مسألة أسية رقم 02

الجزء الأوّل:

لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ و تُحقّق العلاقة $g(x)-2g(1-x)=e^{x}-2e^{1-x}-3x+3$.

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x.(**إرشاد:** ضع $t=x$ تارةً و $t=1-x$ تارةً أخرى)

2) نضع : $g(x)=e^{x}-x-1$ حيث $D_{g}=\mathbb{R}$

أ) أحسب نهايات الدّالّة $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدّالّة g ثم شكل جدول تغيراتها

3) استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة h المُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=1-g(-x)$.

4) أثبت أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث:

$$-1{,}15<\alpha<-1{,}14 \quad \text{و} \quad 1,84<\beta<1,85$$

5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي x.

الجزء الثّاني:

لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{x+g(x)}{1+g(x)}$، و ليكن $\left(C_{f}\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أُحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسِّر هندسيّاً النّتائج.

2) أ) أثبت أنّ الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنّ $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times h(x)}{\left[1+g(x)\right]^{2}}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالّة f ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) أحسُب $f(0)$ ثُمّ أرسم $\left(C_{f}\right)$.

بالتوفيق لتلاميذ

بكالوريا 2021

الإجابة النموذجية

الجزء الأوّل:

1) من أجل $t=x$ يكون لدينا

$$g(t)-2g(1-t)=e^{t}-2e^{1-t}-3t+3....(1)$$

من أجل $t=1-x$ يكون لدينا

$$g(1-t)-2g(t)=e^{1-t}-2e^{t}+3t....(2)$$

بضرب المعادلة (2) في 2 والجمع مع المعادلة (1) طرفاً لطرف نجد أنّ $g(t)=e^{t}-t-1$، إذن الدّالّة g مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{x}-x-1$.

2) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالّتها المشتقّة $g'(x)=e^{x}-1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدّالّة g متزايدة تماماً على $\left[0,+\infty\right[$ و متناقصة تماماً على $\left]-\infty,0\right]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

، و تغيُّرات الدّالّة g مُوضّحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) الدّالّة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالّتها المشتقّة $h'(x)=e^{-x}-1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	

الدّالّة h متناقصة تماماً على $\left[0,+\infty\right[$ و متزايدة تماماً على $\left]-\infty,0\right]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$، و تغيُّرات الدّالّة h مُوضّحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$

4) الدّالّة h مستمرّة و رتيبة تماماً على كلّ مجال من المجالين $\left]-1{,}15;-1{,}14\right[$ و $\left]1,84;1,85\right[$ و لدينا $h(-1{,}15)\times h(-1{,}14)<0$ و كذلك $h(1,85)\times h(1,84)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيثُ $-1{,}15<\alpha<-1{,}14$ و $1,84<\beta<1,85$.

5) إشارة $g(x)$ و $h(x)$ مُوضّحتان في الجدولين

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		α		β		1
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني:

الدّالّة f مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$.

1) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{e^x}}{1-\dfrac{x}{e^x}}=1$$ ، و منه

المستقيمان $(\Delta): y=1$ و $(\Delta'): y=0$ مقاربان أفقيّان لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على التّرتيب.

2) أ) الدّالّتان $x\mapsto x$ و $x\mapsto e^x$ قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عليه تكون الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقة هي $f'(x)=\dfrac{e^x\times h(x)}{\left[e^x-x\right]^2}$.

ب) بما أنّ $\dfrac{e^x}{\left[e^x-x\right]^2}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

الدّالّة f متناقصة تماماً على $\left]-\infty,\alpha\right]\cup\left[\beta,+\infty\right[$ و متزايدة تماماً على $\left[\alpha,\beta\right]$، و جدول تغيُّراتها هو

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

3) لدينا $f(0)=0$، و $\left(C_f\right)$ مُوضح في الرّسم المُرفق