)$ في $(**)$ نجد:

$$-0.41 < 2\alpha(\alpha + 1) < -0.39$$
$$-2.56 < \frac{1}{2\alpha(\alpha + 1)} < -2.43$$

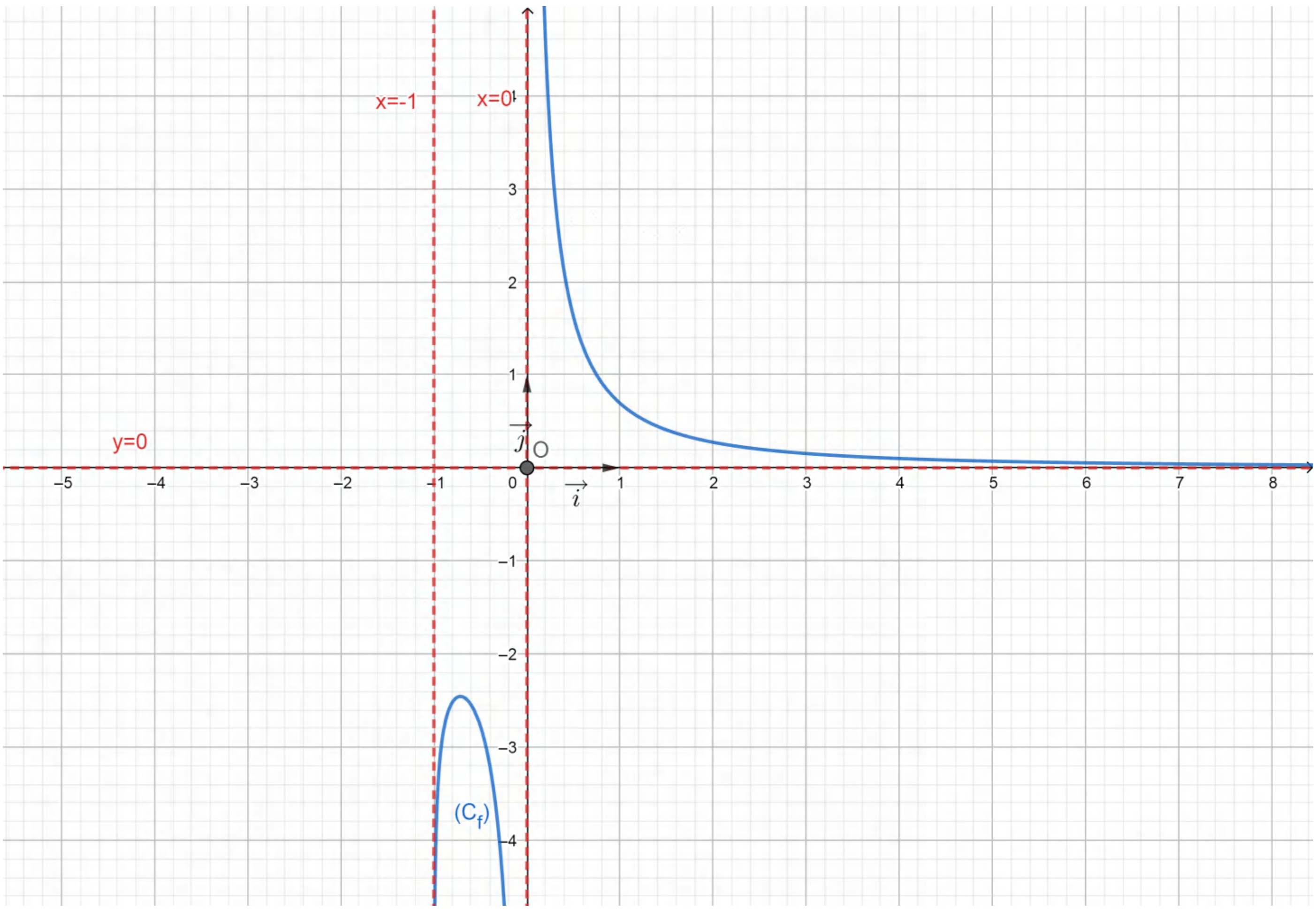
اذن:

$$-2.56 < f(\alpha) < -2.43$$

4) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 0$ و $x = -1$ و $y = 0$
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



الخليل للرياضيات

5) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \ln m$

ومنه:

لما	$\ln m < f(\alpha)$	أي	$m < e^{f(\alpha)}$	للمعادلة حلان سالبان
لما	$\ln m = f(\alpha)$	أي	$m = e^{f(\alpha)}$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$f(\alpha) < \ln m < 0$	أي	$e^{f(\alpha)} < m < 1$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$\ln m > 0$	أي	$m > 1$	للمعادلة حل وحيد موجب

حل المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهـــدة المسألة

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)\right]$$
$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\ln 2$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=-\ln 2$

ب/ تبيين أن: $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}\left(1+\frac{1}{2e^{2x}}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}}{e^x}\right) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2e^{2x}}}{1+\frac{2}{e^x}}\right)$$
$$= \ln(2e^x) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$
$$= \ln 2 + x + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln 2 + \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)}_{0}\right]$$
$$= +\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{4e^{2x}(e^x+2)-e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)^2}\right)}{\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)}$$
$$=\frac{4e^{2x}(e^x+2)-e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$
$$=\frac{4e^{3x}+8e^{2x}-2e^{3x}-e^x}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$
$$=\frac{e^x(2e^{2x}+8e^x-1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$

لدينا:

$$\begin{cases} e^x>0 \\ e^x+2>0 \\ 2e^{2x}+1>0 \end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x}+8e^x-1)$:

$$2e^{2x}+8e^x-1=0$$

نضع $e^x=t$ أي $x=\ln t$

فنجد:

$$2t^2+8t-1=0$$

لدينا:

$$\Delta=b^2-4ac=64-4(2)(-1)=72=\left(6\sqrt{2}\right)^2$$

لدينا: $\Delta>0$ ومنه:

$$\begin{cases} t_1=\dfrac{-8+6\sqrt{2}}{4}=-2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \\ t_2=\dfrac{-8+6\sqrt{2}}{4}=-2-\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\ln t_1=\ln\left(-2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right) \\ x_2=\ln t_2\ (\text{غير ممكن}) \end{cases}$$

ولدينا أيضا $f(0)=0$ ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\ln 2$	$\searrow$	$f\left(\ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ/ تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته:

◀ شاهد هذا التذكير ▶
(اثبات ان منحني يقبل مستقيم مقارب مائل)

لدينا:

$$f(x)=\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$
$$=x+\ln 2+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$
$$=y+\varphi(x)$$

حيث:

$$\begin{cases}\varphi(x)=\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)\\ y=x+\ln 2\end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)]=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x+\ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- <u>ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:</u>

$$f(x)-y=0\Rightarrow \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)=0$$
$$\Rightarrow \frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}=1$$
$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}e^{-2x}=1+2e^{-x}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x}-2e^{-x}=0$$

$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x}-2\right)=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}-2=0$$
$$\Rightarrow e^{-x}=4$$
$$\Rightarrow -x=\ln 4$$
$$\Rightarrow x=-\ln 4$$

لدينا:

$$x>-\ln 4$$
$$\Rightarrow -x<\ln 4$$
$$\Rightarrow e^{-x}<4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}<2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}-2<0$$
$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x}-2\right)<0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x}-2e^{-x}<0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}+1<2e^{-x}+1$$

لدينا: $2e^{-x}+1>0$ يمكن القسمة عليه

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}e^{-x}+1}{2e^{-x}+1}<1$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{1}{2}e^{-x}+1}{2e^{-x}+1}\right)<0$$

ومنه لما $x>-\ln 4$: $f(x)-y<0$

بنفس الطريقة نجد: لما لما $x<-\ln 4$: $f(x)-y>0$

ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- **الوضعية:**

- (C_f) فوق (D) لما $x\in\,]-\infty;-\ln 4[$.
- (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات: $(-\ln 4\,;-\ln 2)$
- (C_f) تحت (D) لما $x\in\,]-\ln 4\,;+\infty[$.

4) تبيين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

نحدد أولا نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = -\ln 2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي $\omega(-\ln 4 ; -\ln 2)$

ولدينا: $f(-\ln 4) = -\ln 2$ ومنه $\omega \in (C_f)$

5) كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا:

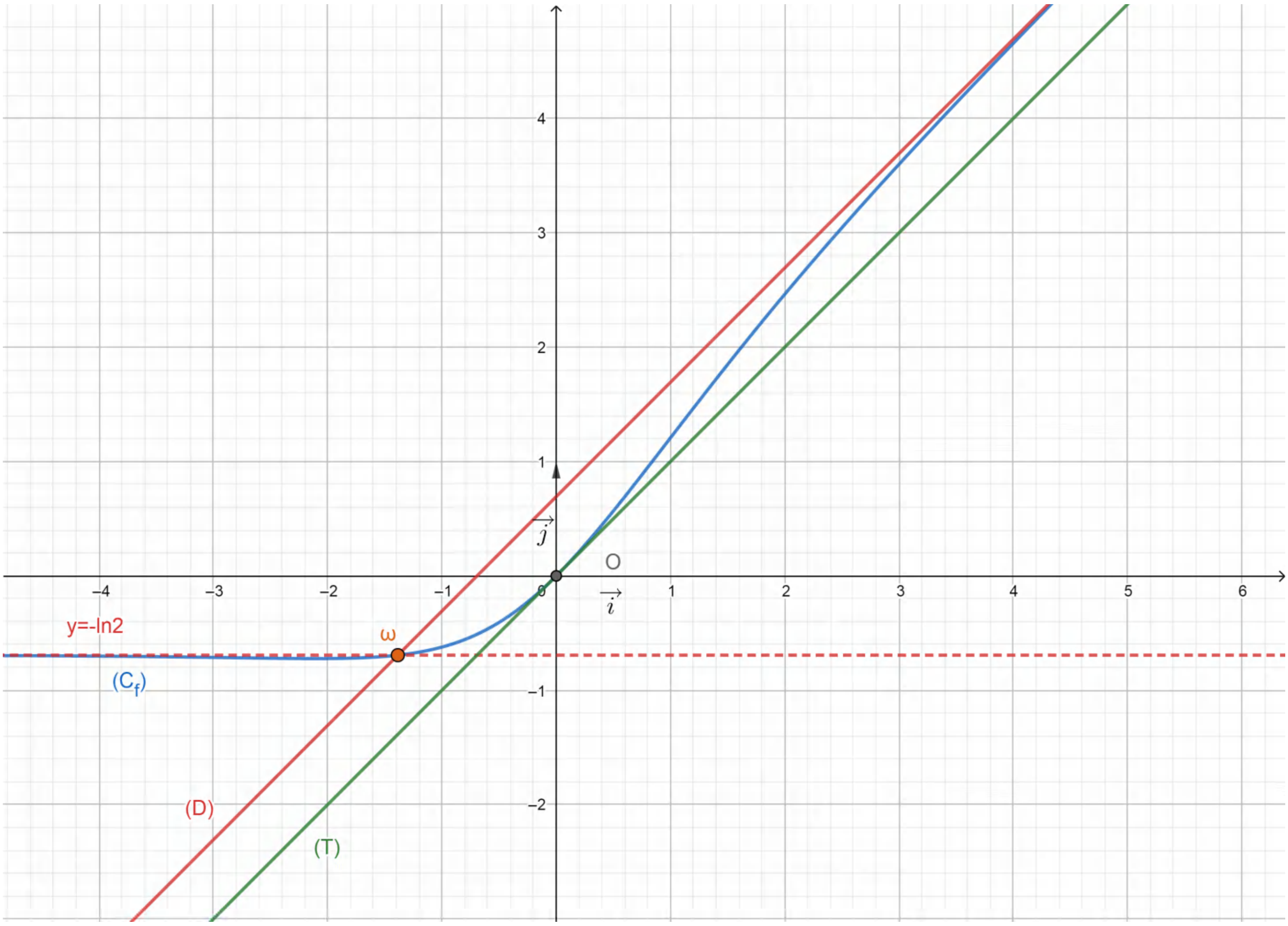
$$\begin{aligned}(T): y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= x\end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مماس للمنحني (C_f) عند المبدأ.

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $y = -\ln 2$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعيّن نقطة ω تقاطع المستقيمات المقاربة.
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x-\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{me^{x}+2m}\right)=0$$
$$\Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{m}\,\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$
$$\Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{m}\right)+\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$
$$\Rightarrow x=-\ln m+f(x)$$
$$\Rightarrow f(x)=x+\ln m$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m=x+\ln m$$

ومنه:

لما $\ln m<0$ أي $m<1$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $\ln m=0$ أي $m=1$ للمعادلة حل مضاعف

لما $0<\ln m<\ln 2$ أي $1<m<2$ للمعادلة حلان

لما $\ln m = \ln 2$ أي $m = 2$ للمعادلة حل مضاعف

لما $\ln m > \ln 2$ أي $m > 2$ للمعادلة حل وحيد

حل المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[g(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[\underbrace{\ln x}_{-\infty} + \underbrace{x}_{0} - 3\right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}[g(x)] = \lim_{x\to +\infty}\left[\underbrace{\ln x}_{+\infty} + \underbrace{x}_{+\infty} - 3\right] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) تبيين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $g(2.2) = -0.01$ و $g(2.11) = 0.002$

ولدينا: $g(2.2) \times g(2.11) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.2 < \alpha < 2.21$

3) تعيين إشارة $g(x)$ على المجال : $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)\left(\underbrace{\ln x}_{+\infty}-2\right)\right]$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty}\right)\left(\underbrace{\ln x}_{-\infty}-2\right)\right]$$
$$= +\infty$$

2) أ/ حساب $f'(x)$ ، ودراسة اشارتها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{1}{x^2}(\ln x-2+x-1)\\ &= \frac{1}{x^2}(\ln x+x-3)\\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) تعيين دون حساب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} = 0$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

(C_f) يقبل مماس مواز لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α .

4) تبيين أن: $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha)=0 &\Rightarrow \ln\alpha+\alpha-3=0\\ &\Rightarrow \ln\alpha = 3-\alpha \end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2) \\ &= \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(3-\alpha-2) \\ &= \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(1-\alpha) \\ &= \frac{(\alpha-1)(1-\alpha)}{a} \\ &= \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha} \end{aligned}$$

5) حل المعادلة $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{1}{x}=0 \\ \ln x-2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=1 \\ \ln x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=e^2 \end{cases}$$

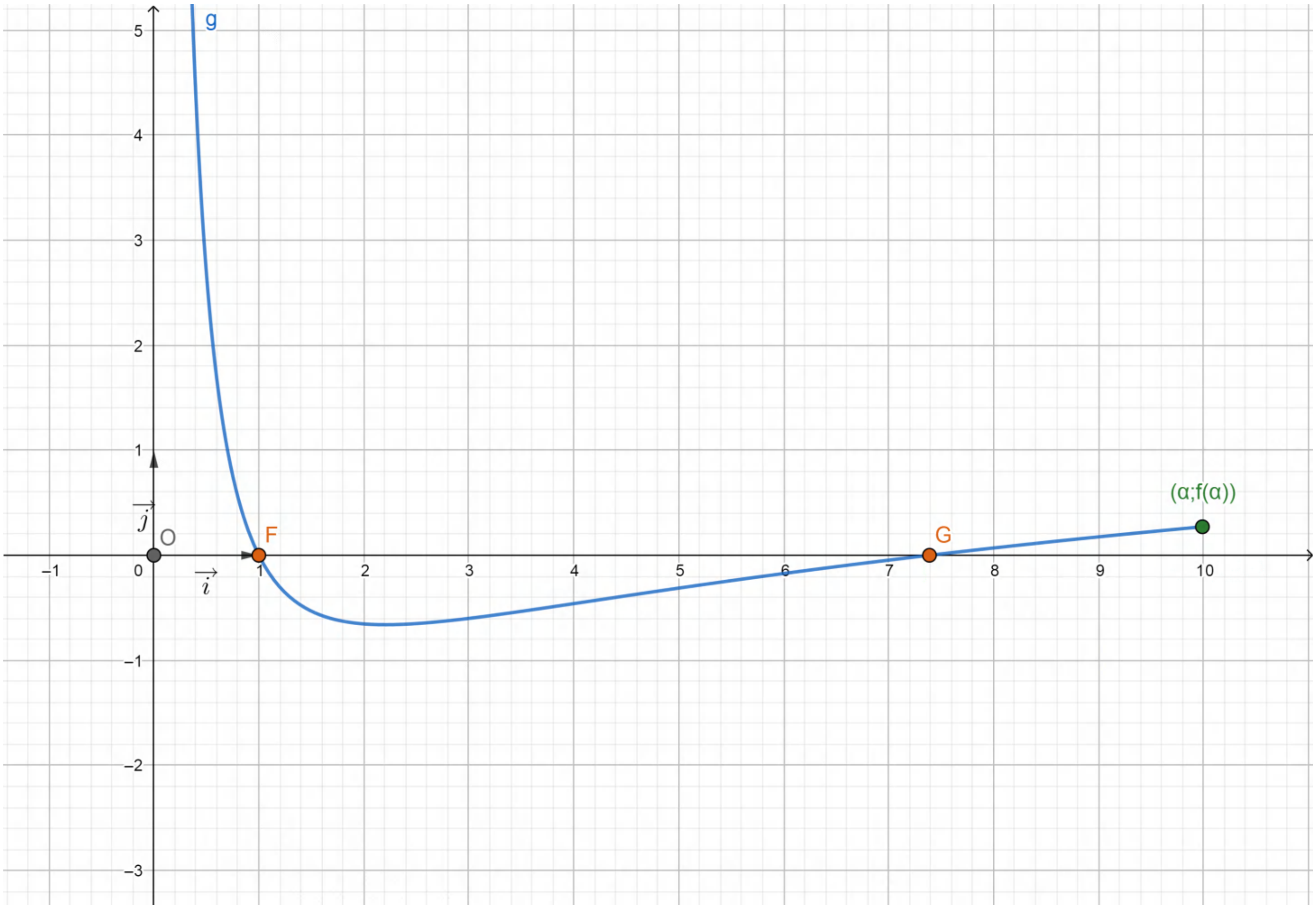
- التفسير الهندسي:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين: $A(1;0)$ و $B(e^2;0)$.

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعيّن النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$
- نعين النقطتين A و B
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)


g
F
G
O
(α;f(α))

حل المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x^2}_{+\infty} - 2 + \underbrace{\ln x}_{+\infty}\right]$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}[g(x)] = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}\left[\underbrace{x^2}_{0} - 2 + \underbrace{\ln x}_{-\infty}\right]$$
$$= -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

لدينا: الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ومنه:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{2x^2+1}{x}$$

لدينا $x > 0$ و $2x^2 + 1 > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) أ/ تبيين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}[g(x)] \times \lim_{x\to+\infty}[g(x)] < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

ب/ التحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$:

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$

ولدينا: $g(1.31)\times g(1.32)<0$ ، اذن $1.31<\alpha<1.32$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x^2}_{+\infty}+\left(2-\underbrace{\ln x}_{+\infty}\right)^2\right]$$
$$=+\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[f(x)]=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[\underbrace{x^2}_{0}+\left(2-\underbrace{\ln x}_{-\infty}\right)^2\right]$$
$$=+\infty$$

2) تبيين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$:

لدينا: الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

$$f'(x)=2x+2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)$$
$$=2x-\frac{2(2-\ln x)}{x}$$
$$=\frac{2(x^2-2+\ln x)}{x}$$
$$=\frac{2}{x}g(x)$$

لدينا $\frac{2}{x}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

4) تبيين أن: $f(\alpha)=\alpha^2(1+\alpha^2)$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0\Rightarrow \alpha^2-2+\ln\alpha=0$$
$$\Rightarrow \ln\alpha=2-\alpha^2$$

ولدينا:

$$f(\alpha)=\alpha^2+(2-\ln\alpha)^2$$
$$=\alpha^2+(2-2-\alpha^2)^2$$

الخليل للرياضيات

$$= \alpha^2 + \alpha^4$$
$$= \alpha^2(1+\alpha^2)$$

وهو المطلوب.

5) استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال: $]0;+\infty[$:

لدينا $f(\alpha) > 0$ ومنه نجد:

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f(x)$	$+$

(III)

1) تبيين أن المسافة AM تعطى بـ $AM = \sqrt{f(x)}$:

لدينا M نقطة من المنحني (C_h) فاصلتها x_m أي تكتب على الشكل:

$M(x; h(x))$ أي: $M(x; \ln x)$ ومنه المسافة AM تعطى بـ:

$$AM = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + \left(-(2-\ln x)\right)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + (2-\ln x)^2}$$
$$= \sqrt{f(x)}$$

2) أ/ برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$:

نلاحظ أن:

$$k(x) = (u \circ f)(x)$$

حيث:

$$u(x) = \sqrt{x}$$

لدينا الدالة u متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

والدالة f موجبة تماما على $]0;+\infty[$

اذن $(u \circ f)(x)$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ومنه للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$

f دالة معرفة على مجال I
وg دالة معرفة على المجال (I)
• إذا كانت الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متزايدة على I
• إذا كانت الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على I

ب/ برهان أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) :

بما أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير في المجال $]0;+\infty[$

فإن الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x = \alpha$

ومنه المسافة أصغرية لما $x = \alpha$

إذن:

$$B(\alpha; \ln\alpha) \Leftrightarrow B(\alpha; 2-\alpha^2)$$

ج/ برهان أن: $AB = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$:

$$AB = \sqrt{(\alpha-0)^2 + (2-\alpha^2-2)^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}$$
$$= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)}$$
$$= |\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2}$$
$$= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

3) تبرير أن المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحني (C_h) في النقطة B :

لدينا:

ميل المستقيم المماس لـ (C_h) في النقطة B هو:

$$h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AB) هو :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0}$$
$$= -\frac{\alpha^2}{\alpha}$$
$$= -\alpha$$

|تذكر أنّه| ◄ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ►

لدينا:

$$-\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$$

ومنه المستقيم (AB) عمودي على مماس المنحني (C_h) في النقطة B.