المسألة

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

الجزء الأول:

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4) أحسب $f(-x)+f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)؟

5) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D). ماذا تستنتج؟

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته: $y=x$ في نقطة فاصلتها x_0 حيث: $1<x_0<2$.

7) أنشئ (D) و (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = mx+1$$

الجزء الثاني:

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$$

وليكن (C_h) منحنيها البياني في المعلم السابق.

1) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة 0.

2) بين أن الدالة h زوجية.

3) استنتج رسم المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f).

الحل

الجزء الأول:

1) حساب النهايات:

- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$
$$= 0$$

لأن:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$
$$= 2$$

لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f):

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $-\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا هو حامل محور الفواصل و $y=0$ معادلة له.

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $+\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا (يوازي حامل محور الفواصل) و $y=2$ معادلة له.

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'(x)$ حيث:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

نجد:

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x:

$$\sqrt{x^2+1}>0 \quad \text{و} \quad x^2+1>0$$

ومنه:

$$\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$

أي:

$$f'(x)>0$$

إذن:

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 2$

3) معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0:

تعطى معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 بالعلاقة:

$$(D): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

حيث:

$$\begin{cases} f'(0)=1 \\ \text{و} \\ f(0)=1 \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$(D): y=x+1$$

4) حساب $f(-x)+f(x)$:

$$f(-x)+f(x)=1+\frac{(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}+1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1$$

نجد:

$$f(-x)+f(x)=2$$

استنتاج:

لدينا:

$$f(-x)+f(x)=2$$

ونكتب:

$$f(2\times 0-x)+f(x)=2\times 1$$

نستنتج أن:

النقطة $\omega(0\,;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

تذكير:

نقول عن نقطة $\omega(a\,;b)$ أنها مركز تناظر لمنحنى دالة f إذا كان:

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

5) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D):

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$.

حيث:

$$\begin{aligned} f(x)-y &= 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(x+1) \\ &= 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1 \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x \\ &= \frac{x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

نجد:

$$f(x)-y=\frac{x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

من أجل كل عدد حقيقي x:

لدينا:

$$\begin{aligned} &x^2 \geq 0 \\ &x^2+1 \geq 1 \\ &\sqrt{x^2+1} \geq 1 \\ &-\sqrt{x^2+1} \leq -1 \\ &1-\sqrt{x^2+1} \leq 0 \end{aligned}$$

$$1-\sqrt{x^2+1} \leq 0$$

ولدينا:

$$\sqrt{x^2+1} > 0$$

ولدينا:

$$\begin{cases} x<0 \ ; \ x \in]-\infty ; 0[\\ x>0 \ ; \ x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$$

نلخص الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$1-\sqrt{x^2+1}$	$-$		$-$
$\sqrt{x^2+1}$	$+$		$+$
$f(x)-y=\frac{x(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$	$+$		$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (D)	(C_f) يخترق (D) في النقطة $\omega(0;1)$	(C_f) يقع تحت (D)

استنتاج:

بما أن المماس (D) يخترق المنحنى (C_f) في النقطة $\omega(0;1)$ فإن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

6) البرهان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته: $y=x$ في نقطة فاصلتها x_0 حيث: $1<x_0<2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y=x \\ y=f(x) \end{cases}$$

أي:

$$f(x)=x$$

ونكتب:

$$f(x)-x=0$$

ومنه:

فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y=x$ هي حلول المعادلة $f(x)-x=0$.

نضع:

g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=f(x)-x$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$$

لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)-1 \\ &= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}-1 \end{aligned}$$

نجد:

$$g'(x)=\frac{1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

دراسة اشارة الدالة المشتقة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$:

الدالة المشتقة $g'(x)$ تنعدم عند 0.

أي:

$$g'(0)=0$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

من أجل كل عدد حقيقي x:

لدينا:

$$x^2 \geq 0$$

أي:

$$\begin{cases} x^2+1 \geq 1 \\ \sqrt{x^2+1} \geq 1 \end{cases}$$

ونكتب:

$$(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \geq 1$$

أي:

$$-(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \leq -1$$

نجد:

$$1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \leq 0$$

ومنه:

$$g'(x) \leq 0$$

إذن:

الدالة g متناقصة على $\mathbb{R}$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)=f(x)-x$	$+\infty$	1	$-\infty$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1\,;2]$.

ولدينا:

$$g(1) = +\,0{,}707\,...$$
$$g(2) = -\,0{,}105\,...$$

لاحظ أن:

$$g(1)\times g(2) < 0$$

أي:

$$g(2) < 0 < g(1)$$

ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]1\,;2[$ بحيث: $g(x_0)=0$.

لدينا من مبرهنة القيم المتوسطة:

$$g(x_0)=0$$

أي:

$$f(x_0)-x_0=0$$

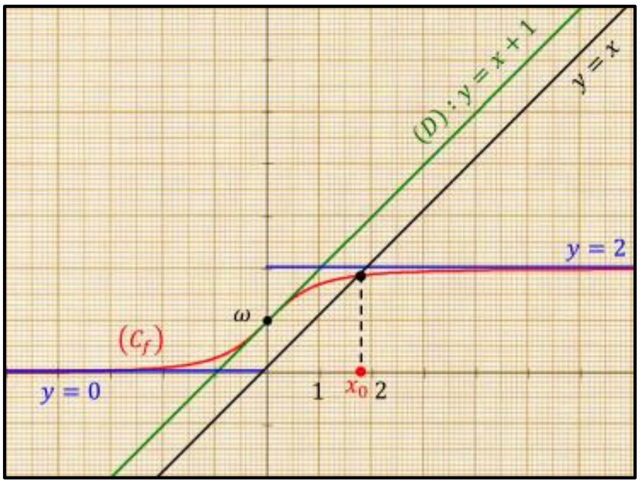
ونكتب:

$$f(x_0)=x_0$$

ومنه:

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته: $y=x$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 حيث: $1<x_0<2$.

7) إنشاء (D) و (C_f):



8) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة:

$$f(x)=mx+1$$

الحلول البيانية لهذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع المستقيمات (D_m) المعرفة بالمعادلة:

$$(D_m) : y = mx+1$$

لاحظ أن:

جميع المستقيمات (D_m) تمر من النقطة $\omega(0\,;1)$.

وبالتالي المناقشة دورانية ومركزها النقطة $\omega(0\,;1)$.

الحالة الأولى: $m \in]-\infty\,;0]$.

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع المستقيمات (D_m) في نقطة وحيدة هي النقطة $\omega(0\,;1)$.

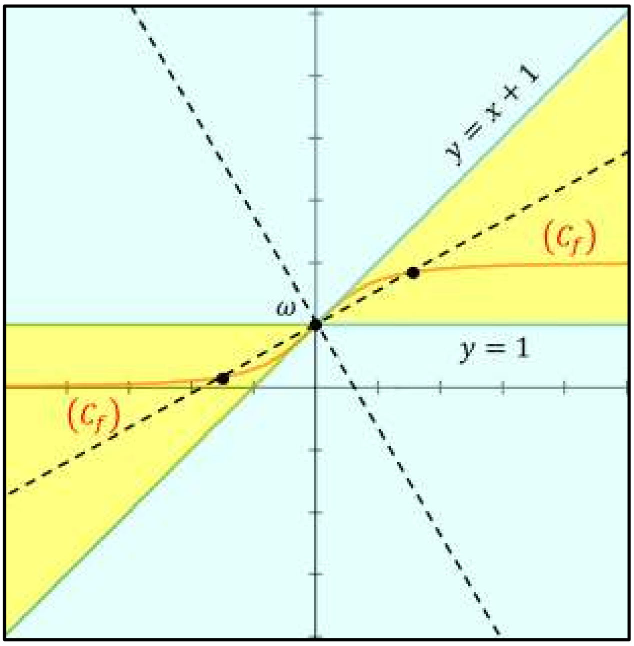
الحالة الثانية: $m \in]0\,;1[$.

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع المستقيمات (D_m) في ثلاث نقط مختلفة (نقطة فاصلتها سالبة ونقطة فاصلتها معدومة $\omega(0\,;1)$ ونقطة فاصلتها موجبة).

الحالة الثالثة: $m \in [1\,;+\infty[$.

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع المستقيمات (D_m) في نقطة وحيدة هي النقطة $\omega(0\,;1)$.

النتائج موضحة في الشكل التالي:



الجزء الثاني:

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x)=1+\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة 0:

نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{cases} h(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ x\le 0 \\ h(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ x>0 \end{cases}$$

حيث:

$$h(0)=1$$

دراسة استمرارية الدالة h عند القيمة 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]=1=h(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]=1=h(0)$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}} h(x)=h(0)$$

ومنه:

الدالة h مستمرة عند القيمة 0.

دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\left[\frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\left[\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left[\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left[\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$=1$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{h(x)-h(0)}{x}\neq\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{h(x)-h(0)}{x}$$

ومنه:

الدالة h لا تقبل الاشتقاق عند القيمة 0.

لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{h(x)-h(0)}{x}=-1$$

ـ المنحنى (C_h) الممثل للدالة h يقبل نصف مماس على يسار النقطة $(0\,;1)$ معامل توجيه حامله هو -1 معادلته:

$$(D'): y=-x+1$$

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{h(x)-h(0)}{x}=1$$

ـ المنحنى (C_h) الممثل للدالة h يقبل نصف مماس على يمين النقطة $(0\,;1)$ معامل توجيه حامله هو 1 معادلته:

$$(D): y=x+1$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

2) البرهان أن الدالة h زوجية:

تكون الدالة h زوجية إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x:

$$h(-x) = h(x)$$

لدينا:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 1 + \frac{|-x|}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \\ &= 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

لأن:

$$(-x)^2 = x^2 \quad \text{و} \quad |-x| = |x|$$

ومنه:

h دالة زوجية.

3) استنتاج رسم المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f):

بما أن h دالة زوجية فإن محور التراتيب هو محور تناظر بالنسبة للمنحنى البياني (C_h) الممثل للدالة h.

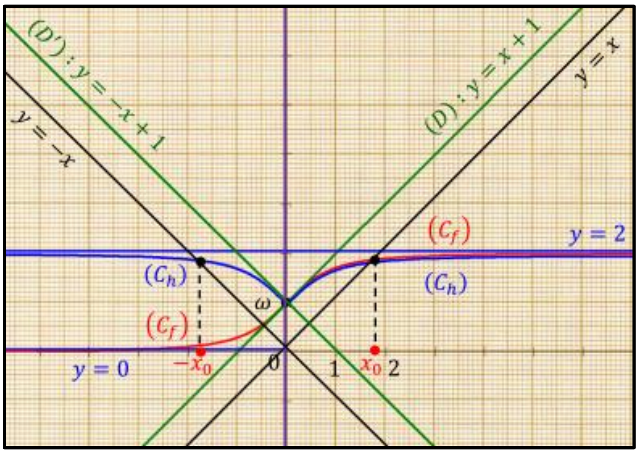
ولدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$h(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

ومنه:

- على المجال $]0\,;+\infty[$، المنحنى البياني (C_h) الممثل للدالة h ينطبق على المنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f (لأن: $h(x) = f(x)$).
- على المجال $]-\infty\,;0[$، المنحنى البياني (C_h) الممثل للدالة h هو نظير المنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f بالنسبة لمحور التراتيب.



تعلم الرياضيات

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr