مسألة أسية رقم 1

✓ نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$

1) أ – أحسب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

ب- أدرس إتجاه تغير الدّالة g . ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن أحدهما معدوم و الاخر α حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$

ب- إستنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

✓✓ لتكن الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$ و ليكن C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ج- أدرس إتجاه تغير الدّالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها . (نأخذ $f(\alpha) = -0,9$

2) أ – بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي بين المنحنى C_f و المستقيم (Δ) .

3) بيّن أن المنحنى C_f يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، يطلب تعيين معادلة لكل منهما

4) أنشئ (Δ) و C_f و المماسين .

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x:

$$(x+1)^2 + me^x = 0$$

بالتوفيق للجميع : بكالوريا 2021

حل مقترح للتمرين:

I. $g(x)=1+(x^2-1)e^{-x}$; $D_g=]-\infty;+\infty[$

1. أ. حساب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+(x^2-1)e^{-x}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+(x^2-1)e^{-x}=\boxed{1}$$

لأن: $\left(\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)e^{-x}=0\right)$.

ب. دراسة إتجاه تغير الدالة g.

g معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x)=2xe^{-x}-(x^2-1)e^{-x}$$

$$g'(x)=(-x^2+2x+1)e^{-x}$$

إشارة g' من إشارة $(-x^2+2x+1)$

$(\Delta=8)$ ، $x_1=\frac{-2-2\sqrt2}{-2}$ ، $x_2=\frac{-2+2\sqrt2}{-2}$

أي $x_1=1+\sqrt2$ ، $x_2=1-\sqrt2$

x	$-\infty$		$(1-\sqrt2)$		$(1+\sqrt2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1-\sqrt2]$ و $[1+\sqrt2;+\infty[$ ، و متزايدة تماما على المجال $[1-\sqrt2;1+\sqrt2]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$(1-\sqrt2)$		$(1+\sqrt2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-0,25$	$\nearrow$	$1,43$	$\searrow$	1

2. تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

لدينا من جدول التغيرات:

g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1-\sqrt2]$

و $g(1-\sqrt2)=-0,25$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ ومنه

المعادلة ~~تقبل حلاً و~~ $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على هذا المجال.

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1-\sqrt2;1+\sqrt2]$

, $g(1-\sqrt2)=-0,25$, $g(1+\sqrt2)>0$ ومنه

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على هذا المجال، إذا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$.

التحقق:

$$g(0)=1+(0^2-1)e^{0}=0$$

g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0,8;-0,7]$

$g(-0,8)=0,19$; $g(-0,7)=-0,27$

$$g(-0,8)\cdot g(-0,7)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8<\alpha<-0,7$

ب. إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II. $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$; $D_f=]-\infty;+\infty[$

1. أ: حساب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-(x+1)^2e^{-x}=\boxed{+\infty}$$

لأن $\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x}=0\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-(x+1)^2e^{-x}= \text{ح ع ت}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(1+(x+1)^2\frac{e^{-x}}{-x}\right)=\boxed{-\infty}$$

لأن $\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-x}=\boxed{+\infty}\right)$

ب. تبيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

هي $f'(x)=1-2(x+1)e^{-x}+(x+1)^2e^{-x}$

$$=1+(-\cancel{2x}-2+x^2+\cancel{2x}+1)e^{-x}$$

$$\boxed{f'(x)=1+(x^2-1)e^{-x}=g(x)}$$

جـ. دراسة إتجاه تغير الدالة f

إشارة f' من إشارة الدالة g

ومنه:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;\alpha[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-0,3$	↘	-1	↗	$+\infty$

2-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}[x-(x+1)^2e^{-x}-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-(x+1)^2e^{-x})=\boxed{0}$$

ومنه (Δ): $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

$$f(x)-y=x-(x+1)^2e^{-x}-x$$

$$=-(x+1)^2e^{-x}<0$$

لأن: $e^{-x}>0$ و $-(x+1)^2<0$ إذا .

(C_f) يقع تحت (Δ) .

3- تبيان أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1

معناه $f'(x)=1$ أي $1+(x^2-1)e^{-x}=1$

لأن $(x^2-1)e^{-x}=0$ $(e^{-x}\neq0)$

ومنه $\begin{cases}x^2-1=0\\x^2=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ \text{أو}\\x=-1\end{cases}$

$$y_1=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=1(x-1)+1-4e^{-1}$$
$$\boxed{y_1=x-4e^{-1}}$$

$$y_2=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$
$$=1(x+1)-1$$
$$\boxed{y_2=x}$$

4- الإنشاء: (أنظر الرسم)

5- المناقشة البيانية:

$$(x+1)^2+me^{x}=0$$
$$(x+1)^2=-me^{x}$$
$$-(x+1)^2e^{-x}=m$$
$$x-(x+1)^2e^{-x}=x+m$$

$f(x)=x+m$ (مناقشة مائلة)

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم الذي معادلته $y=x+m$

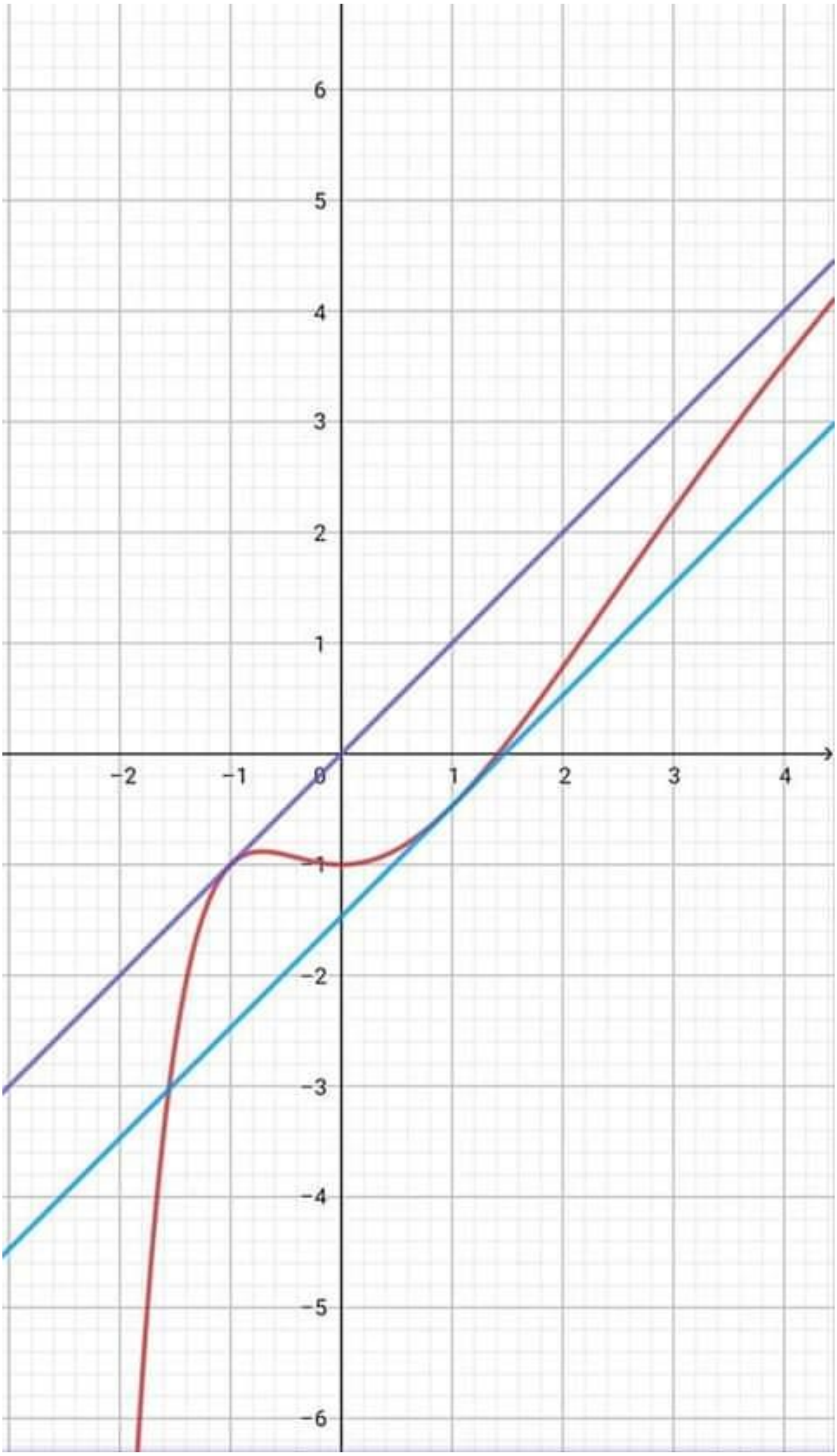
$m\in]-\infty,-4e^{-1}[$. للمعادلة حل وحيد

$m=-4e^{-1}$. للمعادلة حلان

$m\in]-4e^{-1};0[$ للمعادلة ثلاث حلول

$m=0$ للمعادلة حل وحيد

$m\in]0;+\infty[$ ليس للمعادلة حلول.



6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−2
−1
1
2
3
4