مجلة

#اصدار_جانفي 2021

5 min Maths

By CHABANE Oussama

من تقديم الأستاذ شعبان أسامة

في المتتاليات العددية

أكثر من ... 101 تمرين

3as

الشعب العلمية

Super fan
Samko Nina
و ان ليس للانسان الا ما سعى و ان سعيه سوف يرى
21

شكر خاص

- الأستاذ خالد بخاخشة
- الأستاذ بلقاسم عبد الرزاق
- الأستاذ عبد الله ساس

Facebook / telegram/instagram/google : 5min Maths   Tlemcen   ☎ 0775737163

مجلة 5 min Maths

المتتاليات العددية

شملت المراحل التالية

- ملخص الدرس ________ صفحة 4
- سؤال و جواب ________ صفحة 17
- تمارين ________ صفحة 33
- حلول التمارين ________ صفحة 52
- تمارين البكالوريا 2019/2008 ________ صفحة 133
- تمارين مقترحة ➤ ستقدم لاحقا من طرف ملف

الأستاذ عبد الله ساس

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها الطالب " مجلة 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي الشعب العلمية لمحور المتتاليات العددية

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل و شمل دروس السنة الثانية و الثالثة معا قصد مساعدتك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر

الأستاذ شعبان أسامة

شكر خاص للسادة الأساتذة بخاخشة خالد، بلقاسم عبد الرزاق و عبد الله ساس على تعاونهم معي في انجاز هذا العمل المتواضع

.1

ملخص الدرس

1.متتالية عددية

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمزلها $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية u يرمزلها $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n و يسمى كذالك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة:
- المتتالية (u_n) حيث : $u_n=-5n^2+2$ معرفة على $\mathbb{N}$.
- المتتالية v حيث : $v_n=\dfrac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N}-\{0\}$ و نكتب $(v_n)_{n\geq1}$.
- المتتالية w حيث : $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq6$ و نكتب $(w_n)_{n\geq6}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b $(b\in\mathbb{N}$) من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

2.طرق توليد متتالية عددية.(يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

أ-توليد متتالية عددية بالحد العام:

- إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

مثال: المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n=-n^2+3$ معرفة بحدها العام .ويمكن حساب أي حد من الحدود .

ملاحظة: يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n=f(n)$ حيث $f:x\mapsto -x^2+3$.

ب- توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

• لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x\in D$ فإن $f(x)\in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n\geq n_0$

الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n$.

لدينا $u_0=1$ و منه $u_1=3u_0=3$ ، $u_2=3u_1=9$ ، $u_3=3u_2=27$ و هكذا ...

مثال: **لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :** $u_n=-3n^2+1$.

1) **أحسب** u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .

2) **أكتب بدلالة** n **الحدود** u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2}

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . وحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-3x^2+1$.

حل: 1) $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_3=-3(3)^2+1=-26$

$u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$ ، $u_{134}=-3(134)^2+1=-53867$.

2) $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

$u_{3n+2}=-3(3n+2)^2+1=-27n^2-36n-11$.

مثال: **لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :** $u_0=2$ **من أجل كل عدد طبيعي** n $u_{n+1}=\dfrac{3}{2+u_n}$.

1) **أحسب** u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) **أحسب** u_{10} ، u_{11} و u_{12} **.ثم ضع تخمينا**

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . و من أجل عدد حقيقي موجب x : $f(x)=\dfrac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0,+\infty[$ وبما أن $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

1) $u_1=\dfrac{3}{2+u_0}=\dfrac{3}{4}$ ، $u_2=\dfrac{3}{2+u_1}=\dfrac{3}{2+\frac{3}{4}}=\dfrac{12}{11}$ ، $u_3=\dfrac{3}{2+u_2}=\dfrac{3}{2+\frac{12}{11}}=\dfrac{33}{34}$.

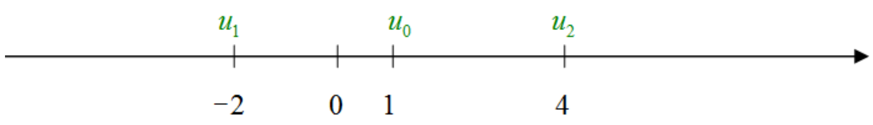
2) الحاسبات تبين أن $u_{10}\approx 1$ ، $u_{11}\approx 1$ و $u_{12}\approx 1$. نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 إنطلاقا من $n=10$.

3.التمثيل البياني لمتتالية عددية.

1.متتالية معرفة بالحد العام.

- يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور

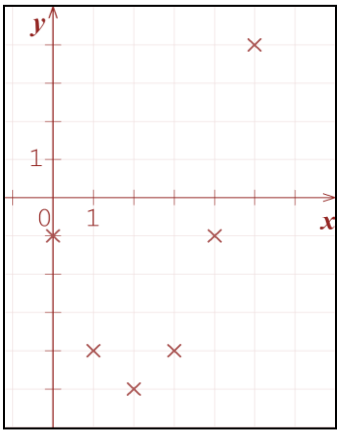
مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=(-2)^n$.



- **يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).**

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-4n-1$.

(u_n) معرفة كذالك $u_n=f(n)$ حيث: $f:x\mapsto x^2-4x-1$ نعرف f على المجال $[0,+\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $(n,f(n))$ من أجل $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. **مجموعة النقط** $M(n,f(n))$ **هي التمثيل البياني للمتتالية** (u_n) .



2.متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقط $M(u_n,f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (كيفية الإنشاء في الصفحة المقابلة) .

4. إتجاه تغير متتالية عددية.

❶. **متتالية متزايدة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\geq u_n$ (على الترتيب $u_{n+1}>u_n$) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❷. **متتالية متناقصة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب)إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\leq u_n$ (على الترتيب $u_{n+1}<u_n$) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

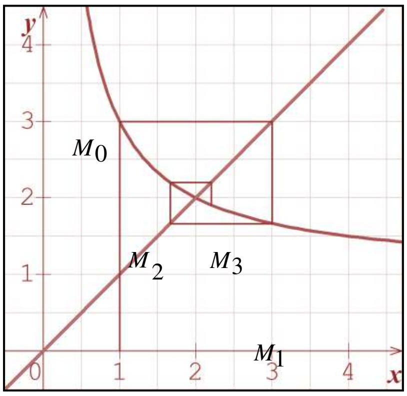
❸. **متتالية ثابتة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❹. **متتالية رتيبة:** المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب)

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{2+u_n}{u_n}$ حيث n عدد طبيعي

- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

➢ **طريقة:** لتمثيل **المتتالية** (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة **بالمتتالية** (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y=x$. **لأن المتتالية من الشكل** $u_{n+1}=f(u_n)$ **والتمثيل البياني هو مجموعة النقط** $M(u_n,u_{n+1})$.

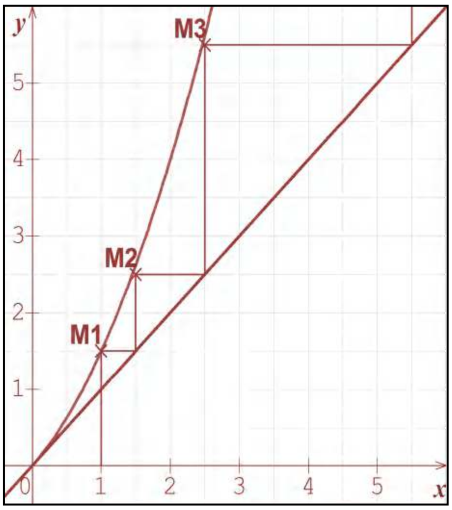


حل: (C_f) هوالرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x)=\dfrac{2+x}{x}$

نعرف الدالة f على المجال $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. النقطة $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق (Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على النقطة $M_1(u_1,u_2)$ أي $M_1\left(3,\dfrac{5}{3}\right)$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

❑**مثال:** لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بحدها الأول $u_1=1$

و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n^2+u_n$.



- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

حل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$ المعرفة على $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. نستعمل نفس الطريقة المستعملة في التمرين السابق 3

❑**مثال:**

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=\dfrac{n+1}{3^n}$ و $v_n=\dfrac{2n-1}{n+3}$

➢**طريقة:** لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

1) ندرس إشارة $u_{n+1}-u_n$ أو

2) نقارن بين $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 .

3) إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

حل: • اتجاه تغير المتتالية (u_n). $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-2n-1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ لأن الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

5.المتتالية الحسابية و الهندسية

المتتالية الحسابية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n=u_p+(n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n=u_0+nr$ و $u_n=u_1+(n-1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S=u_0+u_1+\dots\dots+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول +1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=r$ و منه:

- إذا كان r سالبا تماما $r<0$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان r موجبا تماما $r>0$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان r معدوما $r=0$ فإن المتتالية ثابتة.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n+2$.

1. أحسب u_0 و u_1.
2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع: $S=u_0+u_1+\dots\dots+u_n$.

الحل:

1. $u_0=-3(0)+2=2$ و $u_1=-3(1)+2=-1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=[-3(n+1)+2]-[-3n+2]=-3$$

.

المتتالية الهندسية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=u_n\times q \quad \text{أو} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n=u_0\times q^n$ و $u_n=u_1\times q^{n-1}$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S=u_0+u_1+\dots\dots+u_{n-1}+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول +1

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن:

$S=u_0+u_1+\dots\dots+u_{n-1}+u_n=(n+1)u_0$.

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها q.

نعلم أن: $u_n=u_0q^n$. نستنتج أنه:

*إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

*إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

*إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.

*إذا كان $q=0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد 2 .

مثال

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n . الحد العام v_n.
3. أحسب، بدلالة n . المجموع

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$.

3. لدينا:

$$S=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}=(n+1)\times\frac{2-3n+2}{2}$$

و منه $S=\dfrac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

$S=v_1+v_2+\dots\dots+v_n$.

الحل:

1. $v_2=v_1\times q=3\times 2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times 2=12$.
2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$.

$$S=v_1+v_2+\dots\dots+v_n=v_1\times\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

و منه: $S=3\times\left(\dfrac{1-2^n}{1-2}\right)=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)$

6. المتتاليات المحدودة و الرتيبة

أ- المتتاليات المحدودة

تعريف: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\le A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى.
2. القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كلعدد طبيعي n : $B\le u_n$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل.
3. القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.

مثال: لتكن u_n المتتالية المعرفة من أجل

كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n=2+\dfrac{3}{n}$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $\dfrac{3}{n}\le 3$ و منه $u_n\le 5$ نستنتج أن u_n محدودة من الأعلى بـ 5.

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $\dfrac{3}{n}>0$ و منه $u_n>2$. نستنتج أن u_n محدودة من الأسفل بـ 2.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $2<u_n\le 5$. نستنتج أن المتتالية محدودة.

ملاحظة: العدد 5 عنصر حاد من الأعلى لـ u_n . كل عدد حقيقي A أكبر من 5 هو كذلك عنصر حاد من الأعلى

للمتتالية u_n (نفس الملاحظة بالنسبة للعنصر الحاد من الأسفل).

ب- المتتاليات الرتيبة

تعريف: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول عن (u_n) أنها متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \geq u_n$.
2. القول عن (u_n) أنها متناقصة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \leq u_n$.
3. القول عن (u_n) أنها ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n$.
4. القول عن (u_n) أنها رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

ملاحظة:

* تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.

* توجد متتاليات ليست متزايدة و ليست متناقصة. نقول عنها أنها غير رتيبة و نذكر على سبيل المثال المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

* تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا و جد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = k$.

7. نهاية متتالية

أ- المتتاليات المتقاربة

لما تأخذ الحدود u_n لمتتالية u_n قيما قريبة بالقدر الذي نريد من عدد حقيقي l لما يأخذ العدد الطبيعي n قيما كبيرة بالقدر الكافي، نقول أن نهاية المتتالية u_n هي l لما يؤول n إلى $+\infty$ و أن المتتالية u_n متقاربة و تتقارب نحو l.

و نكتب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

ملاحظة:

- ندرس دائما نهاية متتالية عند $+\infty$ و غالبا ما يطلب دراسة نهاية متتالية بدون التحديد عند $+\infty$.
- إذا لم تكن متتالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثال: لتكن u_n المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n = 3 - \frac{1}{n}$.

يمكن إثبات أن u_n يبقى قريب من 3 بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون n كبيرا بالقدر الكافي. نستنتج أن المتتالية u_n تتقارب نحو العدد 3 و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

ب- المتتاليات ذات الحد العام $u_n = f(n)$

خاصية: يمثل α عددا حقيقيا ، $-\infty$ أو $+\infty$. (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$. إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

ملاحظة: العمليات على النهايات الخاصة بالدوال تبقى صحيحة بالنسبة للمتتاليات.

مثال: $\lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$.

ج-الرتابة و التقارب

مبرهنة: (1) إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإن هذه المتتالية متقاربة.

(2) إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإن هذه المتتالية متقاربة.

ملاحظة: تسمح هذه المبرهنة بإثبات تقارب متتالية و لكن لا تعطي النهاية.

مثال: نعتبر المتتالية u_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n=\frac{2n^2-5n+1}{n^2+5}$ ، بين المتتالية u_n متقاربة.

الحل:

نلاحظ أن $u_n=f\left(n\right)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f\left(x\right)=\frac{2x^2-5x+1}{x^2+5}$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=2$.

نستنتج أن المتتالية u_n متقاربة و تتقارب نحو العدد 2 .

د-نهاية متتالية هندسية

مبرهنة: (1) إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.

(2) إذا كان $q=1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=1$.

(3) إذا كان $q>1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

(4) إذا كان $q\le -1$ فإنه ليس للمتتالية $\left(q^n\right)$ نهاية.

مثال: $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ ، $\lim_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$.

مثال: u_n متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول $u_0=2$.

نضع، من أجل كل عدد طبيعي n، كما يلي : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1. عبر عن u_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية u_n .

.2 عبر عن S_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية S_n .

الحل:

.4 من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = u_0 \times q^n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

بما أن $-1<\frac{2}{3}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ و هكذا فإن المتتالية u_n متقاربة نحو 0.

.5 من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$ ومنه $S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

بما أن $-1<\frac{2}{3}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$. نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 6$.و هكذا فإن المتتالية S_n متقاربة نحو 6

7.الاستدلال (البرهان) بالتراجع

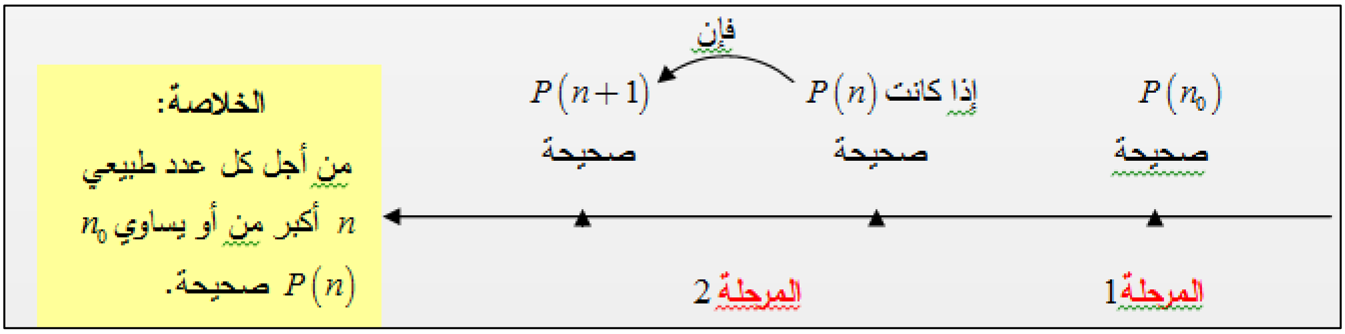
مبدأ الاستدلال بالتراجع

مسلمة: $P \; n$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P \; n$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

.1 نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P \; n_0$.

.2 نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P \; n_0$
(فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P \; n+1$.



مثال: الخاصية:" من أجل كل عدد طبيعي n، 3^n مضاعف للعدد5 " خاطئة رغم أنها وراثية. بالفعل:

إذا كان 3^n مضاعفا للعدد5 فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $3^n = 5k$.

لدينا إذن $3^{n+1} = 3\times 3^n = 3(5k) = 5(3K)$ و منه 3^{n+1} هو الآخر مضاعف للعدد5.

مثال:

لنثبت صحة الخاصية التالية: " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

المرحلة الأولى: من أجل $n=1$ لدينا: $\frac{1\times 2}{2}=1$ و منه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

المرحلة الثانية (الوراثة):

- نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ أي: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
- لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

لدينا: $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

و منه $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

الخلاصة: " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ "

❑مثال: (u_n) متتالية حدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

1. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.
2. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2. ما ذا تستنتج ؟

الحل:

1. البرهان على أن (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}\leq u_n$ $(u_{n+1}-u_n\leq 0)$.

المرحلة 1: لدينا $u_1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ و منه $u_1\leq u_0$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $u_{n+1}\leq u_n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}\leq u_n$ و منه $\frac{1}{2}u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}u_n-1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\leq u_n$. و منه المتتالية (u_n) متناقصة.

2. البرهان على أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n\geq -2$.

المرحلة 1: لدينا $u_0=4$ و منه $u_0\geq -2$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $u_n\geq -2$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\geq -2$.

لدينا $u_n\geq -2$ و منه $\frac{1}{2}u_n-1\geq\frac{1}{2}(-2)-1$ أي $u_{n+1}\geq -2$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq -2$ و منه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2.

نستنتج من السؤالين السابقين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

8. دراسة المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \neq 0$

نتيجة: إذا كانت متتالية (u_n) تحقق العلاقة $u_{n+1} = f\ u_n$ و كانت الدالة f متزايدة تكون المتتالية (u_n) رتيبة و إشارة $u_1 - u_0$ هي التي تحدد إذا كانت (u_n) متزايدة، متناقصة أو ثابتة.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

أ) نفرض $\alpha = 3$

1. أحسب u_1، u_2 و u_3. ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك.
2. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها.
4. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) نفرض $\alpha = 6$. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل:

أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

1. نجد بعد الحساب: $u_1 = 3$ ، $u_2 = 3$ و $u_3 = 3$. يظهر أن المتتالية (u_n) ثابتة.

لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3$.

* المرحلة 1: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 3$.

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n = 3$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ و منه $u_{n+1} = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. إذن (u_n) ثابتة.

2. نعم المتتالية (u_n) متقاربة و تتقارب نحو العدد 3.

ب) $\alpha = 2$ و منه $u_0 = 2$

1. $u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}\left(u_n-3\right)$ و $v_{n+1}=$ منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$ $(v_0=u_0-3)$.

2. لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و بما أن $u_n=v_n+3$ فإن $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

3. بما أن $-1<\frac{1}{3}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$. نستنتج أن (u_n) متقاربة و تتقارب نحو 3.

4. نلاحظ أن $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ حيث $f:x\mapsto\frac{1}{3}x+2$. بما أن $\frac{1}{3}>0$ و $u_1-u_0>0$ $\left(u_1-u_0=\frac{2}{3}\right)$

فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

ج) $\alpha=6$ و منه $u_0=6$.

بما أن $\frac{1}{3}>0$ و $u_1-u_0<0$ $(u_1-u_0=-2)$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

2.

سؤال و جواب

الأسئلة

❶ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n^2+1$.

1. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20}. 2. أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

❷ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=-2u_n+1$.

* أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

❸ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_0=-3$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=2v_n+5$.

1. أحسب v_1 و v_2. 2. عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1}.

❹ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n+2$.

1. أحسب u_0 و u_1. 2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.

❺ (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

1. أحسب v_2 و v_3. 2. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n. 3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S=v_1+v_2+........+v_n$.

❻ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-n$.

1. أحسب $u_{n+1}-u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n. 2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

❼ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بِـ $v_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول. 2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

❽ بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007.

نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1. عين α نسبة تزايد سكان المدينة.. 2. كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

❾ (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، أساسها $q=\frac{1}{2}$ ، و $u_5=\frac{1}{32}$.

1. أحسب u_{2007} . 2. أحسب $S=u_0+u_1+.......+u_{28}+u_{29}$.

10 . نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ و بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = u_n + 4$ من أجل كل عدد طبيعي n يختلف عن1 و لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = (\alpha - 2)u_n - 2\alpha$ ، حيث α عدد حقيقي

عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 4$.

11. b, a و c حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r بحيث: $a + b + c = \frac{3\pi}{4}$، 1. أحسب b.

2.نفرض أن b, a و c أقياس لزوايا بالراديان تنتمي للمجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. بين ان: كل من $\tan(b), \tan(a)$ و $\tan(c)$ تشكل حدودا متعاقبة من متتالية هندسية.

12. (u_n) متتالية هندسية بحيث $u_3 = 24$ و $u_5 = 96$. عيّن هذه المتتالية.

13. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0 = 1$ ومجموع الحدود الأولى لها هو S حيث: $S = 1 + 8 + 15 + \ldots + 603$.

أحسب S علما أن: $u_{86} = 603$

14. الأعداد a ، b ، c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية. عيّن هذه الأعداد علما أنّ: $\begin{cases} ac = 10b \\ a + b + c = 35 \end{cases}$

15. المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$. و المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 8$.

بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

16. نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحد الأول u_0.

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

17. (u_n) .المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

2) أكتب u_n بدلالة n.

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$.

18. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$ ، a عدد حقيقي

1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

19 . نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول : $u_0=\alpha$ (α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-3$.

عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

20 .نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) و عين حدها الأول v_1.

21 .1.بين أنه اذا كانت a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية هندسية فان: $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$

2.اوجد ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78، و مجموع مربعاتها هو3276.

22 .لتكن x,y,z ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة تماما حيث: $\begin{cases}2x+3y+z=7\\x^2+y^2+z^2=62\end{cases}$

عين الاساس لهذه المتتالية ثم استنتج الحدود x,y,z.

23 . عين ثلاثة حدود متتابعة x,y,z من متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $\begin{cases}x\times y\times z=1\\x+y-6z=0\end{cases}$.

24 . (u_n) متتالية هندسية معرفة بحديها $u_3=3$ و $u_6=\frac{81}{8}$.

عين أساس هذه المتتالية ثم أكتب عبارة الحد العام بدلالة n.

25 . (u_n) متتالية هندسية معرفة كما يلي: $u_n=3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}$.

أحسب المجموع بدلالة حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

عين العدد الطبيعي n بحيث: $6S_n=65$.

26 . (u_n) متتالية هندسية متناقصة تماما و معرفة بحدها الأول u_1 بحيث: $u_1+u_5=17$ و $u_3=4$.

بين أن $u_1>0$ ثم عين أساس هذه المتتالية .

27 . (u_n) متتالية هندسية معرفة كما يلي: $u_n=16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

أحسب المجموع بدلالة n حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

عين العدد الطبيعي بحيث: $S_m\leq\frac{255}{8}$.

28 . (u_n) متتالية حسابية معرفة بعبارة الحد العم كما يلي: $u_n=3+\frac{3}{2}n$

بيّن أن العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$S_1=u_1+u_2+u_3+...+u_{1344}$ و $S_2=u_2+u_4+u_6+...+u_{1344}$

- استنتج حساب المجموع S_3 حيث : $S_3=u_1+u_3+u_5+...+u_{1343}$

❷❾. عين الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية الحسابية المعرفة كمايلي: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=3 \\ u_0\times u_1\times u_2=-24 \end{cases}$

❸⓿. المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0=-4$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$. من أجل كل عدد طبيعي n

نضع : $v_n=u_n-\alpha$

1- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-\frac{1}{4}\alpha+2$

2- عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 .

الأجوبة

1:

1. $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$.
2. $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

2:

$$u_1=-2u_0+1=-2\times2+1=-3$$
$$u_2=-2u_1+1=-2(-3)+1=7$$
$$u_3=-2u_2+1=-2\times7+1=-13$$

3:

1. $v_1=2v_0+3=2(-3)+5=-1$ و $v_2=2v_1+5=2(-1)+5=3$.
2. $v_{n+2}=2v_{n+1}+5=2(2v_n+5)+5$

و منه $v_{n+2}=4v_n+15$.

من $v_{n+1}=2v_n+5$ نستنتج أن $v_n=2v_{n-1}+5$ و بالتالي $2v_{n-1}=v_n-5$

و منه $v_{n-1}=\dfrac{v_n-5}{2}$.

4:

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1}-u_n$ عدد ثابت r.

1. $u_0=-3(0)+2=2$ و $u_1=-3(1)+2=-1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=[-3(n+1)+2]-[-3n+2]=-3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$.

3. لدينا: $S=(n+1)\times\dfrac{u_0+u_n}{2}=(n+1)\times\dfrac{2-3n+2}{2}$ و منه $S=\dfrac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

5:

1. $v_2=v_1\times q=3\times2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times2=12$.
2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times2^{n-1}$.

$S=v_1+v_2+........+v_n=v_1\times\dfrac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S=3\times\dfrac{1-2^n}{1-2}=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)$

6: ✓

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... و إنما يجب المقارنة بين u_{n+1} و u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

1. $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-\left(n^2-n\right)$ و منه $u_{n+1}-u_n=2n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n\geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

7: ✓

1. $v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}}=\dfrac{3\times 3^n}{2\times 2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3^n}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}v_n$. و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{3}{2}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{1}{2}$
2. بما أن $\dfrac{3}{2}>1$ و $v_0>0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة $\left(v_{n+1}-v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$.

8: ✓

طريقة: يتم نمذجة المقادير التي تتغير بنسبة ثابتة α بمتتالية هندسية أساسها $q=1+\alpha$.

لنرمز بِ u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة السنة $2005+n$ و منه $u_0=3000$ و $u_2=3630$.

1. بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005+n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية هي: $u_{n+1}=u_n+\alpha u_n$ أي $u_{n+1}=(1+\alpha)u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=1+\alpha$.

لدينا إذن $u_2=u_0\times q^2$ و منه $q^2=\dfrac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2=1,21$ و بالتالي $q=1,1$. نستنتج أن $\alpha=0,1=10\%$.

2. نلاحظ أن $2030=2005+25$. لدينا $u_{25}=u_0\times q^{25}$ و منه $u_{25}=3000\times(1,1)^{25}$ أي $u_{25}\approx 32504,12$.

يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

9: ✓

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

إذا $u_{2007}=u_5\times q^{2007-5}=\dfrac{1}{32}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2002}=\dfrac{1}{2^{2007}}$.

- نعلم أنه إذا كان $q\neq 1$ لدينا $S=u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ و و منه $S=2\left(1-\dfrac{1}{2^{30}}\right)$

10: ✓

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ و بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = u_n + 4$

من أجل كل عدد طبيعي n يختلف عن 1.

ولتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = (\alpha - 2)u_n - 2\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1.تعين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 4$.

نعلم أن (v_n) متتالية عددية معناه تكتب: $v_{n+1} = v_n + r$ أي: $v_{n+1} = v_n + 4$ لأن: $r = 4$

لدينا: $u_{n+1} = u_n + 4$ و $v_n = (\alpha - 2)u_n - 2\alpha$ و منه: $v_{n+1} = (\alpha - 2)u_{n+1} - 2\alpha$

بالتعويض نجد: $v_{n+1} = (\alpha - 2)(u_n + 4) - 2\alpha$

$$(\alpha - 2)(u_n + 4) = (\alpha - 2)u_n + 4$$

و منه: $(\alpha - 2)u_n + 4\alpha - 8 = (\alpha - 2)u_n + 4$

و بالتالي: $\alpha = 3$

❶❶: ✓

b, a و c حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r بحيث: $a + b + c = \frac{3\pi}{4}$.

1.أحسب b.

باستعمال الوسط الحسابي نجد: $a + b + c = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 3b = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{\pi}{4}$

و منه: $b = \frac{\pi}{4}$

2.نفرض أن b, a و c أقياس لزوايا بالراديان تنتمي للمجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

بين ان: كل من $\tan(a), \tan(b)$ و $\tan(c)$ تشكل حدودا متعاقبة من متتالية هندسية.

$\tan(a), \tan(b)$ و $\tan(c)$ تشكل حدودا متعاقبة من متتالية هندسية معناه: $\tan(a) \times \tan(c) = \tan^2(b),$ (يعني الحدود تحقق الوسط الهندسي)

و على هذا: $\tan(a) \times \tan(c) = \tan(a) \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ لأن

$$a + \frac{\pi}{4} + c = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow c = -a - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$$
$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{2} - a$$

و منه: $$\tan(a)\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\tan(a)\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}=\tan(a)\times\frac{\cos(a)}{\sin(a)}=\tan(a)\times\frac{1}{\tan(a)}=1$$

نلاحظ أن: $1=\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=\left[\tan(b)\right]^2$ لا ننسى أن : $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

2 1: ✓

ليكن q أساس هذه المتتالية و u_0 حدّها الأوّل.

لدينا $u_5=u_3q^{5-3}$ أي $96=24q^2$ ونجد $q^2=4$.

ومنه $q=-2$ أو $q=2$.

- من أجل $q=-2$ ، لدينا أيضا $u_3=u_0\times(-2)^3$ أي $24=u_0\times(-2)^3$.

ومنه $u_0=-3$.

- من أجل $q=2$ ، لدينا أيضا $u_3=u_0\times 2^3$ أي $24=u_0\times 2^3$.

ومنه $u_0=3$.

نستنتج أنّه توجد متتاليتان هندسيتان حيث $u_3=24$ و $u_5=96$:

المتتالية التي أساسها -2 وحدّها الأول -3 والمتتالية التي أساسها 2 وحدّها الأوّل 3.

3 1: ✓

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0=1$ ومجموع الحدود الأولى لها هو S حيث: $S=1+8+15+...+603$

حساب S. علما أن: $u_{86}=603$

نلاحظ€أن أساس هذه المتتالية هو 7 لأن كل مرة نضيف 7 لايجاد الحد الموالي: و بالتالي عبارة الحد العام تكتب على الشكل: $u_n=1+7n$ و.

$u_0=1$.

اذن:
$$S=1+8+...+603=(86-0+1)\left(\frac{u_{86}+u_0}{2}\right)$$
$$=87\left(\frac{603+1}{2}\right)=26274$$

4 1: ✓

الأعداد a ، b ، c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسيةأساسها أكبر من 1. عيّن هذه الأعداد علما أنّ: $\begin{cases}ac=10b\\a+b+c=35\end{cases}$

حسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $a.c=b^2$ و بالتالي: $\begin{cases}ac=10b\Rightarrow b^2=10b\Rightarrow b=10\\a+b+c=35\end{cases}$

و بما أنها متتالية هندسية يعني: $a=\frac{b}{q}\,/\,c=b.q$ نعوض نجد: $a+b+c=\frac{b}{q}+b+b.q=35$ يعني تصبح المعادلة بدلالة q أساس

$$\frac{10}{q}+10+10q=35$$

هذه المتتالية نوحد المقام نجد: $10+10q+10q^2=35q$ أي: $10q^2-25q+10=0$

اذن: $q=\frac{1}{2}$ او $q=2$ ادن نأخذ $q=2$ و نجد: $a=\frac{b}{q}=\frac{10}{2}=5$ ، $c=b.q=2*10=20$ و منه: $a=5,b=10,c=20$

15: ✓

تبيان أن (v_n) متتالية هندسية مع تحديد أساسها وحدّها الأول .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-8=\frac{3}{4}u_n+2-8=\frac{3}{4}u_n-6=\frac{3}{4}u_n-\frac{3\times 8}{4}=\frac{3}{4}(u_n-8)=\frac{3}{4}v_n\ .$$

أي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n$. إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ وحدّها الأول $v_0=u_0-8=-7$.

16: ✓

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0+u_1+u_2+u_3=10$

$$\begin{cases}u_1=u_0+r=u_0+3\\ u_2=u_0+2r=u_0+6\\ u_3=u_0+3r=u_0+9\end{cases}$$

نجمع المعادلات نتحصل : $u_0+u_0+3+u_0+6+u_0+9=10$ أي: $4u_0+18=10$ و بالتالي: $u_0=-2$.

كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=-2+3n$

17: ✓

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases}u_2+u_4=4\\ u_0=-1\end{cases}$.

1) أساس هذه المتتالية :

$$u_2=u_0+2r=-1+2r$$
$$u_4=u_0+4r=-1+4r$$

و بالتعويض نجد : $r=1$ بما أن : $r=1>0$ فان (u_n) متتالية متزايدة

2) أكتب u_n بدلالة n. $u_n=-1+n$

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + \frac{1}{2}n$$
$$= n\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) + \frac{1}{2}n$$
$$= n\left(\frac{-1+n}{2}\right) + \frac{1}{2}n$$

18: ✓

(v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \left(a^2 - 3\right)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

1) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية:

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1} = v_n + 2a^2 - a$ أي: $\left(a^2 - 3\right) = 1$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a = -2, a = 2$.

2) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية .

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1} = \left(a^2 - 3\right)v_n$ أي: $2a^2 - a = 0$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a = \frac{1}{2}, a = 0$.

19: ✓

تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

(u_n) ثابتة يعني من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n = u_0$.

أي : $\alpha = 2\alpha - 3$ ، ينتج : $\alpha = 3$.

20: ✓

$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 - \left(\frac{2}{3}u_{n-1} - 1\right) = \frac{2}{3}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول v_1 حيث: $v_1 = u_1 - u_0 = -2$

21: ✓

1.بين أنه اذا كانت a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية هندسية فان: $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc + ac - bc + c^2$$

لدينا:\ $= a^2 + 2b^2 - b^2 + c^2$ لا ننسى الوسط الهندسي:\ $a.c = b^2$.

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

2.اوجد ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78، و مجموع مربعاتها هو3276.

أي\: $(1)....\begin{cases} a+b+c=78 \\ a^2+b^2+c^2=3267 \end{cases}$

من السؤال1. لدينا\: $a-b+c=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ أي\: $a-b+c=\dfrac{3276}{78}=42$

و منه\: $\begin{cases} a+b+c=78 \\ a-b+c=42 \end{cases}$ بطرح المعادلتين طرف لطرف نجد\: $2b=36$ و بالتالي\: $b=18$

بالتعويض نجد(1): $\begin{cases} a+c=60 \\ a^2+c^2=2952 \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} a=54, b=18, c=6 \\ a=6, b=18, c=56 \end{cases}$ أو

22: ✓

x, y, z ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة تماما حيث: $\begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=62 \end{cases}$

تعين الاساس لهذه المتتالية:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=7...(1) \\ x^2+y^2+z^2=62...(2) \end{cases}$$

لدينا:
$$y=x+r$$
$$z=x+2r$$
$$2x+3(x+r)+x+2r=7$$

بالتعويض في (1) نجد:
$$6x+5r=7 \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{6}r+\dfrac{7}{6} \\ y=\dfrac{1}{6}r+\dfrac{7}{6} \\ z=\dfrac{7}{6}r+\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

نعوض هذه القيم في (2) نجد:

$$\left(-\frac{5}{6}r+\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}r+\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{6}r+\frac{7}{6}\right)^2=62$$

أي:
$$\frac{1}{36}\left[(-5r+7)^2+(r+7)^2+(7r+7)^2\right]=62$$
$$75r^2+42r=2085$$
$$\Rightarrow 25r+14r-695=0$$

و بالتالي: للمعادلة حلان هما: $\begin{matrix} r_1=-56 \\ r_2=5 \end{matrix}$ و بما أن المتتالية متزايدة فان أساسها موجب و منه : $r=5$

استنتاج الحدود x, y, z.

بتعويض قيمة الأساس نجد: $\begin{cases} x=-\frac{5}{6}(5)+\frac{7}{6} \Rightarrow x=-3 \\ y=\frac{1}{6}(5)+\frac{7}{6} \Rightarrow y=2 \\ z=\frac{7}{6}(5)+\frac{7}{6} \Rightarrow z=7 \end{cases}$..

❸❷: ✓

تعين ثلاثة حدود متتابعة x, y, z من متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $\begin{cases} x\times y\times z=1.......(1) \\ x+y-6z=0....(2) \end{cases}$.

نعلم أن: $x\times z=y^2$ (الوسط الهندسي) بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $y^3=1$ ومنه $y=1$ (الحل الحقيقي الوحيد)

تعوض في الجملة السابقة نجد: $\begin{cases} x\times z=1.......(3) \\ x-6z=-1....(4) \end{cases}$

و من(4): $x=6z-1$ نعوض في (3) فنجد: $6z^2-z-1=0$ و منه: $z=\frac{1}{2}, z=\frac{-1}{3}$ (حل مرفوض لان حدود المتتالية موجبة).

ومنه: $x=2, y=1, z=\frac{1}{2}$. (نلاحظ أن اساس هذه المتتالية هو $\frac{1}{2}$ لان الانتقال من حد الى حد أخر نضرب في $\frac{1}{2}$).

❹❷: ✓

(u_n) متتالية هندسية معرفة بحديها $u_3=3$ و $u_6=\frac{81}{8}$.

تعين أساس هذه المتتالية

نعلم أن : $u_n=u_p.q^{n-p}$ أي: $u_6=u_3.q^{6-3} \Rightarrow \frac{81}{8}=3.q^3 \Rightarrow q=\frac{3}{2}$

كتابة عبارة الحد العام بدلالة n: $u_n=u_3.q^{n-3}$ أو: $u_n=u_6.q^{n-6}$ اذن: $u_n=3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}$.

❺❷: ✓

(u_n) متتالية هندسية معرفة كما يلي: $u_n=3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}$.

حساب المجموع بدلالة حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

نلاحظ أن : $q=\frac{3}{2}$ و $u_1=3\left(\frac{3}{2}\right)^{1-3}=3\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=3\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{3}$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{3}{2}}\right)$$

و بالتالي:

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}{1-\frac{3}{2}}\right) = \frac{-8}{3}\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right) = \frac{8}{3}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n}-1\right)$$

تعين العدد الطبيعي بحيث: $6S_n = 65$.

$$6.\frac{8}{3}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n}-1\right) = 65$$
$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n}-1 = \frac{65}{16}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n} = \frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$$

اذن لدينا: $\left(\frac{3}{2}\right)^{n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$ اذن: $n=4$.

و منه من أجل $n=4$ تكون: $6S_n = 65$.

26: ✓

(u_n) متتالية هندسية متناقصة تماما و معرفة بحدها الأول u_1 بحيث: $u_1+u_5=17$ و $u_3=4$.

تبيان أن $u_1>0$:

لدينا: $u_3=4$ و $u_1=\frac{u_3}{q^2}$ $\Leftarrow$ $u_3=u_1\times q^2$ أي: $u_1=\frac{4}{q^2}$ و منه: $\begin{matrix} 4>0 \\ q^2>0 \end{matrix}$ اذن: $u_1>0$.

تعين أساس هذه المتتالية:

لدينا: $u_1+u_5=17$ نكتب كل من u_1,u_5 بدلالة u_3 و q.

نجد:

$$\frac{4}{q^2}+4q^2=17 \Rightarrow q^2\left(\frac{4}{q^2}+4q^2\right)=17q^2$$
$$\Rightarrow 4+4q^4=17q^2$$
$$\Rightarrow 4q^4-17q^2+4=0$$

لحل هذه المعادلة نقوم بوضع : $x=q^2$ و بالتالي المعادلة تصبح : $4x^2-17x+4=0$ تقبل حلان هما : $\begin{matrix} x=4 \\ x=\frac{1}{4} \end{matrix}$ و منه:

$$q=\frac{1}{4}, q=-\frac{1}{4}$$
$$q=4, q=-4$$

لدينا: $u_1>0$ (يعني الاساس يجي أن يكون موجب) و المتتالية متناقصة اذن $0<q<1$ و بالتالي: $q=\frac{1}{2}$.

27: ✓

(u_n) متتالية هندسية معرفة كما يلي: $u_n=16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

حساب المجموع بدلالة m حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_m$

$$S_m=u_1+u_2+...+u_m=16\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m-1}{\frac{1}{2}-1}\right)=32\left[\left(\frac{1}{2}\right)^m-1\right]$$

عين العدد الطبيعي بحيث: $S_m\leq\frac{255}{8}$.

$$32\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right]\leq\frac{255}{8}$$

$$\Rightarrow-\left(\frac{1}{2}\right)^m\leq\frac{255}{8}-32$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^m\geq\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

أي: $2^m\leq 2^3$ و بالتالي: $m\leq 3$ اذن: $m\in\{0,1,2,3\}$ أكبر عدد طبيعي هو 3.

28: ✓

(u_n) متتالية حسابية معرفة بعبارة الحد العم كما يلي: $u_n=3+\frac{3}{2}n$

بيّن أن العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n) :

نقوم بحل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $u_n=2019$.

$u_n=2019$ تكافئ $3+\frac{3}{2}n=2019$ تكافئ $\frac{3}{2}n=2016$ أي $n=1344$. $(1344\in\mathbb{N})$.

و منه العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n) و $u_{1344}=2019$.

حساب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1=u_1+u_2+u_3+...+u_{1344}$

$$S_1=u_1+u_2+u_3+...+u_{1344}=\frac{1344}{2}(u_1+u_{1344})=\frac{1344}{2}\left(\frac{9}{2}+2019\right)=1359792$$

حساب: $S_2=u_2+u_4+u_6+...+u_{1344}$

$S_2=u_2+u_4+u_6+...+u_{1344}=\frac{1344}{2\times 2}(u_2+u_{1344})=\frac{1344}{2\times 2}(6+2019)=680400$ (هنا نحسب الحدود التي لها الدليل عدد زوجي فقط)

استنتاج حساب المجموع S_3 حيث : $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{1343}$

لدينا $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{1343}$ و منه $S_3 = S_1 - S_2$

أي : $S_3 = 1359792 - 680400 = 679392$.

29: ✓

تعين الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية الحسابية المعرفة كما يلي:

$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3.......(1) \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24...(2) \end{cases}$ باستعمال تعرف الوسط الحسابي: $u_0 + u_2 = 2u_1$ و منه: $3u_1 = 3 \Rightarrow u_1 = 1$

نقوم بالتعويض في جملة المعادلتين نجد: $\begin{cases} u_0 + u_2 = 2 \\ u_0 \times u_2 = -24 \end{cases}$ ومنه: $u_0 = -4, u_1 = 1, u_2 = 6$ أو $u_0 = 6, u_1 = 1, u_2 = -4$

30: ✓

المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \alpha$

1- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \frac{3}{4}u_n + 2 - \alpha = \frac{3}{4}(v_n + \alpha) + 2 - \alpha = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}\alpha - \alpha + 2 = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$$

2- تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$:

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ معناه : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$ و منه يكون $-\frac{1}{4}\alpha + 2 = 0$ أي : $\alpha = 8$.

تعيين الحد الأول v_0 : $v_0 = u_0 - 8 = -4 - 8 = -12$.

3.

تمارين

نص التمرين	رقم
(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$. 1.احسب u_0، u_1 ، u_2 و u_3. 2.بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها. 3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). 4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته. 5.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$. ب-عين العدد بحيث يكون: $S_n=328$.	1
نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0+u_1+u_2+u_3=10$ 1. احسب الحد الأول u_0. 2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n. 3.عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n=145$. 4. احسب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}$. 5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n=2u_n+3$. احسب المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}$.	2
(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1=20$ و $u_3=320$. 1.بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5. 2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع. 3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ 4.استنتج قيمة المجموع: $S'=u_0+u_1+u_2+...+u_6$	3
(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0=-5$ و $u_3+u_7=50$. 1.عين الأساس r للمتتالية (u_n). 2.بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=6n-5$. 3.أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ماهي رتبته؟ 4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S : $S=u_0+u_1+u_2+...+u_n$	4
نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r . 1.أحسبالحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$. 2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$. 3.استنتج قيمة r واحسب u_0.	5

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

6.جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

6

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

أ- -17 ب- -14 ج- -11 .

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101}-1}{2}$ ب- $\frac{1-3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3.نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $a = 2x+2$ ، $b = 6x-3$ ، $c = 4x$.الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x = \frac{4}{3}$ ب- $x = 0$ ج- $x = \frac{3}{4}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

7

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n = 3\times 2^n$ ب- $v_n = 3\times 2^{n-1}$ ج- $v_n = 2\times 3^n$

3.المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n - 1)$ ب- $(2^n - 1)$ ج- $2(3^n - 1)$

8

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1.بين أن $u_1 = 24$ ، ثم استنتج قيمة u_0.

2.بين أن $q = 4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 18\times 4^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.احسب بدلالة المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

أ) نفرض $\alpha = 3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

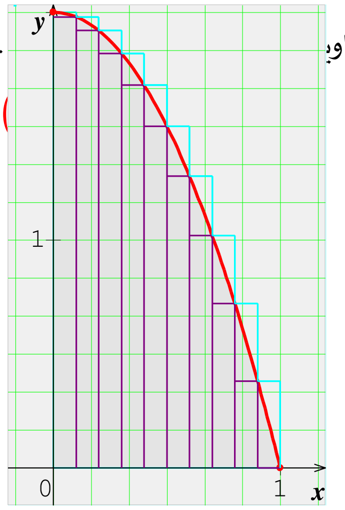
1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

10

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x)=2-2x^2$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. نريد حساب المساحة A مساحة السطح المحدود بالمنحنى (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=1$.

نقسم المجال $[0,1]$ إلى n جزءًا متساو .



كما هو مبين في الرسم المقابل.

ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المحورين . نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E . و عليه لدينا $u_n \le A \le v_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

1) عين u_n و v_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) إستنتج قيمة A يعطى المجموع $\sum_{p=1}^{n} p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

11

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0=12$ ، $v_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ و $v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=u_n-v_n$ و $t_n=3u_n+8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) عين u_n و v_n بدلالة n .

5) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

21

في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد $10000\,DA$ ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ $1500\,DA$ في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز بِ u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$.

1. عين u_0 ثم احسب u_1. كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003 ؟
2. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,05\,u_n-1500$.
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=u_n-30000$.
   - بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   - ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
5. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائنا ؟

31

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2+u_4=4 \\ u_0=-1 \end{cases}$.

1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

2) أكتب u_n بدلالة n.

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$\begin{cases} v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n+2a^2-a \\ v_0=\frac{1}{2} \end{cases}$ ، a عدد حقيقي

1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

41

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ و $u_0=2$

-1 أحسب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

-2 أ) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \leq n+3$

ب) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) .

ج) استنتج أن (n) محدودة من الأسفل ، هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة ؟

-3 نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $V_n=u_n-n$

أ- برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب (V_n) بدلالة ، واستنتج عبارة (u_n) بدلالة n ثم أحسب نهاية (u_n) عند $+\infty$.

ت- أحسب بدلالة المجموع : : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

-4 لتكن المتتالية (n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $t_n=\ln(V_n)$

أ- برهن أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- ب- أحسب بدلالة المجموع : $A_n=t_0+t_1+\cdots+t_n$

و إستنتج بدلالة n الجداء : $P_n=V_0\times V_1\times\ldots\times V_n$.

15

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$.ثم برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$.

16

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n \le 4$

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \le \frac{4 - u_n}{2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 4 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

17

I) f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f.

2) بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x) \ge 0$

II) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

2) أ*/ بين انه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n \prec u_{n+1} \prec 1$.

ب*/ استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

III) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n^2 - 1$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

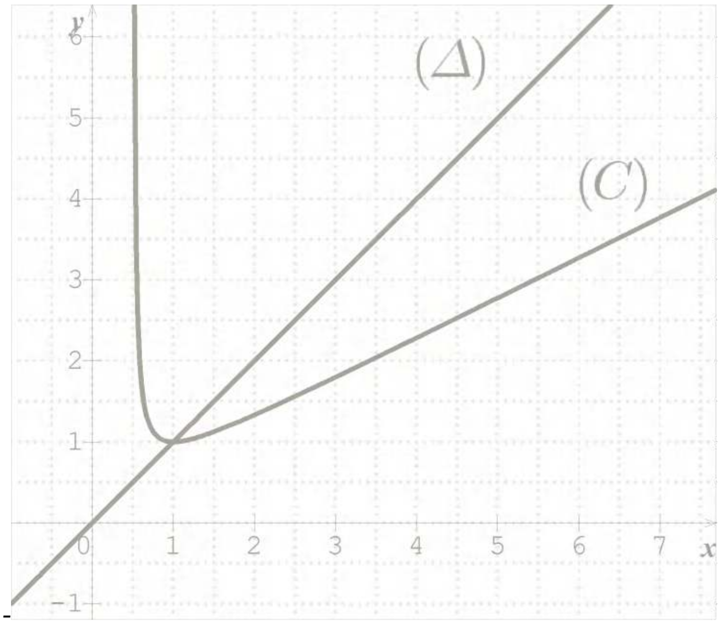
4) عبر عن المجاميع التالية بدلالة n:

$$S_n=(u_0-1)(u_0+1)+(u_1-1)(u_1+1)+(u_2-1)(u_2+1)+........+(u_n-1)(u_n+1)$$
$$S_n'=(u_0^2-0)+(u_1^2-1)+(u_2^2-2)+........+(u_n^2-n)$$

18

1 / الشكل الموضح في الوثيقة (1) هوالتمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$



- برهن أنه إذا كان $x>1$ فإن $f(x)>1$

2 / نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ . باستعمال الشكل الموضح في الوثيقة (1) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل .

ب . ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

3 / أ . برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$

ب . بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و أنها متقاربة.

4 / نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n=1-\frac{1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$

أ . برهن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب . أكتب عبارة w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n

ج . بين أن $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

5 / أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث $P_n=v_0\times v_1\times.............\times v_n$ ، ثم استنتج بدلالة n المجموع S_n حيث :
$S_n=w_0+w_1+............+w_n$

19

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

1) أحسب u_1 و v_1.

2) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثمّ عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n.

3) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

بيّن أنّ : $S_n=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

20

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{4u_n}{u_n+2}$

1)برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<2$.

2)أدرس رتابة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

3)نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=1-\frac{2}{u_n}$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثمّ عبر عن v_n بدلالة n.

ب) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n .

4)أ) بيّن أنّ : $|u_{n+1}-2|\le\frac{2}{3}|u_n-2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n-2|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

21

لتكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=100\\u_1\times u_3=256\end{cases}$

1) أحسب u_2 ، u_1, u_3 ثم عين q أساس المتتالية (u_n) .

2) عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ والجداء $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$.

4) أ – أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على العدد 5 .

ب - بين أن العدد $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017$ يقبل القسمة على 5 .

ج - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n'=\frac{1}{ln2}[ln4+ln4^2+\cdots+ln4^n]$.

أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$.

22

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_1=2$ ، $u_0=1$ و $u_n=2u_{n-1}+3u_{n-2}$.

1. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي : $v_n=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$ حيث $\beta;\alpha$ عددان حقيقيان غير منعدمان .

أ. أحسب u_2 و u_3.

ب. أحسب $v_1; v_2$ و v_3 بدلالة α و β.

ج. بيّن أنّه إذا كانت v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ : $3\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=0$.

2. نضع $\beta=\alpha$:

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

	ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n+u_{n-1}=3^n$. 3. نضع $\beta=-3\alpha$: أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n-3u_{n-1}=(-1)^n$ 4. بيّن أنّ : $[$ (v_n) متتالية هندسية $]$ معناه $[$ $\beta=\alpha$ أو $\beta=-3\alpha$ $]$

23

جدول التغيرات أدناه هو للدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=e^{-x}+x-2$.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$ $+\infty$

1.برر كل العناصر الواردة في جدول التغيرات الدالة g .

2.أ-برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α على المجال $[0;+\infty[$ حيث: $1\le\alpha\le2$.

ب-استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$

3.نعتبر المتتالية العددية (u_n) بحدها الأول $u_0=5$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=2-e^{-u_n}$.

أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$، $u_n\ge\alpha$.

ب-برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4-برر لماذا المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عين نهايتها.

24

بكالوريا فرنسية

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بحدهما الأول $u_0=1$ و $v_0=6$ من أجل كل n عدد طبيعي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+\dfrac{2}{3}v_n \\ v_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+\dfrac{3}{4}v_n \end{cases}$$

1.نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة كما يلي: $w_n=v_n-u_n$ ،من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

بين أن المتتالية (w_n) هندسية ثم استنتج عبارة w_n بدلالة n

2.نعرف المتتالية (t_n) من أجل كل n عدد طبيعي كمايلي: $t_n=8v_n+3u_n$

بين أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج عبارة حدها العام.

3.عبر عن v_n بدلالة w_n و t_n. ثم استنتج v_n بدلالة n و احسب نهايتها.

4. ما هي نهاية المتتالية (u_n).

25

بكالوريا فرنسية

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$ و $v_n=u_n+\dfrac{1}{n(n!)}$ (نذكر أن: $n!=n(n-1)(n-2)\times\ldots\times2\times1$. و $0!=1$)

1.بين أن المتتالية (u_n) متزايدة و أن المتتالية (v_n) متناقصة.

1.بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n<v_n$.

استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان.

3.احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-v_n$. ماذا يمكنك القول عن المتتاليتان (u_n) و (v_n)

26

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=1, u_1=2 \\ u_{n+1}=2\alpha u_n+3\alpha^2u_{n-1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

حيث α عدد حقيقي من المجموعة: $]-1,1[-\{0\}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α.

2. هل المتتالية (v_n) متقاربة؟

3. احسب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

4. أ-عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

ب-استنتج عندئذ u_n بدلالة n ثم بين أن (u_n) متقاربة.

5. في كل ما يلي نضع: $\alpha = \frac{-1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$.

أ-بين أن: $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$.

ب-عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $P_n \le 3^{-44}$.

27 التكامل

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $I_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x}dx$

1. احسب I_0.

2. عبر عن I_n بدلالة n.

3. أ-أثبت أن (I_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها.

ب-عين نهاية I_n عندما يؤول n الى $+\infty$.

28

I. f دالة معرفة على المجال $[2;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$.

احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2;+\infty[$.

II. (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 < u_n < 3$.

2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2+1)$.

3. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، هل هي متقاربة؟

4. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n - 2)$.

5. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

29 أعداد و حساب

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 6 \\ u_0 = 14 \end{cases}$، من أجل كل عدد طبيعي n

1. أ-احسب u_1, u_2, u_3, u_4.

ب-ماذا تخمن بالنسبة للرقمين الأخيرين للعدد u_n؟

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2} = u_n[4]$، واستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي k، $u_{2k} = 2[4]$ وأن $u_{2k+1} = 0[4]$

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2u_n = 5^{n+2} + 3$ و استنتج أن $2u_n = 28[100]$.

4. عين رقمي الأحاد و العشرات للعدد u_n و ذلك حسب قيم العدد الطبيعي n.

5. برهن أن $PGCD(u_n, u_{n+1})$ ثابت ثم عين قيمته.

30

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي: $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

1. احسب $u_{n+1}-u_n$ ثم استنتج ان (u_n) متتالية متناقصة.
2. نضع: $v_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$
أ- احسب v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
ب- المتتالية (v_n) متقاربة؟
3. نضع: $w_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{2n}$
أ- احسب w_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$
ب- المتتالية (w_n) متقاربة؟

31

Bac Maroc

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$

1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le\frac{4-u_n}{2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

32

Bac Antilles Guyane 2004

نعرف المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث $a_0=1$ و $b_0=7$ و بالعلاقة التالية:

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n) \end{cases}$$

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=b_n-a_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.
أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.
ب-عبر عن u_n بدلالة n.
2. أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (a_n) و (b_n).
3. بين أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان.
4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n=a_n+b_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.
بين أن (v_n) متتالية ثابتة.

33

Bac Rochambeau juin 2010

الجزء الأول :

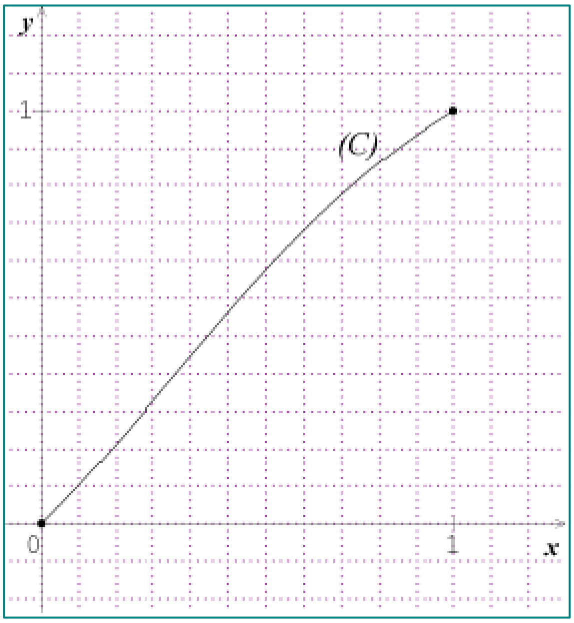
لتكن الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1. أدرس اتجاه تغيرات الدالة g .
2. عين حسب قيم x اشارة $g(x)$.
3. استنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $e^x-x>0$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل :



1.بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2.ليكن (D) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

أ-بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$،

$f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D).

3.أ-عين دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

ب-احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (D)

و المستقيمات التي معادلاتها: $x=0$ و $x=1$.

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة:

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

من أجل كل عدد طبيعي n.

1. باستعمال الشكل السابق مثل الحدود الأربعة الأولى دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

2.بين أنه من أجل عدد طبيعي n ، $\dfrac{1}{2}<u_n<u_{n+1}<1$.

3.استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها

34

Bac Antilles Guyane juin-2012

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}u_n \end{cases}$

1.احسب u_3,u_2 و u_4.

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n موجبة تماما.

ب-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n).

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. نضع: $v_n=\dfrac{u_n}{n}$.

أ-بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول v_1 .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n=\dfrac{n}{2^n}$.

4.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln x-x\ln 2$.

أ-احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب-استنتج نهاية المتتالية (u_n).

35

Bac Amérique du Sud Novembre 2013

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{1-x}$.

1.بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x)=e\times\dfrac{x}{e^x}$.

2. عين نهاية الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$ عند ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II.من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و نعتبر الدالتان g_n و h_n المعرفتان على:

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n \quad \text{و} \quad h_n(x) = 1 + 2x + ... + nx^{n-1}$$

1.بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

3.نضع $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$:

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n ب-احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

36

Bac Mauritanie-2012

I.لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$. (C_f) و تمثيلها البياني في معلم متعامد ز متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (3x-1)\right]$ ، فسر النتيجة هندسيا.

2.أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدو تغيراتها.

3.بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,3 < \alpha < -1,2$ و $0,2 < \beta < 0,3$.

4.أرسم المنحنى (C_f).

II.نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_n = e^{-2n-1}$ و $v_n = 3n - 1$.

1.بين أن المتتالية (u_n) هندسية و أن المتتالية (v_n) حسابية.

2.أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3.المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ علل اجابتك.

4. احسب المجموع S_n بدلالة n بحيث : $S_n = f(0) + f(1) + ... + f(n)$

ب-احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$.

37

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$.

يعطى المنحني (C_f) و المستقيم (Δ) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1) أ) باستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ، عيّن على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3.

ب) أعط تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n - 1 > 0$.

ب) برهن صحة التخمين المذكور في السؤال (1) - ب -

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية ، أساسها هو : $\dfrac{1}{3}$.

ب) عبّر بدلالة n عن كل من u_n وَ v_n.

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

38

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$.

1) برهن أنّ جميع حدود المتتالية (u_n) موجبة .

2) بيّن أنّه إن كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ نهايتها l تكون حلاً للمعادلة : $x^2 + x - 2 = 0$.

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب) برّر أنّ المتتالية (v_n) متقاربة ، ثمّ حدد نهايتها .

4) عبّر عن u_n بدلالة n ، ثمّ حدد نهاية المتتالية (u_n) .

39

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$.

أ) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نمثّل المستقيم (d) ذو المعادلة : $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$.

❖ أنشئ على محور الفواصل الحدود الأربع الأولى للمتتالية (u_n) .

ب) بيّن أنّه إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ نهايتها l تكون تساوي : $\dfrac{23}{18}$.

ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

د) أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثمّ أعط نهايتها .

2) نعتبر n عدد طبيعي غير معدوم :

أ) برهن أنّ : $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \dfrac{1}{10^4} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{90}(1 - \dfrac{1}{10^n})$.

ب) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1,2\underbrace{777.....7}_{n}$.

بهذا يكون : $v_0 = 1,2$ ، $v_1 = 1,27$ ، $v_2 = 1,277$ ، .... و هكذا .

❖ باستعمال السؤال (أ) بيّن أنّ نهاية المتتالية (v_n) هي عدد ناطق r .

3) هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ ، برّر إجابتك .

40

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b ، c التي تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية متزايدة حيث :

$$\begin{cases} a \times b \times c = 216 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 133 \end{cases}$$

2) نعتبر المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$ وَ $v_n = u_n + \alpha$ ، $(\alpha \in \mathbb{R})$

أ) عيّن قيمة α حتّى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وَ حدّها الأوّل .

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = 9 \times (\dfrac{2}{3})^n + 3$. ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

3) ماهي طبيعة المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \ln(v_n)$ ؟ .

4) أحسب الجداء P_n حيث : $P_n=(u_0-3)\times(u_1-3)\times....\times(u_n-3)$.

41

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=u_n+2n+3\end{cases}$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n>n^2$.

*) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=u_{n+1}-u_n$.

أ) ما طبيعة المتتالية (w_n) .

ب) أحسب المجموع : $S_{n-1}=w_0+w_1+...+w_{n-1}$

ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

42

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول حيث : $u_0>0$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{5u_n+2}{u_n+4}$

1) أ)عيّن العددين الحقيقيين a وَ b بحيث يكون : $u_{n+1}=a+\dfrac{b}{u_n+4}$

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n>0$

2) عيّن u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

3) نفرض أنّ : $u_0=3$ ، وَ نضع : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+\alpha}$ ، حيث $(\alpha\in\mathbb{R})$.

*) حدّد قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وَ حدها الأول v_0 .

*) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

4) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+....+\dfrac{1}{u_n+1}$.

43

(u_n) متتالية معرّفة بـ : $u_0=e^3$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>e^2$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة ؟ .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(u_n)-2$.

*) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

*) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثمّ u_n بدلالة n . ماهي نهاية كل من المتتاليتين (v_n) وَ (u_n) ؟ .

4) أحسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث : $P_n=u_0\times u_1\times....\times u_n$.

44

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_{n+1}=(\dfrac{n+1}{2n})u_n\end{cases}$.

1) أحسب الحدود التالية : u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_n>0$.

ب) برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n) ؟ .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل v_1 .

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة f المعرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \ln x - x\ln(2)$.

أ) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

45

لتكن المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود غير المعدومة : $u_0 = 1$ ، $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

و من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2} \times u_n$.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

*) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل v_0 .

2) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1} = (\dfrac{1}{2})^{n+1} \times u_n$.

3) بيّن إذن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = (\dfrac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

4) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ حدد نهايتها .

46

نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) بيّن أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

ج) عيّن أصغر عدد طبيعي p ، بحيث : إذا كان : $n \geq p$ ، فإن : $v_n < \dfrac{3}{4}$.

د) إستنتج أنّه إذا كان : $n \geq p$ فإنه يكون : $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$.

2) نضع من أجل $n \geq 5$: $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq (\dfrac{3}{4})^{n-5} \times u_5$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq \left[1 + \dfrac{3}{4} + (\dfrac{3}{4})^2 + ... + (\dfrac{3}{4})^{n-5}\right] \times u_5$.

ج) إستنتج أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq 4u_5$.

3) بيّن أنّ المتتالية $(S_n)_{n\geq 5}$ متزايدة ، ثمّ استنتج أنها متقاربة .

47

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=0$ ، $u_1=1$ ، و من أجل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}=7u_n+8u_{n-1}$

1) لتكن المتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $s_n=u_{n+1}+u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (s_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول .

ب) إستنتج عبارة s_n بدلالة n .

2) نضع : $v_n=(-1)^n\times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $t_n=v_{n+1}-v_n$.

*) عبّر عن t_n بدلالة s_n .

3) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n . (يمكن حساب المجموع : $t_0+\dots+t_{n-1}$ ، بطريقتين مختلفتين) .

*) عيّن عند ئذ النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{8^n}\right)$.

48

ليكن θ عدد حقيقي حيث : $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على n كما يلي : $u_0=2\cos(\theta)$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$$

1) أحسب الحدود : u_1 ، u_2 وَ u_3 . (تذكر أنّ : $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$) .

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

3) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

49

نعرّف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n=\dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$u_{n+1}\leq 0,95u_n$ ، إذا وافقط إذا كان : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\leq 1,9$.

2) نعتبر الدالة f المعرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم أحسب نهايتها عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّه يوجد عدد وحيد α من المجال $[1;+\infty[$ بحيث : $f(\alpha)=1,9$.

ج) عيّن العدد الطبيعي n_0 ، بحيث يكون : $n_0-1<\alpha<n_0$.

د) برهن أنّه من أجل كل $n\geq 16$ ، يكون : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\leq 1,9$.

3) أ) عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) إبتداءا من الرتبة 16 .

ب) ماذا نستنتج بالنسبة لهذه المتتالية ؟ .

4) أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل $n\geq 16$ يكون : $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$.

ب) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

50

الجزء الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$.

ب) إستنتج أنّ الدالة f فردية .

2) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل من أجل كل x من $\mathbb{R}$ تكون : $f'(x)=-\frac{1}{2}(\frac{e^x-1}{e^x+1})^2$.

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

ج) إستنتج أنّه من أجل كل $x\geq 0$ يكون : $1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$.

4) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-\frac{1}{2}x)\right]=0$ ، ماذا تستنتج ؟ .

5) أنشئ المنحنى (C) .

الجزء الثاني :

نعرّف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}\end{cases}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل طبيعي n تكون : $u_n>0$.

2) **من السؤال 3) ج. الجزء الأول** تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$.

*) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

3) بين أنّه من أجل كل طبيعي n يكون : $u_n\leq(\frac{1}{2})^n$.

*) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

51

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$.

1) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq u_n\leq 1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

ج) عيّن النهاية l للمتتالية (u_n) .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;\pi]$ يكون : $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\cos(\frac{x}{2})$.

ب) بيّن إذن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n=\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

ج) جد ثانية النهاية l للمتتالية (u_n) .

.4

حلول التمارين

.1

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.حساب u_0، u_1، u_2 و u_3.

$$u_0 = -2$$
$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 4$$
$$u_3 = 7$$

2.اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2$$
$$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$$
$$= 3$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n). بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية

(u_n) نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = 1954$$

أي: $3n - 2 = 1954$ معناه: $u_{652} = 1954$ رتبته 653 لأن الحد الأول هو u_0.

$$n = 652 \in \mathbb{N}$$

5.أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

و منه

$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$
$$= (n+1)\frac{(-2+3n-2)}{2}$$
$$= (n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

نقوم بالنشر نتحصل على: $S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$

ب-تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2-n-4}{2}=328$$

معناه: $3n^2-n-4=2(328)$

$3n^2-n-660=0$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $n_1=15\in\mathbb{N}$ ، $n_2=\frac{-44}{3}\notin\mathbb{N}$ و بالتالي من أجل $n=15$ لدينا: $S_n=328$

.2

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0+u_1+u_2+u_3=10$

$\begin{cases} u_1=u_0+r=u_0+3 \\ u_2=u_0+2r=u_0+6 \\ u_3=u_0+3r=u_0+9 \end{cases}$ نجمع المعادلات نتحصل: $u_0+u_0+3+u_0+6+u_0+9=10$ أي: $4u_0+18=10$ و بالتالي: $u_0=-2$.

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=-2+3n$

3.تعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n=145$.

أي: $u_n=-2+3n=145$ يعني: $n=49$ $u_{49}=145$

4.حساب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}$.

$$\begin{aligned} S&=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}\\ &=50\left(\frac{u_0+u_{49}}{2}\right)\\ &=50\left(\frac{-2+145}{2}\right)\\ &=3575 \end{aligned}$$

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n=2u_n+3$.

احسب المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}$.

$$\begin{aligned} S'&=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}\\ &=2S+3(50)\\ &=2(3575)+150\\ &=7300 \end{aligned}$$

.3

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1=20$ و $u_3=320$.

1.اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

من القانون : نضع: $n=3; p=1$

$$u_3=u_1\times q^{3-1}$$
$$\frac{u_3}{u_1}=q^2$$
$$q^2=\frac{320}{20}=16$$
$$q=4, q=-4$$

$q=-4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q=4$

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n: $u_n=u_0\times q^n=5(4)^n$.

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7=5(4)^7=20480$

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$\begin{aligned}S_n&=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n\\&=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\\&=5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right)\\&=\frac{-5}{3}\left(1-4^{n+1}\right)\end{aligned}$$

4.استنتاج قيمة المجموع: $S'=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_6$ $S'=\frac{-5}{3}\left(1-4^{6+1}\right)=27305$

.4

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0=-5$ و $u_3+u_7=50$.

1.تعين الأساس r للمتتالية (u_n).

$$\begin{cases}u_3=u_0+3r=-5+3r\\u_7=u_0+7r=-5+7r\end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

و منه:
$$\begin{aligned}&-5+3r-5+7r=50\\&10r-10=50\\&10r=60\\&r=6\end{aligned}$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=6n-5$.

لدينا: $u_0=-5$ و $r=6$ و بالتالي: $u_n=6n-5$

3.أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

نحل المعادلة:
$$\begin{aligned}&6n-5=2017\\&n=337\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0=-5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S:

أي:
$$\begin{aligned}S&=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n\\&=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)\\&=(n+1)\left(\frac{-5+6n-5}{2}\right)\\&=(n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right)\\&=(n+1)(-5+3n)\\&=3n^2-2n-5\end{aligned}$$

.5

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.حساب الحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

و بالتالي:
$$\begin{aligned}&u_3+u_5=2u_4\\&2u_4=20\\&u_4=10\end{aligned}$$

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$.لدينا:

معناه:
$$u_4=10$$
$$2u_4-u_5=7$$
$$2(10)-u_5=7$$
$$u_5=13$$

3.استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان:
$$r=u_5-u_4$$
$$r=13-10$$
$$r=3$$

حساب u_0.نأخذ المعادلة:
$$u_4=u_0+4r$$
$$u_0+4(3)=10$$
$$u_0=-2$$

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$.

لدينا: $u_0=-2$ و $r=3$ و بالتالي: $u_n=3n-2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

و بالتالي:
$$S=u_0+u_1+u_2+...+u_n$$
$$=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-2+3n-2}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n=33$.

$$(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)=33$$

أي: $(n+1)(-4+3n)=66$ و تصبح: $3n^2-n-70=0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل: $n=5$

6.

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي : $a=2x+2$ ، $b=6x-3$ ، $c=4x$. الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 **ب-** هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ **ج-** لا حسابية ولا هندسية

.7

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$ ، (u_n) متتالية:

<u>**أ-** متزايدة تماما</u>

لأن: $u_{n+1}-u_n>0$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n=3\times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1.

3. المجموع : $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n-1)$

.8

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1. اثبات أن $u_1=24$،

لدينا: $u_0\times u_2=576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$u_0 \times u_2 = u_1^2$

و بالتالي: $u_1^2 = 576$

$u_1 = 24; u_1 = -24$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1 = 24$ استنتاج قيمة u_0:.

$u_0 + u_1 = 30$

لأن: $u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24$

$u_0 = 6$

$u_1 = u_0 \times q$

2.بين أن $q = 4$، نعلم أن: $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n = 6 \times 4^n$

3.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$،

لدين: $u_n = 6 \times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 6 \times 4^{n+1} - 6 \times 4^n \\ &= 6 \times 4^n \times 4^1 - 6 \times 4^n \\ &= 6 \times 4^n (4-1) \\ &= 6 \times 4^n (3) = 18 \times 4^n \end{aligned}$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4.حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4 = 256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n).

$u_n = 1536$

نقوم بحل المعادلة: $6 \times 4^n = 1536$

$4^n = \frac{1536}{6} = 256$

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n = 4$. رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0.

5.احسب بدلالة المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

معناه:

أي:
$$\begin{aligned} S_n &= u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \\ &= 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right) \\ &= 24\left(\frac{1-4^n}{-3}\right) \\ &= -6\left(1-4^n\right) \\ &= 6\left(4^n-1\right) \end{aligned}$$

.9

أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

لأن: (u_n) ثابتة معناه: $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = ... = u_0 = 3$ (كل حدودها متساوية)

- من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0$ و منه $S_n = 3(n+1)$.

ب) $\alpha = 2$ و منه $u_0 = 2$

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$ و منه $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.
إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $(v_0 = u_0 - 3)$ $v_0 = -1$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
لدينا $v_n = u_n - 3$ و منه $u_n = v_n + 3$. إذن $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

3. لدينا $S = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + ... + (v_n + 3) = (v_0 + v_1 + ... + v_n) + (3 + 3 + ... + 3)$
و منه $S = S' + 3(n+1)$ حيث $S' = v_0 + v_1 + ... + v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

لدينا $S' = (-1) \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ و منه $S = -\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$.

4. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

.10

1) مساحة المستطيل الأول المحتوى في E هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$، مساحة المستطيل المحتوى في E و المجاور

له هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$،مساحة المستطيل الموالي هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)$وهكذا حتى آخر مستطيل $\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$ وبالتالي

$$u_n=\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)+\ldots+\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$ أي

$u_n=\frac{2n}{n}-\frac{2}{n^3}\left(1+4+9+\ldots+(n-1)^2\right)$ و منه $u_n=2-\frac{2}{n^3}\sum_{p=1}^{n-1}p^2$ إذن $u_n=2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$.

مساحة المستطيل الأول من الفيئة الثانية هي $\frac{2}{n}$،مساحةالمستطيل الثاني هي $\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$،مساحة المستطيل الثالث هي

$\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$ و هكذا إلى آخر مستطيل مساحته $\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$

وبالتالي $$v_n=\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{9}{n^2}\right)+\ldots+\frac{2}{n}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$ أي

$v_n=\frac{2(n+1)}{n}-\frac{2}{n^3}\left(1+4+\ldots+(n-1)^2\right)$ ومنه $v_n=2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\sum_{p=1}^{n-1}p^2$ إذن $v_n=2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$ و $$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}2-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}=\frac{4}{3}$$

3) بما أن $u_n\le A\le v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $A=\frac{4}{3}$.

.11

1) نحسب w_{n+1} بدلالة w_n.

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+3v_n}{4}=\frac{4u_n+8v_n-3u_n-9v_n}{12}$$
$$=\frac{1}{12}\left(u_n-v_n\right)=\frac{1}{12}w_n$$

إذن المتتالية $\left(w_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0=11$. ومنه $w_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=\frac{3\left(u_n+2v_n\right)}{3}+\frac{8\left(u_n+3v_n\right)}{4}=u_n+2v_n+2u_n+6v_n$$
$$=3u_n+8v_n=t_n$$

إذن المتتالية $\left(t_n\right)$ متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. و منه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n=t_0=3u_0+8v_0=44$

3) نحسب : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=-\frac{2}{3}\left(u_n-v_n\right)=-\frac{2}{3}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة على $\mathbb{N}$.

نحسب : $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{1}{4}\left(u_n-v_n\right)=\frac{1}{4}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n>0$ فإن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه المتتالية $\left(v_n\right)$ متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) $\begin{cases} u_n - v_n = 11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n+8v_n=44 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n=4+8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n=4-3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$

5) $-1<\frac{1}{12}<1$ إذا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n=0$ و منه $\lim_{n\to+\infty}u_n=4$ و $\lim_{n\to+\infty}v_n=4$.

12.

1) $u_0=10000$ ، $u_1=90000$ u_2 هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003.

حيث: $u_2=u_1+\frac{5}{100}\times u_1-1500$ و منه $u_2=7950$

2) $u_{n+1}=u_n+\frac{5}{100}\times 10000-1500$ و منه $u_{n+1}=1{,}05\,u_n-1500$

3) نلاحظ أن $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $f(x)=1,05x-1500$

f متزايدة و منه المتتالية (u_n) رتيبة. و بما أن $u_1-u_0<0$

فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

4) . $v_{n+1}=u_{n+1}-30000=1,05u_n-31500$

و منه $v_{n+1}=1,05(u_n-30000)$ أي $v_{n+1}=1,05v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,05$ و حدها الأول $v_0=-20000$.

- لدينا $v_n=v_0q^n=-2\times10^4\times(1,05)^n$.

بما أن $u_n=v_n+30000$ فإن $u_n=-2\times10^4\times(1,05)^n+3\times10^4$

و منه $\lim u_n=-\infty$

5) لدينا $u_8=540,89$ و $u_9=-1027$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في 2010/01/01 فإن رصيده

يكون دائنا ابتداء من سنة 2010 .

.13

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2+u_4=4 \\ u_0=-1 \end{cases}$.

1) أساس هذه المتتالية : $\begin{aligned} u_2&=u_0+2r=-1+2r \\ u_4&=u_0+4r=-1+4r \end{aligned}$

و بالتعويض نجد : $r=1$ بما أن : $r=1>0$ فان (u_n) متتالية متزايدة

2) أكتب u_n بدلالة n. $u_n=-1+n$

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+\dots+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + \frac{1}{2}n$$
$$= n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right) + \frac{1}{2}n$$
$$= n\left(\frac{-1+n}{2}\right) + \frac{1}{2}n$$

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \left(a^2-3\right)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

1) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية:

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1} = v_n + 2a^2 - a$ أي: $\left(a^2-3\right) = 1$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a = -2, a = 2$.

2) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية .

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1} = \left(a^2-3\right)v_n$ أي: $2a^2 - a = 0$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a = \frac{1}{2}, a = 0$.

.14

1- حساب الحدود : $u_1 = \frac{7}{3}$ ، $u_2 = \frac{26}{9}$

$u_3 = \frac{97}{27}$

التخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية $(_n)$: متتالية متزايدة .

2- البرهان بالتراجع أن : $u_n \leq n + 3$

لتكن الخاصية : $p(n): u_n \leq n + 3$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 \leq 3$ ومنه $p(0)$: صحيحة .
- نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي : $u_n \leq n + 3$ ونبرهن صحة $p(n+1)$:

أي نبرهن أن : $u_{n+1} \leq n + 1 + 3$ أي : $u_{n+1} \leq n + 4$

لدينا من فرضية التراجع : $u_n \leq n + 3$

ومنه $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 3 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3}n + 1$ وبالتالي : $u_{n+1} \leq n + 3$

ولدينا : $n + 3 \leq n + 4$ ومنه : $u_{n+1} \leq n + 4$.

اذن الخاصية من أجل $n + 1$ صحيحة

الخلاصة : نستنتج حسب مبدأ البرهان بالتراجع ، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

إذن : $u_n \leq n + 3$.

دراسة اتجاه تغير المتتالية $_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}\,n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}\,n + 1$$

ولدينا ${}_n \leq n + 3$ أي

ومنه $-\frac{1}{3}u_n \geq -\frac{1}{3}u_n - 1$ ومنه $-\frac{1}{3}\ \ {}_n + \frac{1}{3}\,n + 1 \geq 0$ وبالتالي: $u_{n+1} - u_n \geq 0$

ومنه متزايدة .

استنتج أن $({}_n)$ محدودة من الأسفل ، هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة :

لدينا (u_n) متزايدة معناه $u_n \geq u_0$ أي $u_n \geq 2$ نستنتج أن (u_n) محدودة بالاسفل بالعدد 2.

لايمكن القول أن (u_n) متقاربة : لأنها متزايدة وليست محدودة من الاعلى .

- نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $V_n = u_n - n$

نبرهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$V_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3} \times\ V_n$ ومنه (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{3}$

و حدها الأول : $V_0 = 2$.

التعبير عن V_n و u_n بدلالة n :

$$V_n = \ V_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$u_n = V_n + n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

حساب المجموع : S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (V_0 + 0) + (V_1 + 1) + \cdots + (V_n + n) = (V_0 + V_1 + \cdots + V_n) + (0 + 1 + \cdots + \mathrm{n})$$

$$= 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + n(n+1)$$

لتكن المتتالية $({}_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $t_n = \ln(V_n)$

البرهن أن (t_n) متتالية حسابية و تعيين أساسها وحدها الأول :

(t_n) حسابية معناه أن : $t_{n+1} = t_n + r$

لدينا : $t_{n+1} = \ln(V_{n+1}) = \ln\left(\frac{2}{3}V_n\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln(V_n) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + t_n$ ومنه (t_n) متتالية حسابية

اساسها : $\mathrm{r} = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ وحدها الأول $t_0 = \ln(V_0) = \ln(2)$.

حساب بدلالة المجموع : $A_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$

$$A_n = \frac{n+1}{2}\left(l\,n(2\,) + l\,n(2) + nln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{n+1}{2}\left(2l\,n(2) + nln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

إستنتاج بدلالة n الجداء : $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$

$P_n = e^{t_0} \times e^{t_1} \times \ldots \times e^{t_n} = e^{t_0 + t_1 + .. + t_n}$ ومنه : $P_n = e^{S_n}$.

15.

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$ بالقسمة الاقليدية نجد

$u_{n+1} = \frac{3u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و منه $a = 3$ ، $b = -10$

البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$

لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ و منه $-2 < u_0 < 1$ محققة

نفرض أن $-2 < u_n < 1$ و لنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$

الطريقة الأولى :

نبرهن أن $-2 < u_{n+1}$ أي $2 + u_{n+1} > 0$

$\frac{5u_n + 2}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = 2 + u_{n+1}$ موجبة لان $2 + u_n > 0$ و منه $2 + u_{n+1} > 0$.

نبرهن أن $u_{n+1} < 1$ أي $u_{n+1} - 1 < 0$

$u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4}\right)$ عدد سالب لان $-2 < u_n < 1$ و منه $u_{n+1} < 1$

و منه $-2 < u_{n+1} < 1$ إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

الطريقة الثانية :

لدينا الدالة المرفقة هي f حيث $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 4}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x) = \frac{10}{(x + 4)^2}$

و منه f متزايدة على المجال $[-2;1]$.

$-2 < u_n < 1$ و منه نجد $f(-2) < f(u_n) < f(1)$ كون أن f متزايدة أي ان $-2 < u_{n+1} < 1$

و منه من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

1) دراسة اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$:

$$u_{n+1}-u_n==\frac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\frac{3u_n+2-u_n^{\,2}-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^{\,2}-u_n+2}{u_n+4}=-\frac{(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$$

الفرق موجب لأن $-2<u_n<1$ و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن $\left(u_n\right)$ متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

3) لتكن المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$.

تبيين أن المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}+2}{1-\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}}=\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4-3u_n-2}=\frac{5u_n+10}{-2u_n+2}=\frac{5}{2}\left(\frac{u_n+2}{1-u_n}\right)=\frac{5}{2}v_n$$

و منه المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول 3

$$v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=\frac{\dfrac{1}{4}+2}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{9}{3}=3$$

كتابة v_n و u_n بدلالة n :

$$v_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

لدينا $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$ أي ان $v_n-u_nv_n=u_n+2$ و منه $u_n+u_nv_n=v_n-2$ أي ان $u_n\left(1+v_n\right)=v_n-2$ و منه

$$u_n=\frac{v_n-2}{1+v_n}=\frac{3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}.$$

حساب

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}{3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}=1$$

4) حساب المجموع : $S_n=\dfrac{1}{v_0}+\dfrac{5}{v_1}+\dfrac{5^2}{v_2}+.....+\dfrac{5^n}{v_n}$.بوضع $t_n=\dfrac{5^n}{v_n}=\dfrac{5^n}{3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}=\dfrac{2^n}{3}$ و منه $\left(t_n\right)$ متتالية هندسية أساسها

2 و حدها الأول $t_0=\dfrac{1}{v_0}=\dfrac{1}{3}$ و منه $S_n=t_0+t_1+t_2+...t_n=t_0\left(\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)=\dfrac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right)$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$

1) حساب : $u_1=5-\frac{4}{2}=3$ و $u_2=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$

لدينا $2\le u_1\le 4$ محققة

نفرض أن $2\le u_n\le 4$ و لنبرهن أن $2\le u_{n+1}\le 4$

$2\le u_n\le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4}\le\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{2}$ بالضرب في -4 نجد $-2\le-\frac{4}{u_n}\le-1$ بإضافة 5 نجد $3\le 5-\frac{4}{u_n}\le 4$ أي ان $2\le 3\le u_{n+1}\le 4$ و منه $2\le u_{n+1}\le 4$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2\le u_n\le 4$.

2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=5-\frac{4}{u_n}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n^{\ 2}}{u_n}=\frac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$

الفرق موجب لان $2\le u_n\le 4$ فإن $4-u_n\ge 0$ و $-1+u_n\ge 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le\frac{4-u_n}{2}$

لدينا $\frac{1}{u_n}(4-u_n)=\frac{-u_n+4}{u_n}=-1+\frac{4}{u_n}=4-5+\frac{4}{u_n}=4-u_{n+1}$ و بما ان $2\le u_n\le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4}\le\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{2}$, و منه $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

2) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ و منه

$0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و ها كذا

$0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})\le\frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن

نصل إلى التعميم $\left(4-u_{0}\right) \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0 \leq 4-u_{n+1}$ و منه $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}\left(4-u_{0}\right)$ اي ان

$(2)\ 0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ اي ان $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n}}$ بتعويض نجد $0 \leq 4-u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب .

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ بما أن $n'=n+1$ $0 \leq 4-u_{n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}}=0$ فحسب الحصر نجد

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=0$

.17

I) f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^{2}+3}$.

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{x}{2\sqrt{x^{2}+3}}$

بما ان : $f'(x) \geq 0$ فإن f متزايدة تماماعلى $[0;+\infty[$

2) نبين أنـه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x) \geq 0$

لدينا: الدالة f متزايدة تماماعلى $[0;+\infty[$ و $f(0)=0$،

الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند $x=0$ في المجال $[0;+\infty[$. اذن: من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x) \geq 0$

II) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=0$، $u_{n+1}=f(u_n)$

1/ حساب u_1 و u_2: $u_1=f(u_0)=\frac{1}{2}\sqrt{u_0^{2}+3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $u_2=f(u_1)=\frac{1}{2}\sqrt{u_1^{2}+3}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

2) أ/نبين انه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq u_n \prec u_{n+1} \prec 1$

* من اجل $n=0$: $0 \leq u_0 \prec u_1 \prec 1$ محققة لأن $(u_1 \approx 0.86$ ، $u_0=0)$...(1)

* نفرض أن $0 \leq u_n \prec u_{n+1} \prec 1$ ونبرهن ان : $0 \leq u_{n+1} \prec u_{n+2} \prec 1$ من اجل عدد طبيعي n: $n \succ 1$

لدينا: f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(1)=1$ و $f(0)=0$. إذا كان $0 \leq u_n \prec u_{n+1} \prec 1$ فإن

$f(0) \leq f(u_n) \prec f(u_{n+1}) \prec f(1)$ أي : $0 \leq u_{n+1} \prec u_{n+2} \prec 1$ .... (2)

من (1) و (2) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n \prec u_{n+1} \prec 1$

ب*/ استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة: لدينا

من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n \prec u_{n+1} \prec 1$ معناه أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي l.

**حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+3}$ المتتالية (u_n) متقاربة نحو l معناه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n^2+3}$ يكافئ $l = \frac{1}{2}\sqrt{l^2+3}$ ، $0 \le l$ يكافئ $(2l)^2 = \left(\sqrt{l^2+3}\right)^2$ يكافئ $4l^2 = l^2+3$

يكافئ $l = 1$ (مقبول) أو $l = -1$ (مرفوض) لأن $0 \le l$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

$III)$ لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n^2 - 1$

1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول: (v_n) م.هـ معناه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = q v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{4}(u_n^2+3) - 1 = \frac{1}{4}(u_n^2-1)$ ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$ (v_n) م.هـ أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول

$v_0 = u_0^2 - 1 = -1$

2) التعبير عن v_n بدلالة n : $v_n = v_0 q^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n: لدينا $u_n^2 = v_n + 1$

ومنه: $u_n = \sqrt{v_n+1}$ لأن $0 \le u_n$ اذن: $u_n = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

3) حساب نهاية (u_n): $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n} = 1$

4) التعبير عن المجاميع التالية بدلالة n:

$$\begin{aligned}S_n &= (u_0-1)(u_0+1)+(u_1-1)(u_1+1)\\&+(u_2-1)(u_2+1)+\dots\dots\dots+(u_n-1)(u_n+1)\\&=(u_0^2-1)+(u_1^2-1)+(u_2^2-1)+\dots.+(u_n^2-1)\\&=v_0+v_1+v_2+\dots\dots+v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\end{aligned}$$

ومنه: $S_n = \left(\frac{-4}{3}\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

$$S_n' = \left(u_0^2 - 0\right) + \left(u_1^2 - 1\right) + \dots\dots\dots + \left(u_n^2 - n\right)$$
$$= u_0^2 + u_1^2 + \dots\dots + u_n^2 - (0 + 1 + 2 + \dots\dots + n)$$
$$= (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots\dots (v_n + 1) - \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)(0+n)\right]$$
$$= (v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n) + (n+1).1 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{1}{3}$$

.18

1 / البرهان على أنه إذا كان $x > 1$ فإن $f(x) > 1$

لندرس تغيرات الدالة f على المجال $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

* $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ و من أجل كل $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$: $f'(x) = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

إشارة المشتقة :

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1, +\infty[$ ، جدول تغيراتها :

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

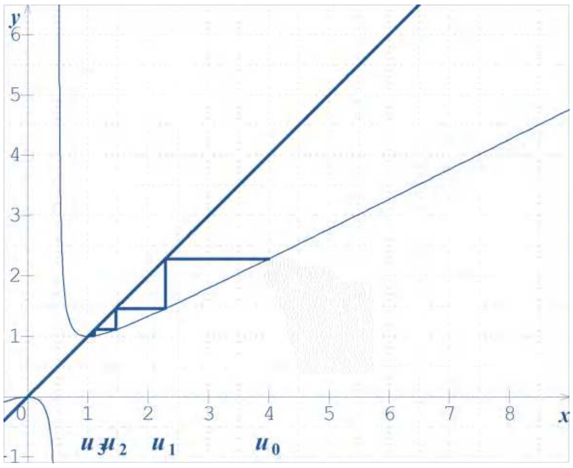
من جدول التغيرات نستنتج أن من أجل كل $x > 1$ فإن $f(x) > 1$

2 / أ.تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_3 و u_4 على محور الفواصل :

لدينا $M_0(u_0, u_1)$ أي $M_0(4, u_1)$

نسقط M_0 على (Δ) وفق (ox) , ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C) وفق (oy) فنحصل على M_1

و هكذا نكرر نفس العملية فنحصل على M_2 , M_3



التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو 1

3/ أ . البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n > 1$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = 4$ و $4 > 0$ ومنه $p(0)$ صحيحة .

نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n > 1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$.

لدينا $u_n > 1$ ومنه $f(u_n) > 1$ حسب السؤال (1)

أي $u_{n+1} > 1$

وهذا يعني أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب . تبيين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n - 1}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$$

* استنتاج إتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 1$ ومنه $1 - u_n < 0$ و $2u_n - 1 > 0$ وبالتالي فإن $u_n(1-u_n) < 0$

ومنه $\dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1} < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

* استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فإن (u_n) متقاربة .

أ-) البرهان على أن (w_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$w_{n+1} = ln\left(v_{n+1}\right) = ln\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = ln\left(1 - \frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right)$$

$$= ln\left(1 - \frac{2u_n - 1}{u_n^2}\right) = ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n^2}\right)$$

$$= ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2ln\left(v_n\right) = 2w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $w_0 = ln\left(v_0\right) = ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

ب) كتابة عبارة w_n بدلالة n:

لدينا $w_n = w_0 \times q^n = 2^n\, ln\left(\frac{3}{4}\right)$

استنتاج v_n بدلالة n : لدينا : $w_n = ln\left(v_n\right)$ تكافئ $v_n = e^{w_n}$ ومنه $v_n = e^{2^n ln\left(\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$

د) تبيين أن $u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

$v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ تكافئ $u_n = \dfrac{1}{1 - v_n}$ ومنه $u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

بما أن $0 < \frac{3}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = 0$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

5) حساب بدلالة n الجداء P_n

لدينا :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots\dots\dots\dots \times v_n$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2^1} \times \dots\dots\dots\dots \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0 + 2^1 + \dots\dots + 2^n}$$

لدينا $2^0 + 2^1 + \dots\dots + 2^n$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1

وبالتالي فإن : $2^0 + 2^1 + \dots\dots + 2^n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

ومنه $P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0 + 2^1 + \dots\dots + 2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1} - 1}$.

لدينا : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

1) حساب u_1 و v_1:

$u_1 = \frac{1}{4}u_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{2}\times 1 = 1$ و $v_1 = u_1 - \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

2) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$:

(v_n) هندسية يعني $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\left(v_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) + \frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أي $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}v_n$

ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_n = u_0 - \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 2 - 1 = 1$

- التعبير عن الحد العام v_n بدلالة n:

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ إذن : $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

3) إستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$:

لدينا : $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه $u_n = v_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

وبالتالي : $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0$$ لأنّ $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \end{cases}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

تبيان أنّ : $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

نضع : $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ و منه $u_n = v_n + a_n$

حيث (a_n) متتالية هندسية حدها الاول $a_0 = 1$ وأساسها $\frac{3}{4}$

إذن : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + a_0 + v_1 + a_1 + \cdots + v_n + a_n$

أي $S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = v_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} + a_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$

ومنه $S_n = 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} + 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$ **أي**

$$S_n = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

وبالتالي : $S_n = \dfrac{16}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n - 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ **:**

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{16}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n - 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right) = \dfrac{16}{3}$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{16}{3}$ **لأنّ** $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \end{cases}$

.20

لدينا : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 2}$

1) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n < 2$:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

-1 من أجل $n = 0$ لدينا :

$u_0 = 1$ و $1 \le 1 < 2$ ومنه $1 \le u_0 < 2$ أي $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$.

-2 نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$.

لدينا : $1 \le u_n < 2$ فرضا .

ومنه : $3 \le u_n + 2 < 4$

إذن : $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{u_n+2} \le \dfrac{1}{3}$ ومنه $-\dfrac{8}{3} \le -\dfrac{8}{u_n+2} < -\dfrac{8}{4}$

وبالتالي : $4 - \dfrac{8}{3} \le 4 - \dfrac{8}{u_n+2} < 4 - \dfrac{8}{4}$ لأنّ : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+2} = 4 - \dfrac{8}{u_n+2}$

إذن : $4 - \dfrac{8}{3} \le 4 - \dfrac{8}{u_n+2} < 4 - \dfrac{8}{4}$

أي $\frac{4}{3} \le u_{n+1} < 2$ وبالتالي $1 \le u_{n+1} < 2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

3- حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n):

ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n+2} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2}$

أي $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2}{u_n+2} = \frac{u_n(2-u_n)}{u_n+2}$

وبالتالي : $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

دراسة تقارب المتتالية (u_n):

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

3) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية :

(v_n) متتالية هندسية يعني $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا: $v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{4u_n}{u_n+2}} = 1 - \frac{2(u_n+2)}{4u_n} = \frac{4u_n - 2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n}$

ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{u_n}\right) = \frac{1}{2} v_n$

أي (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$

التعبير عن v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ب) إستنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ ومنه $\frac{2}{u_n} = 1 - v_n$

أي $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$ وبالتالي : $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$ لأنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

ج) حساب S_n بدلالة n :

لدينا : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$ ولدينا : $\frac{1}{u_n}=\frac{1}{2}(1-v_n)$

ومنه : $S_n=\frac{1}{2}(1-v_0)+\frac{1}{2}(1-v_1)+\cdots+\frac{1}{2}(1-v_n)=\frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{2}(v_0+v_1+\cdots+v_n)$

أي $S_n=\frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{2}\left(v_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{2}\times\left(-1\times2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$

$S_n=\frac{1}{2}(n+1)+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $S_n=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) أ)تبيان أنّ : $|u_{n+1}-2|\le\frac{2}{3}|u_n-2|$ من أجل كل عدد طبيعي n :

لدينا : $u_{n+1}-2=\frac{4u_n}{u_n+2}-2=\frac{4u_n-2u_n-4}{u_n+2}=\frac{2u_n-4}{u_n+2}=\frac{2(u_n-2)}{u_n+2}$

ومنه $|u_{n+1}-2|=\left|\frac{2(u_n-2)}{u_n+2}\right|=2\times\left|\frac{u_n-2}{u_n+2}\right|=\frac{2}{|u_n+2|}\times|u_n-2|=\frac{2}{u_n+2}\times|u_n-2|$

لأنّ $3\le u_n+2<4$

ولدينا : $1\le u_n<2$ ومنه $3\le u_n+2<4$ إذن $\frac{1}{4}<\frac{1}{u_n+2}\le\frac{1}{3}$ وبالتالي :

$|u_{n+1}-2|\le\frac{2}{3}\times|u_n-2|$

ب) البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n-2|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$:

لدينا : $|u_{n+1}-2|\le\frac{2}{3}|u_n-2|$ من أجل كل عدد طبيعي n.

ومنه :

$$|u_1-2|\le\frac{2}{3}|u_0-2|$$
$$|u_2-2|\le\frac{2}{3}|u_1-2|$$
$$\vdots$$
$$|u_n-2|\le\frac{2}{3}|u_{n-1}-2|$$

أي $|u_1-2|\times|u_2-2|\times\cdots\times|u_n-2|\le\frac{2}{3}|u_0-2|\times\frac{2}{3}|u_1-2|\times\cdots\times\frac{2}{3}|u_{n-1}-2|$

بالإختزال نجد : $|u_n-2|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

إستنتاج $\lim_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا : $|u_n-2|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $-\left(\frac{2}{3}\right)^n\le u_n-2\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ولدينا : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0=\lim_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}(u_n-2)=0$ حسب مبرهنة الحصر .

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

.21

لدينا (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$

1) حساب u_2 , u_1 , u_3 :

لدينا : $u_1 \times u_3 = u_2{}^2$ لأن u_2 هو الوسط الهندسي للحدين u_1 و u_3 .

ومنه : $u_2{}^2 = 256$ يكافئ $u_2 = 16$ أو $u_2 = -16$

وبالتالي $_2 = 16$ لأن (حدود المتتالية موجبة) .

وبالتالي : $\begin{cases} u_1 + 32 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1 + u_3 = 68 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$

إذن u_1 و $_3$ هما حلي المعادلة $^2 - 68x + 256 = 0$.

حساب المميز $\Delta = (-)^2 - 4 \times 1 \times 256 = 3600$.

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1 = \frac{68-60}{2} = 4$ أو $x_1 = \frac{68+60}{2} = 64$

وبما أن المتتالية متزايدة فإن: $_1 = 4$ و u_1 $_3 = 64$.

حساب الأساس :

$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{16}{4} = 4$:

2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$ أي $u_n = 4^n$.

3) حساب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ بدلالة n: لدينا:

$$S_n = u_1 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 4 \times \left(\frac{1-4^n}{1-4}\right) = -\frac{4}{3}(1-4^n) = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$$

أي : $S_n = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$.

حساب الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ بدلالة n :

لدينا :

$$P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = 4 \times 4^2 \times \ldots \times 4^n = 4^{1+2+\cdots+n}$$

أي : $P_n = 4^{\frac{n}{2}(1+n)}$.

4) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 5 تبعا لقيم العدد الطبيعي n:

لدينا : $7^0 \equiv 1[5] 7^1 \equiv 2[5] 7^2 \equiv 4[5] 7^3 \equiv 3[5] 7^4 \equiv 1[5]$

إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تشكل متتالية دورية دورها $P = 4$

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$

بواقي قسمة العدد n على 5	1	2	4	3

ب- تبيين أن العدد $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017$ يقبل القسمة على 5 :

لدينا: $2016\equiv 1[5]$ ومنه $2016^{2017}\equiv 1^{2017}[5]$ أي $2016^{2017}\equiv 1[5]$

و $^{2n}\equiv (7^2)^{2n}[5]$ ومنه $49^{2n}\equiv (7)^{4n}[5]$ أي $49^{2n}\equiv 1[5]$

وكذلك لدينا: $5n-2017\equiv -2[5]$ أي $5n-2017\equiv 3[5]$

وبالتالي: $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017\equiv (1+1+3)[5]$

أي $20^{2017}+49^{2n}+5n-2017\equiv 5[5]$ لكن $5\equiv 0[5]$

إذن : $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017\equiv 0[5]$

ومنه العدد $20^{2017}+49^{2n}+5n-2017$ يقبل القسمة على 5 .

جـ - حساب $_n{}'$ بدلالة n:

$$S'_n=\frac{1}{ln2}[ln4+ln4^2+\cdots+ln4^n]=\frac{1}{ln2}ln(4\times 4^2\times\ldots\times 4^n)$$

أي $S'_n=\frac{1}{ln2}lnP_n=\frac{1}{ln2}\times ln4^{\frac{n}{2}(1+n)}$

ومنه $'_n=\frac{1}{ln2}\times(\ ^2+n)\times ln2$ وبالتالي $S'_n=(n^2+n)$.

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S'_n+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$:

$S'_n+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$ يعني $n^2+n+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$

ومنه: $5n^2+n+1\equiv 0[5]$ أي $n\equiv -1[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$

وبالتالي: $(\alpha\in\mathbb{N})$, $n=5\alpha+4$.

.22

.1 $v_n=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$

أ. حساب الحدود : $u_2=7$; $u_3=20$.

ب. حساب الحدود: $v_3;v_2;v_1$ ، $v_1=2\alpha+\beta$ ، $v_2=7\alpha+2\beta$ ، $v_3=20\alpha+7\beta$

جـ. $v_3;v_2;v_1$ حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه $v_2^2=v_1\times v_3$ معناه $(7\alpha+2\beta)^2=(2\alpha+\beta)(20\alpha+7\beta)$

معناه $9\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2=0$ معناه $3\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=0$

.2 نضع $\beta=\alpha$:

أ. لدينا $v_n=\alpha u_n+\alpha u_{n-1}$ معناه $v_n=\alpha(u_n+u_{n-1})\cdots\cdots(1)$ من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

ب. و منه

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha\left(u_{n+1}+u_n\right) \\ &= \alpha\left(2u_n+3u_{n-1}+u_n\right) \\ &= \alpha\left(3u_n+3u_{n-1}\right) \\ v_{n+1} &= 3v_n \end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ و حدها الأول $v_1=3\alpha$.

ت. لدينا : $v_n=v_1\times 3^{n-1}$ و منه $v_n=3\alpha\times 3^{n-1}$ معناه : $v_n=\alpha\times 3^n\cdots\cdots(2)$ من (1)و(2) نستنتج أنّ:

$\alpha\left(u_n+u_{n-1}\right)=\alpha\times 3^n$ معناه $u_n+u_{n-1}=3^n$

3. نضع $\beta=-3\alpha$:

أ. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية .

لدينا $v_n=\alpha u_n-3\alpha u_{n-1}\cdots\cdots(1)$

من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

و منه

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha\left(u_{n+1}-3u_n\right) \\ &= \alpha\left(2u_n+3u_{n-1}-3u_n\right) \\ &= \alpha\left(-u_n+3u_{n-1}\right) \\ &= -\alpha\left(u_n-3u_{n-1}\right) \\ v_{n+1} &= -v_n \end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-1$ و حدها الأول $v_1=-\alpha$.

ب. لدينا $v_n=-\alpha(-1)^{n-1}$ و منه $v_n=\alpha(-1)^n\cdots\cdots(2)$ من (1) و (2)نستنتج أنّ:

$\alpha\left(u_n-3u_{n-1}\right)=\alpha(-1)^n$ و منه

$$u_n-3u_{n-1}=(-1)^n$$

4. (v_n) متتالية هندسية معناه $3\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=0$

$\Delta=16\beta^2$ معناه $\alpha=\beta$ و $\alpha=-3\beta$.

.23

جدول التغيرات أدناه هو للدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=e^{-x}+x-2$.

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	-1 $\nearrow$ $+\infty$

1.تبرر كل العناصر الواردة في جدول التغيرات الدالة g .

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+x-2\right)$$

$g(0)=-1$ و
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+1$.

من أجل: $x\geq 0$ يكون $-x\leq 0$ و بالتالي: $e^{-x}\leq 1\Leftrightarrow 1-e^{-x}\geq 0$ و منه الدالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2.أ-البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α على المجال $[0;+\infty[$ حيث: $1\leq\alpha\leq 2$.

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $[0;+\infty[$ و $\begin{cases}g(1)\simeq -0,63\\ g(2)\simeq 0,14\end{cases}\Rightarrow g(2)\times g(1)<0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α على المجال $[0;+\infty[$ حيث: $1\leq\alpha\leq 2$.

ب-استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$

x	0 $\quad\quad$ α $\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	- $\quad$ **0** $\quad$ +

3.نعتبر المتتالية العددية (u_n) بحدها الأول $u_0=5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2-e^{-u_n}$.

أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ ، $u_n\geq\alpha$.

نسمي P_n الخاصية: " من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ ، $u_n\geq\alpha$ "

لدينا: $u_0=5$ و منه $u_0\geq\alpha$ لان: $1\leq\alpha\leq 2$

اذن P_0 صحيحة.

نفرض أن P_n صحيحة أي $u_n\geq\alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n و نبرهن أن P_{n+1} أي $u_{n+1}\geq\alpha$.

فمن الفرضية $u_n\geq\alpha$ ينتج

$$-u_n\leq-\alpha$$
$$e^{-u_n}\leq e^{-\alpha}\Rightarrow 2-e^{-u_n}\geq 2-e^{-\alpha}$$

و بما أن : $g(\alpha)=0$ فان : $2-e^{-\alpha}\geq\alpha \Leftarrow 2-e^{-\alpha}=\alpha$
$u_{n+1}\geq\alpha$

اذن P_{n+1} صحيحة.

وبالتالي الخاصية وراثية و عليه حسب مبدأ البرهان بالتراجع فان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq\alpha$.

ب-البرهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=2-e^{-u_n}-u_n=-g(u_n)$

و بما أن: $u_n\geq\alpha$ فان: $g(u_n)\geq 0$ (لاحظ جدول اشارة $g(x)$)

و عليه: $-g(u_n)\leq 0$
$u_{n+1}-u_n\leq 0$ اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4-تبرير لماذا المتتالية (u_n) متقاربة ،

(u_n) متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة تماما اذن فهي متقاربة

تعين نهايتها:

بما أن (u_n) متتالية متقاربة نضع: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ و منه: $2-e^{-l}-l=0 \Leftrightarrow 2-e^{-l}=l$
$\Rightarrow g(l)=0$

و هذ يعني أن $l=\alpha$ و منه : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

.24

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بحدهما الأول $u_0=1$ و $v_0=6$ من أجل كل n عدد طبيعي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

1اثبات أن المتتالية (w_n) هندسية :

بما أن: $w_n=v_n-u_n$ ،من أجل كل nمن $\mathbb{N}$. و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n$ و $v_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n$.

بالتعويض نجد:

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n-\frac{1}{3}u_n-\frac{2}{3}v_n$$
$$=-\frac{1}{12}u_n+\frac{1}{12}v_n=\frac{1}{12}(v_n-u_n)$$
$$=\frac{1}{12}w_n$$

و بالتالي : المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{12}$ و حدها الأول 5 $w_0 = v_0 - u_0 = 6 - 1 = 5$.

استنتاج عبارة w_n بدلالة n.: $w_n = w_0 \times q^n = 5 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$

2.لدينا من أجل كل n عدد طبيعي : $t_n = 8v_n + 3u_n$

تبيان أن المتتالية (t_n) ثابتة:

$$t_{n+1} = 8v_{n+1} + 3u_{n+1} = 8\left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) + 3\left(\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n\right) = 8v_n + 3u_n = t_n$$

$$\Leftrightarrow t_{n+1} = t_n = t_0$$

و بالتالي المتتالية (t_n) ثابتة

استنتاج عبارة حدها العام.

$$t_n = t_0 = 8v_0 + 3u_0 = 51$$
$$t_n = 51$$

3.التعبير عن v_n بدلالة w_n و t_n:

لدينا: $\begin{cases} w_n = v_n - u_n \\ t_n = 8v_n + 3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3w_n = 3v_n - 3u_n ....(1) \\ t_n = 8v_n + 3u_n ....(2) \end{cases}$ بجمع المعادلة (1) و (2) طرف لطرف نجد:

$$11v_n = 3w_n + t_n \Rightarrow v_n = \frac{3}{11}w_n + \frac{1}{11}t_n$$

استنتاج v_n بدلالة n.

بالتعويض نجد: $v_n = \frac{3}{11}\left(5 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n\right) + \frac{1}{11}(45) = \frac{15}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{51}{11}$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{15}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + 51$$

حساب نهاية (v_n):

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \frac{15}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0 \\ (0 < q < 1) \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{51}{11}$$

4. نهاية المتتالية (u_n):

لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) = \frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{3}{4}\lim_{n\to+\infty} v_n$$

لان: $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{51}{11}$

$$\frac{51}{11} = \frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{3}{4}\left(\frac{51}{11}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{51}{11}$$

.25

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$ نذكر أن: $n! = n(n-1)(n-2) \times ... \times 2 \times 1.$

1.اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة :

$$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$$
$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}>0$$
$$u_{n+1}-u_n>0$$

المتتالية (v_n) متناقصة:

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-u_n-\frac{1}{n(n!)}$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n(n!)}$$
$$v_{n+1}-v_n=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)(n+1)!}$$
$$\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}<0$$
$$v_{n+1}-v_n<0$$

اذن المتتالية (v_n) متناقصة .

1.بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n<v_n$.

$$v_n-u_n=u_n+\frac{1}{n(n!)}-u_n=\frac{1}{n(n!)}$$

لدينا: $v_n-u_n=\frac{1}{n(n!)}>0$ معناه: $u_n<v_n$.

$$v_n-u_n>0$$

استنتاج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان.

بما أن المتتالية (v_n) متناقصة لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n\le v_0$ و بالتالي: $u_n\le v_0$

اذن نلاحظ أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد v_0 و بما أنها متزايدة اذن (u_n) متقاربة.

و نفس الكيفية لدينا:

المتتالية (u_n) متزايدة معناه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n\ge u_0$ و بالتالي: $u_0\le v_n$

اذن نلاحظ أن المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد u_0 و بما أنها متناقصة اذن (v_n) متقاربة.

3.حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n!)} = 0$$.

بما أن: المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة و كذلك $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

نستنتج المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان اذن هما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

.26

نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$.

1.اثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا: $v_{n+1} = 2\alpha u_{n+1} + 3\alpha^2 u_n - 3\alpha u_{n+1} = -\alpha(u_{n+1} - 3\alpha u_n) = -\alpha v_n$

و منه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ و حدها الأول: $v_0 = u_1 - 3\alpha u_0 = 2 - 3\alpha$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = (2-3\alpha)(-\alpha)^n$

بما أن: $(-1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0)$ فان: $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ و بالتالي: (v_n) متقاربة.

3.حساب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = (2-3\alpha)\left(\frac{1-(-\alpha)^{n+1}}{1+\alpha}\right)$$

$$S_n = \frac{2-3\alpha}{1+\alpha}\left(1-(-\alpha)^{n+1}\right)$$

4. أ-تعين قيمة العدد الحقيقي α .

علما أن : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$ معناه: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2-3\alpha}{1+\alpha} = \frac{3}{4}$ لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(1-(-\alpha)^{n+1}\right) = 1$

$$\frac{2-3\alpha}{1+\alpha} = \frac{3}{4}$$

$4(2-3\alpha) - 3(1+\alpha) = 0$ و بالتالي: $\alpha = \frac{1}{3}$.

$$8 - 12\alpha - 3 - 3\alpha = 0 \Rightarrow 5 - 15\alpha = 0$$

ب-استنتاج u_n بدلالة n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n)$$
$$= u_{n+1} - u_0 = \frac{3}{4}\left[1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

أي:

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_0 + \frac{3}{4}\left[1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}$$
$$u_n = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n}$$

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{7}{4}$ و بالتالي: (u_n) متقاربة.

5.في كل ما يلي نضع: $\alpha = \frac{-1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.

أ-حسابالجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = 3 \times 3\left(\frac{1}{3}\right) \times 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \dots \times 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= 3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1+2+\dots+n} = 3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

ب-تعين أصغر عدد طبيعي n:

معناه: $P_n \le 3^{-44}$

$$3^{-\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right)} \le 3^{-44} \Rightarrow -\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right) \le -44$$
$$(n-10)(n+9) \ge 0 \Rightarrow n \ge 10$$

و بالتالي أصغر عدد طبيعي هو10.

27.

لدينا: $I_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x}dx$

1.حساب I_0.

$$I_0 = \int_0^1 2e^{-2x}dx = 2\int_0^1 e^{-2x}dx = 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -e^{-2} + 1 = \frac{e^2-1}{e^2}$$

2-حساب I_n بدلالة n:

$$I_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x}dx = \left[-e^{-2x}\right]_n^{n+1} = -e^{-2(n+1)} + e^{-2n} = \left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)e^{-2n}$$

3.أ-لدينا: $I_n = \left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)e^{-2n}$

$$I_{n+1} = \left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)e^{-2(n+1)} = \left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)e^{-2n-2} = \left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)e^{-2n}.e^{-2} = I_n e^{-2}$$

اذن (I_n) متتالية هندسية اساسها $q = e^{-2}$ و حدها الأول I_0.

ب-تعين نهاية I_n عندما يؤول n الى $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)e^{-2n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$$

28.

f دالة معرفة على المجال $[2;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$.

حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[2;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$$

أي:

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2+1\right)-2x\left(x^3+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x\left(x-1\right)\left(x^2+x+4\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

بما أن $x^2+x+4>0$ و $\left(x^2+1\right)^2>0$ فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $x(x-1)$ و عليه: $x(x-1)>0$

اذن من أجل كل x من $[2;+\infty[$، $f'(x)>0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على $[2;+\infty[$.

II. (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.*نسمي الخاصية التالية: $P(n)$ ... $2 < u_n < 3$.

نتحقق من $P(0)$ لدينا: $u_0 = \frac{5}{2}$ و $2 < \frac{5}{2} < 3$ أي: $2 < u_0 < 3$ اذن $P(0)$ محققة.

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $2 < u_n < 3$ و نبرهن أن $P(n+1)$ أي نبرهن $2 < u_{n+1} < 3$.

لدينا $2 < u_n < 3$ معناه $f(2) < f(u_n) < f(3)$ لأن الدالة f متزايدة تماما $[2;+\infty[$.

يعني أن $2 < u_{n+1} < \frac{29}{10}$ و منه $2 < u_{n+1} < 3$ أي $P(n+1)$ محققة .

و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n، $2 < u_n < 3$.

2.استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2+1)$.

$$u_n^2 - \frac{9}{10}(u_n^2+1) = \frac{u_n^2-9}{10}$$

لدينا: $u_n < 3$ و منه $u_n^2 < 9 \Leftarrow u_n^2 - 9 < 0 \Leftarrow \frac{u_n^2-9}{10} < 0$

و بالتالي: $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2+1) \Rightarrow u_n^2 - \frac{9}{10}(u_n^2+1) < 0$

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{2-u_n}{u_n^2+1}$ بما أن $2 < u_n < 3$ فان $-1 < 2 - u_n < 0$ و $u_n^2 + 1 > 0$ اذن: $u_{n+1} - u_n < 0$

اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 2 فهي متقاربة.

4. $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^3+2}{u_n^2+1} - 2 = \frac{u_n^3 - 2u_n^2}{u_n^2+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n - 2)$.

5.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

نسمي الخاصية : $P(n)$.....$0 < u_n - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

نتحقق من $P(0)$، لدينا : $0 < \frac{5}{2} - 2 < 1 \Rightarrow 0 < u_0 - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^0$

و منه $P(0)$ محققة.

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $0 < u_n - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^n$ و نبرهن أن $P(n+1)$ أي نبرهن $0 < u_{n+1} - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$.

لدينا:

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n - 2)$$
$$u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2+1) \Rightarrow \frac{u_n^2}{u_n^2+1} < \frac{9}{10}$$
$$\frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2) < \frac{9}{10}(u_n-2)$$
$$u_{n+1} - 2 < \frac{9}{10}(u_n - 2)$$

و لدينا: $0 < u_n - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^n$ (فرضية التراجع)

و عليه:

$$0 < u_{n+1} - 2 \le \frac{9}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$$
$$0 < u_{n+1} - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$$

أي: $P(n+1)$ محققة.

و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^n$

بما أن $0 < u_n - 2 \le \left(\frac{9}{10}\right)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$

نستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n - 2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

29.

1.أ-احسب u_4, u_3, u_2, u_1.

$$u_1 = 5u_0 - 6 = 64$$
$$u_2 = 5u_1 - 6 = 314$$
$$u_3 = 5u_2 - 6 = 1564$$
$$u_4 = 5u_3 - 6 = 7814$$

ب-يمكن أن نقول أنه: اذا كان n زوجيا فان آخر الرقمين للعدد u_n هما 1 و 4

واذا كان n فرديا فان آخر الرقمين للعدد u_n 4و 6.

2.برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2} = u_n[4]$،

$$u_{n+2}=5u_{n+1}-6=5(5u_n-6)-6$$
$$u_{n+2}=25u_n-36$$
و منه $u_{n+2}-u_n=24u_n-36=4(6u_n-9)$
$$u_{n+2}-u_n\equiv 0[4]$$
$$u_{n+2}\equiv u_n[4]$$

استنتاج أن من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}=2[4]$:

لدينا: $u_0=14[4]$ أي $u_0=2[4]$ و منه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض ، $u_{2k}=2[4]$ محققة و نتحقق من صحة $u_{2(k+1)}=2[4]$ أي $u_{2k+2}=2[4]$.

من السؤال 4 لدينا: $u_{n+2}=u_n[4]$ و منه $u_{2k+2}=u_{2k}[4]$ و لدينا حسب فرضية $u_{2k}=2[4]$ و منه $u_{2k+2}=2[4]$

اذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}=2[4]$

استنتاج أن $u_{2k+1}=0[4]$: من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{2k+1}=5u_{2k}-6$$
و عليه: $u_{2k+1}\equiv 5\times 2-6[4]$
$$u_{2k+1}\equiv 4[4]\Rightarrow u_{2k+1}\equiv 0[4]$$

3..البرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_n=5^{n+2}+3$

لدينا: $2u_0=28$ و $5^2+3=28$ و منه من أجل $n=0$ الخاصية محققة.

نفرض ان $2u_n=5^{n+2}+3$ صحيحة و نتحقق من صحة $2u_{n+1}=5^{n+1+2}+3$ أي: $2u_{n+1}=5^{n+3}+3$.

$$10u_n=5(5^{n+2}+3)$$
لدينا: $2u_n=5^{n+2}+3$ معناه: $10u_n-12=5(5^{n+2}+3)-12$
$$2(5u_n-6)=5^{n+3}+3$$

أي : $2u_{n+1}=5^{n+3}+3$. اذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_n=5^{n+2}+3$

استنتاج أن $2u_n=28[100]$.

لدينا: $2u_0=28$ ، $2u_0\equiv 28[100]$ و منه من أجل $n=0$ الخاصية محققة.

نفرض ان $2u_n=28[100]$ صحيحة و نتحقق من صحة $2u_{n+1}=28[100]$.

لدينا: $u_{n+1}=5u_n-6$

و بالتالي يصبح:
$$\begin{aligned}2u_{n+1} &= 2\times 5u_n - 12\\ 2u_{n+1} &\equiv 5\times 28 - 12[100]\\ 2u_{n+1} &\equiv 128[100]\\ 2u_{n+1} &\equiv 28[100]\end{aligned}$$

اذن من أجل كل عدد طبيعي لدينا $2u_n = 28[100]$.

4.تعين رقمي الأحاد و العشرات للعدد u_n و ذلك حسب قيم العدد الطبيعي n .

نقوم بتعيين باقي قسمة العدد u_n على 100:

لدينا: $2u_n = 28[100]$ و منه: $u_n = 14[50]$ أي: $u_n = 50k + 14$.

من أجل $k = 2p$ يكون $u_n = 100p + 14$ معناه $u_n = 2[4]$ أي n زوجي

و بالتالي اذا كان n زوجي فان رقم آحاد u_n هو 4 و رقم عشراته هو 1.

من أجل $k = 2p + 1$ يكون $u_n = 100p + 64$ معناه $u_n = 0[4]$ أي n فردي

و بالتالي اذا كان n فردي فان رقم آحاد u_n هو 4 و رقم عشراته هو 6.

5. اثبات أن $PGCD(u_n, u_{n+1})$ ثابت .

ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و u_{n+1}.

اذن d يقسم u_n و يقسم u_{n+1}

و بالتالي: d يقسم $u_{n+1} - 5u_n$ أي d يقسم 6.

اذن القيم الممكنة d هي: $d_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ و بما أن رقم آحاد العدد u_n هو رقم زوجي فان القيم الممكنة هي $\{2, 6\}$.

و لدينا: $2u_n = 5^{n+2} + 3$ ومعناه:

$$\begin{aligned}2u_n &\equiv 5^{n+2} + 3[3]\\ 2u_n &\equiv (-1)^{n+2}[3]\\ -u_n &\equiv (-1)^n[3]\\ u_n &\equiv (-1)^{n+1}[3] \Rightarrow \begin{cases} u_n \equiv -1[3] \\ u_n \equiv 1[3] \end{cases}\end{aligned}$$

و منه u_n لا يقبل القسمة على 3 فهو اذن لا يقبل القسمة على 6 .

و بالتالي: $PGCD(u_n, u_{n+1}) = 2$.

.30

.1 حساب $u_{n+1}-u_n$

لدينا: $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

$$u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)=\ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$$

بما أن: $\ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<1$ و منه: $u_{n+1}-u_n<0$

و عليه (u_n) متتالية متناقصة.

.2 أ-حساب v_n بدلالة n:

$$v_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$$
$$=\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\ln(n+1)$$

اذن: $v_n=\ln(n+1)$ و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$.

ب-بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ فان المتتالية (v_n) متباعدة.

.3أ-حساب w_n بدلالة n:

$$w_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{2n}$$
$$=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\ldots\times\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n+1}{2n}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

منه $w_n=\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \ln(2)$

ب-لدينا $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ln(2)$ و عليه المتتالية (w_n) متقاربة.

.31

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

1) حساب : $u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3$ و $u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n \le 4$

لدينا $2 \le u_1 \le 4$ محققة

نفرض أن $2 \le u_n \le 4$ و لنبرهن أن $2 \le u_{n+1} \le 4$

$2 \le u_n \le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \ge \frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد $-1 \le -\frac{4}{u_n} \le -2$ بإضافة 5 نجد $3 \le 5 - \frac{4}{u_n} \le 4$ أي ان $2 \le 3 \le u_{n+1} \le 4$ و منه $2 \le u_{n+1} \le 4$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \le u_n \le 4$.

2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2}{u_n} = \frac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$

الفرق موجب لان $2 \le u_n \le 4$ فإن $4 - u_n \ge 0$ و $-1 + u_n \ge 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

4) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \le \frac{4-u_n}{2}$

لدينا $\frac{1}{u_n}(4-u_n) = \frac{-u_n+4}{u_n} = -1 + \frac{4}{u_n} = 4 - 5 + \frac{4}{u_n} = 4 - u_{n+1}$ و بما ان $2 \le u_n \le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} \le \frac{1}{u_n} \le \frac{1}{2}$, و منه $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$.

5) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ و منه

$0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و ها كذا

$0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})\le\frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن

نصل إلى التعميم $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان

$0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(2)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0\le 4-u_{n'}\le\frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب .

حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$ بما أن $n'=n+1$ $0\le 4-u_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ فحسب الحصر نجد

$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

32.

نعرف المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث $a_0=1$ و $b_0=7$ و بالعلاقة التالية: $\begin{cases}a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)\\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)\end{cases}$

1. المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=b_n-a_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

أ- لدينا: $u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-\frac{1}{3}(2a_n+b_n)=\frac{b_n-a_n}{3}=\frac{1}{3}u_n$

و منه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول: $u_0=b_0-a_0=7-1=6$

ب-التعبير عن u_n بدلالة n: $u_n=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2.اتجاه تغير المتتاليتين (a_n) و (b_n):

لدينا $u_n=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ أي $u_n>0$ و عليه $b_n>a_n$

اذن $\frac{b_n-a_n}{3}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)-a_n=a_{n+1}-a_n$ و بالتالي (a_n) متتالية متزايدة.

$a_{n+1}-a_n\ge 0$

بالمثل نجد $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-b_n=\frac{a_n-b_n}{3}$ و بالتالي (b_n) متتالية متناقصة.

$b_{n+1}-b_n\le 0$

3.لدينا

$$b_n-a_n=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n-a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n-a_n=0$$

بما أن (a_n) متتالية متزايدة و (b_n) متتالية متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n-a_n=0$ فان المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان.

4. المتتالية (v_n) المعرفة بالعبارة : $v_n=a_n+b_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لدينا $v_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)+\frac{1}{3}(a_n+2b_n)=\frac{3(a_n+b_n)}{3}=a_n+b_n$

$=v_n$

و عليه المتتالية (v_n) متتالية ثابتة.

.33

I.الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1. اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$، $g'(x)=e^x-1$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
e^x-1	$+$

و عليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2.عين حسب قيم x اشارة $g(x)$:

بما أن $g(0)=0$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $g(x)\ge g(0)=0$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

3. لدينا: $g(x)\geq 0$ أي: $e^x - x \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow e^x - x \geq 0$

اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $e^x - x > 0$.

II. الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

1. لدينا $x\in[0;1]$ و بما أن f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فان ، $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$.

أي $0\leq f(x)\leq 1$ تكافئ $f(x)\in[0;1]$.

اذن من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2.أ-

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{e^x-x}-x=\frac{e^x-1-x\left(e^x-x\right)}{e^x-x}=\frac{(1-x)\left(e^x-(1+x)\right)}{e^x-x}$$

اذن : $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

ب- الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D):

من أجل كل x من $[0;1]$، $g(x)\geq 0$ و $1-x>0$ و $e^x-x>0$

اذن $f(x)-x>0$ أي أن للمنحنى (C) يقع فوق المستقيم (D) و يتقاطعان في النقطة $(0;0)$ و $(1;1)$.

3.أ- دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

نلاحظ أن: $\left(e^x-x\right)'=e^x-1$ و عليه $F(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c,(c\in\mathbb{R})$

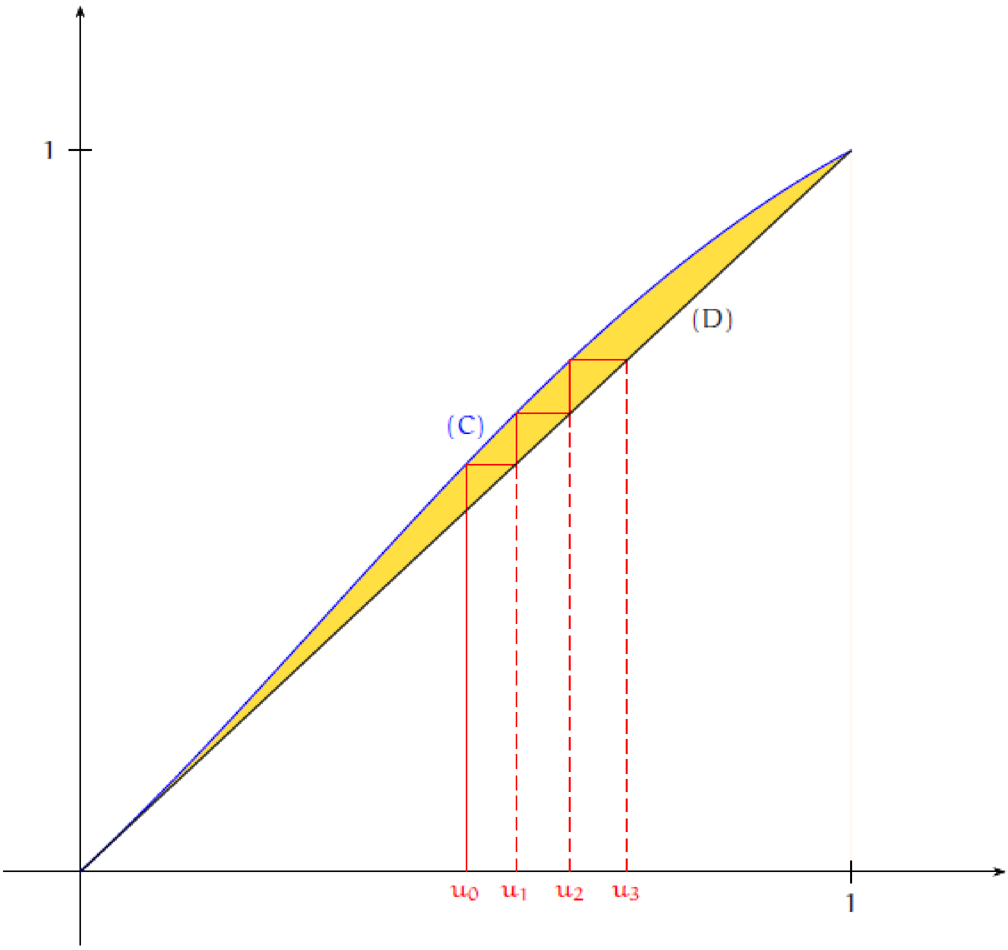
ب- مساحة الحيز :

على المجال $[0;1]$ $f(x)>x$ و بالتالي:

$$\int_0^1 f(x)-xdx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 xdx=\left[F(x)\right]_0^1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$=\ln(e-1)-\frac{1}{2}u.a$$

الجزء الثالث:

1. خطوط التمثيل.



2.لدينا: $u_0=\frac{1}{2}$ و منه $\frac{1}{2}\le u_0\le 1$.

ليكن $n\ge 0$ نفرض أن $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$ و بما أن f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

و منه نستنتج أن $f\left(\frac{1}{2}\right)\le f\left(u_n\right)\le f\left(1\right)$ أي: $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$.

و عليه حسب خاصية الاستدلال بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$.

حسب ما سبق لدينا على المجال $[0;1]$ ، $f(x)>x$ و بما أن $u_n\in[0;1]$

فان $f\left(u_n\right)\ge u_n$.

اذن من أجل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{2}<u_n<u_{n+1}<1$.

3. بما أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة نحو العدد l حيث $l\in[0;1]$.

لأن $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$.

$l=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}f\left(u_n\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}u_n\right)=f(l)$.

من أجل $x=1$ لدينا $f(x)=x$ و بالتالي، $l=1$ و عليه: $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

.34

1.حساب الحدود:

$$u_2=\frac{1+1}{2(1)}u_1=\frac{1}{2}$$
$$u_3=\frac{3}{4}u_2=\frac{3}{8}$$
$$u_4=\frac{4}{6}u_3=\frac{1}{4}$$

2.أ-بيين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n موجبة تماما أي $u_n>0$.

من اجل $n=1$، $u_1=\frac{1}{2}>0$ و عليه $u_1>0$.

ليكن $n\geq1$ نفرض أن $u_n>0$ و نتحقق من أن $u_{n+1}>0$. أي: $\frac{n+1}{2n}u_n>0$.

لدينا $u_n>0$ و $\frac{n+1}{2n}>0$ فبالتالي $\frac{n+1}{2n}u_n>0$ اذن $u_{n+1}>0$.

و عليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n>0$.

ب- ليكن $n\geq1$ ،
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2n}\leq\frac{n+n}{2n}=1$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq1$$
حيث: $u_n\neq0$

فبالتالي: $u_{n+1}<u_n$. اذن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة.

ج- المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 0 اذن هي متقاربة.

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. نضع: $v_n=\frac{u_n}{n}$.

لدينا : $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$

أ- ليكن $n \geq 1$
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{2n} u_n = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}v_n$$
$$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

و عليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1 = \frac{1}{2}$.

و بالتالي: $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

ب- لدينا $v_n = \frac{u_n}{n}$ أي $u_n = nv_n$. و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n = \frac{n}{2^n}$

4.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

أ-نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \ln x - x\ln 2$$
$$= \lim_{x \mapsto +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \ln 2\right) = -\infty$$

ب- نهاية المتتالية (u_n).

اعلم أن المتتالية (u_n) متقاربة و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم،

لدينا :
$$u_n = \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n\ln(2)}} = e^{\ln(n) - n\ln 2} = e^{f(n)}$$
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{f(n)} = e^{\lim_{n \to +\infty} f(n)} = 0$$
اذن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

.35

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^{1-x}$.

1.ليكن x عدد حقيقي $f(x) = xe^{1-x} = x \times e \times e^{-x} = ex\frac{1}{e^x}$

اذن بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.

.2
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^{1-x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} e \times \frac{x}{e^x} = 0$$
اذن $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$.

3. اتجاه تغير الدالة f الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{1-x}>0$ و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

جدول تغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

II.1. ليكن x عدد حقيقي،

$$\begin{aligned}(1-x)g_n(x) &= g_n(x)-xg_n(x)\\ &=\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)-x\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)\\ &=\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)-\left(x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}\right)\\ &=1-x^{n+1}\end{aligned}$$

اذن من أجل كل $x\neq 1$، $g_n(x)=\dfrac{\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1،

نلاحظ أن أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x)=g_n'(x)$ و عليه

و بالتالي:

$$\begin{aligned}g'_n(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)+\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}\\ &=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

3.نضع $S_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$:

حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n) = \frac{1}{e^0}+\frac{2}{e^1}+\frac{3}{e^2}+\ldots+\frac{n}{e^{n-1}}$$
$$=1+2\left(\frac{1}{e}\right)^1+3\left(\frac{1}{e}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
$$=h_n\left(\frac{1}{e}\right)$$
$$=\frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n+1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2}ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$

و عليه $\lim_{n\to+\infty} e^{-2}f(n)=0 = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.

و كذلك $(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = (n+1)e^{-n} = f(n+1)$

و عليه نستنتج ان: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2$.

.36

Iلتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$. $\left(C_f\right)$ و تمثيلها البياني في معلم متعامد ز متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.أ-حساب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x-1}+3x-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}+3x-1 = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}\left(1+\frac{3x}{e^{-2x-1}}-\frac{1}{e^{-2x-1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}\left(1+3xe^{2x+1}-e^{2x+1}\right)$$
$$==\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}=+\infty$$

أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(3xe^{2x+1}\right)=0$.

و منه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x-1}+3x-1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x-1}}{x}+\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{2x+1}}+3+\frac{1}{x}$$
$$=-\infty$$
.

ب-لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right] &= \lim_{x\to+\infty}\left[e^{-2x-1}+3x-1-(3x-1)\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{-2x-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right]=0$$

التفسير: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y=3x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$.

2. اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x)=-2e^{-2x-1}+3$

و منه $f'(x)=0$ تكافئ

$$-2e^{-2x-1}+3=0 \Leftrightarrow e^{-2x-1}=\frac{3}{2}$$

نستنتج أن :

$$-2x-1=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x=-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$		$+\infty$
$-2e^{-2x-1}+3$		-	0	+	

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا:

$$f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)=e^{-2\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1}+3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1$$

$$=\frac{3}{2}+3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)-1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$$

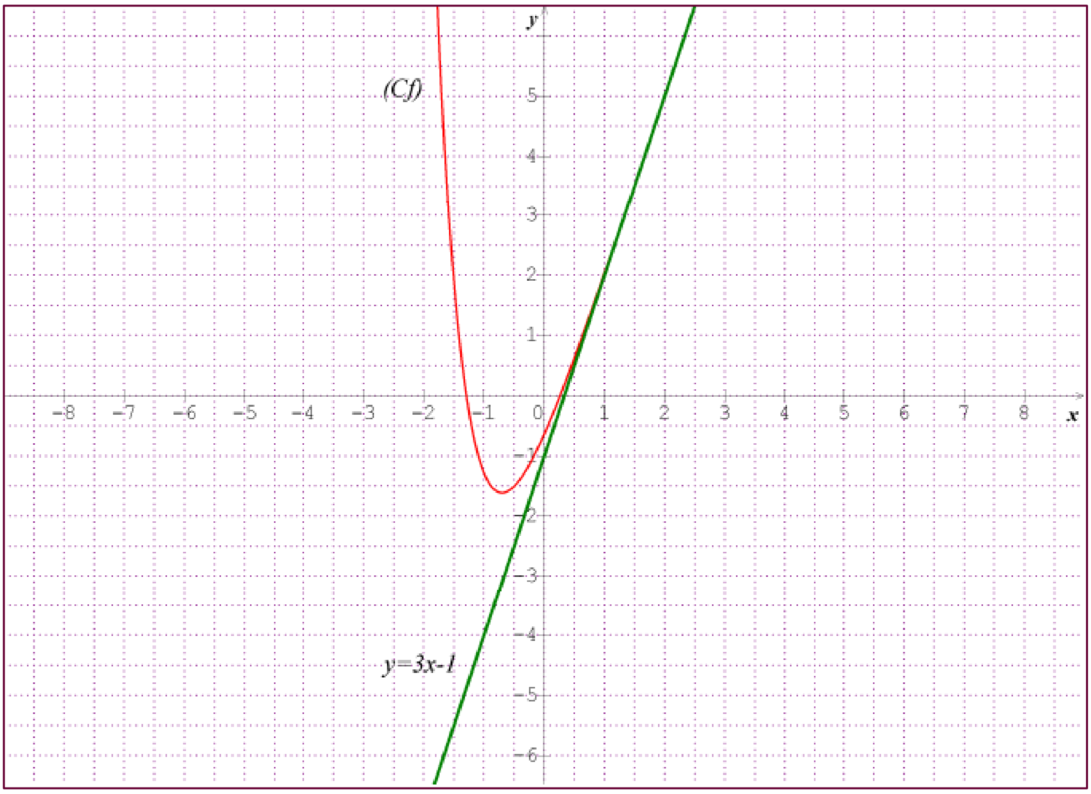
$$\simeq -1,6$$

3. الدالة f مستمرة و رتيبة على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right[$ و $f(-1,3)\times f(-1,2)<0$

و لدينا كذالك الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right);+\infty\right[$ و لدينا: $f(0,2)\times f(0,3)<0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,3<\alpha<-1,2$ $0,2<\beta<0,3$.

4.رسم المنحنى (C_f):



II.نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_n=e^{-2n-1}$ و $v_n=3n-1$.

.1

لدينا: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{e^{-2(n+1)-1}}{e^{-2n-1}}=e^{-2(n+1)-1+2n+1}=e^{-2}$

و منه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=e^{-2}$ و حدها الأول $u_0=e^{-1}$.

و لدينا: $v_{n+1}-v_n=3(n+1)-1-3n+1=3$ و منه نجد أن المتتالية (v_n) حسابية

أساسها $r=3$ و حدها الأول $v_0=-1$.

2. اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n).

بما أن $r=3>0$ فان المتتالية (v_n) متتالية متزايدة.

بما أن الأساس $-1<e^{-2}<1$ و الحد الأول $e^{-1}>0$ فان (u_n) متتالية متزايدة.

3.لدينا: (v_n) متتالية متزايدة و (u_n) متتالية متزايدة

ومن جهة أخرى لدينا:
$$\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim_{n\to+\infty} 3n-1-e^{-2n-1}=+\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=+\infty$$

اذن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ليس بمتتاليتين متجاورتان.

4. حساب المجموع S_n بدلالة n:

بحيث: $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$ يكفي ان نلاحظ أن $f(n)=u_n+v_n$

و بالتالي:
$$\begin{aligned}S_n&=f(0)+f(1)+...+f(n)\\&=u_0+u_1+...+u_n+v_0+v_1+...+v_n\\&=e^{-1}\left(\frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}\right)+(n+1)\left(\frac{-1-1+3n}{2}\right)\\&=\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)\end{aligned}$$

ب-احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)=+\infty$$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n^2}$.

اذن:

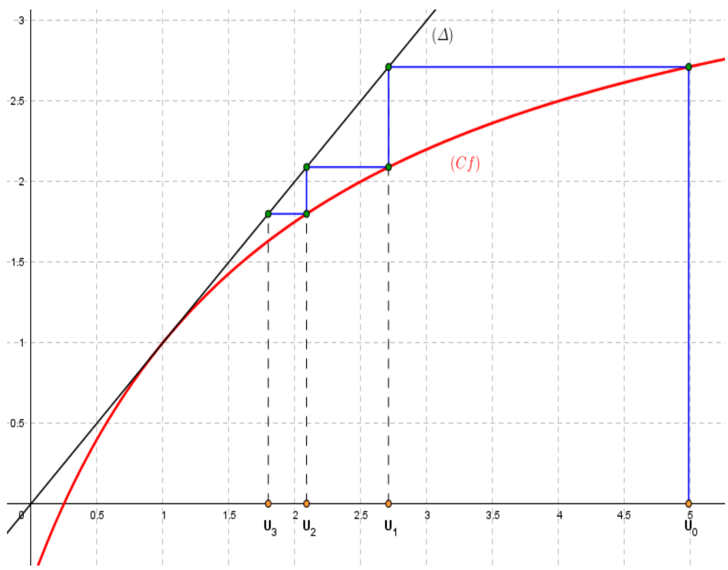
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)}{n^2}+\frac{(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\frac{\left(1-e^{-2(n+1)}\right)}{n^2}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{3}{2}$$

.37

1) أ) الإنشاء :



ب) التخمين : نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متناقصة و تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) .

2) أ) البرهان بالتراجع : $u_n-1>0$.

*)التحقق من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=5$ ، أي : $u_0-1>0$ ، إذن محققة .

*) نفرض أنّ : $u_n-1>0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1}-1>0$

لدينا فرضا : $u_n-1>0$ أي : $u_n>1$ ، و بما أنّ الدالة f متزايدة على $]-2;+\infty[$ فإنّ : $f(u_n)>f(1)$ ،

أي : $u_{n+1}>1$ ، و منه : $u_{n+1}-1>0$.و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $u_n>1$.

ب) لنبرهن صحة التخمين :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-1}{u_n+2}-u_n=\frac{4u_n-1-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$$

$=\frac{-(u_n^2-2u_n+1)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+2}$ و منه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)^2}{u_n+2}<0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة ، و بما أنّها محدودة من الأسفل بـ 1 ، فهي متقاربة .

3)أ) لنحسب : v_{n+1}

$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-1}{u_n+2}-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-1-u_n-2}{u_n+2}}$ أي : $v_{n+1}=\frac{1}{\frac{3u_n-3}{u_n+2}}=\frac{u_n+2}{3u_n-3}$.

*) لنحسب الفرق : $v_{n+1}-v_n$.

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2}{3u_n-3}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+2}{3u_n-3}-\frac{3}{3(u_n-1)}$ أي : $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-1}{3(u_n-1)}=\frac{1}{3}$.

إذن : $v_{n+1}=v_n+\frac{1}{3}$.و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول :

$v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{4}$.

ب) *) عبارة v_n بدلالة n : $v_n=\frac{1}{3}n+\frac{1}{4}$.

*) عبارة u_n بدلالة n : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ ، أي :

$u_n-1=\frac{1}{v_n}$ ، أي : $u_n=\frac{1}{v_n}+1$.و منه : $u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}n+\frac{1}{4}}+1$.

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{3}n+\frac{1}{4}}+1\right]=1$

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$.

1) لنبرهن بالتراجع أنّ جميع حدود المتتالية (u_n) موجبة :

*) نتحقق من أجل $n=0$: $u_0 = 3$ ، أي : $u_0 > 0$ و منه : محققة من أجل $n=0$.

*) لنفرض أنّ : $u_n > 0$ و نثبت أنّ : $u_{n+1} > 0$

لدينا : $u_n > 0$ ، و منه : $\dfrac{2}{1+u_n} > 0$ ، أي : $u_{n+1} > 0$

*) و أخيرا من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$

2) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

و بما أنّ : $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$ ، فإنّ : $l = \dfrac{2}{1+l}$ ، و منه :

$l^2 + l - 2 = 0$ ، أي أنّ l هو حل للمعادلة $x^2 + x - 2 = 0$

هذه الأخيرة تقبل حلين هما : $x_1 = 1$ و $x_2 = -2$.

و عليه : نختار $l = 1$ ، لأنّ حدود المتتالية (u_n) موجبة .

3) لدينا : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ) لنبرهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{2}{1+u_n} - 1}{\dfrac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\dfrac{1-u_n}{1+u_n}}{\dfrac{4+2u_n}{1+u_n}}$$

$$= \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{-(u_n-1)}{2(u_n+2)} = -\frac{1}{2} v_n$$

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = -\dfrac{1}{2}$ ، و حدها الأول : $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2}{5}$. و منه : $v_n = \dfrac{2}{5} \times (-\dfrac{1}{2})^n$.

ب) بما أنّ الأساس q يحقّق : $-1 < q < 1$ ، إذن : المتتالية (v_n) تتقارب نحو 0 .

4) عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ ، أي : $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$ أي : $v_n u_n - u_n = -2v_n - 1$ ، أي :

$u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$ ، أي : $u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$

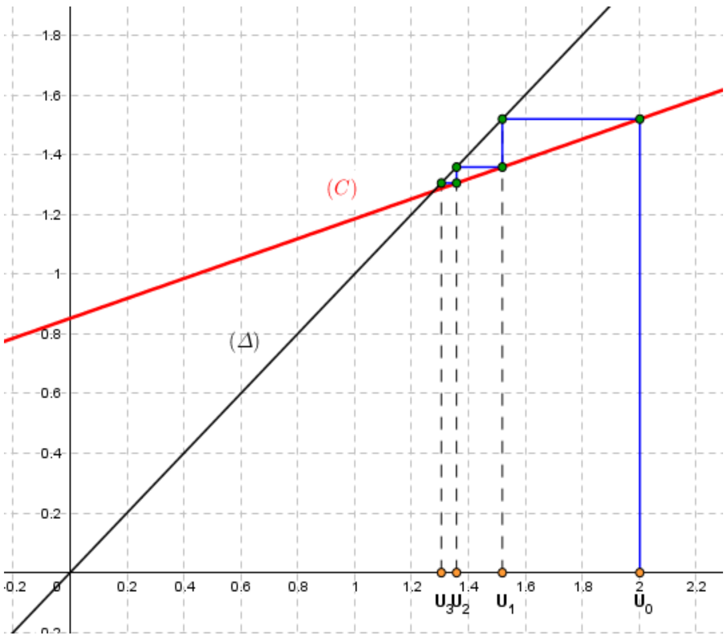
و منه : $u_n = \dfrac{-2 \times \frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^n - 1}$.

*) تحديد نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$.إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

39.

1) أ) تمثيل الحدود الأربع الأولى للمتتالية (u_n) :



ب) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}$.و بما أنّ : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ ، فإنّ :

$l=\frac{1}{3}l+\frac{23}{27}$ ، أي : $l-\frac{1}{3}l=\frac{23}{27}$ ، أي :

$\frac{2}{3}l=\frac{23}{27}$ ، أي : $l=\frac{23}{27}\times\frac{3}{2}$ ، و منه : $l=\frac{23}{18}$.

ج) لنبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq\frac{23}{18}$

*) لنتحقق من أجل $n=0$: $u_0=2$ ، أي : $u_0\geq\frac{23}{18}$

*) لنفرض أنّ : $u_n\geq\frac{23}{18}$ و نثبت أنّ : $u_{n+1}\geq\frac{23}{18}$

لدينا فرضا : $u_n\geq\frac{23}{18}$ ، أي : $\frac{1}{3}u_n\geq\frac{23}{54}$ ، أي : $\frac{1}{3}u_n+\frac{23}{27}\geq\frac{23}{54}+\frac{23}{27}$ ، أي : $u_{n+1}\geq\frac{23}{54}+\frac{46}{54}$

أي : $u_{n+1}\geq\frac{69}{54}$ ، و منه : $u_{n+1}\geq\frac{23}{18}$. و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $u_n\geq\frac{23}{18}$.

د) لندرس رتابة المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق) :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+\frac{23}{27}-u_n=-\frac{2}{3}u_n+\frac{23}{27}$$

*)نعلم أنّ : $u_n\geq\frac{23}{18}$ ، أي : $-\frac{2}{3}u_n\leq-\frac{46}{54}$ ، أي : $-\frac{2}{3}u_n\leq-\frac{23}{27}$ ، أي : $-\frac{2}{3}u_n+\frac{23}{27}\leq 0$ ، و منه :

$u_{n+1}-u_n\leq 0$.إذن : المتتالية (u_n) متناقصة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل فهي متقاربة و نهايتها تساوي $\frac{23}{18}$.

2) أ) البرهان على المساواة :

نلاحظ أنّ : $\frac{1}{10^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^2}$ هو مجموع لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{10}$ و حدها الأول $\frac{1}{10^2}$ ، عدد هذه الحدود هو : n حد . نسمي المجموع بـ : S_n .

$S_n=\frac{1}{10^2}\times\frac{10}{9}\left[1-(\frac{1}{10})^n\right]=\frac{1}{10^2}\times\frac{1-(\frac{1}{10})^n}{\frac{9}{10}}$ و منه : $S_n=\frac{1}{90}\times(1-\frac{1}{10^n})$. و هو المطلوب .

ب) لدينا : $v_n = 1,2\underbrace{77....7}_{n}$ ، أي :

$$v_n = 1,2 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + ... + \frac{7}{10^{n+1}}$$

$= 1,2 + 7(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + ... + \frac{1}{10^{n+1}})$ و منه : $= 1,2 + 7 \times \frac{1}{90} \times \left[1 - (\frac{1}{10^n})\right]$

*) نعلم أنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{10})^n = 0$ ، إذن :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = (1,2 + \frac{7}{90}) = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{108 + 7}{90}$ و منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$ ، (عدد ناطق) .

3) المتتالية (u_n) متناقصة و المتتالية (v_n) متزايدة ، و لهما نفس النهاية l ، إذن فهما متجاورتان .

.40

1) لدينا : $\begin{cases} a \times b \times c = 216 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 133 \end{cases}$ وَ بما أنّ الأعداد c, b, a حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ : $a \times c = b^2$

أي : $b \times b^2 = 216$ ، و منه : $b^3 = 216$ ،

أي : $b = 6$. بالتعويض نجد : $\begin{cases} a \times c = 36 \\ a^2 + c^2 = 97 \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} c = \dfrac{36}{a} \\ a^2 + c^2 = 97 \end{cases}$ ، أي : $a^2 + (\frac{36}{a})^2 = 97$ ، أي :

$\frac{a^4 + 1296}{a^2} = 97$ ، و منه : $a^4 - 97a^2 + 1296 = 0$

بوضع $a^2 = X$ نجد : $X^2 - 97X + 1296 = 0$ ،

أي : $\Delta = 4225$ ، ومنه : $\begin{cases} X_1 = 16 \\ X_2 = 81 \end{cases}$ ، أي :

$\begin{cases} a = 4 \\ a = -4 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a = 9 \\ a = -9 \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} a = 9 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{cases}$ **مرفوضة** ، $\begin{cases} a = -9 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{cases}$ **مرفوضة** ، $\begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ a = -9 \end{cases}$ **مرفوضة** ، $\begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$ **ص** .

2) أ) تعيين قيمة α : لدينا $v_n = u_n + \alpha$ ، أي : $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$ ، أي : $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 + \alpha$ ، أي :

$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - \alpha) + 1 + \alpha$ ، أي : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}\alpha + 1$ ، إذن : (v_n) هندسية معناه : $\frac{1}{3}\alpha + 1 = 0$ ، أي : لما

$\alpha = -3$ تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وَ حدها الأول $v_0 = 9$.

ب) أوّلا نعيّن عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n$ ،

و منه : $v_n = 9 \times (\frac{2}{3})^n$.

الآن نعيّن عبارة u_n بدلالة n : لدينا : $u_n = v_n - \alpha$ ، أي : $u_n = v_n + 3$ ، ومنه : $u_n = 9 \times (\frac{2}{3})^n + 3$

حساب نهاية (u_n) : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$ ، لأنّ : $\lim_{n \to +\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$.

3) لدينا : $w_n = \ln(v_n)$ ، أي : $w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$ ، أي : $w_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}v_n)$ ، أي : $w_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}) + \ln(v_n)$ ، و

منه : $w_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}) + w_n$.

إذن : (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln(\frac{2}{3})$

وَ حدها الأول : $w_0 = \ln(9)$.

4) حساب الجداء : $P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times .... \times (u_n - 3)$ ،

لدينا : $u_n - 3 = v_n$ ،

أي : $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$ ، أي : $P_n = v_0 \times (v_0.q) \times (v_0.q^2) \times .... \times (v_0.q^n)$ ، أي :

$P_n = (v_0 \times v_0 \times ... \times v_0)(q \times q^2 \times ... \times q^n)$ ، و منه : $P_n = v_0^{n+1} \times q^{\frac{(n+1)n}{2}}$ ، أي : $P_n = 9^{n+1} \times (\frac{2}{3})^{\frac{n^2+n}{2}}$

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

1) لنبرهن بالتراجع أنّ : $u_n > n^2$.

*)لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_0 > 0^2$ ، و منه : $1 > 0$ ، (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n > n^2$ ، و لنثبت أنّ : $u_{n+1} > (n+1)^2$

لدينا فرضا : $u_n > n^2$ ، أي : $u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$

أي : $u_{n+1} > n^2 + 2n + 1 + 2$ ، أي : $u_{n+1} > (n+1)^2 + 2$ و منه : $u_{n+1} > (n+1)^2$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > n^2$.

*) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

بما أنّ : $u_n > n^2$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2) = +\infty$.بالمقارنة نستنتج أنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ ، نلاحظ أنّ : $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3) لدينا : $w_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) طبيعة المتتالية (w_n) : لدينا : $w_n = 2n + 3$

أي : $w_{n+1} = 2(n+1) + 3$ ، أي : $w_{n+1} = 2n + 2 + 3$

أي : $w_{n+1} = 2n + 3 + 2$ ، و منه : $w_{n+1} = w_n + 2$

إذن : المتتالية (w_n) حسابية أساسها 2 و حدها الأول 3 .

ب) حساب المجموع S_{n-1} :

$S_{n-1} = w_0 + w_1 + ... + w_{n-1}$ ، أي :

$S_{n-1} = \dfrac{(w_0 + w_{n-1})n}{2} = \dfrac{(3 + 2n + 1)n}{2}$ ، أي :

$S_{n-1} = \dfrac{(2n+4)n}{2} = \dfrac{2(n+2)n}{2} = n^2 + 2n$.

ج) إستنتاج عبارة u_n :

لدينا : $w_n = u_{n+1} - u_n$ ، أي :

$\begin{cases} w_0 = u_1 - u_0 \\ w_1 = u_2 - u_1 \\ w_2 = u_3 - u_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$ بالجمع نجد : $S_{n-1} = u_n - u_0$ ،

أي : $u_n = S_{n-1} + u_0$ ، أي : $u_n = n^2 + 2n + 1$

و منه : $u_n = (n+1)^2$.

*) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2 = +\infty$.

.42

لدينا : $u_0 > 0$ وَ $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 2}{u_n + 4}$.

1) أ) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$\dfrac{au_n + 4a + b}{u_n + 4} = a + \dfrac{b}{u_n + 4} = u_{n+1}$ ، بالمطابقة نجد :

$\begin{cases} a = 5 \\ 4a + b = 2 \end{cases}$ ، و منه : $\begin{cases} a = 5 \\ b = -18 \end{cases}$.

إذن : $u_{n+1} = 5 - \dfrac{18}{u_n + 4}$.

ب) البرهان بالتراجع على أنّ : $u_n > 0$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_0 > 0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n > 0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} > 0$.

لدينا : $u_n > 0$ ، أي : $5u_n + 2 > 0$ و أيضا : $u_n + 4 > 0$ و منه : $\frac{5u_n + 2}{u_n + 4} > 0$ ، أي : $u_{n+1} > 0$ ، و هو المطلوب

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > 0$.

2) تعيين u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة : تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا كان : $u_{n+1} = u_n = u_0$ ،

أي : $\frac{5u_0 + 2}{u_0 + 4} = u_0$ ، أي : $u_0^2 + 4u_0 = 5u_0 + 2$ أي : $u_0^2 - u_0 - 2 = 0$ ، و منه سيكون :

$u_0 = -1$ (مرفوض) ، أو $u_0 = 2$ (مقبول) .

3) لدينا : $u_0 = 3$ و $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + \alpha}$.

*) تعيين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية :

لنحسب : v_{n+1} .

$$v_{n+1} = \frac{\frac{5u_n + 2}{u_n + 4} - 2}{\frac{5u_n + 2}{u_n + 4} + \alpha} = \frac{\frac{5u_n + 2 - 2u_n - 8}{u_n + 4}}{\frac{u_n + 2 + \alpha u_n + 4\alpha}{u_n + 4}}$$

$$= \frac{3u_n - 6}{5u_n + \alpha u_n + 4\alpha + 2} = \frac{3(u_n - 2)}{(5 + \alpha)u_n + 4\alpha + 2}$$

و منه : $v_{n+1} = \frac{3(u_n - 2)}{(5 + \alpha)\left[u_n + \frac{4\alpha + 2}{5 + \alpha}\right]}$.

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + \frac{4\alpha + 2}{5 + \alpha}}$ ، أي : $\frac{u_n - 2}{u_n + \frac{4\alpha + 2}{5 + \alpha}} = \frac{u_n - 2}{u_n + \alpha}$

بالمطابقة نجد : $\frac{4\alpha + 2}{5 + \alpha} = \alpha$ ، أي : $\alpha^2 + 5\alpha = 4\alpha + 2$ و منه : $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ ، إذن سيكون : $\alpha = -2$ أو $\alpha = 1$.

*) حالة : $\alpha = -2$ يكون : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 2} = 1$ ،

هنا المتتالية (v_n) تصبح ثابتة ، إذن هذه حالة مرفوضة .

*) حالة : $\alpha = 1$ يكون : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$. و يصبح : $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول :

$v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{4}$.

*) عبارة v_n : $v_n = \dfrac{1}{4} \times (\dfrac{1}{2})^n$ و منه : $v_n = \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

*) عبارة u_n : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ ، أي: $v_n u_n + v_n = u_n - 2$

أي : $v_n u_n - u_n = -v_n - 2$ ، أي : $u_n (v_n - 1) = -v_n - 2$

أي : $\dfrac{-\dfrac{1}{2^{n+2}} - 2}{\dfrac{1}{2^{n+2}} - 1} = u_n = \dfrac{-v_n - 2}{v_n - 1}$ ، أي :

$u_n = \dfrac{\dfrac{-1 - 2 \times 2^{n+2}}{2^{n+2}}}{\dfrac{1 - 2^{n+2}}{2^{n+2}}}$ ، و منه : $u_n = \dfrac{-1 - 2^{n+3}}{1 - 2^{n+2}}$

4) حساب المجموع S_n :

$S_n = \dfrac{1}{u_0 + 1} + \dfrac{1}{u_1 + 1} + ... + \dfrac{1}{u_n + 1}$.

لدينا : $1 - \dfrac{3}{u_n + 1} = \dfrac{u_n + 1 - 3}{u_n + 1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1} = v_n$ ،

و منه : $\dfrac{3}{u_n + 1} = 1 - v_n$ ، أي : $\dfrac{1}{u_n + 1} = \dfrac{1 - v_n}{3}$ ،

إذن : $\frac{1-v_n}{3}+.....+\frac{1-v_1}{3}+\frac{1-v_0}{3}= S_n$ ، أي : $S_n=\frac{\overbrace{(1+1+...+1)}^{n}-(v_0+v_1+...+v_n)}{3}$

أي : $S_n=\frac{(n+1)-\frac{1}{4}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{3}$ ،

إذن : $S_n=\frac{n+1}{3}-\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]}{3}$.

.43

لدينا : $u_0=e^3$ وَ $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$.

1) إثبات أنّ : $u_n>e^2$ ، (نستعمل البرهان بالتراجع)

*)التحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ ،

لدينا : $u_0=e^3$ أي : $u_0>e^2$ محقّقة .

*)نفرض صحة الخاصية عند n ، أي : $u_n>e^2$.

*)و نبرهن صحة الخاصية عند $n+1$ ، أي : $u_{n+1}>e^2$.

لدينا فرضا $u_n>e^2$ ، أي : $\sqrt{u_n}>e$ ،

أي : $e\sqrt{u_n}>e^2$ ، إذن : $u_{n+1}>e^2$. و هو المطلوب

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>e^2$.

2) إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) : أي نحسب : $u_{n+1}-u_n=e\sqrt{u_n}-u_n$ ، أي :

$u_{n+1}-u_n=e\sqrt{u_n}-u_n\times\frac{e\sqrt{u_n}+u_n}{e\sqrt{u_n}+u_n}=\frac{e^2u_n-u_n^2}{e\sqrt{u_n}+u_n}$ ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(e^2-u_n)}{e\sqrt{u_n}+u_n}$.

*) بما أنّ : $u_n>e^2$ معناه : $e^2-u_n<0$ ، ومنه : $u_{n+1}-u_n<0$ ، إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

*) نعم المتتالية (u_n) متقاربة ، لأنّها متناقصة و محدودة

من الأسفل بــ e^2 .

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - 2$

*)بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية : أي نحسب : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$ ، أي: $v_{n+1} = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$ ومنه :

$v_{n+1} = \ln e + \ln\sqrt{u_n} - 2$ أي ، $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$ ، أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1$ ، ومنه :

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$ ، إذن : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ ،

و عليه فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

وَ حدّها الأول : $v_0 = \ln(u_0) - 2$ ، أي : $v_0 = \ln(e^3) - 2$ ، ومنه : $v_0 = 1$.

*) عبارة v_n : $v_n = v_0 \times (q)^n$ ، أي : $v_n = (\frac{1}{2})^n$.

*)عبارة u_n : $v_n = \ln(u_n) - 2$ ، أي : $\ln(u_n) = v_n + 2$

أي : $u_n = e^{v_n + 2}$ ، إذن : $u_n = e^{((\frac{1}{2})^n + 2)}$.

*) حساب النهايات :

أ) نهاية المتتالية (v_n) : $\lim_{n\to+\infty}(v_n) = 0$ ، لأنّ: $-1 < q < 1$

ب) نهاية المتتالية (u_n) : $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{((\frac{1}{2})^n + 2)} = e^2$.

4) حساب الجداء P_n : $P_n = u_0 \times u_1 \times .... \times u_n$ ،

أي : $P_n = e^{(v_0+2)} \times e^{(v_1+2)} \times .... \times e^{(v_n+2)}$ ، أي :

$P_n = e^{(v_0+v_1+...+v_n)} \times e^{(2+2+.....+2)}$ ، ومنه : $P_n = e^{(S_n)} \times e^{2(n+1)}$.

*) حساب S_n : $S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ، أي : $S_n = 1 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(\frac{1}{2})}$ ، ومنه : $S_n = 2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]$.

إذن : $P_n = e^{2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]} \times e^{2(n+1)}$ ،

أي : $P_n = e^{2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]+2n+2}$. (بالإمكان التبسيط أكثر لـ P_n)

.44

لدينا : $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$.

1) حساب الحدود :

*) $u_2 = \frac{2}{2}u_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

*) $u_3 = \frac{3}{4}u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

*) $u_4 = \frac{4}{6}u_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{48}$.

2) أ) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n > 0$.

*) لنتحقق من أجل $n = 1$ ، أي : $u_1 > 0$ ،

و منه : $\frac{1}{2} > 0$ (محققة) .

*)لنفرض أنّ : $u_n > 0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} > 0$.

لدينا فرضا أنّ : $u_n > 0$ وَ بما أنّ : $\frac{n+1}{2n} > 0$ ،

فسيكون : $\frac{n+1}{2n}u_n > 0$ ، أي : $u_{n+1} > 0$.

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $u_n > 0$.

ب) لنبرهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n}u_n - u_n = (\frac{n+1}{2n} - 1)u_n$$

$$= \frac{n+1-2n}{2n} u_n = \frac{1-n}{2n} u_n$$

*) بما أنّ : $n \geq 1$ فإنّ : $1-n \leq 0$ و منه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متناقصة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل

بــ 0 ، فهي متقاربة .

3) لدينا : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ) لنبرهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية :

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n} u_n}{n+1} = \frac{n+1}{2n} \times \frac{1}{n+1} u_n$ أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{n}$ ، و منه : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول : $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$.

ب) *)عبارة v_n : $v_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1+1}} = \frac{1}{2^n}$

لدينا : $v_n = \frac{u_n}{n}$ ، أي : $u_n = n \times v_n$ ، أي : $u_n = n \times \frac{1}{2^n}$ ، و منه : $u_n = \frac{n}{2^n}$. و هو المطلوب .

4) لدينا : $f(x) = \ln x - x\ln(2)$.

أ) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln x - x\ln(2)\right] \qquad = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\ln x}{x} - \ln(2)\right] = -\infty$$

لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

ب) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n = \frac{n}{2^n}$ ، أي : $\ln u_n = \ln(\frac{n}{2^n})$ ، أي :

$\ln u_n = \ln n - \ln 2^n$ ، أي : $\ln u_n = \ln n - n\ln 2$ و منه : $\ln u_n = f(n)$.

*) بما أنّ : $\lim_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ ، إذن : $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ ، و منه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

45.

لدينا : $u_0 = 1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2} \times u_n$ ،

أي : $\frac{u_{n+1}^2}{2u_n} = u_{n+2}$.

1) لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = v_n$.

$$\frac{u_{n+1}}{2u_n} = \frac{u_{n+1}^2}{2u_n} \times \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_{n+1}^2}{2u_n}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = v_{n+1}$$ ،

أي : $\frac{1}{2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n} = v_{n+1}$ ، و منه : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول :

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{u_1}{u_0} = v_0$$.

2) لنحسب v_n بدلالة n :

نعلم أنّ : $v_n = v_0 \times q^n$ ، أي : $v_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^n$ ،

و منه : $v_n = (\frac{1}{2})^{n+1}$.

و لدينا : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، أي : $u_{n+1} = v_n \times u_n$ ،

و منه : $u_{n+1} = (\frac{1}{2})^{n+1} \times u_n$ ، و هو المطلوب .

3) لدينا : $u_{n+1}=(\frac{1}{2})^{n+1}\times u_n$ ، أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=(\frac{1}{2})^{n+1}$

إذن : $\begin{cases}\frac{u_1}{u_0}=(\frac{1}{2})^1\\ \frac{u_2}{u_1}=(\frac{1}{2})^2\\ \frac{u_3}{u_2}=(\frac{1}{2})^3\\ \vdots\\ \frac{u_n}{u_{n-1}}=(\frac{1}{2})^n\end{cases}$ بالضرب نجد :

$\frac{u_1}{u_0}\times\frac{u_2}{u_1}\times\frac{u_3}{u_2}\times.....\times\frac{u_n}{u_{n-1}}=(\frac{1}{2})^{1+2+3+.....+n}$ ، أي : $\frac{u_n}{u_0}=(\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ، بما أنّ : $u_0=1$ ، فسيكون :

$u_n=(\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ، و هو المطلوب .

4) إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم تحديد نهايتها :بما أنّ : $-1<\frac{1}{2}<1$ ، فإنّ : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$.و بما أنّ :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty$ ،

فإنّ : $\lim_{n\to+\infty}\left[(\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]=0$.إذن : المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

.46

لدينا : $u_n=\frac{n^2}{2^n}$ ، مع $n\in\mathbb{N}^*$.

1) لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) لنبيّن أنّ : $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}$.

أي: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(n+1)^2}{n^2}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(n+1)^2}{n^2}\right] = \dfrac{1}{2}$ ، لأنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. و هو المطلوب .

ب) لنبيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

بما أنّ : $v_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(n+1)^2}{n^2}$ و نعلم أنّ : $\dfrac{(n+1)^2}{n^2} > 1$

أي : $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{(n+1)^2}{n^2} > \dfrac{1}{2}$ ، و منه : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

ج) تعيين p ، بحيث يكون : $v_n < \dfrac{3}{4}$.

لدينا : $v_n < \dfrac{3}{4}$ ، أي : $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{(n+1)^2}{n^2} < \dfrac{3}{4}$ ، و هذا يتحقق إذا كان : $\dfrac{(n+1)^2}{n^2} < \dfrac{3}{2}$ ، أي : $2(n+1)^2 < 3n^2$

أي: $2(n^2+2n+1) < 3n^2$ ، أي: $-n^2+4n+2<0$

*) لندرس إشارة $-x^2+4x+2<0$ على $\mathbb{R}$:

بعد دراسة الإشارة نلاحظ أنّه :

يكون : $-n^2+4n+2<0$ إذا كان : $n > 2+\sqrt{6}$ ،

أي : $n > 4,44$ ، و منه : $n \geq 5$.

إذن : أصغر قيمة لـ n كي يكون $v_n < \dfrac{3}{4}$ هي : 5 .

أي أنّ : $p = 5$.

د) إذا كان : $p \geq 5$ أي : $n \geq 5$ فإنّ : $v_n < \dfrac{3}{4}$ ،

أي : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{3}{4}$ ، و منه : $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$.

2) لدينا : $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

أ) لنبرهن بالتراجع من أجل $n \geq 5$: $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$

*) لنتحقق من أجل $n = 5$ ، أي : $u_5 \leq (\frac{3}{4})^{5-5} \times u_5$

أي : $u_5 \leq (\frac{3}{4})^0 \times u_5$ ، و منه : $u_5 \leq u_5$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$ ، و لنثبت أنّ :

$u_{n+1} \leq (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5$.

لدينا : $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$ ، أي: $\frac{3}{4} u_n \leq \frac{3}{4} \times (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$

أي : $\frac{3}{4} u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5$ ، و نعلم أنّ : $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$

إذن : $u_{n+1} \leq (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$

ب) لدينا : $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$ ، و حسب السؤال (أ) يصبح : $\begin{cases} u_5 \leq (\frac{3}{4})^{5-5} \times u_5 \\ u_6 \leq (\frac{3}{4})^{6-5} \times u_5 \\ u_7 \leq (\frac{3}{4})^{7-5} \times u_5 \\ \vdots \\ u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5 \end{cases}$ بالجمع نجد :

$S_n \leq \left[(\frac{3}{4})^0 + (\frac{3}{4})^1 + (\frac{3}{4})^2 + ... + (\frac{3}{4})^{n-5}\right] \times u_5$ ،

و منه : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + ... + (\frac{3}{4})^{n-5}\right] \times u_5$ ،

و هو المطلوب .

ج) أولا لنحسب المجموع : $\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]$

نلاحظ أنّ المجموع لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ و حدها الأول هو 1 ، و عدد حدودها هو : $n-4$ ، أي :

$$\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]=1\times\frac{1-(\frac{3}{4})^{n-4}}{1-\frac{3}{4}}=4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]$$

نعلم أنّ : $1-(\frac{3}{4})^{n-4}<1$ أي : $4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]<4$ ،

و منه : $4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]u_5<4u_5$.

نعلم أنّ : $S_n\leq\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]\times u_5$

أي : $S_n\leq4\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]\times u_5$ ،

إذن : $S_n\leq4u_5$ ، و هو المطلوب .

3) لنبيّن أنّ المتتالية (S_n) متزايدة :

$S_{n+1}-S_n=(u_5+u_6+...+u_n)-(u_5+u_6+...+u_{n+1})$ ومنه : $S_{n+1}-S_n=u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$.

نلاحظ أنّ : $S_{n+1}-S_n>0$ ، إذن : المتتالية (S_n) متزايدة من أجل كل $n\geq5$.

*) المتتالية (S_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ $4u_5$

إذن : فستكون متقاربة .

.47

لدينا : $u_0=0$ ، $u_1=1$ و $u_{n+1}=7u_n+8u_{n-1}$

1) لدينا : $s_n = u_{n+1} + u_n$.

أ) لنبيّن أنّ المتتالية (s_n) هندسية :

$$s_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1}$$

$$= 8u_{n+1} + 8u_n = 8(u_{n+1} + u_n)$$

و منه : $s_{n+1} = 8s_n$ ، إذن المتتالية (s_n) هندسية ، أساسها 8 ، و حدها الأول : $s_0 = u_1 + u_0 = 1$.

ب) عبارة s_n بدلالة n :

$s_n = s_0 \times q^n$ ، و منه : $s_n = 8^n$.

2) لدينا : $v_n = (-1)^n \times u_n$ و $t_n = v_{n+1} - v_n$

*) التعبير عن t_n بدلالة s_n :

$$t_n = v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} \times u_{n+1} - (-1)^n \times u_n$$

$$= (-1)^n \left[-1 \times u_{n+1} - u_n\right] = (-1)^n \times (-u_{n+1} - u_n)$$

$$= -(-1)^n \times s_n = -(-1)^n \times 8^n$$

و منه : $t_n = -(-8^n)$.

3) لنحسب المجموع : $t_0 + t_1 + \ldots + t_{n-1}$ بطريقتين :

الطريقة الأولى :

$$= -(-8)^0 + (-(-8)^1) + \ldots + (-(-8)^{n-1})$$

$$= -\left[1 + (-8) + (-8)^2 + \ldots + (-8)^{n-1}\right]$$

نلاحظ أنّ المجموع لمتتالية هندسية أساسها (-8) و حدها الأول هو : 1 ، و عدد حدودها هو : n حد .

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_{n-1} = -\frac{(-8)^n - 1}{-8 - 1} = -\frac{(-8)^n - 1}{-9}$$

و منه : $t_0 + t_1 + \ldots + t_{n-1} = \dfrac{(-8)^n - 1}{9}$.

الطريقة الثانية :

لدينا : $t_n = v_{n+1} - v_n$ ، أي :
$$\begin{cases} t_0 = v_1 - v_0 \\ t_1 = t_2 - v_1 \\ t_2 = v_3 - v_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع نجد : $t_0 + t_1 + \ldots + t_{n-1} = v_n - v_0$

و بما أنّ : $v_0 = (-1)^0 \times u_0 = 0$ ، فسيكون :

$v_n = \dfrac{(-8)^n - 1}{9}$.

*) كتابة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، أي :

$u_n = \dfrac{v_n}{(-1)^n} = \dfrac{\dfrac{(-8)^n - 1}{9}}{(-1)^n}$.

و منه : $u_n = \dfrac{(-8)^n - 1}{9 \times (-1)^n}$.

*) حساب النهاية : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\dfrac{u_n}{8^n})$.

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{u_n}{8^n}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{(-8)^n - 1}{9 \times (-1)^n}}{8^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(-8)^n - 1}{9 \times (-1)^n (8)^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(-8)^n - 1}{9 \times (-8)^n} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{9 \times (-8)^n}\right]$$

و منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\dfrac{u_n}{8^n}) = \dfrac{1}{9}$ ، لأنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{1}{9 \times (-8)^n}\right] = 0$.

.48

لدينا : $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$.

1) حساب الحدود :

*) $u_1=\sqrt{2+u_0}=\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

نعلم أنّ : $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$ ، أي :

$u_1=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}$.

*) $u_2=\sqrt{2+u_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2})}$

$=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{4}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}=2\cos\frac{\theta}{4}$

*) $u_3=\sqrt{2+u_2}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{4}}=\sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{4})}$

$=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{8}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{8}}=2\cos\frac{\theta}{8}$

2) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n=2\cos(\frac{\theta}{2^n})$.

*) لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $u_0=2\cos(\frac{\theta}{2^0})$

و منه : $u_0=2\cos(\theta)$ (محققة) .

*)لنفرض أنّ : $u_n=2\cos(\frac{\theta}{2^n})$ ، و لنثبت أنّ :

$u_{n+1}=2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$.

لدينا : $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ و أيضا : $u_n=2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

أي : $u_{n+1}=\sqrt{2+2\cos(\frac{\theta}{2^n})}=\sqrt{2(1+\cos(\frac{\theta}{2^n})}$

$$= \sqrt{2 \times 2\cos^2(\frac{\theta}{2^n} \times \frac{1}{2})} = \sqrt{4\cos^2(\frac{\theta}{2^{n+1}})}$$

و منه : $u_{n+1} = 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$ ، و هو المطلوب .

*)و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون: $u_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

3) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$ ، و نعلم أنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{\theta}{2^n}) = 0$ و $\lim\limits_{n\to 0}\cos(n) = 1$ ،

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

.49

لدينا : $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1) **البرهان** : لدينا $u_{n+1} \leq 0,95u_n$ معناه أنّ : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0,95$ لأنّ : $(u_n > 0)$ وَ $(u_{n+1} > 0)$ ،

أي : $\frac{\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{2^n}} \leq 0,95$ أي : $\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^{10}} \leq 0,95$

أي : $(1+\frac{1}{n})^{10} \times \frac{1}{2} \leq 0,95$ ، ومنه : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$

2) f الدالة المعرّفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$

أ) **إتجاه التغيّر** : $f'(x) = 10 \times (1+\frac{1}{x})^9 \times (-\frac{1}{x^2})$ ، نلاحظ أنّ : $f'(x) < 0$ على $[1;+\infty[$ ،

و منه الدالة f متناقصة .

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	1024 $\searrow$ 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

ب) الدالة f مستمرة و رتيبة على $\left[1;+\infty\right[$ ،

وَ صورة المجال $\left[1;+\infty\right[$ هي $\left]1;1024\right]$ ،

وَ $1,9 \in \left]1;1024\right]$ ، ومنه المعادلة $f(\alpha) = 1,9$ تقبل

حلا وحيدا α ، حيث : $\alpha \in \left[1;+\infty\right[$.

ج) بالحاسبة نجد : $15 < \alpha < 16$ ، أي : $(n_0 = 16)$.

د) **البرهان :** من أجل $n \geq 16$ يكون : $f(n) \leq f(16)$ (لأنّ الدالة f متناقصة) ، أي : $(1+\dfrac{1}{n})^{10} \leq f(16)$

و لدينا : $f(16) < 1,9$ ، و منه : $(1+\dfrac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

3) أ) من أجل $n \geq 16$ لدينا : $(1+\dfrac{1}{n})^{10} \leq 1,9$ معناه أنّ : $u_{n+1} \leq 0,95 u_n$ أي : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0,95 < 1$ ،

و منه فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

ب) بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة وَ محدودة من الأسفل بـ 0 لأنّ : $(u_n > 0)$ ، ومنه فإنها **متقاربة** .

4) إثبات أنّ : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ،

من أجل $n \geq 16$: (نستعمل البرهان بالتراجع) .

- ✓ نتحقّق من أجل $n = 16$: $0 \leq u_{16} \leq (0,95)^{16-16} \times u_{16}$ ، ومنه : $0 \leq u_{16} \leq u_{16}$ ، **محققة** .
- ✓ نفرض صحة : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$.
- ✓ و نثبت صحة : $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n+1-16} \times u_{16}$ أي : $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$.

البرهان : لدينا فرضا : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ،

أي : $0 \leq 0,95 \times u_n \leq 0,95 \times (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ، أي : $0 \leq 0,95 u_n \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$ ،

وَ لدينا : $u_{n+1} \leq 0,95u_n$ ،

ومنه : $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$.

إذن من أجل كل $n \geq 16$: $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$

❖ إستنتاج نهاية (u_n) : $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0$ ،

لأنّ : $\lim_{n\to+\infty}(0,95)^{n-16} = 0$

(حسب خاصية النهايات بالحصر) .

50.

الجزء الأوّل : لدينا : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}$.

1)أ) التحقق من أنّ : $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^{-x}+1}$.

$\frac{e^x+1-1}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{1}{e^{-x}+1}$ ، و منه : $1 - \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{e^{-x}+1}$ ، و هو المطلوب .

ب) إستنتاج أنّ الدالة f فردية :

*) D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 .

$f(-x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x}+1} = 1 + \frac{1}{2}x - 2(\frac{1}{e^{-x}+1}) = 1 + \frac{1}{2}x - 2(1 - \frac{1}{e^x+1}) = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x+1}$

أي : $f(-x) = -(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1})$ ، و منه : $f(-x) = -f(x)$. إذن : الدالة f فردية .

2) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

*) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1} = 0$.

*) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x+1} = 2$.

3)أ) لنحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2}\right]$$

و منه : $f'(x) = -\frac{1}{2}(\frac{e^x - 1}{e^x+1})^2$ ، و هو المطلوب .

ب) بما أنّ : $f'(x) < 0$ فإنّ الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، و جدول تغيّراتها يكون كما يلي :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

ج) الإستنتاج :

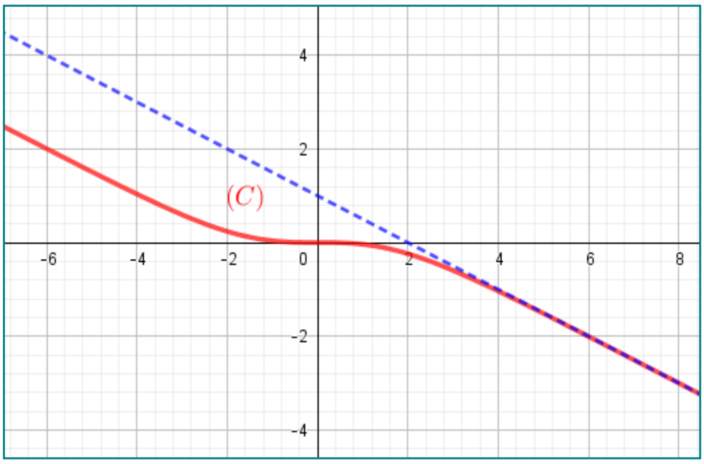
لدينا من أجل كل $x \geq 0$ الدالة f متناقصة ، أي :

$f(x) \leq f(0)$ ، أي : $1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} \leq 0$ ، و منه : $1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$ ، و هو المطلوب .

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (1 - \frac{1}{2}x)\right] = 0$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{2}{e^x+1}) = 0$.

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 1 - \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

5) الإنشاء :



الجزء الثاني :

لدينا : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{e^{u_n} + 1}$.

1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $1 > 0$ ، و منه : $u_0 > 0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n > 0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} > 0$.

لدينا : $u_n > 0$ ، أي : $e^{u_n} > e^0$ ، أي : $e^{u_n} > 1$ ، أي : $e^{u_n} + 1 > 2$ ، أي : $\dfrac{1}{e^{u_n} + 1} < \dfrac{1}{2}$ ، أي :

$\dfrac{2}{e^{u_n} + 1} < 1$ ، أي : $-\dfrac{2}{e^{u_n} + 1} > -1$ ، و منه : $1 - \dfrac{2}{e^{u_n} + 1} > 0$ ، إذن : $u_{n+1} > 0$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > 0$.

2) لدينا من أجل كل $x \geq 0$: $1 - \dfrac{2}{e^x + 1} \leq \dfrac{1}{2}x$ ،

بوضع : $x = u_n$ حيث : $u_n > 0$ ، فنتحصّل على : $1 - \dfrac{2}{e^{u_n} + 1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ ، و منه : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.

*) إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا مما سبق أنّ : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ ، أي : $u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{2}u_n - u_n$ ، و منه :

$u_{n+1} - u_n \leq -\dfrac{1}{2}u_n$ ، و بما أنّ : $u_n > 0$ فإنّ :

$u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

3) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq (\dfrac{1}{2})^n$

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $1 \leq (\dfrac{1}{2})^0$ ، أي :

$1 \leq (\dfrac{1}{2})^0$ ، و منه : $u_0 \leq (\dfrac{1}{2})^0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n \leq (\dfrac{1}{2})^n$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} \leq (\dfrac{1}{2})^{n+1}$

لدينا : $u_n \le (\frac{1}{2})^n$ ، أي : $\frac{1}{2}u_n \le (\frac{1}{2})^{n+1}$ ، و بما أنّ :

$u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n$ ، إذن : $u_{n+1} \le (\frac{1}{2})^{n+1}$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n \le (\frac{1}{2})^n$.

*) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

بما أنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ ، فإنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(حسب مبرهنة النهايات بالحصر) .

.51

لدينا : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$.

1)أ)لنبرهن بالتراجع على أنّ : $1 \le u_n \le \frac{\sqrt{2}}{2}.(n \in \mathbb{N}^*)$

*) لنتحقق من أجل $n = 1$ ، أي : $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_0}$ أي : $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، إذن : $\frac{\sqrt{2}}{2} \le u_1 \le 1$ (محققة) .

*) نفرض أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{2} \le u_n \le 1$ و لنثبت : $\frac{\sqrt{2}}{2} \le u_{n+1} \le 1$

لدينا : $\frac{\sqrt{2}}{2} \le u_n \le 1$ ، أي : $1+\frac{\sqrt{2}}{2} \le 1+u_n \le 2$ أي : $\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \le \sqrt{1+u_n} \le \sqrt{2}$ ، أي :

$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1+u_n} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}$ ، إذن : $\frac{\sqrt{2}}{2} \le u_{n+1} \le 1$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{2}}{2} \le u_n \le 1$.

ب) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) : $u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}-u_n$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}-u_n\times\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}\right]$$

$$=\frac{\frac{2}{4}(1+u_n)-u_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}=\frac{-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}$$

*) بما أنّ : $1\le u_n\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن إشارة الفرق من إشارة

$-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}$.

*) لندرس على $\mathbb{R}$ إشارة : $-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

نتحصّل على أنّ : على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ يكون :

$-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ge 0$ و بما أنّ : $1\le u_n\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ ،

فإنّ : $-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}\ge 0$ ، أي : $u_{n+1}-u_n\ge 0$ و منه فإنّ : المتتالية (u_n) متزايدة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 1 فهي متقاربة .

ج) تعيين l نهاية المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متقاربة ، أي : $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=l$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$ ، أي : $l=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+l}$ ، بما أنّ : $l\ge 0$ فسيكون :

$\frac{2}{4}(1+l)=l^2$ ، أي : $l^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}l$ ، أي : $l^2-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}=0$ ، و منه : $l=-\frac{1}{2}$ (مرفوض) ،

أو $l = 1$ (مقبول) ، إذن : النهاية l تساوي 1 .

2) أ) لنبيّن أنّ : $\cos(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ مع $x \in [0;\pi]$

نعلم أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \in [0;\pi]$ ، يكون :

$1+\cos x = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ ، أي : $\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2(\frac{x}{2})$ ،

أي : $\sqrt{\cos^2(\frac{x}{2})} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ ، أي أنّ :

$\left|\cos(\frac{x}{2})\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. (بما أنّ : $0 \leq x \leq \pi$ ، أي :

$0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ، و منه : $\cos(\frac{x}{2}) \geq 0$.

إذن : من أجل $x \in [0;\pi]$ يكون : $\cos(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

ب) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_0 = \cos(\frac{\pi}{2})$ ، و منه : $u_0 = 0$ (محققة) .

*)لنفرض أنّ : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$.

لدينا : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$ و $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ ،

أي : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}$ ، $(\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}})$ أي : $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}$ ، أي :

$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}{2}}$ ، و بما أنّ : $\cos(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ ، فإنّ : $u_{n+1} = \cos(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2})$ ،

أي : $u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2\times 2^{n+1}})$ ، و منه : $u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$ إذن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

ج) إيجاد ثانية نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أنّ : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{\pi}{2^{n+1}})=0$ و $\lim_{n\to 0}\cos(n)=1$ ، و منه : $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

5.

تمارين البكالوريا

2008-2019

التمرين [1] [باك 2019][م1]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$.

1) أ - برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

ب - أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

3) أكتب v_n بدلالة n، ثم بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ و أحسب عندئذ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

4) بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_1-1)\times(u_2-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

حل مقترح للتمرين[1]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$.

1) أ - البرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>1$ "

- تحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=13$ و منه $u_0>1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n>1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$.

لدينا حسب الفرض $u_n>1$ و منه $\frac{1}{5}u_n>\frac{1}{5}\times1$ و منه $\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}>\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$ أي $u_{n+1}>1$.

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

ب - دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}-u_n=-\frac{4}{5}u_n+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}(1-u_n)$.

و لدينا : $u_n>1$ من أجل كل عدد طبيعي n ، و منه $1-u_n<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$

و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$.

- إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)=\ln\left(\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}-1\right)=\ln\left(\frac{1}{5}u_n-\frac{1}{5}\right)=\ln\left(\frac{1}{5}(u_n-1)\right)=\ln\left(\frac{1}{5}\right)+\ln(u_n-1)=\ln\left(\frac{1}{5}\right)+v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ و حدّها الأول : $v_0=\ln(u_0-1)=\ln12$.

3) كتابة v_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 + nr$ و منه $v_n = \ln 12 + n\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ أي : $v_n = \ln 12 + \ln\left[\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$.

• تبيان أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n - 1)$ و منه $e^{v_n} = u_n - 1$ و منه $u_n = 1 + e^{v_n}$

أي $u_n = 1 + e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} = 1 + \frac{12}{5^n}$.

• حساب $\lim_{n\to\infty} u_n$:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) = 1$ لأن : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{5^n}\right) = 0$.

4) تبيان أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1)\times(u_1 - 1)\times\ldots\times(u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{v_n} = u_n - 1$ و منه

$$(u_0 - 1)\times(u_1 - 1)\times\ldots\times(u_n - 1) = e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \ldots + v_n}$$

و

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(v_0 + v_n) = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\ln 12 + \ln\frac{12}{5^n}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right) = (n+1)\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

أي : $S_n = \ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$. إذن :

$$(u_0 - 1)\times(u_1 - 1)\times\ldots\times(u_n - 1) = e^{S_n} = e^{\ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}} = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$$

التمرين [2] [باك 2019][م2]

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[4;7[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

1) أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

بـ - استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x) \in [4;7[$.

2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x) - x > 0$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$.

بـ - استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة .

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $7 - u_{n+1} \le \frac{1}{4}(7 - u_n)$.

بـ - استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < 7 - u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

حل مقترح للتمرين[2]

الدالة f المعرّفة على المجال $[4;7[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

1) أ- تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[4;7[$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ ، $f'(x) > 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

بـ - استنتاج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x) \in [4;7[$.

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$ و منه من أجل كل $x \in [4;7[$ ، $f(x) \in [f(4);f(7)[$

أي : $f(x) \in [4+\sqrt{6};7[$ و لدينا $[4+\sqrt{6};7[\subset [4;7[$ و منه : من أجل كل $x \in [4;7[$ ، $f(x) \in [4;7[$

2) لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$:

$$f(x)-x=\sqrt{x+2}+4-x=\frac{\left[\sqrt{x+2}+(4-x)\right]\left[\sqrt{x+2}-(4-x)\right]}{\sqrt{x+2}-(4-x)}=\frac{x+2-(4-x)^2}{x-4+\sqrt{x+2}}=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$$

الاستنتاج :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$:

$$f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}=\frac{(7-x)(x-2)}{x-4+\sqrt{x+2}}$$

و من أجل كل $x \in [4;7[$ ، $x-4+\sqrt{x+2}>0$ و $(7-x)(x-2)>0$ و منه $f(x)-x>0$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ - البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $4 \le u_n < 7$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=4$ و منه $4 \le u_0 < 7$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $4 \le u_n < 7$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $4 \le u_{n+1} < 7$.

لدينا حسب الفرض $4 \le u_n < 7$ و منه $4 \le f(u_n) < 7$ (حسب نتيجة السؤال 1 بـ) أي $4 \le u_{n+1} < 7$.

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$.

بـ - إستنتاج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$ و $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$ و منه $u_{n+1}-u_n>0$

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

- تبرير تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 7 ، إذن فهي متقاربة .

4) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7-u_{n+1} \le \frac{1}{4}(7-u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$7-u_{n+1}=7-\sqrt{u_n+2}-4=3-\sqrt{u_n+2}=\frac{\left(3-\sqrt{u_n+2}\right)\left(3+\sqrt{u_n+2}\right)}{3+\sqrt{u_n+2}}=\frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}} .$$

و من جهة أخرى : $4 \le u_n < 7$ يكافئ $\frac{1}{3+\sqrt{u_n+2}} < \frac{1}{4}$ و منه $7-u_{n+1} < \frac{1}{4}(7-u_n)$.

بـ - استنتاج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=4$ و $7-u_0=3$ منه $0 < 7-u_0 \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$

أي $0<7-u_{n+1}\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$ و لدينا $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$ منه $0<7-u_{n+1}\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$ و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(7-u_n)=0$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=7$.

التمرين [3] [باك 2018][م1]

(u_n) متتالية عددية معرفة بـحدّها الأول u_0 حيث $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$.

ب- بيّن أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و استنتج أنها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

- أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ، و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0v_0+u_1v_1+\dots+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$

حل مقترح للتمرين[3]

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$.

1) أ - البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1$ و منه $u_0>-2$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n>-2$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>-2$.

لدينا حسب الفرض $u_n>-2$ و منه $u_n+5>-2+5$ و منه $\frac{1}{u_n+5}<\frac{1}{3}$ و منه $-\frac{9}{u_n+5}>-\frac{9}{3}$ أي

$$1-\frac{9}{u_n+5}>1-3$$

أي : $u_{n+1}>-2$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>-2$.

ب - تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}-u_n=1-\frac{9}{u_n+5}-u_n=\frac{u_n+5-9-u_n^2-5u_n}{u_n+5}=\frac{-u_n^2-4u_n-4}{u_n+5}=-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}$$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n<0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

ـ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد -2 ، إذن فهي متقاربة .

2) المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$

- إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+2}=\frac{1}{1-\dfrac{9}{u_n+5}+2}=\frac{1}{3-\dfrac{9}{u_n+5}}=\frac{1}{\dfrac{3u_n+6}{u_n+5}}=\frac{u_n+5}{3u_n+6}=\frac{u_n+2+3}{3(u_n+2)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}+v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{3}$ و حدّها الأول v_0 حيث: $v_0=\dfrac{1}{u_0+2}=\dfrac{1}{3}$.

3) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0+nr$ و منه $v_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}n=\dfrac{1}{3}(1+n)$.

كتابة u_n بدلالة n: $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$ و منه $\dfrac{1}{v_n}=u_n+2$ ، أي: $u_n=\dfrac{1}{v_n}-2$

و منه: $u_n=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}(1+n)}-2=\dfrac{3}{1+n}-2$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{1+n}-2\right)=-2$. لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{1+n}\right)=0$.

4) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0v_0+u_1v_1+\dots+u_nv_n=\dfrac{1}{3}(1-n^2)$.

لدينا: $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$ و منه: $u_nv_n+2v_n=1$ أي : $u_nv_n=1-2v_n$.

لدينا :

$$\begin{aligned}u_0v_0+u_1v_1+\dots+u_nv_n&=(1-2v_0)+(1-2v_1)+\dots+(1-2v_n)\\&=1\times(n+1)-2(v_0+v_1+\dots+v_n)\\&=n+1-2\left[\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)\right]\\&=n+1-\left[(n+1)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\right]\end{aligned}$$

و منه: $u_0v_0+u_1v_1+\dots+u_nv_n=(n+1)\left[1-\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}n\right)\right]=(n+1)\left(\dfrac{1-n}{3}\right)=\dfrac{1}{3}(1-n^2)$.

التمرين [4] [باك 2018][م2]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) أحسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{2n+3}{2n+1}>1$ ثم استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2n+1$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n}=v_n$.

ب - استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب المجموعين S_n و T حيث : $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+...+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T = e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+...+e^{u_{2018}}$

حل مقترح للتمرين[4]

المتتالية العددية (u_n)معرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_1 = u_0 + \ln(3) = \ln 3 \quad ، \quad u_2 = u_1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln 3 + \ln 5 - \ln 3 = \ln 5$$

$$u_3 = u_2 + \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln 5 + \ln 7 - \ln 5 = \ln 7$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2n+3 > 2n+1$ و منه $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$. (كذلك لاحظ أن : $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 = \frac{2}{2n+1}$)

- إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

و نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ و منه $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > \ln 1$ أي $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$.

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n > 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n+1$

أ - البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$، لدينا $u_0 = 1$ و منه $v_0 = e^{u_0} = 1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $e^{u_n} = v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

لدينا $e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = v_n \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = (2n+1)\times\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2n+3$ و منه : $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{u_n} = v_n$.

ب - كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$ و منه $u_n = \ln(v_n) = \ln(2n+1)$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2n+1) = +\infty$.

4) حساب المجموعين :

لدينا : $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+...+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln v_1 - \ln v_0 + \ln v_2 + \ln v_1 + ... + \ln v_n - \ln v_{n-1}$

و منه : $S_n = -\ln v_0 + \ln v_n = u_n$.

$$T = e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}....+e^{u_{2018}} = v_{1439}+v_{1440}+...+v_{2018} = \frac{2018-1439+1}{2}\left(2(1439+2018)+2\right) = 2005640$$

التمرين [5][باك 2017][الدورة الإستثنائية][1م]

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1) أحسب الحدّين u_1 و v_1 .

2) أ- أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

بـ - باستعمال البرهان بالتراجع بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n.

4) بيّن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

حل مقترح للتمرين[5]

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1) حساب الحدّين u_1 و v_1 :

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} \quad ، \quad v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{3}{4} \times 6 + 1 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

2) أ- كتابة $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - \left(\frac{3}{4}u_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$

بـ - البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لنثبت أنه : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \geq u_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 == \frac{7}{4}$ و منه $u_1 > u_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_{n+1} \geq u_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $u_{n+1} \geq u_n$ و منه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و لدينا مما سبق $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$

و منه $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

- البرهان بالتراجع بيّن أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما :

لنثبت أنه : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} \leq v_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} \leq v_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $v_0 = 6$ و $v_1 == \frac{11}{2} = 5{,}5$ و منه $v_1 < v_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $v_{n+1} \leq v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $v_{n+1} \leq v_n$ و منه $v_{n+1} - v_n \leq 0$ و لدينا $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n)$ و منه $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} \leq v_n$ و بالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$

تبيان أن المتتالية (w_n) هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1-\left(\frac{3}{4}v_n+1\right)=\frac{3}{4}(u_n-v_n)=\frac{3}{4}w_n$

و منه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ و حدّها الأول $w_0=u_0-v_0=1-6=-5$.

• كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n :

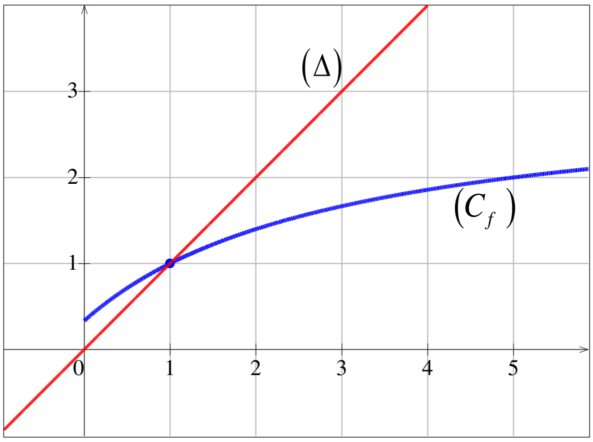
من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=w_0\times q^n$ و منه $w_n=-5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4) تبيان أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

لدينا : المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=$ ومنه المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$



α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) عيّن قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

نضع في كل مايلي : $\alpha=5$

2) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثّل على محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 دون حسابها.

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب - عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_n+v_{n+1}+....+v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+....+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$.

حل مقترح للتمرين[6]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

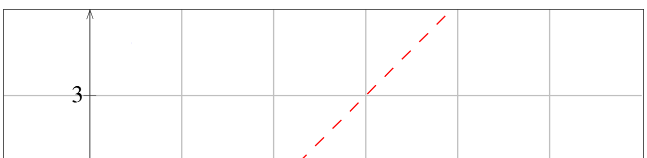
1) تعيين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(u_n) متتالية ثابتة يعني : من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1}=u_n=u_0$

أي نحل المعادلة $f(\alpha)=\alpha$ و هذا يكافئ $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$ يكافئ $\alpha^2=1$

و بما أن α عدد حقيقي موجب فإنه من أجل $\alpha=1$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) أ- تمثيل الحدود :



بـ - التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد 1.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1}{\dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1} = \frac{\dfrac{3u_n + 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}}{\dfrac{3u_n + 1 + (u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{2u_n - 2}{4u_n + 4} = \frac{2(u_n - 1)}{4(u_n + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

بـ - كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = v_0 \times q^n$ أي : $v_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ و منه $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$ و منه $v_n u_n - u_n = -v_n - 1$ أي $u_n = \dfrac{v_n + 1}{1 - v_n}$

إذن : $u_n = \dfrac{v_n + 1}{1 - v_n} = \dfrac{\dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1}{1 - \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{3 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{3 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = 1$$ لأن : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

4) حساب المجموع : $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016}$.

$$S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016} = v_n\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1 - \frac{1}{2}}\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right)$$

استنتاج المجموع : $S'_n = \dfrac{1}{u_n + 1} + \dfrac{1}{u_{n+1} + 1} + ... + \dfrac{1}{u_{n+2016} + 1}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ و منه $v_n=\dfrac{u_n+1-2}{u_n+1}$ و منه $v_n=1-\dfrac{2}{u_n+1}$ أي $\dfrac{1}{u_n+1}=\dfrac{1-v_n}{2}$

$$S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+....+\frac{1}{u_{n+2016}+1}=\frac{1-v_n}{2}+\frac{1-v_{n+1}}{2}+...+\frac{1-v_{n+2016}}{2}=\frac{1}{2}(2017)-\frac{1}{2}S_n$$

التمرين [7][باك 2017] [1م]

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=\dfrac{1}{4}$ و من من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أ - برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ب - بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ - بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{2}$ ثم عبّر عن حدها العام v_n بدلالة n .

ب - أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1-\dfrac{3}{v_n+1}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

حل مقترح للتمرين[7]

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أ - البرهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$ "

- تحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\dfrac{1}{4}$ و منه $0<u_0<1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<1$ و منه $4<u_n+4<5$ و منه $\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{u_n+4}<\dfrac{1}{4}$ و منه $\dfrac{-10}{4}<\dfrac{-10}{u_n+4}<\dfrac{-10}{5}$

و منه $1<3-\dfrac{10}{u_n+4}<3-\dfrac{10}{4}$ أي : $0<u_{n+1}<1$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

ب - تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=3-\dfrac{10}{u_n+4}-u_n=\dfrac{3(u_n+4)-10-u_n(u_n+4)}{u_n+4}=\dfrac{-u_n{}^2-u_n+2}{u_n+4}$

و منه : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

و لدينا : $0<u_n<1$ و منه $1-u_n>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ـ المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 ، إذن فهي متقاربة .

2) أ - تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{3-\frac{10}{u_n+4}+2}{1-3+\frac{10}{u_n+4}}=\frac{5-\frac{10}{u_n+4}}{-2+\frac{10}{u_n+4}}=\frac{\frac{5(u_n+4)-10}{u_n+4}}{\frac{-2(u_n+4)+10}{u_n+4}}=\frac{5u_n+10}{-2u_n+2}=\frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)}=\frac{5}{2}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{5}{2}$.

الحد الأول : $v_0=\dfrac{u_0+2}{1-u_0}=3$.

- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=3\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$.

ب - إثبات أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1-\dfrac{3}{v_n+1}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$ و منه $v_n=-1+\dfrac{3}{1-u_n}$ و منه $v_n+1=\dfrac{3}{1-u_n}$

أي $1-u_n=\dfrac{3}{v_n+1}$ و بالتالي : $u_n=1-\dfrac{3}{v_n+1}$

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n+1}\right)=1$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{v_n+1}\right)=$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{2}\right)^n=+\infty$.

التمرين [8][باك 2017] [م2]

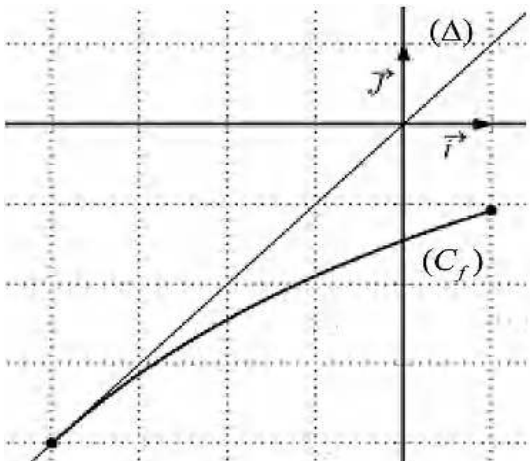
المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$.

و (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$.

I) تحقق أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$. ثم بيّن أن :

من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$.



II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- أنقل الشكل ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4\le u_n\le 0$

ثم بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n\times u_n=1-4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث : $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}$.

حل مقترح للتمرين[8]

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$.

I) التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[-4;1]$ و $f'(x)=\dfrac{3(x+11)-(3x-16)}{(x+11)^2}=\dfrac{49}{(x+11)^2}$

لدينا :من أجل كل $x\in[-4;1]$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

تبيان أنه من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$:

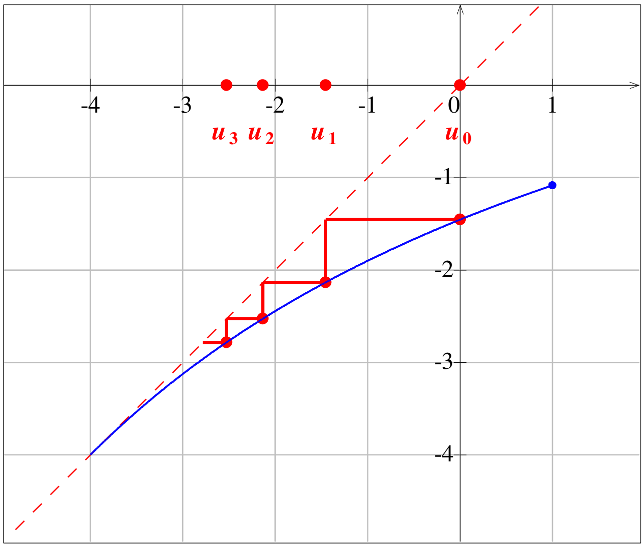
لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ و بالتالي من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[f(-4);f(1)]$

أي : $f(x)\in\left[-4;-\frac{13}{12}\right]$ و لدينا $\left[-4;-\frac{13}{12}\right]\subset[-4;1]$ و منه :من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- تمثيل الحدود :



التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد -4 .

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-4\le u_n\le 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $-4\le u_n\le 0$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=0$ و منه $-4\le u_0\le 0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $-4\le u_n\le 0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-4\le u_{n+1}\le 0$.

لدينا حسب الفرض $-4\le u_n\le 0$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(-4)\le f(u_n)\le f(0)$

أي $-4\le u_{n+1}\le -\frac{16}{11}\le 1$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $-4\le u_n\le 0$.

- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n=\frac{3u_n-16-u_n(u_n+11)}{u_n+11}=\frac{-u_n{}^2-8u_n-16}{u_n+11}=\frac{-(u_n+4)^2}{u_n+11}$$

و منه : $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n\times u_n=1-4v_n$ أي $v_n=\frac{1}{u_n+4}$.

إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+4}=\frac{1}{\frac{3u_n-16}{u_n+11}+4}=\frac{1}{\frac{3u_n-16+4(u_n+11)}{u_n+11}}=\frac{u_n+11}{7u_n+28}=\frac{u_n+4+7}{7(u_n+4)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{u_n+4}=\frac{1}{7}+v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\frac{1}{7}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0+4}=\frac{1}{4}$.

• حساب المجموع S حيث : $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}$

لدينا : $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}=(1-4v_0)+(1-4v_1)+....+(1-4v_{2016})$

و منه : $S=2017\times 1-4(v_0+v_1+.....+v_{2016})=2017-4\left[\frac{2017}{2}(v_0+v_{2016})\right]$

أي : $S=2017-4\left[\frac{2017}{2}\left(\frac{1}{4}+288\right)\right]=-1161792$

التمرين [9][باك 2016][الدورة الثانية][1م]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;4]$ بـ : $f(x)=\frac{13x}{9x+13}$.

1) أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

ب - بيّن أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I .

2)لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le 4$

ب - أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3)بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\neq 0$

4)لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=2+\frac{13}{u_n}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n)حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0 .

ب - أكتب v_n بدلالة n .

جـ - إستنتج أن : $u_n=\frac{52}{36n+13}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

حل مقترح للتمرين[9]

f الدالة المعرفة على المجال $I=[0;4]$ بـ : $f(x)=\frac{13x}{9x+13}$.

1) أ- تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;4]$ و $f'(x)=\frac{13(9x+13)-9\times 13x}{(9x+13)^2}=\frac{169}{(9x+13)^2}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;4]$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$.

ب - تبيان أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I :

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ و منه من أجل كل $x\in[0;4]$ ، $f(x)\in[f(0);f(4)]$

أي : $f(x)\in\left[0;\frac{52}{49}\right]$ و لدينا $\left[0;\frac{52}{49}\right]\subset[0;4]$ إذن : من أجل كل $x\in[0;4]$ ، $f(x)\in[0;4]$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le 4$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 4$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=4$ و منه $0\le u_0\le 4$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0\le u_n\le 4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0\le u_{n+1}\le 4$.

لدينا حسب الفرض $0\le u_n\le 4$ و منه $0\le f(u_n)\le 4$ (حسب نتيجة السؤال 1 بـ) أي $0\le u_{n+1}\le 4$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 4$.

بـ - دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{13u_n}{9u_n+13}-u_n=\frac{13u_n-u_n(9u_n+13)}{9u_n+13}=\frac{-9u_n{}^2}{9u_n+13}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $-9u_n{}^2\le 0$ فإن $u_{n+1}-u_n\le 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

▪ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 0 ، إذن فهي متقاربة .

3) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\neq 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=4$ و منه $u_0\neq 0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n\neq 0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}\neq 0$.

لدينا حسب الفرض $u_n\neq 0$ و منه $f(u_n)\neq 0$ (لأن الدالة f متزايدة تماما على I و $f(0)=0$) أي $u_{n+1}\neq 0$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\neq 0$.

4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=2+\frac{13}{u_{n+1}}=2+\frac{13}{\dfrac{13u_n}{9u_n+13}}=2+\frac{13(9u_n+13)}{13u_n}=2+\frac{9u_n+13}{u_n}=2+9+\frac{13}{u_n}=9+v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=9$ و حدها الأول $v_0=2+\dfrac{13}{u_0}=\dfrac{21}{4}$.

بـ - كتابة v_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0+nr$ و منه $v_n=\dfrac{21}{4}+9n=\dfrac{21+36n}{4}$.

جـ - إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\dfrac{52}{36n+13}$:

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$ و منه $\dfrac{13}{u_n}=v_n-2$ أي $u_n=\dfrac{13}{v_n-2}$

إذن $u_n=\dfrac{13}{v_n-2}=\dfrac{13}{\dfrac{21+36n}{4}-2}=\dfrac{13}{\dfrac{21+36n-8}{4}}=\dfrac{13\times 4}{13+36n}=\dfrac{52}{36n+13}$.

▪ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{52}{36n+13}\right)=0$$

التمرين [10][باك 2016][الدورة الثانية][م2]

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

2) أ- عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n .

ب - استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ - أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أ- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+....+v_n$.

ب - تحقق أن : $\dfrac{1}{u_n+2}=\dfrac{1}{3}(1-v_n)$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

جـ - أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n=\dfrac{1}{u_0+2}+\dfrac{1}{u_1+2}+....+\dfrac{1}{u_n+2}$.

حل مقترح للتمرين[10]

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}-1}{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}+2}=\frac{\dfrac{2u_n+2-(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{2u_n+2+2(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{u_n-1}{4u_n+8}=\frac{u_n-1}{4(u_n+2)}=\frac{1}{4}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+2}=-\dfrac{1}{2}$.

2) أ- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

ب - استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ و منه $v_n(u_n+2)=u_n-1$ و منه $v_nu_n+2v_n-u_n=-1$

أي $u_n(v_n-1)=-1-2v_n$ و بالتالي $u_n=\dfrac{-1-2v_n}{v_n-1}=\dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$.

إذن : $u_n=\dfrac{1+2v_n}{1-v_n}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$.

جـ - حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right]=1$$ لأن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$.

3) أ- حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0+v_1+....+v_n = v_0\times\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=-\frac{1}{2}\times\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right]=-\frac{2}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right].$$

بـ - التحقق أن : $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{1+2v_n}{1-v_n}$ و منه $u_n+2=\frac{1+2v_n}{1-v_n}+2$ و منه $u_n+2=\frac{3}{1-v_n}$

أي $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$.

جـ - حساب المجموع S'_n:

$$S'_n = \frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+....+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_0)+\frac{1}{3}(1-v_1)+....+\frac{1}{3}(1-v_n).$$

و منه $S'_n=\frac{1}{3}\left[(1+1+....+1)-(v_0+v_1+...+v_0)\right]=\frac{1}{3}\left[n+1-S_n\right]$

أي: $S'_n=\frac{1}{3}\left[n+1+\frac{2}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right]=\frac{1}{9}\left[3n+5-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

التمرين [11][باك 2016][الدورة الأولى][1م]

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ - أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي : معادلة له $y=x$.

3) أرسم (C) و (Δ) .

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) مثّل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

2) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

3) أ - برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$

بـ - أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د - استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

حل مقترح للتمرين[11]

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

1) أ - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+8}=+\infty$.

ب - دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+8}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+8}}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\sqrt{8}$ $\nearrow$ $+\infty$

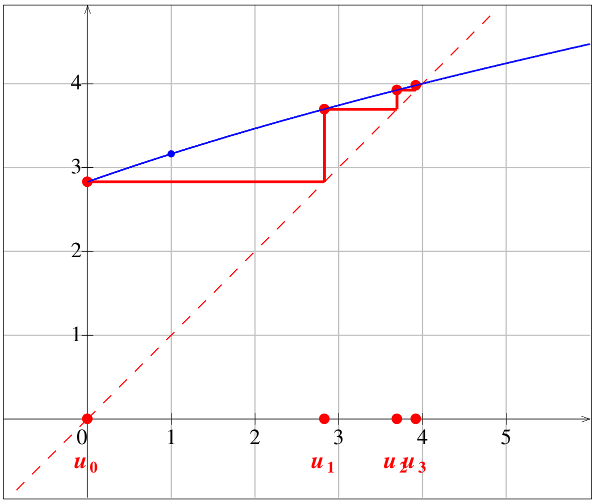
2) تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المن...

نحل في المجال $[0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=x$.

$f(x)=x$ تكافئ $\sqrt{2x+8}=x$ تكافئ $\begin{cases}x\geq 0\\ 2x+8=x^2\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-2x-8=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x\geq 0\\ (x+2)(x-8)=0\end{cases}$

و منه $x=4$. إذن نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) هي : $A(4;4)$.

3) الرسم :



II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) الرسم : أنظر الشكل .

2) التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 4 .

3) أ - البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n<4$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<4$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=0$ و منه $0\leq u_0<4$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0\leq u_n<4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0\leq u_{n+1}<4$.

لدينا حسب الفرض $0\leq u_n<4$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(0)\leq f(u_n)<f(4)$ أي $0\leq 2\sqrt{2}\leq u_{n+1}<4$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n<4$.

ب - دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+8}-u_n=\frac{\left(\sqrt{2u_n+8}-u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+8}+u_n\right)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}=\frac{2u_n+8-u_n^{\,2}}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}=\frac{(4-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $4-u_n>0$ و $2+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

جـ - تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$4-u_{n+1}=4-\sqrt{2u_n+8}==\frac{\left(4-\sqrt{2u_n+8}\right)\left(4+\sqrt{2u_n+8}\right)}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{8-2u_n}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}\ .$$

و من جهة أخرى : $0\le u_n<4$ يكافئ $\frac{1}{4+\sqrt{2u_n+8}}\le\frac{1}{4}$ و منه $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ و هذا يعني :

$$\begin{cases}4-u_1\le\frac{1}{2}(4-u_0)\\ 4-u_2\le\frac{1}{2}(4-u_1)\\ 4-u_3\le\frac{1}{2}(4-u_2)\\ \ldots.\\ \ldots.\\ 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)\end{cases}$$

، بالضرب طرف لطرف نجد

$$(4-u_1)(4-u_2)\ldots(4-u_n)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)(4-u_1)\ldots(4-u_{n-1})$$

و منه : من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.   (يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

د - استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$ و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n)=0$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$

التمرين [12][باك 2016][الدورة الأولى][2م]

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{5x}{x+2}$.

1) أ - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

بـ - أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\ge0$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ - برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le3$

بـ - أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\frac{3}{u_n}$.

أ - بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول .

بـ - أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

جـ - أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}$

حل مقترح للتمرين[12]

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{5x}{x+2}$.

1) أ - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{x+2}\right)=5$.

بـ - دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{5(x+2)-5x}{(x+2)^2}=\frac{10}{(x+2)^2}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 5$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

من جدول التغيّرات : من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$: $0\leq f(x)\leq 5$ أي : $f(x)\geq 0$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ - البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 3$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و منه $1\leq u_0\leq 3$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $1\leq u_n\leq 3$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\leq u_{n+1}\leq 3$.

لدينا حسب الفرض $1\leq u_n\leq 3$ و بما أن الدالة متزايدة تماما فإن $f(1)\leq f(u_n)\leq f(3)$ أي $1\leq\frac{5}{3}\leq u_{n+1}\leq 3$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq 3$.

بـ - دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n}{u_n+2}-u_n=\frac{5u_n-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^{\,2}+3u_n}{u_n+2}=\frac{u_n(3-u_n)}{u_n+2}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3-u_n\geq 0$ و $2+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n\geq 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

المتتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3 ، إذن فهي متقاربة .

2) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\frac{3}{u_n}$.

أ - تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$:

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=1-\frac{3}{u_{n+1}}=1-\frac{3}{\frac{5u_n}{u_n+2}}=1-\frac{3(u_n+2)}{5u_n}=\frac{5u_n-3u_n-6}{5u_n}=\frac{2u_n-6}{5u_n}=\frac{2(u_n-3)}{5u_n}=\frac{2}{5}\left(1-\frac{3}{u_n}\right)=\frac{2}{5}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=1-\frac{3}{u_0}=-2$.

ب - كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=-2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=1-\frac{3}{u_n}$ و منه $\frac{3}{u_n}=1-v_n$ أي $u_n=\frac{3}{1-v_n}$ إذن : $u_n=\frac{3}{1+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

.

جـ - حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}\right)=3$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}$.

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=1-\frac{3}{u_n}$ و منه $\frac{3}{u_n}=1-v_n$ أي : $\frac{1}{u_n}=\frac{1-v_n}{3}=\frac{1}{3}(1-v_n)$.

إذن :

$$S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}=\frac{1}{3}\left[(1+1+1....+1)-(v_0+v_1+v_2.....+v_n)\right]=\frac{1}{3}\left[(n+1)-\left(v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right]$$

أي : $S_n=\frac{1}{3}\left[(n+1)+\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)\right]$.

التمرين [13][باك 2015][1م]

المتتالية العددية المعرفة بـــ (u_n) : $u_0=e^2-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) أحسب : u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n>0$.

3) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علّل .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب - أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

جـ - بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+...+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

حل مقترح للتمرين[13]

المتتالية العددية المعرفة بـــ (u_n) : $u_0=e^2-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1=(1+u_0)e^{-2}-1=e^2\times e^{-2}-1=0$ ، $u_2=(1+u_1)e^{-2}-1=e^{-2}-1$

. $u_3=(1+u_2)e^{-2}-1=e^{-4}-1$

2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n>0$:

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n>0$ "

● نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=e^2-1$ و منه $1+u_0>0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

● نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أي : $1+u_n>0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1+u_{n+1}>0$.

لدينا حسب الفرض $1+u_n>0$ و لدينا $1+u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}$ و منه $1+u_{n+1}>0$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

● الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n>0$.

3) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا :من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-1-u_n=(1+u_n)e^{-2}-(1+u_n)=(1+u_n)(e^{-2}-1)$

و بما أنه $1+u_n>0$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ، و $e^{-2}-1<0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

ـ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد -1 ، إذن فهي متقاربة .

4) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=3(1+u_{n+1})=3(1+u_n)e^{-2}=e^{-2}v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=e^{-2}$ و حدها الأول : $v_0=3(1+u_0)=3e^2$.

ب - كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=3\times e^2(e^{-2})^n=3e^{-2n+2}$.

● كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$ و منه $u_n=\frac{1}{3}v_n-1$ أي $u_n=\frac{1}{3}(3e^{-2n+2})-1=e^{-2n+2}-1$.

● حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(e^{-2n+2}-1)=-1 \quad \text{لأن: } \lim_{n\to+\infty}e^{-2n+2}=0$$

جـ - تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+...+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_0\times v_1\times v_2\times....\times v_n=(3\times e^2)^{n+1}(e^{-2})^{0+1+2+....+n}=(3\times e^2)^{n+1}(e^{-2})^{\frac{n(n+1)}{2}}=(3\times e^2)^{n+1}e^{-n(n+1)}=(3e^{2-n})^{n+1}$$

و منه $\ln(v_0\times v_1\times v_2\times....\times v_n)=(n+1)\ln(3e^{2-n})$ أي $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+...+\ln v_n=(n+1)(\ln 3+2-n)$.

(يمكن إستخدام طرق أخرى)

التمرين [14][باك 2015][2م]

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) عيّن إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y=x$.

3) مثّل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

1) أ - أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 ، v_0,v_1,v_2 و v_3 دون حسابها.

بـ - خمّن اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

2) أ - أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث : $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

بـ - استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3) أ - أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$

بـ - بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ - استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

حل مقترح للتمرين[14]

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) تعيين إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x) = \dfrac{4(x+1)-(4x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

لدينا :من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x$.

لدينا : $f(x) - x = \dfrac{4x+1}{x+1} - x = \dfrac{-x^2+3x+1}{x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x^2+3x+1$ على المجال $[0;+\infty[$.

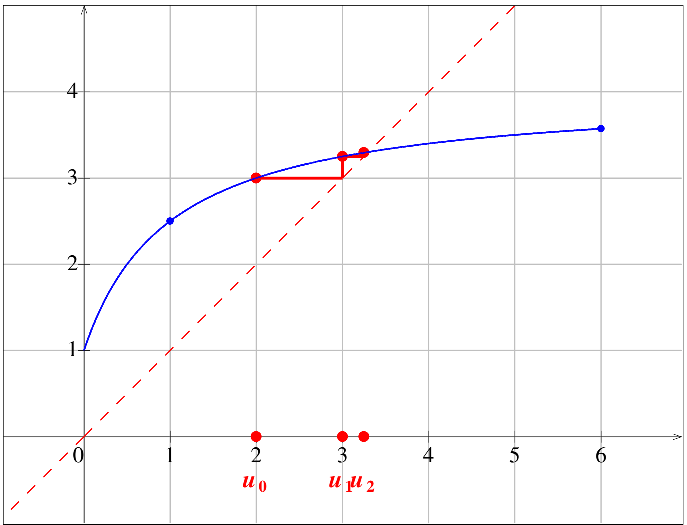
المعادلة $-x^2+3x+1=0$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلا α بحيث : $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

x	$0 \qquad \alpha \qquad +\infty$
$f(x)-x$	$+ \quad 0 \quad -$

على المجال $[0;\alpha[$: (C_f) يقع فوق (D) .

على المجال $]\alpha;+\infty[$: (C_f) يقع تحت (D) .

3) الرسم :



II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1) أ - الرسم : أنظر الشكل .

بـ - التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة و كلا منهما تتقارب نحو العدد $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2) أ - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث : $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \le u_n < \alpha$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n < \alpha$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 2$ و منه $2 \le u_0 < \alpha$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $2 \le u_n < \alpha$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2 \le u_{n+1} < \alpha$.

لدينا حسب الفرض $2 \le u_n < \alpha$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن $f(2) \le f(u_n) < f(\alpha)$

أي $2 \le 3 \le u_{n+1} < \alpha$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \le u_n < \alpha$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \le 5$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha < v_n \le 5$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $v_0 = 5$ و منه $\alpha < v_0 \le 5$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $\alpha < v_n \le 5$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\alpha < v_{n+1} \le 5$.

لدينا حسب الفرض $\alpha < v_n \le 5$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن $f(\alpha) < f(v_n) \le f(5)$

أي $\alpha < v_{n+1} \le \dfrac{7}{2} \le 5$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \le 5$.

بـ - استنتاج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in [2;\alpha[$. و من أجل $x \in]0;\alpha[$: $f(x) - x > 0$ و منه : $u_{n+1} - u_n > 0$.

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ولدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \in]\alpha;5]$. و من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$: $f(x) - x < 0$ و منه : $v_{n+1} - v_n < 0$.

و بالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3) أ - إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \dfrac{1+4v_n}{1+v_n} - \dfrac{1+4u_n}{1+u_n} = \dfrac{3(v_n - u_n)}{(1+v_n)(1+u_n)}$

و من جهة أخرى : $\begin{cases} u_n \ge 2 \\ v_n \ge 2 \end{cases}$ يكافئ $\dfrac{3}{(1+v_n)(1+u_n)} \le \dfrac{1}{3}$ و منه $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$.

بـ - تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$ و هذا يعني :

$$\begin{cases} v_1 - u_1 \le \dfrac{1}{3}(v_0 - u_0) \\ v_2 - u_2 \le \dfrac{1}{3}(v_1 - u_1) \\ .... \\ .... \\ v_n - u_n \le \dfrac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد $(v_1-u_1)(v_2-u_2)...(v_n-u_n)\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n(v_0-u_0)(v_1-u_1)...(v_{n-1}-u_{n-1})$

و منه : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.   (يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

و من جهة أخرى لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n$ و منه $v_n-u_n>0$.

و بالتالي : من أجل كل عدد طبيعي n : $0<v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ - لدينا ، $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ و منه نستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي العدد الحقيقي l الذي يحقق : $f(l)=l$.

إذن : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\alpha$.

التمرين [15][باك 2014][1م]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+4$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ - بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب - أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$.

حل مقترح للتمرين[15]

المتتالية العددية المعرّفة كما يلي (u_n) : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+4$

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+\frac{12}{3}=\frac{2}{3}u_n+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}(u_n+4)=\frac{2}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0=u_0+4=5$.

2) كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-4$ و منه $u_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-4$.

3) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\left[5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-4\right]-\left[5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-4\right]=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=5\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{2}{3}-1\right)=-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

4) حساب المجموع S_n حيث :

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=(v_0+v_1+...+v_n)-(4+4+...+4)$$
$$=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]-4(n+1)=15\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-4(n+1)$$

5) (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ- تبيان أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا : المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n<v_{n+1}$

و منه $v_n+5<v_{n+1}+5$ و بالتالي $\frac{1}{v_{n+1}+5}<\frac{1}{v_n+5}$ أي $\frac{1}{v_{n+1}+5}-1<\frac{1}{v_n+5}-1$

و منه $5\left(\frac{1}{v_{n+1}+5}-1\right)<5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$

إذن : $w_n<w_{n+1}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ، و عليه المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$.

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-w_n)=\lim_{n\to+\infty}(v_n-4-w_n)=0$$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=5\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)=-4$

التمرين [16][باك 2014][2م]

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـحدّها العام : $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري) .

1) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

2) أ - أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n=\ln(u_0\times u_1\times u_2\times...\times u_n)$

ب - عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n+4n>0$.

حل مقترح للتمرين[16]

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$

1) تبيان أن (u_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=e^{\frac{1}{2}-(n+1)}=e^{\frac{1}{2}-n-1}=e^{\frac{1}{2}-n}\times e^{-1}=\frac{1}{e}u_n$

و منه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0=e^{\frac{1}{2}-0}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{2}-n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{e}\times\left(\frac{1}{e}\right)^n\right]=0$$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3)حساب المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \sqrt{e}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}\right] = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right)$$

II) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$

1) كتابة v_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ و منه $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2} - n$.

استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} - (n+1) - \left(\frac{1}{2} - n\right) = -1$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -1$ و حدّها الأول $v_0 = \ln(u_0) = \ln\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$.

2) أ - حساب العدد P_n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n) = \ln u_0 + \ln u_1 + \ldots + \ln u_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

و منه $P_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right) = \frac{(n+1)(1-n)}{2} = \frac{1-n^2}{2}$

ب - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

$P_n + 4n > 0$ يكافئ $\frac{1-n^2}{2} + 4n > 0$ يكافئ $\frac{1+8n-n^2}{2} > 0$ يكافئ $-\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0$

و لدينا : $-\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0$ يكافئ $n \in \left]4-\sqrt{17};4+\sqrt{17}\right[$ أي $n \in [0;8]$

و منه مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n + 4n > 0$ هي : $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

التمرين [17][باك 2013][1م]

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 6$

2) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ - برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب - بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 6 - u_n \le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

حل مقترح للتمرين[17]

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1)تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{5^{n+2}}{6^{n+1}} = \frac{5 \times 5^{n+1}}{6 \times 6^n} = \frac{5}{6} \times \frac{5^{n+1}}{6^n} = \frac{5}{6} v_n$.

و منه المتتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ و حدّها الأول $v_0=\frac{5^{0+1}}{6^0}=5$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$:

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[5\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]=0$ لأن: $0<q<1$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بــ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 6$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 6$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1$ و منه $1\le u_0\le 6$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $1\le u_n\le 6$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 6$.

لدينا حسب الفرض $1\le u_n\le 6$ و منه $5\le 5u_n\le 30$ و منه $11\le 5u_n+6\le 36$ و منه $\sqrt{11}\le\sqrt{5u_n+6}\le\sqrt{36}$

أي $1\le\sqrt{11}\le u_{n+1}\le 6$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 6$.

2) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\sqrt{5u_n+6}-u_n=\frac{\left(\sqrt{5u_n+6}-u_n\right)\left(\sqrt{5u_n+6}+u_n\right)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}=\frac{5u_n+6-u_n^2}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$

و منه $u_{n+1}-u_n=\frac{(6-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $6-u_n>0$ و $1+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) أ - برهان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$6-u_{n+1}=6-\sqrt{5u_n+6}=\frac{\left(6-\sqrt{5u_n+6}\right)\left(6+\sqrt{5u_n+6}\right)}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\frac{30-5u_n}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}}$.

و من جهة أخرى : $1\le u_n\le 6$ يكافئ $\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}}\le\frac{1}{6}$ و منه $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$.

ب - تبيان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le 6-u_n\le v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1$ و $v_0=5$ منه $0\le 6-u_0\le v_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0\le 6-u_n\le v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0\le 6-u_{n+1}\le v_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $0\le 6-u_n\le v_n$ و لدينا $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$ منه $0\le 6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}v_n$

و منه $0\le 6-u_{n+1}\le v_{n+1}$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le 6-u_n\le v_n$.

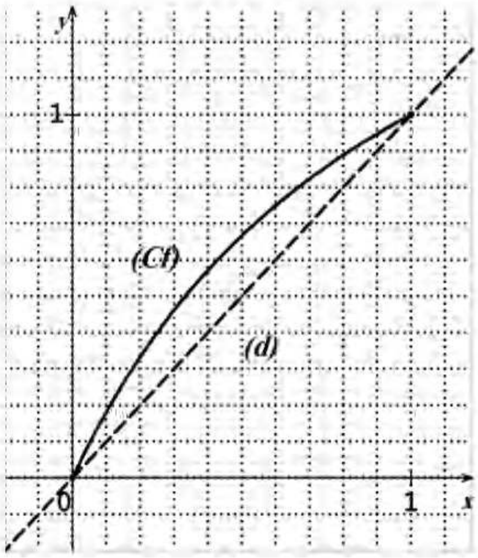
(يمكن إستخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

- استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le 6-u_n\le v_n$ و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(6-u_n)=0$ أي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=6$

التمرين [18][باك 2013][2م]

في الشكل المقابل ، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة : $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ ،
و (d) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$



1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=\dfrac{1}{2}$ ،
و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$
أ ـ أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة ، ثم مثل الحدود u_2,u_1,u_0
و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.
بـ ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ ـ أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$
بـ ـ برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$
جـ ـ أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

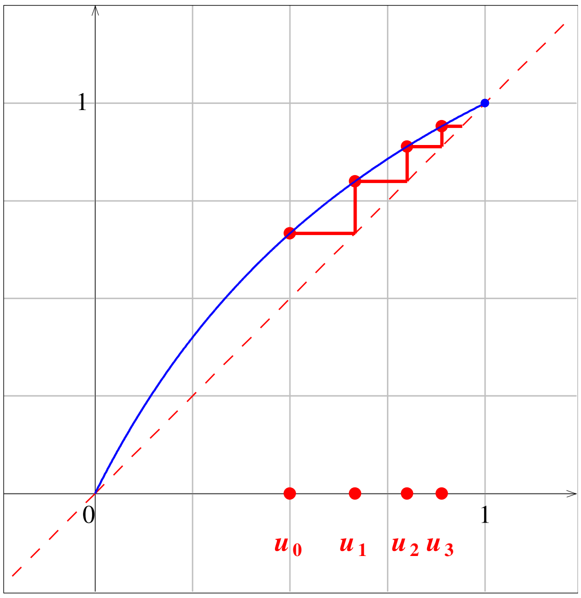
3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$.
أ ـ برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .
بـ ـ أحسب نهاية (u_n) .

حل مقترح للتمرين[18]

f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول ، $u_0=\dfrac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ ـ الرسم :



بـ ـ التخمين:
المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 1 .

2) أ ـ إثبات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;1]$ و $f'(x)=\dfrac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

لدينا :من أجل كل $x\in[0;1]$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

بـ ـ البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$ "

● نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ و منه $0<u_0<1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

● نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<1$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي $0<u_{n+1}<1$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

● الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

جـ - دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+u_n}{u_n+1}=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $1-u_n>0$ و $u_n>0$ فإن : $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

أ - إثبات (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{\frac{2u_n}{u_n+1}-1}{\frac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{\frac{2u_n-(u_n+1)}{u_n+1}}{\frac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=-1$.

ب - حساب نهاية (u_n) :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ و منه $v_n=1-\frac{1}{u_n}$ و منه $u_n=\frac{1}{1-v_n}$ أي $u_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

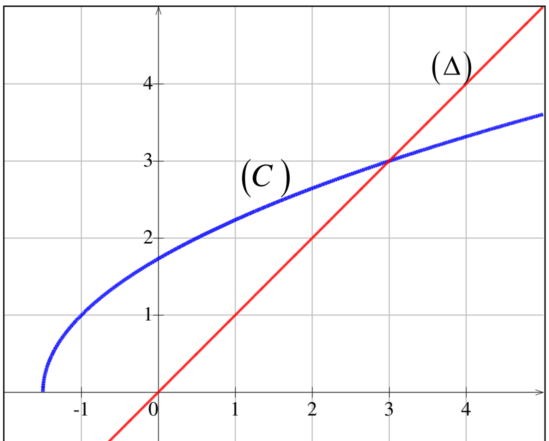
إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right]=1$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

التمرين [19][باك 2012][1م]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $h(x)=\sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل المقابل).



أ - أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0,u_1,u_2 و u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

ب - ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

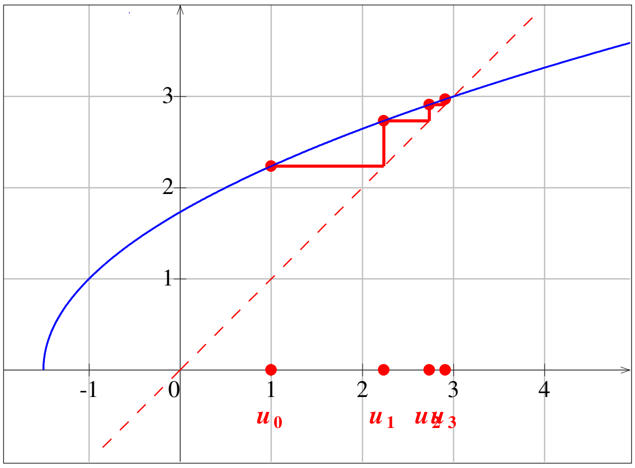
3) أ- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب - إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

حل مقترح للتمرين[19]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) الرسم :



بـ - التخمين :

المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 3 .

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1$ و منه $0<u_0<3$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<3$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<3$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<3$ و منه $0<2u_n<6$ و منه $3<2u_n+3<9$ و منه $\sqrt{3}<\sqrt{2u_n+3}<\sqrt{9}$

أي $0<\sqrt{3}<u_{n+1}<3$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<3$.

3) أ- دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n=\dfrac{\left(\sqrt{2u_n+3}-u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+3}+u_n\right)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}=\dfrac{2u_n+3-u_n{}^2}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$

و منه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(3-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_n>0$ و $1+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

بـ - إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3 ، إذن فهي متقاربة .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ إذن $h(l)=l$.

$h(l)=l$ تكافئ $\sqrt{2l+3}=l$ تكافئ $2l+3=l^2$ تكافئ $l^2-2l-3=0$

المعادلة لها حلّين هما $l_1=3$ و $l_2=-1$.

(الحل $l_2=-1$ مرفوض كون المتتالية (u_n) متزايدة و $0<u_n<3$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$)

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

التمرين [20][باك 2012][2م]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n{}^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما .

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة .

4) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ - برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول .

ب - أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

جـ - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$.

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن : $\lim_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{16}$.

حل مقترح للتمرين[20]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{13}{4}$ و منه $3<u_0<4$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $3<u_n<4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $3<u_{n+1}<4$.

لدينا حسب الفرض $3<u_n<4$ و منه $0<u_n-3<1$ و منه $0<\sqrt{u_n-3}<1$ و منه $3<\sqrt{u_n-3}<4$

أي $3<u_{n+1}<4$ بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n{}^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$.

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=3+\sqrt{u_n-3}-u_n=\frac{\left(3+\sqrt{u_n-3}-u_n\right)\left(\sqrt{u_n-3}+u_n-3\right)}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{u_n-3-(3-u_n)^2}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{-u_n{}^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

• استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n{}^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{(4-u_n)(u_n-3)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$ فإن $4-u_n>0$ و $u_n-3>0$ و منه $u_{n+1}-u_n>0$.

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) تبرير تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 4 ، إذن فهي متقاربة .

4) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-3)=\ln\left(3+\sqrt{u_n-3}-3\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-3}\right)=\frac{1}{2}\ln(u_n-3)=\frac{1}{2}v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدّها الأول $v_0=\ln(u_0-3)=\ln\left(\frac{13}{4}-3\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 4$.

ب - كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

• كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(u_n-3)$ و منه $u_n=3+e^{v_n}$ أي : $u_n=3+e^{\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+e^{\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)=3+1=4$ ، لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

جـ - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$

كتابة P_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(u_n-3)$ و منه $u_n-3=e^{v_n}$ و منه :

$$P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times\ldots\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}=e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

• تبيان أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{16}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}=e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)}=e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ ، لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$.

التمرين [21][باك 2011][1م]

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) :

أ ـ حسابية.   ب ـ هندسية.   جـ - لا حسابية ولا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي :

أ - $+\infty$.   ب - $-\frac{1}{2}$.   جـ - $-\infty$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+\ldots+e^{n\ln 3}\right]$.

أ - $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب - $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ جـ - $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$.

حل مقترح للتمرين[21]

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

إختيار الإجابة مع التبرير :

1) المتتالية (v_n) : $\longleftarrow$ ب - هندسية .

التبرير :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}=3u_n+1+\frac{1}{2}=3u_n+\frac{3}{2}=3\left(u_n+\frac{1}{2}\right)=3v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=3$ و حدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : ⟵ جـ - $-\infty$.

التبرير :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-\frac{1}{2}$ و منه $u_n=-\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]=\frac{1-3^{n+1}}{4}$.

التبرير :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]=-\frac{1}{2}\left[3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n\right]=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)=\frac{1-3^{n+1}}{4}$$

التمرين [22][باك 2011][م2]

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\alpha u_n+1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$.

1) أ - بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

بـ - أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n.

جـ - عيّن قيّم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع : $\alpha=\frac{3}{2}$.

- أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+...+u_n$.

حل مقترح للتمرين [22]

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\alpha u_n+1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$.

1) أ - تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+1+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+\frac{\alpha}{\alpha-1}=\alpha\left(u_n+\frac{1}{\alpha-1}\right)=\alpha v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\alpha$ و حدّها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{\alpha-1}=6+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}$.

بـ - كتابة v_n بدلالة n و α:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=\left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\times\alpha^n$.

• كتابة u_n بدلالة n و α:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-\frac{1}{\alpha-1}$ و منه $u_n=\left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\times\alpha^n-\frac{1}{\alpha-1}$.

جـ - تعيين قيّم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة .

تكون المتتالية (u_n) متقاربة إذا و فقط إذا كان $\alpha\in\left]0;1\right[$ ، لأن في هذه الحالة يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n=0$

و يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{\alpha-1}$

2) نضع : $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

في هذه الحالة يكون أساس المتتالية (v_n) هو $q = \dfrac{3}{2}$ و حدّها الأول $v_0 = 8$.

- حساب المجموعين S_n و T_n :

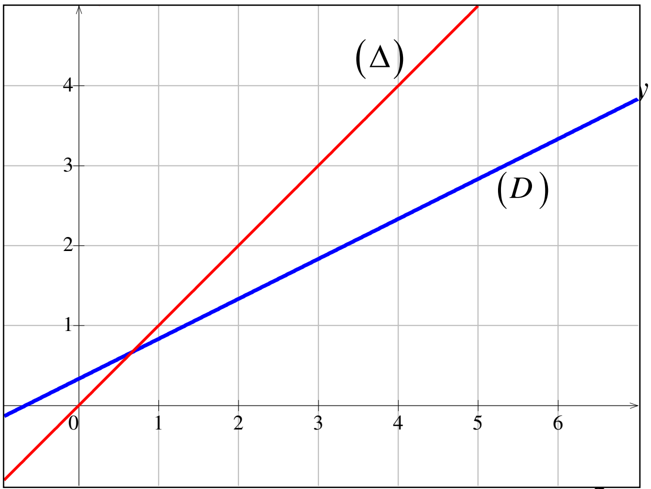
من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 8 \times \left(\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{3}{2}}\right) = 16 \times \left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right)$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - \dfrac{1}{\alpha-1} = v_n - \dfrac{1}{\dfrac{3}{2}-1} = v_n - 2$ و منه

$$T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + ... + (v_n - 2) = S_n - 2(n+1) = 16 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$

التمرين [23][باك 2010][2م]

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثّلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}$



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{3}$.

أ - أنقل الشكل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود التالية : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

بـ - عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

جـ - أعط تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

2) أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \dfrac{2}{3}$.

بـ - إستنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$.

أ - بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول .

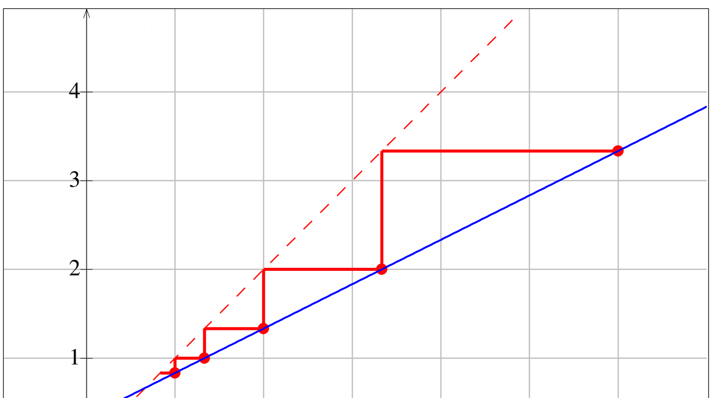
بـ - أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، إستنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

حل مقترح للتمرين[23]

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{3}$.

1) أ - الرسم :



ب - تعيين إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (D) :

نحل المعادلة : $f(x)=x$.

$f(x)=x$ تكافئ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=x$ تكافئ $\frac{1}{2}x-x=-\frac{1}{3}$ تكافئ $-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{3}$ تكافئ $x=\frac{2}{3}$

و بالتالي المستقيمان (Δ) و (D) يتقطعان في النقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

جـ - التخمين :

نلاحظ من الرسم أن : $u_4<u_3<u_2<u_1<u_0$

المتتالية (u_n) متناقصة .

2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq\frac{2}{3}$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq\frac{2}{3}$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=6$ و منه $u_0\geq\frac{2}{3}$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n\geq\frac{2}{3}$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}\geq\frac{2}{3}$.

لدينا حسب الفرض $u_n\geq\frac{2}{3}$ و منه $\frac{1}{2}u_n\geq\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ و منه $\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}\geq\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ أي $u_{n+1}\geq\frac{2}{3}$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq\frac{2}{3}$.

ب - إتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)$

و لدينا ممّا سبق أن : $u_n\geq\frac{2}{3}$ و منه $u_n-\frac{2}{3}\geq 0$. إذن $-\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)\leq 0$.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n\leq 0$ ، و عليه المتتالية (u_n) متناقصة .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$. و حدها الأول : $v_0=u_0-\frac{2}{3}=6-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$.

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n=\frac{16}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n: $u_n=v_n+\frac{2}{3}=\frac{16}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$

جـ - المجاميع :

$$S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=\frac{32}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$S'_n=u_0+u_1+...+u_n=v_0+\frac{2}{3}+v_1+\frac{2}{3}+...+v_n+\frac{2}{3}=S_n+\frac{2}{3}(n+1)$$

التمرين [24][باك 2009][1م]

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$.

المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب v_0 و v_1 .

2) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n: $S_n=v_1+v_2+...+v_{n-1}$.

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ - بيّن أنّ (u_n) متقاربة .

حل مقترح للتمرين[24]

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$.

المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) حساب v_0 و v_1 :

لدينا : $v_0=u_1-u_0=2-1=1$ ، $v_1=u_2-u_1=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$

2) برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n-u_{n+1}=\frac{1}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$.

3) أ- حساب المجموع S_n بدلالة n بحيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن :

$$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]=\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right]=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ب - برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+....+(u_n-u_{n-1})=-u_0+u_n$

و منه $u_n=S_n+u_0$ أي : $u_n=S_n+1=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$.

(يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

جـ - تبيان أنّ المتتالية (u_n) متقاربة :

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ (لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$) و منه المتتالية (u_n) متقاربة .

التمرين [25][باك 2009][م2]

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$

1)أ- أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1

بـ - أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ - أحسب S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة n ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$.

2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$

أ - أحسب v_2 ، v_3 .

بـ - نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ، بيّن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ - أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n .

حل مقترح للتمرين[25]

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$

1) أ- حساب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية :

لدينا : $u_1\times u_2\times u_3=216$ و حسب خاصية الوسط الهندسي $(u_2)^2=u_1\times u_3$ و منه نجد : $(u_2)^3=216$ أي $u_2=6$.

● حساب الأساس q :

لدينا : $u_1+2u_2+u_3=32$ و كون المتتالية (u_n) هندسية فإن $u_3=q\times u_2$ و $u_1=\frac{u_2}{q}$.

إذن : $u_1+2u_2+u_3=32$ تكافئ $\frac{6}{q}+12+6q=32$ أي : $3q^2-10q+3=0$.

لنحل المعادلة $3q^2-10q+3=0$:

لدينا : $\Delta=64$ و منه للمعادلة حلان هما : $q_1=3$ و $q_2=\frac{1}{3}$.

و بما أنها المتتالية متزايدة تماما فإن أساسها q أكبر تماما من الواحد و منه $q=3$.

● حساب الحد الأول u_1 :

لدينا $u_1=\frac{u_2}{q}$ و منه $u_1=\frac{6}{3}=2$.

بـ - كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا :من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=u_1\times q^{n-1}$ و منه : $u_n=2\times 3^{n-1}$.

جـ - حساب S_n بدلالة n :

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n=u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right)=-\left(1-3^n\right)=3^n-1$$

●تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$:

لدينا : $S_n=728$ يكافئ $3^n-1=728$ أي $3^n=729$ أي $3^n=3^6$ و منه $n=6$. (يمكن إستخدام اللوغاريتم)

2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$

أ - حساب v_2 و v_3 :

$$v_2=\frac{3}{2}v_1+u_1=\frac{3}{2}\times 2+2=5 \quad ، \quad v_3=\frac{3}{2}v_2+u_2=\frac{3}{2}\times 5+6=\frac{27}{2}$$

بـ - من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$.

• تبيان أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3u_n}-\frac{2}{3}=\frac{3}{2\times 3}\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{v_n}{2u_n}-\frac{1}{3}=\frac{v_n}{2u_n}-\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}w_n$$

و منه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ - كتابة w_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=w_1\times q^{n-1}$ و منه : $w_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

• إستنتاج v_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ و منه $\frac{v_n}{u_n}=w_n+\frac{2}{3}$ أي $v_n=\left(w_n+\frac{2}{3}\right)u_n$.

إذن : $v_n=\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right]\times 2\times 3^{n-1}$ أي : $v_n=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}\times 3^{n-1}$.

التمرين [26][باك 2008][م1]

1) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة على I.

بـ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

بـ - أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

بـ - عيّن النهاية : $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

حل مقترح للتمرين[26]

1) $I=[1;2]$ ، $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- تبيان أن الدالة f متزايدة على I.

الدالة f قابلة للإشتقاق على I و $f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}$.

و منه من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماماعلى I.

بـ - تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على I و منه من أجل كل $x\in[1;2]$ ، $f(x)\in[f(1);f(2)]$

و لدينا : $f(2)=2$ و $f(1)=1$ ، إذن من أجل كل $x\in I$ ، $f(x)\in I$

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ - البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 2$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ و منه $1\le u_0\le 2$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $1\le u_n\le 2$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 2$.

لدينا حسب الفرض $1\le u_n\le 2$ و منه حسب السؤال (أ) $1\le f(u_n)\le 2$ أي : $1\le u_{n+1}\le 2$.و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 2$.

ب - دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n=\frac{u_n^{\ 2}-3u_n+2}{-u_n+4}=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$.

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 2$ فإن $u_n-1\ge 0$ و $u_n-2\le 0$ و $-u_n+4>0$

و بالتالي $u_{n+1}-u_n<0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

➲ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

3) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$

أي $u_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$.

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{u_n+2}{-u_n+4}=-1+\frac{6}{-u_n+4}=-1+\frac{6}{4-u_n}=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

و منه $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

ب - $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}\right)=1$ لأن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$.

التمرين [27][باك 2008][2م]

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

بـ - باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .

جـ - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le 6$

بـ - تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ - هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 6$

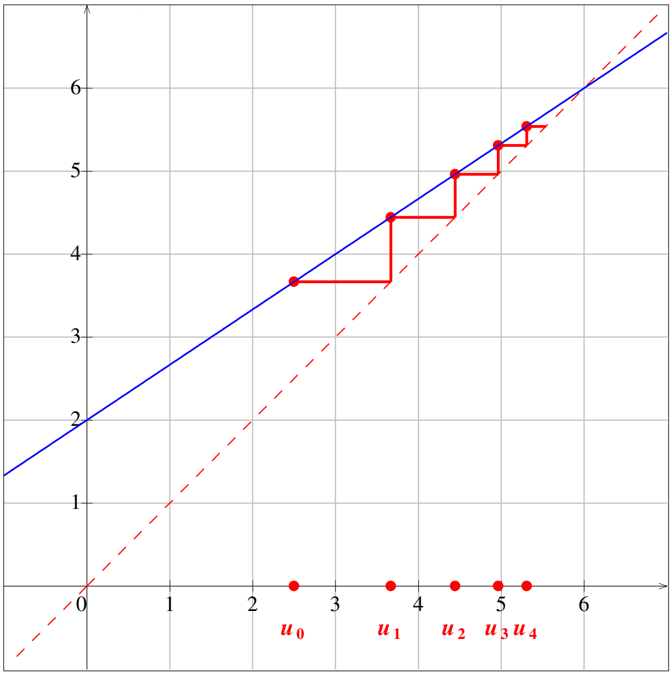
أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

بـ - أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

حل مقترح للتمرين [27]

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

4) أ- بـ - الرسم و تمثيل الحدود :



جـ - التخمين :

نلاحظ من الرسم أن : $u_4 > u_3 > u_2 > u_1 > u_0$

الحدود تتراكم حول العدد 6 .

وضع تخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 6 .

1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le 6$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 6$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$، لدينا $u_0 = \frac{5}{2}$ و منه $u_0 \le 6$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \le 6$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \le 6$.

لدينا حسب الفرض $u_n \le 6$ و منه $\frac{2}{3}u_n \le \frac{2}{3}\times 6$ و منه $\frac{2}{3}u_n + 2 \le \frac{2}{3}\times 6 + 2$ أي $u_{n+1} \le 6$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le 6$.

بـ - التحقق أن (u_n) متزايدة :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+2-u_n=-\frac{1}{3}u_n+2=-\frac{1}{3}(u_n-6)$

و لدينا ممّا سبق أن : $u_n\le 6$ و منه $u_n-6\le 0$. إذن $-\frac{1}{3}(u_n-6)\ge 0$.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ، و عليه المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ - المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-6$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{2}{3}u_n+2-6=\frac{2}{3}u_n-4=\frac{2}{3}u_n-\frac{12}{3}=\frac{2}{3}u_n-\frac{2\times 6}{3}=\frac{2}{3}(u_n-6)=\frac{2}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$. الحد الأول : $v_0=u_0-6=\frac{5}{2}-6=-\frac{7}{2}$.

بـ - كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n: $u_n=v_n+6=-\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+6$

جـ - $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+6\right)=6$. لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ (لاحظ أن $0<\frac{2}{3}<1$)

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ

و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com