مسالة 1:

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=x^3-3x-3$

1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2\prec\alpha\prec3$.

3) استنتج إشارة $g(x)$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها.

2) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ فان: $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين ان $f(\alpha)=3\alpha+1$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) ا) بين ان المستقيم (d) الذي معادلته $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

6) اوجد فواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) .

7) ارسم المستقيمات المقاربة والمنحني (C_f) .

الحل:

I) $g(x)=x^3-3x-3$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

* النهايات: $D_g=]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

* اتجاه التغير:

$g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$ ومنه $g'(x)=0$ معناه $x=1$ او $x=-1$ و

$g(x)\succ0$ معناه $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ وأيضا $g'(x)\prec0$ معناه $x\in]-1;1[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

2) اثبات ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $2\prec\alpha\prec3$:

الدالة g مستمرة على المجال $]2;3[$ و $g(2)=-1$ و $g(3)=15$ أي $g(2)\times g(3)\prec0$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان للمعادلة $g(x)=0$ على الأقل حل في المجال $]2;3[$ ومن خلال جدول التغيرات ينتج ان الدالة g متزايدة تماما على المجال $]2;3[$ اذن فللمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا في المجال $]2;3[$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$: من خلال جدول التغيرات نلاحظ ان المنحني يقع تحت محور الفواصل لما $x\in]-\infty;\alpha[$ ومنه نستنتج ان $g(x)\prec0$ معناه $x\in]-\infty;\alpha[$ و كذلك المنحني يقع فوق محور الفواصل لما $x\in]\alpha;+\infty[$ أي $g(x)\succ0$ معناه $x\in]\alpha;+\infty[$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـــ : $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}$.

1) حساب النهايات: $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to-1\\ \prec}} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ \succ}} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to1\\ \prec}} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to1\\ \succ}} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty \ .$$

2) اثبات انه من اجل كل $x\in D_f$ فان : $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$:

$$f'(x)=\left(\frac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(2x^3+x^2+2\right)'\left(x^2-1\right)-\left(2x^3+x^2+2\right)\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(6x^2+2x\right)\left(x^2-1\right)-\left(2x^3+x^2+2\right)\times 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{6x^4-6x^2+2x^3-2x-4x^4-2x^3-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{2x^4-6x^2-6x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\left(x^3-3x-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لنا $f'(x)=\frac{2xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$ أي ان إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $xg(x)$:

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		-	‖	-	0	+	‖	+		+	
$g(x)$		-	‖	-		-	‖	-	0	+	
$f'(x)=xg(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	

من خلال هذا الجدول نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجموعة $]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجموعة $]0;1[\cup]1;\alpha[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) اثبات ان $f(\alpha)=3\alpha+1$ وتعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

لنا $f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+\alpha^2+2}{\alpha^2-1}$

$$f(\alpha)-3\alpha-1=\frac{2\alpha^3+\alpha^2+2}{\alpha^2-1}-3\alpha-1$$
$$=\frac{2\alpha^3+\alpha^2+2-3\alpha^3+3\alpha-\alpha^2+1}{\alpha^2-1}=\frac{-\alpha^3+3\alpha+3}{\alpha^2-1}$$
$$=-\frac{\alpha^3-3\alpha-3}{\alpha^2-1}=-\frac{g(\alpha)}{\alpha^2-1}=0$$

لان $g(\alpha)=0$

اذن نجد $f(\alpha)-3\alpha-1=0$ ومنه $f(\alpha)=3\alpha+1$.

تعيين الحصر: لنا $2\prec\alpha\prec3$ ومنه $6\prec3\alpha\prec9$ ومنه $7\prec3\alpha+1\prec10$ أي $7\prec f(\alpha)\prec10$.

5) أ) اثبات ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}-2x-1\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^3+x^2+2-2x^3+2x-x^2+1}{x^2-1}\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x+3}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{\pm\infty}=0$$

وعليه نستنتج ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

ب) دراسة الوضعية النسبية بين (d) و (C_f):

لمعرفة الوضعية النسبية بين (d) و (C_f) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=\frac{2x+3}{x^2-1}$$

جدول إشارة الفرق $f(x)-y=\frac{2x+3}{x^2-1}$:

x	$-\infty$		-1,5		-1		1		$+\infty$
$2x+3$		-	0	+		+		+	
x^2-1		+		+	0	-	0	+	
$\frac{2x+3}{x^2-1}$		-	0	+	||	-	||	+	

من خلال الجدول نستنتج ان المنحني (C_f) يقع فوق (d) لما $x \in \left]-\frac{3}{2};-1\right[\cup]1;+\infty[$

ويكون المنحني (C_f) يقع تحت (d) لما $x \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup]-1;1[$.

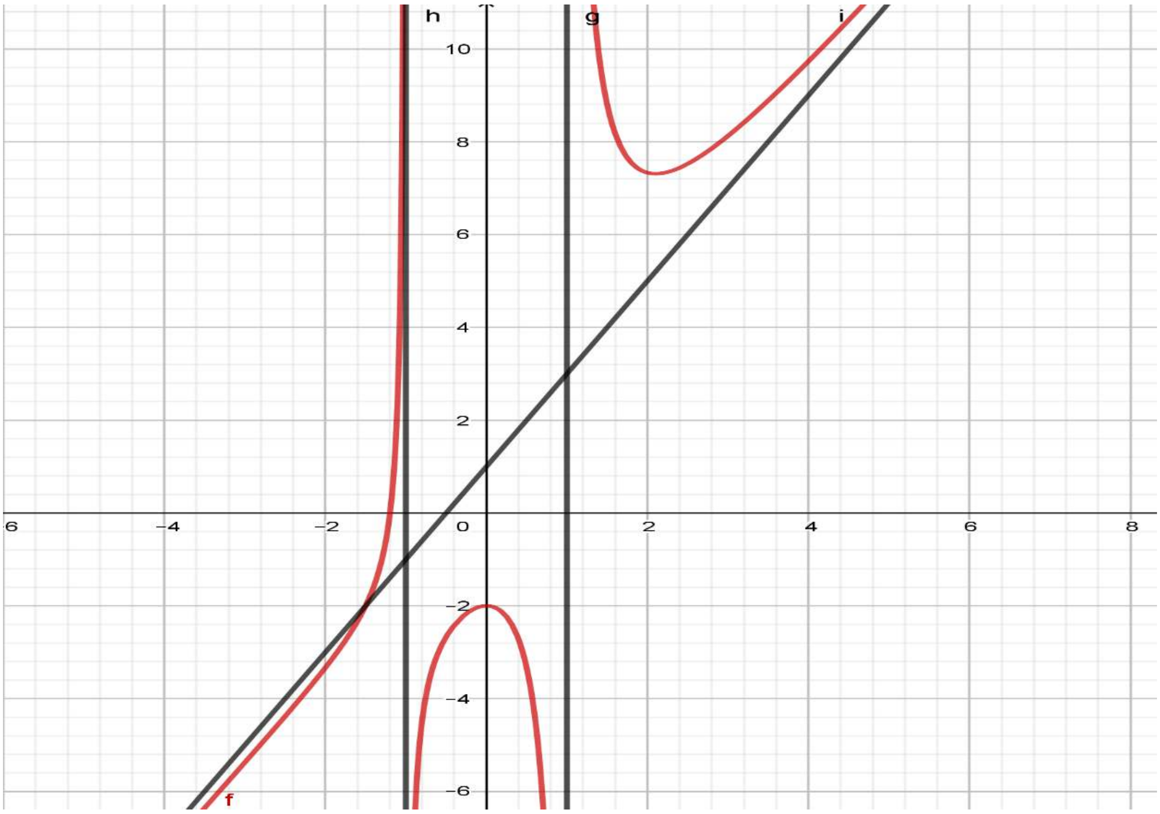
6) إيجاد فواصل النقط من (C_f) التي يكون المماس فيها موازيا للمستقيم (d):

ان معامل توجيه المستقيم (d) يساوي 2 ونحن نعلم ان معامل توجيه المماس عند القطة التي فاصلتها مثلا a هو $f'(a)$ ومنه لكي يكون المماس موازي للمستقيم (d) يجب ان يكون لهما نفس معامل التوجيه اذن نقوم بحل المعادلة $f'(a)=2$ وعدد حلولها هو عدد المماسات المطلوب:

$f'(a)=2$ معناه $\frac{2a\times g(a)}{\left(a^2-1\right)^2}=2$ ومنه $a\times g(a)=\left(a^2-1\right)^2$ ومنه $a\times(a^3-3a-3)=\left(a^2-1\right)^2$

ومنه $a^4-3a^2-3a=a^4-2a^2+1$ ومنه $a^2+3a+1=0$ $\Delta=8\succ 0$ ومنه $a_1=\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$ و $a_2=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$ اذن هناك مماسان معامل توجيههما a_1 و a_2 يوازيان المستقيم (d) .

7) رسم المستقيمات المقاربة والمنحني (C_f) : باستعمال برمجية الجيوجابرا نتحصل على المنحني التالي:



الأستاذ جمال بورنان