مجلة 5min Maths

CHABANE Oussama

3as أداب و فلسفة + لغات أجنبية

المتتاليات العددية

اعداد الأستاذ شعبان أسامة

اصدار ديسمبر 2020

تلمسان - 0775737163

Facebook/ Telegram/ instagram / Google : 5min Maths

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها التلميذ " مجلة 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي لشعبة أداب و فلسفة و لغات أجنبية

محور المتتاليات العددية وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد لاجتياز بكالوريا دورة 2021 ، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا التي سهرت دائما على نجاحي بعد توفيق المولى عز و جل.

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر...أحبكم

الأستاذ شعبان أسامة

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة،تم اصدار أول نسخة
بتاريخ :2019/09/13

5 min Maths

CHABANE Oussama

تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس
2. تطبيقات
3. تمارين محلولة
4. تمارين البكالوريا 2008-2019

#5min Maths

ملخص الدرس

المتتاليات الحسابية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n=u_p+(n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n=u_0+nr$ و $u_n=u_1+(n-1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

عدد الحدود=دليل الالحد الأخير-دليل الحد الأول +1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n)متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=r$ و منه:

- **إذا كان r سالبا تماما $r<0$ فإن المتتالية متناقصة.**
- **إذا كان r موجبا تماما $r>0$ فإن المتتالية متزايدة.**
- **إذا كان r معدوما $r=0$ فإن المتتالية ثابتة.**

المتتاليات الرتيبة

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

(u_n) رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

(u_n) متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \geq u_n$

(u_n) متناقصة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq u_n$

(u_n) ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n$.

تمرين:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n+2$.

1. أحسب u_0 و u_1.
2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

الحل:

1. $u_0 = -3(0)+2 = 2$ و $u_1 = -3(1)+2 = -1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \left[-3(n+1)+2\right] - \left[-3n+2\right] = -3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

3. لدينا: $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2-3n+2}{2}$ و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

المتتاليات الهندسية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n \times q$

.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير−دليل الحد الأول +1

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن: $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n=(n+1)u_0$.

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n)متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها q.

نعلم أن: $u_n=u_0q^n$. نستنتج أنه:

***إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.**

*** إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.**

***إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.**

***إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.**

***إذا كان $q=0$تكون كل حدودالمتتالية معدومة ابتداء من الحد2 .**

<u>**تمرين:**</u>

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

1. أحسب v_2 و، v_3.
2. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S=v_1+v_2+........+v_n$.

<u>**الحل:**</u>

1. $v_2=v_1\times q=3\times 2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times 2=12$.
2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$.

$S=v_1+v_2+........+v_n=v_1\times\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ و منه: $S=3\times\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)$

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
➢تعريف نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$. ➢عبارة الحد العام إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين	➢تعريف نقول أن المتتالية (u_n)متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n\times q$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ ➢عبارة الحد العام

n و p، $u_n = u_p + (n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n-1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول 1+

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب <u>حدودا متتابعة</u> من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = r$ و منه:

- إذا كان r سالبا تماما $r<0$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان r موجبا تماما $r>0$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان r معدوما $r=0$ فإن المتتالية ثابتة.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n+2$.

4. أحسب u_0 و u_1.
5. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعين أساسها r.
6. أحسب، بدلالة n، المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$.

الحل:

4. $u_0 = -3(0)+2 = 2$ و $u_1 = -3(1)+2 = -1$.

5. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} - u_n = \left[-3(n+1)+2\right] - \left[-3n+2\right] = -3$$

.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$.

6. لدينا:

$$= (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2} = (n+1)\times\frac{2-3n+2}{2}$$

و منه $S = \dfrac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول 1+

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن:

$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$.

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a\times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها q.

نعلم أن: $u_n = u_0 q^n$. نستنتج أنه:

*إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

*إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

*إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.

*إذا كان $q=0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد 2.

مثال

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q=2$.

4. أحسب v_2 و v_3.
5. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.
6. أحسب، بدلالة n، المجموع

$S = v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n$.

الحل:

3. $v_2 = v_1 \times q = 3\times 2 = 6$،

$v_3 = v_2 \times q = 6\times 2 = 12$.

4. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3\times 2^{n-1}$.

$$S = v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n = v_1 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

و منه: $S = 3\times\left(\dfrac{1-2^n}{1-2}\right) = -3\left(1-2^n\right) = 3\left(2^n - 1\right)$

تطبيقات

تطبيق1:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n^2+1$.

1.أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20}.

2.أكتب بدلالة n **الحدود** u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

الحل:

7. $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$.

8. $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

تطبيق2:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=-2u_n+1$.

أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

الحل:

$$u_1=-2u_0+1=-2\times 2+1=-3$$
$$u_2=-2u_1+1=-2(-3)+1=7$$
$$u_3=-2u_2+1=-2\times 7+1=-13$$

تطبيق3:

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_0=-3$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=2v_n+5$.

1. أحسب v_1 و v_2.
2. عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1}.

الحل:

1. $v_1=2v_0+3=2(-3)+5=-1$ و $v_2=2v_1+5=2(-1)+5=3$.
2. $v_{n+2}=2v_{n+1}+5=2(2v_n+5)+5$

و منه $v_{n+2}=4v_n+15$.

من $v_{n+1}=2v_n+5$ نستنتج أن $v_n=2v_{n-1}+5$ و بالتالي $2v_{n-1}=v_n-5$

و منه $v_{n-1}=\dfrac{v_n-5}{2}$.

تطبيق 4 :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1.أحسب u_0 و u_1.

2.أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3.أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

الحل:

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r.

1. $u_0 = -3(0) + 2 = 2$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1)+2] - [-3n+2] = -3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

3. لدينا: $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$ و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

تطبيق 5:

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

الحل:

1. $v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$ ، $v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$.

2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.

$S = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -3(1-2^n) = 3(2^n - 1)$

تطبيق 6:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1.أحسب $u_{n+1} - u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

2.استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل:

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... و إنما يجب المقارنة

بين u_{n+1} و u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

1. $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-(n^2-n)$ و منه $u_{n+1}-u_n=2n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n\geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

تطبيق 7 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_1=4$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

الحل:

إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\leq u_n$.

المرحلة الأولى: نتحقق من أن: $u_2\leq u_1$

لدينا $u_2=\frac{1}{2}u_1-1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ و منه $u_2\leq u_1$.

المرحلة الثانية: نفرض أنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\leq u_n$.

المرحلة الثالثة: نبرهن أن $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}\leq u_n$. نحصل بعد ضرب الطرفين في $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{2}u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$. نضيف (-1) إلى الطرفين لنجد:

$\frac{1}{2}u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}u_n-1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\leq u_n$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

تطبيق 8:

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.
2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

الحل:

1. $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3\times 3^n}{2\times 2^{n+1}} = \frac{3}{2}\times\frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}v_n$. و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$
2. بما أن $\frac{3}{2} > 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة $\left(v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$.

التمارين

.1

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.احسب u_0، u_1، u_2 و u_3.

2.بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

ب-عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

.2

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحد الأول u_0.

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3.عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49}$.

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{49}$.

.3

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1.بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

4.استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_6$

.4

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.عين الأساس r للمتتالية (u_n).

2.بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.

3.أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

.5

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.أحسبالحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.

3.استنتج قيمة r واحسب u_0.

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n - 2$.

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

6.جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

.6

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

أ- -17 **ب-** -14 **ج-** -11 .

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101}-1}{2}$ ب- $\frac{1-3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي : $a=2x+2$، $b=6x-3$، $c=4x$. الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$ ب- $x=0$ ج- $x=\frac{3}{4}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 ب- هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

.7

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما **ب-** متناقصة تماما **ج-** ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n=3\times 2^n$ **ب-** $v_n=3\times 2^{n-1}$ **ج-** $v_n=2\times 3^n$

3. المجموع : $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n-1)$ **ب-** (2^n-1) **ج-** $(1-3^n)2$

.8

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1. بين أن $u_1=24$، ثم استنتج قيمة u_0.

2. بين أن $q=4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4. احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. احسب بدلالة المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

.9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

أ) نفرض $\alpha = 3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

حلول التمارين

حل التمرين 1:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.حساب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3.

$$u_0 = -2$$
$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 4$$
$$u_3 = 7$$

2.اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2$$
$$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$$
$$= 3$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n). بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية

نقوم بحل المعادلة: (u_n)

$$u_n = 1954$$

أي: $3n - 2 = 1954$ معناه: $u_{652} = 1954$ رتبته. 653 لأن الحد الأول هو u_0.

$$n = 652 \in \mathbb{N}$$

5.أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

و منه

$$= (n+1)\frac{(-2+3n-2)}{2}$$
$$= (n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

نقوم بالنشر نتحصل على: $S_n = \dfrac{3n^2 - n - 4}{2}$

ب-تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2-n-4}{2}=328$$

معناه: $3n^2-n-4=2(328)$

$3n^2-n-660=0$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $\begin{array}{l} n_1=15\in\mathbb{N} \\ n_2=\frac{-44}{3}\notin\mathbb{N}\end{array}$ و بالتالي من أجل $n=15$ لدينا: $S_n=328$

📖حل التمرين 2:

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0+u_1+u_2+u_3=10$

$$\begin{cases} u_1=u_0+r=u_0+3 \\ u_2=u_0+2r=u_0+6 \\ u_3=u_0+3r=u_0+9 \end{cases}$$ نجمع المعادلات نتحصل :

$u_0+u_0+3+u_0+6+u_0+9=10$ أي: $4u_0+18=10$ و بالتالي: $u_0=-2$.

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=-2+3n$

3.تعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n=145$.

أي: $u_n=-2+3n=145$ يعني: $n=49$ $u_{49}=145$

4. حساب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}$.

$$\begin{aligned} S&=u_0+u_1+u_2+...+u_{49} \\ &=50\left(\frac{u_0+u_{49}}{2}\right) \\ &=50\left(\frac{-2+145}{2}\right) \\ &=3575 \end{aligned}$$

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n=2u_n+3$.

احسب المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}$.

$$\begin{aligned} S'&=v_0+v_1+v_2+...+v_{49} \\ &=2S+3(50) \\ &=2(3575)+150 \\ &=7300 \end{aligned}$$

📖حل التمرين 3:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1=20$ و $u_3=320$.

1.اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

من القانون : نضع: $n=3; p=1$

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$
$$\frac{u_3}{u_1} = q^2$$
$$q^2 = \frac{320}{20} = 16$$
$$q = 4, q = -4$$

$q=-4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q=4$

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n:

$u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$.

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \\ &= 5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right) \\ &= \frac{-5}{3}\left(1-4^{n+1}\right) \end{aligned}$$

4.استنتاج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$

$$S' = \frac{-5}{3}\left(1-4^{6+1}\right) = 27305$$

حل التمرين 4:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.تعين الأساس r للمتتالية (u_n).

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

و منه:

$$\begin{aligned} &-5 + 3r - 5 + 7r = 50 \\ &10r - 10 = 50 \\ &10r = 60 \\ &r = 6 \end{aligned}$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n-5$.

لدينا: $u_0 = -5$ و $r = 6$ و بالتالي: $u_n = 6n-5$

3.أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

نحل المعادلة:
$$\begin{aligned} 6n-5 &= 2017 \\ n &= 337 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0 = -5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

أي:
$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{-5+6n-5}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right) \\ &= (n+1)(-5+3n) \\ &= 3n^2 - 2n - 5 \end{aligned}$$

حل التمرين5:

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.حساب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

و بالتالي:
$$\begin{aligned} u_3 + u_5 &= 2u_4 \\ 2u_4 &= 20 \\ u_4 &= 10 \end{aligned}$$

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.لدينا:

معناه:
$$\begin{aligned} u_4 &= 10 \\ 2u_4 - u_5 &= 7 \\ 2(10) - u_5 &= 7 \\ u_5 &= 13 \end{aligned}$$

3.استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان:
$$\begin{aligned} r &= u_5 - u_4 \\ r &= 13 - 10 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

حساب u_0.

$u_4 = u_0 + 4r$

نأخذ المعادلة: $u_0 + 4(3) = 10$

$u_0 = -2$

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n - 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n - 2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

و بالتالي:

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{-2 + 3n - 2}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{-4 + 3n}{2}\right) \end{aligned}$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right) = 33$$

أي: $(n+1)(-4+3n) = 66$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل: $n = 5$

حل التمرين 6:

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100} - 1}{2}$.

3.نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$ ، $b = 6x - 3$ ، $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x = \frac{4}{3}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 **ب-**هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ **ج-** لا حسابية ولا هندسية

حل التمرين 7:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$، (u_n) متتالية:

<u>**أ-** متزايدة تماما</u>

لأن: $u_{n+1} - u_n > 0$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n = 3 \times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1.

3. المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n - 1\right)$

حل التمرين 8:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. اثبات أن $u_1 = 24$،

لدينا: $u_0 \times u_2 = 576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

و بالتالي:
$$u_0 \times u_2 = u_1^2$$
$$u_1^2 = 576$$
$$u_1 = 24; u_1 = -24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1 = 24$ استنتاج قيمة u_0:.

لأن:
$$u_0 + u_1 = 30$$
$$u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24$$
$$u_0 = 6$$

2. بين أن $q = 4$، نعلم أن:
$$u_1 = u_0 \times q$$
$$q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n = 6 \times 4^n$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$،

لدين: $u_n = 6 \times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1}$.

$$u_{n+1}-u_n=6\times4^{n+1}-6\times4^n$$
$$=6\times4^n\times4^1-6\times4^n$$
$$=6\times4^n(4-1)$$
$$=6\times4^n(3)=18\times4^n$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن : $u_{n+1}-u_n=18\times4^n>0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4.حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4=256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n).

نقوم بحل المعادلة:

$$u_n=1536$$
$$6\times4^n=1536$$
$$4^n=\frac{1536}{6}=256$$

اذن: $4^n=4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n=4$.

<u>رتبته</u>: 5 لأن الحد الأول هو u_0.

5.احسب بدلالة المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

معناه:

أي:

$$S_n=u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$
$$=24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)$$
$$=24\left(\frac{1-4^n}{-3}\right)$$
$$=-6\left(1-4^n\right)$$
$$=6\left(4^n-1\right)$$

حل التمرين 9:

أ) $\alpha=3$ و منه $u_0=3$

- لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=3$.

* الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=3$.

* نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي أن $u_n=3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ و منه $u_{n+1}=3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . إذن المتتالية (u_n) ثابتة.

- من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=u_0+u_1+...+u_n=(n+1)u_0$ و منه $S_n=3(n+1)$.

ب) $\alpha=2$ و منه $u_0=2$

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.
إذن المتتالية (v_n)متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$ $(v_0=u_0-3)$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
لدينا $v_n=u_n-3$ و منه $u_n=v_n+3$. إذن $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

3. لدينا $S=(v_0+3)+(v_1+3)+...+(v_n+3)=(v_0+v_1+...+v_n)+(3+3+...+3)$
و منه $S=S'+3(n+1)$ حيث $S'=v_0+v_1+...+v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

لدينا $S'=(-1)\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ و منه $S=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+3(n+1)$.

4. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

حلول تمارين المتاليات العددية

بكالوريا 2008-2019

2008 الموضوع الأول (5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n+1$.

1.احسب u_0 ، u_1 و u_2.

2.بين أن (u_n) حسابية يطلب تعين أساسها.عين اتجاه تغير (u_n)

3.تحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟

4.احسب المجموع: $S = u_0+u_1+u_2+...+u_{699}$

حل مقترح

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n+1$.

1) حساب: u_0، u_1 و u_2.

لحساب الحدود u_0، u_1 و u_2 نعوض في عبارة الحد العام أعلاه قيم n بـ 0، 1 و 2 على الترتيب، فنجد:

$u_0=1$ ، $u_1=4$ ، $u_2=7$.

2) - تبين أن (u_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها r:

تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا كان:

$$u_{n+1}=u_n+r$$

لدينا: $u_{n+1}=3(n+1)+1$ ....

$u_{n+1}=3n+3+1$

$u_{n+1}=(3n+1)+3$

ومنه: $u_{n+1}=u_n+3$ ....

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$.

- تعيين اتجاه تغير (u_n)؟

لتعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق:

$$u_{n+1}-u_n$$

من السؤال السابق: $u_{n+1}-u_n=3$ ....

إذن: $u_{n+1}-u_n>0$ ....

ومنه: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ملاحظة:

- كل متتالية حسابية أساسها موجب هي متتالية متزايدة تماما.
- كل متتالية حسابية أساسها سالب هي متتالية متناقصة تماما.

3) تتحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n)، وتحدد رتبته:

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $u_n=2008$ ....

أي: $3n+1=2008$ ....

فنجد: $n=669$ ....

بما أن 669 عدد طبيعي، فإن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

حيث: $u_{669}=2008$ ....

فيكون الحد الذي قيمته 2008 هو: u_{669} ....

ورتبته: 670 ....

(لأن الحد الأول للمتتالية (u_n) هو u_0)

4) حساب المجموع: $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{669}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times(\text{الحد الأخير في المجموع}+\text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S=\frac{669-0+1}{2}(u_0+u_{669})$$

$$S=\frac{670}{2}(1+2008)$$

ومنه نجد: $S=673015$ ....

2008 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1=7$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1}2u_n+1$.

1. احسب u_2 ، u_3 و u_4.

2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n=u_n+1$.

أ-أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها q و حدها الأول u_1.

ب-أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج-نضع: $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ ، أحسب S_n بدلالة n.

د-عين n علما أن $S_n=1016$.

حل مقترح

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1=7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1}=2u_n+1$.

1) حساب: u_2، u_3 و u_4.

- من أجل: $n=1$ لدينا: $u_2=2u_1+1$ نجد: ...... $u_2=15$
- من أجل: $n=2$ لدينا: $u_3=2u_2+1$ نجد: ...... $u_3=31$
- من أجل: $n=3$ لدينا: $u_4=2u_3+1$ نجد: ...... $u_4=63$

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n=u_n+1$.

أ- نثبت أن (v_n) هندسية ونعين أساسها q وحدها الأول v_1:

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان:

$$v_{n+1}=q\times v_n$$

لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}+1$ ....

$v_{n+1}=2u_n+1+1$

$v_{n+1}=2u_n+2$

$v_{n+1}=2(u_n+1)$

ومنه: $v_{n+1}=2\times v_n$ ....

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول v_1:

حيث: $v_1=u_1+1$ ....

بالتعويض نجد: $v_1=8$ ....

ب- نكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم نستنتج عبارة u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول v_1 بالعلاقة:

$$v_n=v_1\times q^{n-1}$$

ومنه: $v_n=8\times2^{n-1}$ ....

لدينا: $v_n=u_n+1$ أي: $u_n=v_n-1$.

ومنه: $u_n=8\times2^{n-1}-1$ ....

جـ- نضع: $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$.

حساب S_n بدلالة n:

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n=(\text{الحد الأول في المجموع})\times\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

حيث: $q=2$ و $v_1=8$

$$S_n=v_1\times\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}$$

$$S_n=8\times\frac{1-2^n}{1-2}$$

ومنه: $S_n=8(2^n-1)$ ....

د- نعين n علما أن $S_n=1016$:

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n=1016$ ....

أي: $8(2^n-1)=1016$ ....

$2^n-1=127$

$2^n=128$

$2^n=2^7$ لأن: $128=2^7$.

بالمطابقة نجد: $n=7$ ....

2009 الموضوع الأول (5 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ و بالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$.

1.أ-احسب الأساس r للمتتالية (u_n).

ب-احسب الحد العاشر.

2.أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3.بين أن الحد (-2008) هو حد من حدود (u_n) .محددا رتبته.

4.احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + ... + u_{671}$.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$.

1) ا- حساب الأساس r للمتتالية (u_n):

لحساب الأساس r نكتب كلا من u_2 و u_5 بدلالة r.

حيث: $u_2 = u_1 + r$ أي: $u_2 = 2 + r$.

و $u_5 = u_1 + 4r$ أي: $u_5 = 2 + 4r$.

لدينا: .... $u_2 - 2u_5 = 19$

$(2 + r) - 2(2 + 4r) = 19$

$2 + r - 4 - 8r = 19$

$-2 - 7r = 19$

$-7r = 21$

ومنه نجد: .... $r = -3$

ب- حساب الحد العاشر:

الحد العاشر هو u_{10} حيث: $u_{10} = u_1 + 9r$.

ومنه: .... $u_{10} = -25$

2) نكتب عبارة u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$u_n = 2 + (-3)(n-1)$

$u_n = 2 - 3n + 3$

ومنه نجد: .... $u_n = 5 - 3n$

3) نبين أن الحد (-2008) هو حد من حدود (u_n)، ونحدد رتبته:

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $u_n = -2008$

أي: .... $5 - 3n = -2008$

$3n = 2013$

ومنه نجد: .... $n = 671$

بما أن 671 عدد طبيعي، فإن العدد -2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

ومنه: .... $u_{671} = -2008$

فيكون الحد الذي قيمته -2008 هو: .... u_{671}

ورتبته: 671

(لأن الحد الأول للمتتالية (u_n) هو u_1)

4) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{671 - 1 + 1}{2} \times (u_1 + u_{671})$$

$$S = \frac{671}{2} \times (2 - 2008)$$

$S = -671 \times 1003$

ومنه نجد: .... $S = -673013$

2009- الموضوع الثاني (7 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب.

1.عين أساس هذه المتتالية و حدها الأول u_0.اذا علمت أن: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$.

3.احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_{671}$ ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب.

1) نعين q أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_0 علما أن: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

نكتب كلا من الحدين u_3 و u_5 بدلالة q و u_0.

حيث: $u_3 = u_0 \times q^3$ و $u_5 = u_0 \times q^5$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين q و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0 \times q^3 = 144 \;......\; 1 \\ u_0 \times q^5 = 576 \;......\; 2 \end{cases}$$

بقسمة 2 على 1: .... $\dfrac{u_0 \times q^5}{u_0 \times q^3} = \dfrac{576}{144}$

أي: .... $q^2 = 4$

وبما أن الأساس موجب فإن: .... $q = 2$

نعوض قيمة q في المعادلة 1 مثلا فينتج: .... $8u_0 = 144$

ومنه نجد: .... $u_0 = 18$

2) نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 18 \times 2^n$:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

بعد التعويض نجد: .... $u_n = 18 \times 2^n$

3) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

حيث: $q = 2$ و $u_0 = 18$.

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 18 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

ومنه نجد: .... $S_n = 18(2^{n+1} - 1)$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $S_n = 1134$

أي: .... $18(2^{n+1} - 1) = 1134$

$2^{n+1} - 1 = 63$

$2^{n+1} = 64$

$2^{n+1} = 2^6$

بالمطابقة نجد: .... $n + 1 = 6$

ومنه: .... $n = 5$

ملاحظة:

قمنا بتحليل العدد 64 إلى جداء عوامل أولية فنتج: $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

أي: $64 = 2^6$.

ومنه يمكن حل المعادلة: $2^{n+1} = 2^6$ بالمطابقة.

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

2010 الموضوع الأول (5 نقاط)

I. (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10}=31$ و $u_{15}=46$.

1. عين أساسها و حدها الأول u_0.
2. أكتب u_n بدلالة n.
3. بين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).
4. احسب المجموع: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{2009}$

II. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=2\times 8^n$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول v_0.
2. احسب بدلالة n المجموع: $S'=v_0+v_1+...+v_n$

حل مقترح

I- (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{15}=46$ و $u_{10}=31$.

1) تعين الأساس r والحد الأول u_0:

نكتب كلا من الحدين u_{10} و u_{15} بدلالة r و u_0.

حيث: $u_{10}=u_0+10r$ و $u_{15}=u_0+15r$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين r و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0+10r=31 & ...1 \\ u_0+15r=46 & ...2 \end{cases}$$

يطرح 1 من 2: ..... $(u_0+15r)-(u_0+10r)=46-31$

$u_0+15r-u_0-10r=15$

$5r=15$

ومنه نجد: .... $r=3$

نعوض قيمة r في المعادلة 1 مثلا فينتج: .... $u_0+30=31$

ومنه نجد: .... $u_0=1$

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$u_n=u_0+n\times r$

بالتعويض نجد: .... $u_n=1+3n$

3) نبين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل المعادلة: .... $u_n=6028$

أي: .... $1+3n=6028$

$3n=6027$

ومنه نجد: .... $n=2009$

بما أن 2009 عدد طبيعي، فإن العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).

ومنه: .... $u_{2009}=6028$

4) حساب المجموع S: $S=u_0+u_1+\cdots+u_{2009}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times(\text{الحد الأول في المجموع}+\text{الحد الأخير في المجموع})$$

$$S=\frac{2009-0+1}{2}\times(u_0+u_{2009})$$

$$S=\frac{2010}{2}\times(1+6028)$$

ومنه نجد: .... $S=6059145$

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=2\times 8^n$.

1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية ونعين أساسها وحدها الأول v_0:

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان:

$v_{n+1}=v_n\times q$

لدينا: .... $v_{n+1}=2\times 8^{n+1}$

$v_{n+1}=2\times 8^n\times 8$

ومنه: .... $v_{n+1}=v_n\times 8$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q=8$ وحدها الأول: $v_0=2$.

2) حساب بدلالة n المجموع S': $S'=v_0+v_1...+v_n$.

تعطى عبارة المجموع S' بالعلاقة التالية:

$$S'=(\text{الحد الأول في المجموع})\times\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

$$S'=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$$

$$S'=2\times\frac{1-8^{n+1}}{1-8}$$

ومنه نجد: .... $S'=\frac{2}{7}(8^{n+1}-1)$

2010 الموضوع الثاني (7 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، أساسها و حدها الأول u_0، حيث: $u_1=6$ و $u_4=48$.

1. أ- احسب الأساس والحد الأول للمتتالية (u_n).

ب- استنتج أن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي: .

2. أ- علما أن: $2^8=256$، بين أن 768 حد من حدود المتتالية (u_n)

ب- احسب المجموع: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_7$.

3. (v_n) متتالية عددية معرفة ب: $v_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=2v_n-1$.

أ- احسب v_1، v_2، v_3.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=3\times 2^2+1$

ج- احسب بدلالة n المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+...+v_7$.

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

أساسها q وحدها الأول u_0 حيث: $u_1=6$ و $u_4=48$.

1) أ- حساب الأساس q والحد الأول u_0 للمتتالية (u_n):

نكتب كلا من الحدين u_1 و u_4 بدلالة q و u_0.

حيث: $u_1=u_0\times q$ و $u_4=u_0\times q^4$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين q و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0\times q=6 & ...1 \\ u_0\times q^4=48 & ...2 \end{cases}$$

بقسمة 2 على 1: .... $\frac{u_0\times q^4}{u_0\times q}=\frac{48}{6}$

أي: .... $q^3=8$

ومنه نجد: .... $q=2$

نعوض قيمة q في المعادلة 1 مثلا فينتج: .... $2u_0=6$

ومنه نجد: .... $u_0=3$

ب- استنتاج أن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي:

$u_n=3\times 2^n$

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$u_n=u_0\times q^n$

حيث: $q=2$ و $u_0=3$.

بعد التعويض نجد: .... $u_n=3\times 2^n$

2) أ- علما أن: $2^8=256$.

نبين أن العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل المعادلة: .... $u_n=768$

أي: .... $3\times 2^n=768$

$2^n=256$

علما أن: .... $2^8=256$

فإن: .... $2^n=2^8$

ومنه نجد: .... $n=8$

ب- حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots u_7$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

$S = u_0 \times \frac{1-q^{7-0+1}}{1-q}$ حيث $q = 2$ و $u_0 = 3$

$S = 3 \times \frac{1-2^8}{1-2}$

$S = 3(2^8-1)$

ومنه نجد: .... $S = 765$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

أ- حساب: v_1 ، v_2 ، v_3.

- من أجل: $n = 0$ لدينا: $v_1 = 2v_0 - 1$ نجد: .... $v_1 = 7$
- من أجل: $n = 1$ لدينا: $v_2 = 2v_1 - 1$ نجد: ...... $v_2 = 13$
- من أجل: $n = 2$ لدينا: $v_3 = 2v_2 - 1$ نجد: ...... $v_3 = 25$

ب- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

$v_n = 3 \times 2^n + 1$

نضع: .... $P(n): v_n = 3 \times 2^n + 1$

- من اجل $n = 0$ لدينا: $v_0 = 4$ و $3 \times 2^0 + 1 = 4$.

ومنه $P(0)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $v_n = 3 \times 2^n + 1$

- ونبرهن ان $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

لدينا فرضا: .... $v_n = 3 \times 2^n + 1$

نضرب طرفي المساواة في العدد $(+2)$:

$2v_n = 2(3 \times 2^n + 1)$

$2v_n = 3 \times 2^n \times 2 + 2$

$2v_n = 3 \times 2^{n+1} + 2$

نضيف إلى طرفي المساواة العدد (-1):

$2v_n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 2 - 1$

$2v_n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$

ولدينا: .... $v_{n+1} = 2v_n - 1$

ومنه: .... $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3 \times 2^n + 1$.

جـ- حساب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 \ldots + v_7$.

لدينا: .... $v_n = 3 \times 2^n + 1$

وأيضا: .... $u_n = 3 \times 2^n$

ومنه: .... $v_n = u_n + 1$

لدينا: .... $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$

$S' = (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_7 + 1)$

$S' = (u_0 + u_1 + \cdots + u_7) + (1 + 1 + \cdots + 1)$

$S' = S + 8 \times 1$

أي: .... $S' = S + 8$

ومنه نجد: .... $S' = 773$

2011 الموضوع الأول (6 نقاط)

1. (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث:

$$u_0 + u_3 = 28$$

أ-احسب u_0،ثم اكتب الحد العام u_n بدلالة n.

ب-احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9$.

2. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $v_n = 1 - 5n$

أ-بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها ثم استنتج اتجاه تغيرها.

ب-احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_9$.

3. نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$k_n = 1 + 3^n - 5n$.

تحقق أن: $k_n = u_n + v_n$ ثم احسب المجموع:

$S = k_0 + k_1 + \ldots + k_9$.

حل مقترح

1) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث:

$u_0 + u_3 = 28$

أ- حساب u_0:

نكتب u_3 بدلالة u_0 و q كما يلي:

$u_3 = u_0 \times q^3$ أي: $u_3 = 27u_0$. (لأن: $q = 3$)

لدينا: .... $u_0 + u_3 = 28$

$u_0 + 27u_0 = 28$

$28u_0 = 28$

ومنه: .... $u_0 = 1$

نكتب الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$u_n = u_0 \times q^n$

حيث: $q = 3$ و $u_0 = 1$.

بعد التعويض نجد: .... $u_n = 3^n$

ب- حساب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

تعطى عبارة المجموع S_1 بالعلاقة التالية:

$$S_1 = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

$S_1 = u_0 \times \frac{1-q^{9-0+1}}{1-q}$ حيث $q = 3$ و $u_0 = 1$

$S_1 = 1 \times \frac{1-3^{10}}{1-3}$

$S_1 = \frac{1}{2}(3^{10} - 1)$

ومنه نجد: .... $S_1 = 29524$

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$v_n = 1 - 5n$

أ- نبين أن (v_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها:

تكون (v_n) متتالية حسابية إذا كان:

$v_{n+1} = v_n + r$.

لدينا: .... $v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$

أي: .... $v_{n+1} = 1 - 5n - 5$

$v_{n+1} = (1 - 5n) - 5$

ومنه: .... $v_{n+1} = v_n - 5$

أو: .... $v_{n+1} - v_n = -5$

إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول: $v_0 = 1$.

استنتاج اتجاه تغير (v_n):

بما أن أساس المتتالية (v_n) سالب $(r < 0)$ فإن (v_n) متتالية حسابية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- حساب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$.

تعطى عبارة المجموع S_2 بالعلاقة التالية:

$$S_2 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

حيث: $v_0 = 1$ و $v_9 = -44$ $\quad S_2 = \frac{9-0+1}{2} \times (v_0 + v_9)$

$$S_2 = \frac{10}{2} \times (1 - 44)$$

ومنه نجد: .... $S_2 = -215$

3) نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$$k_n = 1 + 3^n - 5n$$

- نتحقق أن: $k_n = u_n + v_n$:

لدينا: .... $k_n = 1 + 3^n - 5n$

$k_n = (3^n) + (1 - 5n)$

ومنه: .... $k_n = u_n + v_n$

حساب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$.

لدينا: .... $S = k_0 + k_1 + \cdots k_n$

$S = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_9 + v_9)$

$S = (u_0 + u_1 + \cdots + u_9) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_9)$

ومنه: .... $S = S_1 + S_2$

بالتعويض: .... $S = 29524 - 215$

ومنه نجد: .... $S = 29309$

2011 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على بحديهما العام:

$u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.

عين في كل من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

	العبارات	اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1	(u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية	لا حسابية ولا هندسية
2	الحد الخامس و الأربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92	-88
3	المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - n$	$-n^2 - 1$
4	(v_n) هي متتالية هندسية أساسها	$\frac{1}{9}$	9	-9
5	المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة

حل مقترح

1) نبحث عن طبيعة المتتالية (u_n):

لدينا: .... $u_n = -3n$

فيكون: .... $u_{n+1} = -3(n+1)$

أي: .... $u_{n+1} = -3n - 3$

نجد: .... $u_{n+1} = u_n - 3$

من الشكل: .... $u_{n+1} = u_n + r$

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{2}$.

2) نبحث عن الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n):

الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) هو: .... u_{44}

أي: .... $u_{44} = -2 \times 44$

نجد: .... $u_{44} = -88$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{3}$.

3) نحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

حيث: $u_0 = 0$ و $u_n = -2n$ $\quad S = \frac{n-0+1}{2} \times (u_0 + u_9)$

$$S = \frac{n+1}{2} \times (0 - 2n)$$

$$S = -n(n+1)$$

نجد: .... $S = -n^2 - n$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{2}$.

4) نبحث عن طبيعة المتتالية (v_n) ونعين أساسها:

لدينا: .... $v_n = 3^{-2n}$

فيكون: .... $v_{n+1} = 3^{-2(n+1)}$

أي: .... $v_{n+1} = 3^{-2n-2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times 3^{-2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times \frac{1}{3^2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times \frac{1}{9}$

نجد: .... $v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{9}$

من الشكل: .... $v_{n+1} = v_n \times q$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{1}$.

5) نعين اتجاه تغير المتتالية (v_n):

لتعيين اتجاه تغير المتتالية (v_n) ندرس إشارة الفرق: $v_{n+1}-v_n$.

$$v_{n+1}-v_n=3^{-2(n+1)}-3^{-2n}$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n-2}-3^{-2n}$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n}\times 3^{-2}-3^{-2n}$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n}(3^{-2}-1)$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n}\left(\frac{1}{3^2}-1\right)$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n}\left(\frac{1}{9}-1\right)$$
$$v_{n+1}-v_n=-\frac{8}{9}\times 3^{-2n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: .... $v_{n+1}-v_n<0$

لأن: .... $-\frac{8}{9}<0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: .... $3^{-2n}>0$

إذن: (v_n) متناقصة من أجل كل عدد طبيعي n.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{2}$.

2012 الموضوع الأول (6 نقاط)

c, b, a ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r

حيث: $a+b+c=9$.

1.أ-احسب b ثم أكتب a و b بدلالة r.

ب-علما أن: $a\times c=-16$

عين الأساس r ثم استنتج a و c.

2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-2$ و أساسها 5 .

أ- عبر عن الحد العام u_n بدلالة n.

ب-احسب u_{15} ثم استنتج المجموع:

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{15}$$

3.المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n-u_n=0$

احسب المجموع: $S'=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{15}$.

حل مقترح

a، b، c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة تماما أساسها r حيث: $a+b+c=9$.

1) أ- حساب b:

بما أن a، b، c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن:

الوسط الحسابي هو: .... $a+c=2b$

لدينا: .... $a+b+c=9$

$(a+c)+b=9$

$2b+b=9$

أي: .... $3b=9$

ومنه نجد: .... $b=3$

نكتب a و c بدلالة r:

لدينا: .... $b=a+r$

ومنه: .... $a=b-r$

بالتعويض: .... $a=3-r$

ولدينا: .... $c=b+r$

بالتعويض: .... $c=3+r$

ب- علما أن: $a\times c=-16$، نعين الأساس r:

لدينا: .... $a\times c=-16$

بالتعويض: .... $(3-r)\times(3+r)=-16$

بالنشر: .... $9-r^2=-16$

أي: .... $r^2=25$

بما أن الأساس موجب فإن: .... $r=5$

استنتاج a و c:

لدينا: .... $a=3-r$

بالتعويض نجد: .... $a=-2$

ولدينا: .... $c=3+r$

بالتعويض نجد: .... $c=8$

2) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها 5.

أ- نعبر عن الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n=u_0+n\times r$$

بالتعويض نجد: .... $u_n=-2+5n$

ب- حساب u_{15}:

من أجل $n=15$ في عبارة الحد العام:

لدينا: .... $u_{15}=-2+5\times 15$

نجد: .... $u_{15}=73$

استنتاج المجموع: $S=u_0+u_1+\cdots+u_{15}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times(\text{الحد الأول في المجموع}+\text{الحد الأخير في المجموع})$$

حيث: $u_0=-2$ و $u_{15}=73$: $S=\frac{15-0+1}{2}\times(u_0+u_{15})$

$$S = \frac{16}{2} \times (-2 + 73)$$

ومنه نجد: .... $S = 568$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$$8v_n - u_n = 0$$

- حساب المجموع: $S' = v_0 + v_1 \dots + v_{15}$.

لدينا: .... $8v_n - u_n = 0$

ومنه: .... $v_n = \frac{1}{8}u_n$

ولدينا: .... $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$

$$S' = \left(\frac{1}{8}u_0\right) + \left(\frac{1}{8}u_1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{8}u_{15}\right)$$

$$S' = \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{15})$$

ومنه: .... $S' = \frac{1}{8}S$

بالتعويض نجد: .... $S' = 71$

2012 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1.أ-احسب بدلالة r الجداءين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

ب-عين الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

2.نضع $r = 3$.

أ-أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ب-نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$، بين أن: $S_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$.

ج-جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.

3.أ-أكتب الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n .

ب-تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غيرمعدوم:

$$\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

ج-استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1) ا- حساب بدلالة n الجداءين:

$T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

- نكتب u_1 و u_5 بدلالة r و u_3 (لأن u_3 معلوم)

لدينا: .... $u_3 = u_1 + 2r$

ومنه: .... $u_1 = u_3 - 2r$

بالتعويض: .... $u_1 = 7 - 2r$

ولدينا: .... $u_5 = u_3 + 2r$

بالتعويض: .... $u_5 = 7 + 2r$

وعليه: .... $T_1 = u_1 \times u_5$

بالتعويض: .... $T_1 = (7 - 2r) \times (7 + 2r)$

بالنشر نجد: .... $T_1 = 49 - 4r^2$

- نكتب u_2 و u_4 بدلالة r و u_3 (لأن u_3 معلوم)

لدينا: .... $u_3 = u_2 + r$

ومنه: .... $u_2 = u_3 - r$

بالتعويض: .... $u_2 = 7 - r$

ولدينا: .... $u_4 = u_3 + r$

بالتعويض: .... $u_4 = 7 + r$

وعليه: .... $T_2 = u_2 \times u_4$

بالتعويض: .... $T_2 = (7 - r) \times (7 + r)$

بالنشر نجد: .... $T_2 = 49 - r^2$

ب- نعين الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

لدينا من السؤال السابق:

$$\begin{cases} T_1 = 49 - 4r^2 \dots 1 \\ T_2 = 49 - r^2 \quad \dots 2 \end{cases}$$

بطرح 2 من 1: .... $T_2 - T_1 = (49 - r^2) - (49 - 4r^2)$

أي: .... $T_2 - T_1 = 49 - r^2 - 49 + 4r^2$

فنجد: .... $T_2 - T_1 = 3r^2$

ولدينا: .... $T_2 - T_1 = 27$

ومنه: .... $3r^2 = 27$

أي: .... $r^2 = 9$

بما أن (u_n) متتالية حسابية متزايدة فإن: .... $r = 3$

2) نضع: $r = 3$.

أ- نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

لدينا: .... $u_1 = 7 - 2r$

أي: .... $u_1 = 1$

بالتعويض في عبارة الحد العام: .... $u_n = 1 + 3(n - 1)$

ومنه نجد: .... $u_n = 3n - 2$

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

- نبين أن: $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$

$S_n = \frac{n-1+1}{2} \times (u_1 + u_n)$

$S_n = \frac{n}{2} \times (1 + 3n - 2)$

$S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

بالنشر نجد: .... $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$

جـ- نجد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$

نحل في N المعادلة: .... $S_n = 145$

أي: .... $3n^2 - n - 290 = 0$

نجد: .... $\Delta = 3481 = (59)^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما: .... $n_1 = 10$ و $n_2 = -\frac{29}{3}$

وبما أن n عدد طبيعي فإن: .... $n = 10$

3) أ- نكتب الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n:

لديناً: .... $u_n = 3n - 2$

فيكون: .... $u_{n+5} = 3(n+5) - 2$

أي: .... $u_{n+5} = 3n + 15 - 2$

ومنه: .... $u_{n+5} = 3n + 13$

ب- نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

لدينا: .... $u_{n+5} = 3n + 13$

فيكون: .... $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n+13}{n}$

أي: .... $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n}$

ومنه: .... $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

جـ- استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا:

يكون العدد: $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا إذا كان العدد: $\frac{13}{n}$ طبيعيا.

ويكون العدد: $\frac{13}{n}$ طبيعيا إذا كان n من قواسم العدد 13.

وقواسم العدد 13 هي: .... $D_{13} = \{1 , 13\}$

ومنه قيم n هي: .... $n = 1$ و $n = 13$

2013 الموضوع الأول (6 نقاط)

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ و أساسها 3.

1.أ-عبرعن v_n بدلالة n.

ب-احسب بدلالة n الفرق $v_{v+1} - v_n$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n).

2.نضع، من أجل عدد طبيعي غير معدوم n:

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n .

ب-عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

ج-أثبت بالتراجع أنه، من أجل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 .

حل مقترح

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1) أ- نعبر عن v_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول v_0 بالعلاقة:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

حيث: $q = 3$ و $v_0 = 2$،

بعد التعويض نجد: .... $v_n = 2 \times 3^n$

ب- حساب بدلالة n الفرق: $v_{n+1} - v_n$،

$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$

$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 3^n$

$v_{n+1} - v_n = (3-1)2 \times 3^n$

$v_{n+1} - v_n = 2 \times 2 \times 3^n$

ومنه: .... $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n):

بما أن: .... $4 > 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: .... $3^n > 0$

فإن: .... $4 \times 3^n > 0$

ومنه: .... $v_{n+1} - v_n > 0$

إذن: (v_n) متتالية هندسية متزايدة تماما على N.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

أ- حساب بدلالة n المجموع S_n:

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

حيث $q = 3$ و $v_0 = 2$ .... $S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}$

$$S_n = 2 \times \frac{1-3^n}{1-3}$$

ومنه نجد: .... $S_n = 3^n - 1$

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

نحل في N المعادلة: .... $S_n = 80$

أي: .... $3^n - 1 = 80$

أو: .... $3^n = 81$

حيث: .... $81 = 3^4$

ومنه: .... $3^n = 3^4$

بالمطابقة نجد: .... $n = 4$

جـ- أثبت بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

لاحظ أن: .... $S_n = 3^n - 1$

العدد S_n يقبل القسمة على 2 يعني: .... $S_n \equiv 0\ [2]$

نضع: .... $P(n):\ S_n \equiv 0\ [2]$

- من أجل $n = 0$ لدينا: $S_0 = 0$ و $0 \equiv 0\ [2]$.
- ومنه $P(0)$ صحيحة.
- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $S_n \equiv 0\ [2]$

- ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

• ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: $S_{n+1} \equiv 0\ [2]$ ....

لدينا فرضا: $S_n \equiv 0\ [2]$ ....

$3^n - 1 \equiv 0\ [2]$

$3^n \equiv 1\ [2]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد $(+3)$:

$3 \times 3^n \equiv 3 \times 1\ [2]$

$3 \times 3^n \equiv 3\ [2]$

ولدينا: $3 \equiv 1\ [2]$ ....

وحسب خاصية التعدي يكون: $3^{n+1} \equiv 1\ [2]$ ....

نضيف العدد (-1) إلى طرفي الموافقة:

$(3^{n+1} - 1) \equiv (1 - 1)\ [2]$

$3^{n+1} - 1 \equiv 0\ [2]$

ومنه: $S_{n+1} \equiv 0\ [2]$ ....

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n \equiv 0\ [2]$.

أي من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

2013 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:

$u_0 + u_1 + u_2 +_3 = 34$.

1.احسب u_0.

2.بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 5n+1$.

3.عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

4.احسب بدلالة n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2013}$.

5.المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 1$

أ-ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n).

ب-احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{2013}$.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$

1) حساب u_0:

نكتب: u_1، u_2 و u_3 بدلالة r و u_0.

لدينا: $u_1 = u_0 + r$ ....

ومنه: $u_1 = u_0 + 5$ ....

لدينا: $u_2 = u_0 + 2r$ ....

ومنه: $u_2 = u_0 + 10$ ....

لدينا: $u_3 = u_0 + 3r$ ....

ومنه: $u_3 = u_0 + 15$ ....

لدينا: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$ ....

$(u_0) + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34$

$4u_0 + 30 = 34$

$4u_0 = 4$

فنجد: $u_0 = 1$ ....

2) نبين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 5n + 1$.

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

ومنه نجد: $u_n = 5n + 1$ ....

3) نعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$

$[5(n+1) + 1] + [5n + 1] - 8n = 4033$

$5n + 6 + 5n + 1 - 8n = 4033$

$2n + 7 = 4033$

$2n = 4026$

ومنه: $n = 2013$ ....

4) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{2013 - 0 + 1}{2} \times (u_0 + u_{2013})$$

حيث: $u_0 = 1$ و $u_{2013} = 10066$.

$$S = \frac{2014}{2} \times (1 + 10066)$$

نجد: $S = 10137469$ ....

5) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة:

$$v_n = 2u_n + 1$$

أ- ندرس اتجاه تغير المتتالية (v_n):

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) ندرس إشارة الفرق:

$$v_{n+1} - v_n$$

$v_{n+1} - v_n = (2u_{n+1} + 1) - (2u_n + 1)$

$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 1 - 2u_n - 1$

$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} - 2u_n$

$v_{n+1} - v_n = 2[5(n+1) + 1] - 2[5n + 1]$

$v_{n+1} - v_n = 2(5n + 6) - 2(5n + 1)$

$v_{n+1} - v_n = 10n + 12 - 10n - 2$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = 10$ ....

إذن: $v_{n+1} - v_n > 0$ ....

ومنه: (v_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- حساب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_{2013}$.

$S' = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_{2013}$

$S' = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \cdots + (2u_{2013} + 1)$

$S' = (2u_0 + 2u_1 + \cdots + 2u_{2013}) + (1 + 1 + \cdots 1)$

$S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}) + (1 + 1 + \cdots + 1)$

$S' = 2S + 2014 \times 1$

ومنه: $S' = 2S + 2014$ ....

نجد: $S' = 20276952$ ....

2014 الموضوع الأول (6 نقاط)

عين الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة، في كل حالة من الحالات الأربعة الأتية، مع التعليل:

1. (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2=1$. الحد العام للمتتالية (u_n) هو:

أ- $u_n=1+3n$ ب- $u_n=7+3n$ ج- $u_n=-5+3n$.

2. n عدد طبيعي .المجموع: $1+2+3+\ldots+n$ يساوي:

أ- $\frac{n^2+n}{2}$ ب- $\frac{n(n-1)}{2}$ ج- $\frac{n^2+1}{2}$.

3. x عدد حقيقي .تكون الأعداد ، و بهذا الترتيب حدود متعاقبة لمتتالية هندسية اذا كان:

أ- $x=3$ ب- $x=5$ ج- $x=-2$.

4. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها العام $v_n=3\times 2^{n+1}$.

أساس المتتالية (v_n) هو:

أ- 2 ب- 3 ج- 6 .

حل مقترح

نعين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية، مع التعليل.

1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2=1$.

الحد العام للمتتالية (u_n):

نفرض أن الحد الأول هو u_0.

فيكون: .... $u_2=u_0+2r$

أي: .... $u_0=u_2-2r$

نجد: .... $u_0=-5$

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n=u_0+n\times r$$

ومنه نجد: .... $u_n=-5+3n$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{3}$.

ملاحظة:

يمكن اعتبار u_2 هو الحد الأول للمتتالية (u_n)، فتصبح عبارة الحد العام كالتالي: $u_n=u_2+(n-2)r$.

بالتعويض تتحصل على نفس النتيجة: .... $u_n=-5+3n$

2) n عدد طبيعي

حساب المجموع: $S=1+2+3+\cdots+n$.

• لاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 1.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times(\text{الحد الأخير في المجموع}+\text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

نجد: .... $S=\frac{n^2+n}{2}$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{1}$.

3) x عدد حقيقي، تكون الأعداد $x-2$ ،x ،$x+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

الوسط الهندسي: .... $x^2=(x-2)(x+1)$

بالنشر: .... $x^2=x^2+x-2x-2$

بعد حل المعادلة نجد: .... $x=-2$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{3}$.

4) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$.

حدها العام: $v_n=2\times 3^{n+1}$.

حساب أساس المتتالية:

$$v_{n+1}=2\times 3^{(n+1)+1}$$
$$v_{n+1}=2\times 3^{n+1}\times 3$$

نجد: .... $v_{n+1}=v_n\times 3$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{2}$.

2014 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي: $v_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=5v_n+4$.

1. احسب v_1، v_2 و v_3.

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :. $u_n=v_n+1$.

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $u_0=2$.

ب-أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

ج-حلل العدد 1250 الى جداء عوامل أولية و استنتج أنه حد من حدود المتتالية (u_n).

3. احسب بدلالة n المجموع حيث:

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$$

4. احسب بدلالة n المجموع حيث: $S'_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}$

حل مقترح

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=5v_n+4$.

1) حساب: v_1، v_2 و v_3.

- من أجل: $n=0$ لدينا: $v_1=5v_0+4$ نجد: .... $v_1=9$
- من أجل: $n=1$ لدينا: $v_2=5v_1+4$ نجد: ...... $v_2=49$
- من أجل: $n=2$ لدينا: $v_3=5v_2+4$ نجد: ..... $v_3=249$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=v_n+1$.

ا- نبين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $u_0=2$:

تكون المتتالية (u_n) هندسية اذا كان:

$$u_{n+1}=u_n\times q$$

لدينا: .... $u_{n+1}=v_{n+1}+1$

$$u_{n+1}=(5v_n+4)+1$$
$$u_{n+1}=5v_n+5$$
$$u_{n+1}=5(v_n+1)$$

ومنه: .... $u_{n+1}=5\times u_n$

إذن: (u_n) متتالية هندسية أساسها: $q=5$ و حدها الأول u_0:

حيث: .... $u_0=v_0+1$

و منه نجد: .... $u_0=2$

ب- نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n=u_0\times q^n$$

حيث: $q=5$ و $u_0=2$.

بعد التعويض نجد: .... $u_n=2\times 5^n$

استنتاج v_n بدلالة n:

لدينا: .... $u_n=v_n+1$

أي: .... $v_n=u_n-1$

و منه: .... $v_n=2\times 5^n-1$

جـ- نحلل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية:

1250	2
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$1250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
$1250 = 2 \times 5^4$

استنتاج أن 1250 حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $u_n = 1250$

أي: .... $2 \times 5^n = 1250$

ولدينا: .... $1250 = 2 \times 5^4$

فيكون: .... $2 \times 5^n = 2 \times 5^4$

بالمطابقة نجد: .... $n = 4$

بما أن 4 عدد طبيعي، فإن العدد 1250 حد من حدود المتتالية (u_n).

حيث: .... $u_4 = 1250$

3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

حيث $q = 5$ و $u_0 = 2$

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 5^n}{1 - 5}$$

ومنه نجد: .... $S_n = \frac{1}{2}(5^n - 1)$

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث:
$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$
$S'_n = (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \cdots + (u_{n-1} - 1)$
$S'_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) - (1 + 1 + \cdots + 1)$
$S'_n = S_n - n \times 1$

ومنه: .... $S'_n = S_n - n$

بالتعويض: .... $S'_n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n$

2015 الموضوع الأول (7 نقاط)

المتتالية الهندسية التي وحدها الأول u_0 و أساسها $q = 3$ (u_n)

1.احسب u_1 و u_2.

2.أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج u_5.

3.عين اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

ب-استنتج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \ldots + 486$

5.أ-عين باقي القسمة الاقليدية على 5 لكل من الأعداد 3، 3^2، 3^3 و 3^4.

ب-استنتج أنه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1[5]$.

6.عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابل للقسمة على 5.

حل مقترح

(u_n) **متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حيث:**
$u_0 = 2$ و $q = 3$.

1) حساب u_1 و u_2:

لدينا: .... $u_1 = u_0 \times q$

ومنه: .... $u_1 = 6$

ولدينا: .... $u_2 = u_0 \times q^2$

ومنه: .... $u_2 = 18$

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث: $q = 3$ و $u_0 = 2$.

بعد التعويض نجد: .... $u_n = 2 \times 3^n$

استنتاج u_5:

لدينا: .... $u_5 = 2 \times 3^5$

ومنه: .... $u_5 = 486$

3) نعين اتجاه تغير المتتالية (u_n):

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس اشارة الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 3^n$
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^n(3 - 1)$
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 2 \times 3^n$
$u_{n+1} - u_n = 4 \times 3^n$

بما أن: .... $4 > 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: .... $3^n > 0$

فإن: .... $4 \times 3^n > 0$

ومنه: .... $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

حيث $q = 3$ و $u_0 = 2$

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3}$$

ومنه نجد: .... $S_n = (3^n - 1)$

ب- استنتاج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$.

لاحظ أن:

$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_5$

$$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 \times \frac{1 - q^{5-0+1}}{1 - q}$$

$$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 2\frac{1 - 3^6}{1 - 3}$$

$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 3^6 - 1$

ومنه: .... $2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 728$

ملاحظة:

يمكن تعويض n مباشرة في علاقة S_n بالعدد 6 (لدينا 6 حدود في المجموع: $2+6+18+54+162+486$).

5) أ- تعين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل من الأعداد: 3، 3^2، 3^3 و 3^4.

باقي قسمة 3 على 5 هو: 3

باقي قسمة 3^2 على 5 هو: 4

باقي قسمة 3^3 على 5 هو: 2

باقي قسمة 3^4 على 5 هو: 1

العدد	3	3^2	3^3	3^4
الباقي على 5	3	4	2	1

ب- استنتاج انه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1\ [5]$:

لدينا من السؤال السابق: .... $3^4 \equiv 1\ [5]$

وحسب خواص الموافقات فإن: .... $(3^4)^k \equiv 1^k\ [5]$

ومنه من اجل كل k من $\mathbb{N}$: .... $3^{4k} \equiv 1\ [5]$

6) تعين الاعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

$3^n - 1$ يقبل القسمة على 5 يعني: .... $3^n - 1 \equiv 0\ [5]$

أي: .... $3^n \equiv 1\ [5]$

ومنه: .... $n = 4k \quad (k \in \mathbb{N})$

2015 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r حيث: $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

1.أ-بين أن : $u_1 + u_3 = 1$.

ب-عين الحد الأول ، ثم استنتج أن .

2. أكتب u_n بدلالة n.

3.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

ب-عين قيمة العدد الطبيعي التي يكون من أجلها $S_n = \frac{-657}{2}$

4. n عدد طبيعي غير معدوم نضع :

$$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$$

أ-تحقق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$$

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{1}{6} n(n+1)(14-5n)$$

حل مقترح

(u_n) متتالية **حسابية** حدها الأول u_1 وأساسها r حيث: $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

1) أ- نبين أن: $u_1 + u_3 = 1$.

الوسط الحسابي: .... $u_1 + u_3 = 2u_2$

بالتعويض: .... $u_1 + u_3 = 2 \times \frac{1}{2}$

ومنه: .... $u_1 + u_3 = 1$

ب- نعين الحد الأول u_1:

لدينا: .... $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \dots 1 \\ u_1 + u_3 = 1 \dots 2 \end{cases}$

بجمع 1 و 2 طرف لطرف: .... $u_1 - u_3 + u_1 + u_3 = 6$

نجد: .... $2u_1 = 6$

ومنه: .... $u_1 = 3$

استنتاج أن: $r = -\frac{5}{2}$.

لدينا: .... $u_2 = u_1 + r$

ومنه: .... $r = u_2 - u_1$

نجد: .... $r = -\frac{5}{2}$

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية **حسابية** حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

ومنه: .... $u_n = 3 - \frac{5}{2}(n-1)$

نجد: .... $u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$

3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S_n = \frac{n-1+1}{2} \times (u_1 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times \left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)$$

نجد: .... $S_n = \frac{n(17-5n)}{4}$

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $S_n = -\frac{657}{2}$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $S_n = -\frac{657}{2}$

أي: .... $5n^2 - 17n - 1314 = 0$

نجد: .... $\Delta = 26569 = (163)^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما: .... $n_1 = 18$ و $n_2 = -\frac{73}{5}$

وبما أن n عدد طبيعي فإن: .... $n = 18$

نرفض القيمة n_2 لأن $\left(-\frac{73}{5}\right)$ ليس عددا طبيعيا.

4) n عدد طبيعي غير معدوم، نضع:

$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$.

أ- تتحقق انه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.

بالنشر: ..... $(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n$

أي: ..... $(n+2)(9-5n) = -5n^2 + (9n - 10n) + 18$

ومنه: .... $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع، نثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

نضع: .... $P(n) : T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

- من أجل $n = 1$

لدينا: .... $T_1 = 1 \times u_1 = 3$

و: .... $T_1 = \frac{1}{6} \times 1 \times (1+1)(14 - 5 \times 1) = 3$

ومنه $P(1)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

- ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

لدينا فرضا: .... $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$

$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n + (n+1)u_{n+1}$

$T_{n+1} = T_n + (n+1)u_{n+1}$

حيث: .... $u_{n+1} = -\frac{5}{2}(n+1) + \frac{11}{2}$

$$u_{n+1} = -\frac{5}{2}n - \frac{5}{2} + \frac{11}{2}$$

$$u_{n+1} = -\frac{5}{2}n + \frac{6}{2}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(6-5n)$$

ومنه: .... $T_{n+1} = T_n + \frac{1}{2}(n+1)(6-5n)$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + \frac{1}{2}(n+1)(6-5n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + \frac{3}{6}(n+1)(6-5n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + 3(6-5n)]$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(14n - 5n^2 + 18 - 15n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18)$$

لدينا: .... $-5n^2 - n + 18 = (n+2)(9-5n)$

ومنه: .... $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

2016 الموضوع الأول (7 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n = 3n - 2$.

1.احسب u_0، u_1، u_2 و u_3.

2.بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

ب-عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

حل مقترح

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n = 3n - 2$.

1.حساب u_0، u_1، u_2 و u_3.

$$u_0 = -2$$
$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 4$$
$$u_3 = 7$$

2.اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2$$
$$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$$
$$= 3$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n)

نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = 1954$$

أي: $3n - 2 = 1954$ معناه: $u_{652} = 1954$

$$n = 652 \in \mathbb{N}$$

رتبته 653 لأن الحد الأول هو u_0.

5.أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

و منه

$$= (n+1)\frac{(-2+3n-2)}{2}$$

$$= (n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

نقوم بالنشر نتحصل على: $S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$

ب-تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2 - n - 4}{2} = 328$$

معناه: $3n^2 - n - 4 = 2(328)$

$$3n^2 - n - 660 = 0$$

$n_1 = 15 \in \mathbb{N}$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $n_2 = \dfrac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$

و بالتالي من أجل $n=15$ لدينا: $S_n = 328$

2016 الموضوع الثاني (6 نقاط)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0+u_1+u_2+u_3=10$

1. احسب الحد الأول u_0.
2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.
3. عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.
4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{49}$.
5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{49}$.

حل مقترح

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق:

$$u_0+u_1+u_2+u_3=10$$

نجمع المعادلات تتحصل : $\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 9 \end{cases}$

$$u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10$$

أي: $4u_0 + 18 = 10$ و بالتالي: $u_0 = -2$.

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n = -2 + 3n$

3. تعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

أي: $u_n = -2 + 3n = 145$

$n = 49$ يعني: $u_{49} = 145$

4. حساب المجموع S حيث: $S = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{49}$.

$$S = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{49}$$
$$= 50\left(\frac{u_0+u_{49}}{2}\right)$$
$$= 50\left(\frac{-2+145}{2}\right)$$
$$= 3575$$

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{49}$.

$$S' = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{49}$$
$$= 2S + 3(50)$$
$$= 2(3575) + 150$$
$$= 7300$$

2017 الموضوع الأول (6 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1. بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.
2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.
3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع :

$S = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_6$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية حدودها <u>موجبة تماما</u>، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1. اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$

من القانون : نضع: $n=3; p=1$. $\dfrac{u_3}{u_1} = q^2$

$$q^2 = \frac{320}{20} = 16$$

$$q = 4, q = -4$$

$q = -4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q = 4$

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n:

$u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$.

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$
$$= u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$
$$= 5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right)$$
$$= \frac{-5}{3}\left(1-4^{n+1}\right)$$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_6$

$$S' = \frac{-5}{3}\left(1-4^{6+1}\right) = 27305$$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_6$

2017 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$

و $u_3 + u_7 = 50$.

1. عين الأساس r للمتتالية (u_n).
2. بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.
3. أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ماهي رتبته؟
4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S:

$S = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$

و $u_3 + u_7 = 50$.

1. تعين الأساس r للمتتالية (u_n).

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

و منه:

$$-5+3r-5+7r=50$$
$$10r-10=50$$
$$10r=60$$
$$r=6$$

2.من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n-5$.

لدينا: $u_0=-5$ و $r=6$ و بالتالي: $u_n=6n-5$

3.أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

نحل المعادلة:

$$6n-5=2017$$
$$n=337 \in \mathbb{N}$$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0=-5$

4.حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S:

أي:

$$S = u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$$
$$=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-5+6n-5}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right)$$
$$=(n+1)(-5+3n)$$
$$=3n^2-2n-5$$

استثنائية 2017 الموضوع الأول (6 نقاط)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.أحسبالحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$.

3.استنتج قيمة r واحسب u_0.

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$.

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$$

6.جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n=33$.

حل مقترح

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.حساب الحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

و بالتالي:

$$u_3+u_5=2u_4$$
$$2u_4=20$$
$$u_4=10$$

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$. لدينا:

معناه:

$$u_4=10$$
$$2u_4-u_5=7$$
$$2(10)-u_5=7$$
$$u_5=13$$

3.استنتاج قيمة r

بما أن (u_n) متتالية حسابية فان:

$$r=u_5-u_4$$
$$r=13-10$$
$$r=3$$

حساب u_0.

نأخذ المعادلة:

$$u_4=u_0+4r$$
$$u_0+4(3)=10$$
$$u_0=-2$$

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$.

لدينا: $u_0=-2$ و $r=3$ و بالتالي: $u_n=3n-2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

و بالتالي:

$$S=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$$
$$=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-2+3n-2}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n=33$.

$$(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)=33$$

أي: $(n+1)(-4+3n)=66$ و تصبح: $3n^2-n-70=0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل:

$$n=5$$

استثنائية 2017 الموضوع الثاني (6 نقاط)

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

أ- -17 **ب-** -14 **ج-** -11 .

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101}-1}{2}$ **ب-** $\frac{1-3^{100}}{2}$ **ج-** $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a=2x+2$، $b=6x-3$، $c=4x$

الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$ **ب-** $x=0$ **ج-** $x=\frac{3}{4}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 **ب-** هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ **ج-** لا حسابية ولا هندسية

حل مقترح

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a=2x+2$، $b=6x-3$، $c=4x$

الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 **ب-** هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ **ج-** لا حسابية ولا هندسية

2018 الموضوع الأول (6 نقاط)

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما **ب-** متناقصة تماما **ج-** ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$،

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n=3\times 2^n$ **ب-** $v_n=3\times 2^{n-1}$ **ج-** $v_n=2\times 3^n$

3. المجموع: $S_n=v_1+v_2+\dots+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$ **ب-** $\left(2^n-1\right)$ **ج-** $2\left(3^n-1\right)$

حل مقترح

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما

لأن: $u_{n+1}-u_n>0$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$،

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n=3\times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1.

3. المجموع: $S_n=v_1+v_2+\dots+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$

2018 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1. بين أن $u_1=24$، ثم استنتج قيمة u_0.

2. بين أن $q=4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4. احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1. اثبات أن $u_1=24$'

لدينا: $u_0\times u_2=576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0\times u_2={u_1}^2$$

و بالتالي: ${u_1}^2=576$

$$u_1=24;u_1=-24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1=24$

استنتاج قيمة u_0.:

$$u_0+u_1=30$$

لأن: $u_0=30-u_1=30-24$

$$u_0=6$$

$$u_1=u_0\times q$$

2. بين أن $q=4$، نعلم أن: $q=\frac{u_1}{u_0}=\frac{24}{6}=4$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=6\times 4^n$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$،

لدين: $u_n=6\times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1}=6\times 4^{n+1}$.

$$u_{n+1}-u_n=6\times 4^{n+1}-6\times 4^n$$

$$=6\times 4^n\times 4^1-6\times 4^n$$

$$=6\times 4^n(4-1)$$

$$=6\times 4^n(3)=18\times 4^n$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n>0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4. حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4=256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n).

$$u_n=1536$$

نقوم بحل المعادلة: $6\times 4^n=1536$

$$4^n=\frac{1536}{6}=256$$

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n=\frac{2}{5}n-1$.

1)بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1.

2)عيّن رتبة الحد الذي قيمته 575.

3)احسب قيمة المجموع S حيث: $S=u_1+u_2+\cdots+u_{1440}$.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n=4^{5u_n+6}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$.

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n = 4$.

رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0.

5.احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

معناه:

$$S_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

أي:

$$= 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)$$

$$= 24\left(\frac{1-4^n}{-3}\right)$$

$$= -6\left(1-4^n\right)$$

$$= 6\left(4^n - 1\right)$$

2019 الموضوع الأول (6 نقاط)

حل مقترح

1.لأثبات أن المتتالية حسابية نقوم بحساب الفرق: $u_{n+1} - u_n$

و نتحصل على عدد حقيقي الذي يكون بدوره الأساس.

أي:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(n+1) - 1 - \frac{2}{5}n + 1$$

$$= \frac{2}{5}$$

اذن: $r = \frac{2}{5}$ هو أساس هذه المتتالية الحسابية.

الحد الأول: u_1

$$u_1 = \frac{2}{5}(1) - 1 = \frac{-3}{5}.$$

2.رتبة الحد الذي قيمته 575: نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = \frac{2}{5}n + -1 = 575$$

$$n = 1440$$

و بالتالي رتبته 1440 أي: $u_{1440} = 575$ لأن الحد الأول هو u_1.

3.حساب المجموع:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{1440}$$

$$= 1440\left(\frac{u_1 + u_{1440}}{2}\right)$$

$$= 413568$$

4.لتكن (v_n) المتتالية المعرفة: $v_n = 4^{5u_n+6}$:

اثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

أي نحسب حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و نتحصل على عدد حقيقي

الذي يسمى أساس هذه المتتالية.

نُبين أنّ حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت

لدينا: $v_n = 4^{5u_n+6}$ ومنه: $v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6}$

وبمـأنّ (u_n) حسابية فـإنّ $u_{n+1} = u_n + r$ أي: $\boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}}$.

وعليه: $= 4^{5\left(u_n+\frac{2}{5}\right)+6} = 4^{5u_n+2+6} = 4^{(5u_n+6)+2} = 4^{5u_n+6} \times 4^2$

وبالتالي: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{5u_n+6} \times 4^2}{4^{5u_n+6}} = 4^2 = 16$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 16}$، وحدّها الأول

$v_1 = 4^{5u_1+6} = 4^{5\left(\frac{-3}{5}\right)+6} = 4^{-3+6} = 4^3 = 64$ لأنّها معرّفة على "

ب- المجموع:

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right) = 64\left(\frac{1-16^n}{1-16}\right) = \frac{64}{-15}(1-16^n)$$

$$= \frac{64}{15}(16^n - 1)$$

2019 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول u_0 و أساسها r.

1) علما أنّ : $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، عيّن u_1 .

2) علما أنّ : $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، عيّن الحد الأول u_0، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية

3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

4) أ) عيّن قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.

ب) أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n).

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

6) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون : $S_n = 96$

حل مقترح

1.تعيين u_1:

باستعمال خاصية الوسط الحسابي: $u_0 + u_2 = 2u_1$

$$3u_1 = 6$$

و منه:

$$u_1 = \frac{6}{3} = 2.$$

2.تعين الحد الأول: u_0 علما أن:

$$2u_0 - 3u_1 = -10$$

أي:

$$2u_0 - 3(2) = -10$$

$$2u_0 = -4$$

$$u_0 = -2$$

تعين قيمة الأساس: $r = u_1 - u_0 = 2 - (-2) = 4$.

3.عبارة الحد العام:

$u_n = u_0 + nr = -2 + 4n$.

4.أ-تعيين قيمة حتى يكون $u_n = 2018$.

أي:

$$-2 + 4n = 2018$$

$$n = 505.$$

ب-حساب الحد الخامس عشر:

يعني نحسب u_{14} لأن الحد الأول هو u_0.

و بالتالي: $u_{14} = 54$.

5.أ-حساب المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

يعني:

$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{-2-2+4n}{2}\right)$$

$$= (n+1)(-2+2n)$$

بعد النشر و التبسيط نتحصل على: $S_n = 2n^2 - 2$

6.ايجا د العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 96$.

نقوم بحل معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الطبيعي n

نجد:

$$n = 7 \in \mathbb{N}$$

$$n = -7 \notin \mathbb{N}$$

اذن : $n = 7$

إختبر نفسك...

❶.أ- (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 4n - 1$، احسب u_0، u_1 و u_7: ....

ب-عين أساس المتتالية (u_n): ....

ج-ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n): ....

د-احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + ... + u_7$: ....

ه-احسب المجموع S_n' حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$: ....

و-أوجد العدد الطبيعي n حيث: $S'_n = 54$: ....

❷. أ- (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$، احسب v_0، v_1: ....

ب-عين الأساس q و الحد الأول v_0 للمتتالية (v_n): ....

ج-عين اتجاه تغير المتتالية (v_n): ....

د-احسب المجموع S_n' بدلالة n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$: ....

ه-أوجد العدد الطبيعي n حيث: $S'_n = 3$: ....

❸. (u_n) متتالية حسابية و معرفة على $\mathbb{N}^*$ بجدها الأول $u_1 = 2$ و بالعلاقة : $u_2 - 2u_5 = 19$.

أ-احسب الأساس r لهذه المتتالية: (ارشاد أكتب كل من u_2 و u_5 بدلالة u_1 و r)

ب-أكتب عبارة الحد العام لهذه المتتالية:

ب- احسب الحد العاشر:

❹. (v_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_{n+1} = 2v_n + 1$

أ-.احسب v_2 ، v_3

ب-من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نعرف المتتالية (t_n) كما يلي: $t_n = v_n + 1$.

أثبت أن (t_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها.:

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ

و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths