## مسألة أسية رقم 03

1) عيّن جميع الدّوال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التي تحقّق من أجل كل عدد حقيقي $x\notin\{-1{,}1\}$ العلاقة:

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x....(1).$$

2) نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{(2-2x^2)f(x)}$.

أ ) أحسب نهايات الدالة $g$ عند $+\infty$ و $-\infty$ .

ب ) أحسب $g'$ مشتقة الدّالة $g$ .

ج) إستنتج إتجاه تغير الدّالة $g$ . ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عيّن معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $C_g$ عند النّقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

4) أرسم $C_g$ التّمثيل البياني للدّالة $g$ والمماس $(T)$ في معلم $O,\vec{i},\vec{j}$ .

## الإجابة النموذجية

1) لتكن $f$ هي حل المعادلة $(1)$ . من أجل كل عدد حقيقي $x\notin\{-1{,}1\}$ ، نقوم بإجراء التّبديلين البسيطين التّاليين للمتغيّر:

- نضع $t=\dfrac{x-3}{x+1}$ فنجد أنّ $x=\dfrac{3+t}{1-t}$ من أجل $t\notin\{-1{,}1\}$، والمعادلة $(1)$ تكتب على الشكل:

$$f(t)+f\left(\frac{t-3}{t+1}\right)=\frac{3+t}{1-t}....(*)$$ من أجل كل $x\notin\{-1{,}1\}$ .

- نضع $t=\dfrac{x+3}{1-x}$ فنجد أنّ $x=\dfrac{t-3}{1+t}$ من أجل $t\notin\{-1{,}1\}$، والمعادلة $(1)$ تكتب على الشكل:

$$f(t)+f\left(\frac{t+3}{1-t}\right)=\frac{t-3}{1+t}....(**)$$ من أجل كل $x\notin\{-1{,}1\}$ .

- بجمع المعادلتين $(*)$ و $(**)$ طرفاً لطرف نحصل على: $2f(t)+f\left(\dfrac{t+3}{1-t}\right)+f\left(\dfrac{t-3}{t+1}\right)=\dfrac{3+t}{1-t}+\dfrac{t-3}{1+t}$

ومن كون $f\left(\dfrac{t+3}{1-t}\right)+f\left(\dfrac{t-3}{t+1}\right)=t$ (من المعادلة $(1)$)، نحصل على $2f(t)+t=\dfrac{3+t}{1-t}+\dfrac{t-3}{1+t}$ ومنه $f(t)=\dfrac{4t}{1-t^2}-\dfrac{t}{2}$ ، وعليه الدّالة المطلوبة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1{,}1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x}{1-x^2}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x^3+7x}{2-2x^2}$ .

2) أ) نهايات الدّالة $g$ هي: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^3+7x}=$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي لـ $C_g$ في جوار $-\infty$ ، كذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^3+7x}=+\infty$

• الدّالّة $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقّة هي: $g'(x)=(3x^2+7)e^{x^3+7x}$ ، وكون $e^{x^3+7x}>0$ و $3x^2+7>0$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإنّ $g'(x)>0$ وبالتّالي الدّالّة $g$ متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، وجدول تغيّرات الدّالّة $f$ هو:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3) معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $C_g$ عند النّقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ تُعطى بـ: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي: $(T): y=7x+1$

4) التّمثيل البياني في الشكل الموالي: