

**الحل**

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

(1) أ- كتابة  $f(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة:

لدينا:

$$|x + 1| = \begin{cases} -x - 1 ; x \in ]-\infty ; -1[ \\ \text{و} \\ x + 1 ; x \in [-1 ; +\infty[ \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} ; x \in ]-\infty ; -1[ \\ \text{و} \\ x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} ; x \in [-1 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \end{cases}$$

(1) ب- حساب نهايات  $f$  عند أطراف مجموعة التعريف:

الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$ .

حساب:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x - 1 + \frac{x}{x \left( x - \frac{1}{x} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x - 1 + \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right) \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1) = +\infty \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right) = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

**دراسة دالة عددية بالقيمة المطلقة****المسألة**

$f$  هي الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ:

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

وليكن  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ- أكتب  $f(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة.

ب- أحسب نهايات  $f$  عند أطراف مجموعة التعريف.

(2) أ- أحسب  $f'(x)$  ثم ادرس إشارتها.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(3) أ- بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  مقاربان مائلين للمنحنى

$(C)$  بجوار  $+\infty$  و  $-\infty$  على الترتيب حيث:

$$(\Delta) : y = x + 1 \text{ و } (\Delta') : y = -x - 1$$

ب- أدرس وضعية  $(C)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  على المجال

$]-\infty ; -1[$  ووضعية  $(C)$  بالنسبة إلى  $(\Delta')$  على المجال  $]1 ; +\infty[$ .

(4) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال

$]-1 ; 1[$  ثم أعط حصر  $\alpha$  سعته  $10^{-1}$ .

(5) أرسم  $(C)$  والمستقيمات المقاربة.

(6) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة

حلول المعادلة:

$$f(x) = m$$

حساب:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right) = +\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

حساب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{x}{x \left( x - \frac{1}{x} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right) \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right) = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

تفسير النتائج بيانياً:

المنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيمين مقاربين عموديين يوازيان حامل محور الترتيب) معادلتيهما  $x = -1$  و  $x = 1$ .

حساب:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} (-x - 1) = 0 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

حساب:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right) = +\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

حساب:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

دراسة إشارة  $f'(x)$ :من أجل  $x \in ]-\infty; -1[$  -

$$f'_1(x) = \frac{-(x^4 - x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; -1[$ :

$$\begin{cases} -(x^4 - x^2 + 2) < 0 \\ (x^2 - 1)^2 > 0 \end{cases}$$

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; -1[$ :

$$f'_1(x) < 0$$

يعطى جدول إشارة  $f'_1(x)$  على المجال  $]-\infty; -1[$  كما يلي:

$x$	$-\infty$	$-1$
$f'_1(x)$		-

من أجل  $x \in ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  -

$$f'_2(x) = \frac{x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}$$

لاحظ أن:

الدالة  $f'_2(x)$  تنعدم من أجل  $x = -\sqrt{3}$  و  $x = 0$  و  $x = \sqrt{3}$ .

انتبه:

لا نأخذ القيمة  $x = -\sqrt{3}$  بعين الاعتبار لأنها لا تنتمي إلىالمجال  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .يعطى جدول إشارة  $f'_2(x)$  على المجال  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$ 

كما يلي:

$x$	$-1$	$0$	$1$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$x^2$	+	0	+	+	+	
$x + \sqrt{3}$	+	+	+	+	+	
$x - \sqrt{3}$	-	-	-	0	+	
$x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$	-	0	-	-	0	+
$f'_2(x)$	-	0	-	-	0	+

نلخص إشارة  $f'(x)$  في الجدول التالي:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	-	0	-	-	0	+

(2) أ- حساب  $f'(x)$ :الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  حيث:من أجل  $x \in ]-\infty; -1[$  -

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= -1 + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= -1 + \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-(x^2 - 1)^2 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 + 2x^2 - 1 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-(x^4 - x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$f'_1(x) = \frac{-(x^4 - x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2}$$

من أجل  $x \in ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  -

$$\begin{aligned} f'_2(x) &= 1 + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= 1 + \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 1)^2 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$f'_2(x) = \frac{x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}$$

(2) - تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-	-	0
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$1$	$+\infty$	$1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

(3) أ- البرهان أن  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  مقاربن مائلين للمنحنى  $(C)$ :البرهان أن  $(\Delta)$  مقارب مائل للمنحنى  $(C)$  بجوار  $+\infty$ :المستقيم  $(\Delta)$  مقارب مائل للمنحنى  $(C)$  بجوار  $+\infty$  إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - y_{(\Delta)}) = 0$$

حيث:

$$\begin{cases} f_2(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \\ \text{و} \\ (\Delta) : y = x + 1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - y_{(\Delta)}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x \left( x - \frac{1}{x} \right)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - y_{(\Delta)}) = 0$$

ومنه:

المستقيم  $(\Delta)$  مقارب مائل للمنحنى  $(C)$  بجوار  $+\infty$ .

حيث:

$$(\Delta) : y = x + 1$$

البرهان أن  $(\Delta')$  مقارب مائل للمنحنى  $(C)$  بجوار  $-\infty$ :المستقيم  $(\Delta')$  مقارب مائل للمنحنى  $(C)$  بجوار  $-\infty$  إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1(x) - y_{(\Delta')}) = 0$$

حيث:

$$\begin{cases} f_1(x) = -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \\ \text{و} \\ (\Delta') : y = -x - 1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1(x) - y_{(\Delta')}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{x \left( x - \frac{1}{x} \right)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1(x) - y_{(\Delta')}) = 0$$

ومنه:

المستقيم  $(\Delta')$  مقارب مائل للمنحنى  $(C)$  بجوار  $-\infty$ .

حيث:

$$(\Delta') : y = -x - 1$$

(3) - دراسة وضعية  $(C)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  على المجال:  $1; +\infty[$ لدراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  والمستقيم  $(\Delta)$  ندرس إشارةالفرق  $f_2(x) - y_{(\Delta)}$  على المجال  $1; +\infty[$ .

حيث:

$$f_2(x) - y_{(\Delta)} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $1; +\infty[$  فإن:

$$f_2(x) - y_{(\Delta)} > 0$$

ومنه:

المنحنى  $(C)$  يقع فوق المستقيم  $(\Delta)$  على المجال  $1; +\infty[$ .

(أنظر الجدول المرافق).

إعطاء حصر لـ  $\alpha$  سعته  $10^{-1}$ :

لدينا:

$$-1 < \alpha < 1$$

ومن جدول تغيرات الدالة  $f$  لدينا:

$$f(0) = 1 \text{ (قيمة موجبة)}$$

ومنه:

$$0 < \alpha < 1$$

وفيما يلي إشارة  $f(\alpha)$  الموافقة لقيم  $\alpha$  على المجال  $]0; 1[$ :

حيث:

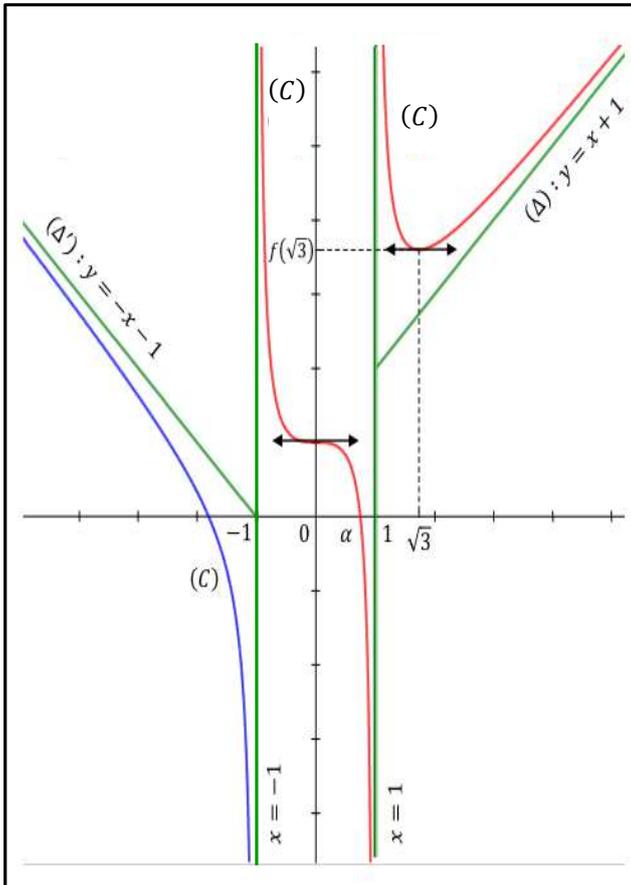
$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

$\alpha$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(\alpha)$	+	+	+	+	+	+	+	-	-

ومنه:

$$0,7 < \alpha < 0,8$$

(5) رسم  $(C)$  والمستقيمات المقاربة:



دراسة وضعية  $(C)$  بالنسبة إلى  $(\Delta')$  على المجال  $]-\infty; -1[$ :

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  والمستقيم  $(\Delta')$  ندرس إشارة

$$\text{الفرق } f_1(x) - y_{(\Delta')} \text{ على المجال } ]-\infty; -1[.$$

حيث:

$$f_1(x) - y_{(\Delta')} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; -1[$  فإن:

$$f_1(x) - y_{(\Delta')} < 0$$

ومنه:

المنحنى  $(C)$  يقع تحت المستقيم  $(\Delta')$  على المجال  $]-\infty; -1[$ .

نلخص وضعية المنحنى  $(C)$  بالنسبة للمستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  في

الجدول المرافق التالي:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$x$					+
$x^2 - 1$					+
$\frac{x}{x^2 - 1}$					+
الوضعية	(C) تحت $(\Delta')$			(C) فوق $(\Delta)$	

(4) البرهان أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على

المجال  $]-1; 1[$ :

الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $]-1; 1[$ .

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

لاحظ أن:

$$0 \in ]-\infty; +\infty[$$

ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل

حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-1; 1[$  بحيث  $f(\alpha) = 0$ .

6) المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = m \dots (*)$$

الحلول البيانية للمعادلة (\*) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$

الممثل للدالة  $f$  مع المستقيمات  $(\Delta_m)$  المعرفة بالمعادلة:

$$(\Delta_m) : y = m$$

جميع المستقيمات  $(\Delta_m) : y = m$  توازي حامل محور

الفواصل.

ومنه:

المناقشة البيانية أفقية.

- إذا كان:  $m < 1$

للمعادلة (\*) حلان متميزان أحدهما موجب والآخر سالب.

- إذا كان:  $m = 1$

للمعادلة (\*) حلان متميزان أحدهما معدوم والآخر سالب.

- إذا كان:  $1 < m < 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (\*) حلان متميزان سالبان.

- إذا كان:  $m = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (\*) ثلاثة حلول أحدها موجب هو  $\sqrt{3}$  وحلان سالبان.

- إذا كان:  $m > 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (\*) أربعة حلول حلان موجبان وحلان سالبان.

تعلم الرياضيات

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عبد الحميد

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عبد الحميد