مجلة الرائد في الرياضيات

****

تمارين الحســـــــاب في البكالوريا بين يديك

الشعب :

تقني رياضي+رياضيات

$$2020 \equiv \ldots[1440]$$

****

$$PGCD(2020;1440) = \ldots$$

BAC2020

إعدادالأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi @ gmail.com

Facebook العربي الجزائري

مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين الحســـــاب في البكالوريا
بين يديك

الشعب : تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

بكالوريات النظام الجديد

العلوم التجريبية+تقني رياضي +رياضيات

1)المواضيع ، 2)الحلول(المجلة المرفقة)

الجزء الثالث

بكالوريات النظام القديم

علوم الطبيعة والحياة+علوم دقيقة

الجزء الرابع

بكالوريات اجنبية

الجزء الخامس

تمارين مقترحـــــــــــة

BAC2020

إعدادالأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

الجزءالأول:تدريبات متنوعـة

القسمة في المجموعة $\mathbb{Z}$

التمرين01:

1)عين مجموعة قواسم العدد 75

2)عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية حيث يكون $ab=75$

استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث يكون $(x-1)(y+1)=75$.

التمرين02:

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية في كل حالة :

1) $x^2-y^2=15$ ، 2) $x^2=4y^2+3$ ، 3) $xy=3x+2y$ ، 4) $5xy-y^2=49$

التمرين03:

عيّن كل الأعداد الصحيحة n في كل حالة من الحالات التالية :

1)13 قاسما للعدد $n+4$ و $|n|\leq 22$ ،2)العدد $5n+7$ قاسما لـ 12 ،3) $5n+6$ قاسما للعدد $n+8$

التمرين04:

1) عين القاسم المشترك الأكبر d للعددين :1440 و 276

2) استنتج مجموعة القواسم المشتركة للعددين :1440 و 276

3) انطلاقا من سلسلة القسمات المنجزة في خوارزمية إقليدس ، اوجد عددين صحيحين u و v بحيث : $1440u+276v=d$

التمرين05:

n عدد مكون من أربعة أرقام . باقي قسمة العدد 21685 على n هو 37 و باقي قسمة العدد 33509 على n هو 53 . عين العدد n .

التمرين06:

عين في كل حالة الثنائيات a,b من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين :

1) $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=9 \end{cases}$ ،2) $\begin{cases} ab=360 \\ PGCD(a,b)=6 \end{cases}$ ،3) $\begin{cases} a^2-b^2=600 \\ PGCD(a,b)=5 \end{cases}$ ،3) $\begin{cases} 2a^2+b^2=2112 \\ PGCD(a,b)=8 \end{cases}$

التمرين07:

n عدد طبيعي . نضع $a=n(n^2+5)$.برهن بطريقتين مختلفتين في كل حالة:

1) أن العدد a عدد زوجي . 2)أن العدد a مضاعف للعدد 3 .

استنتج مما سبق أن العدد a مضاعف للعدد 6 .

الموافقات في المجموعة $\mathbb{Z}$ وتطبيقاتها

التمرين08:

عين باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل القيم من 0 إلى 4 للعدد الطبيعي k.

1. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل كل عدد طبيعي k.
2. استنتج باقي قسمة 17^{4k} على 5.
3. بين أن العدد $2^{4k+3}+17^{4k+2}+3$ يقبل القسمة على 5.

استنتج باقي قسمة $2007^{1999}-61^{2008}+87^{49}$ على 5.

التمرين09:

n عدد طبيعي .1) عين باقي قسمة العدد 6^{2n} على 7

2) ادرس تبعا لقيم n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

3) عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $A_n=3+6^{2n}+5^n$ قابلا القسمة على 7

التمرين10:

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 9

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد : 7^n+3n-1 قابلا القسمة على 9

التمرين11:

باستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$ برهن أن :

1/ من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{2n+2}-2^{n+1}$ يقبل القسمة على 7.

2/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد $2^{2n-1}\times 3^{n+2}+1$ يقبل القسمة على 11

3/ من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n\ \ n^2-1$

التمرين12:

أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي x، القيم التي توافق x^2 بترديد 5 .

ب- استنتج أن المعادلة $x^2-5y^2=3$ ذات المجهولين x و y ، لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$.

التمرين13:

1) عين كل الأعداد الطبيعية n بحيث يقبل العدد : $2n^3-n+2$ القسمة على 7

2) اوجد قيم العدد الصحيح n التي تحقق : $n^2+3n-6\equiv 0\ 11$

3) اثبت انه من اجل كل عدد صحيح n يكون العدد n^2+3n-6 غير قابل القسمة على 121

التمرين14:

1-أ)عين حسب قيم العدد الطبيعي n رقم احاد العدد 2^n و رقم احاد العدد 7^n

ب) استنتج رقم احاد العدد $3548^{9}\times 2537^{31}$.

2-عين كل الأعداد الطبيعية n بحيث : $5^{4n}+5^{3n}+5^{2n}+5^{n}\equiv 0\,[13]$

التمرين15:

1)عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^{n} على 7 من اجل كل واحدة من القيم:
1، 2، 3 ، 4، 5 و6 للعدد الطبيعي n .

2) استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^{n} على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

3) عين باقي القسمة الأقليدية على 7 للعدد $\left(3^{2020}+10^{1440}+9^{3n+2}\right)$.

أنظمة التعـــداد

التمرين16:

1)يكتب العدد الطبيعي n في التعداد الثنائي$\overline{1101101}$.
ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كما يلي: $\overline{214}$ ؟

2) في أي أساس تعداد يكون $\overline{35}+\overline{13}=\overline{51}$ ؟ ـ أكتب المساواة السابقة في النظام الثنائي

التمرين17:

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة $45x-28y=130$
فإن x يكون زوجي و y يكون مضاعف للعدد 5 .

ب) عين العدد الطبيعي n الذي يكتب$\overline{2\alpha\alpha3}$ في النظام ذي الأساس9 ويكتب$\overline{5\beta\beta6}$
في النظام ذي الأساس7.

التمرين18:

في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي : $n=\overline{1271x}$.

1) عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8 .

2) عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11

التمرين19:

1) yوx عددان طبيعيان غير معدومين .
أوجد الأعداد الطبيعية التي تكتب $\overline{yx}$ في النظام العشري و $\overline{xy}$ في النظام ذي الأساس 7.

التمرين20:

1-نعتبر العددان الطبيعيان $a=\overline{413}^{(5)}$ و $b=\overline{102}^{(3)}$

أ)اكتب كلا من a و b في النظام العشري.

ب)احسب في النظام ذو الاساس 7 كلا من العددين : $a+b$ و $a\times b$

2-عين العدد الطبيعي x في الحالتين التاليتين:

أ) $\overline{452}^{(x)}=\overline{34}^{(x)}\times\overline{12}^{(x)}$ ، ب) $\overline{52\alpha}^{(11)}=\overline{xxx}^{(9)}$

الأعداد الأوليـــة

التمرين21:

1) نعتبر المعادلة 1 ذات المجهول x,y من $\mathbb{Z}^2$: $41x-27y=1$

أ) تحقق بواسطة نص مبرهنة من أن المعادلة 1 تقبل على الأقل حلا.

ب) جد باستعمال خوارزمية اقليدس حلا خاصا للمعادلة 1

2-أ) استنتج حلا خاصا للمعادلة : 2 .... $41x-27y=5$ ، ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة 2

التمرين22:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية $2045x-64y=1\ldots(1)$

1) عيّن $PGCD(2045,64)$. استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

2). عيّن حلا خاصا للمعادلة (1). ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

التمرين23:

لتكن S مجموعة الثنائيات x,y من الأعداد الصحيحة بحيث :

$$11x+3y=65\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

1/ اوجد الثنائية x,y من S بحيث : $2x_0{}^2-3y_0=11$، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة 1

2/ عيّن كل الثنائيات x,y من S بحيث :($x\succ -5$ و $y\succ -5$)

التمرين24:

عين في كل حالة من الحالات التالية كل الثنائيات (x,y) التي تحقق الجملة المقترحة :

1) $\begin{cases} ppcm(x,y)=60 \\ xy=180 \end{cases}$ مع $x\leq y$. 2) $\begin{cases} ppcm(x,y)=12p\gcd(x,y) \\ x+y=105 \end{cases}$ مع $x\leq y$

3) $\begin{cases} 3ppcm(x,y)=xy \\ x^2-y^2=405 \end{cases}$ ، 4) $\begin{cases} ppcm(x,y)=100 \\ p\gcd(x,y)=5 \end{cases}$

التمرين25:

1) ليكن n عددا صحيحا . أ)أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .

ب)أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

جـ) استنتج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما

2) n عدد طبيعي غير معدوم ؛ نضع $a=2n^2+4n+1$ و $b=n+2$.

باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين a و b أوّليان فيما بينهما .

الجزء الثاني:تمارين البكالوريا

شعبة تقني ريـــــــاضي

التمرين26: دورة 2019

1)نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $5x-3y=1...(E)$ حيث x و y عددان صحيحان
أ)تحقق أن الثنائية $(6n+2;10n+3)$ حلا للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي.
ب)أستنتج أن العددان $10n+3$ و $6n+2$ أوليان فيما بينهما.
2)نضع: $a=10n+3$ و $b=3n+5$ واليكن d القاسم المشترك للعددين a و b
أ) بيّن أن : $d=1$ أو $d=41$.
ب)بيّن أنه إذا كان $d=41$ فإن $n\equiv 12[41]$.
3)ليكن العددان الطبيعيان $A=20n^2+36n+9$ و $B=6n^2+19n+15$
أ) بيّن أن العددان A و B يقبلان القسمة على $2n+3$.
ب)جد وبدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين27: دورة 2017

1-بين أنه من أجل عدد طبيعي k: $4^{5k}\equiv 1[11]$.
2-استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.
3-بيّن أنه من أجل عدد طبيعي n العدد $(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1)$ يقبل القسمة على 11
4-عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد:$(2\times 2017^{5n+2}+n-3)$ قابلا للقسمة على 11

التمرين28: دورة 2017 الاستدراكية

1-عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.
2-استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.
3-برهن أن: من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1)$ مضاعف للعدد 5.
4-عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(3^{4n}+27^n-4)$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين29: دورة جوان2016 الموضوع1

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $6x-7y=19$ حيث x و y عددان صحيحان
1)جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0=y_0$ ثم حل المعادلة (E)
2) استنتج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق $\begin{cases}\lambda\equiv 24[7]\\ \lambda\equiv 5[6]\end{cases}$، ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42
3) عيّن جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x+y-1|\le 13$

4-أ)ادرس بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7

ب)عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} n-5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{cases}$

التمرين30: دورة جوان2015 الموضوع1

1-أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 8^nعلى13.

ب) استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد : $42\times138^{2015}+2014^{2007}-3$ على13.

2-أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n، $(5n+1)\times64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$

ب)عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(5n+1)\times64^n-5^{2n+3}\equiv0[13]$

التمرين31: دورة جوان2013 الموضوع1

x و y عددان صحيحان و(E) المعادلة ذات المجهول (x;y) التالية : $11x+7y=1$.

1) –أ) عيّن$(x_0;y_0)$، حلول المعادلة (E)الذي يحقق: $x_0+y_0=-1$.

ب- استنتج حلول المعادلة (E).

2) a وbعددان طبيعيان وSالعدد الذي يحقق: $\begin{cases} S=11a+1 \\ S=7b+2 \end{cases}$

أ) بيّن أن $(a;-b)$حل للمعادلة (E).

ب) ماهو باقي القسمة الأقليدية للعدد S على 77

التمرين32: دورة جوان2012 الموضوع1

1-أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي قسمة 9^nعلى11

2-ماهو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 ؟.

3-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعيn،العدد: $4\times9^{15n+1}+4\times2011^{10n}+2011^{2012}$يقبل القسمة على 11

4- عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد: $2011^{2012}+2n+2$ يقبل القسمة على 11

التمرين33: دورة جوان2012 الموضوع2

نسمي(S)الجملة التالية : $\begin{cases} x\equiv3[15] \\ x\equiv6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح

1- بيّن أن العدد 153 حل للجملة (S).

2- إذا كان x_0 حلا لـ (S) ، بين أن:(x حلا لـ (S)) يكافئ $\begin{cases} x-x_0 \equiv 0[15] \\ x-x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$

3- حل الجملة (S) .

4- يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.

إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصورة بين 500 و600 كتابا ، ماعدد هذه الكتب ؟.

التمرين34: دورة جوان2011 الموضوع2

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1-تحقق أن : $4 \equiv -3[7]$ ثم بيّن أن : $A_3 \equiv 6[7]$

2-أدرس،حسب قيم العدد الطبيعي n،بواقي قسمة 2^n و 3^n على7

3- بيّن أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7.

واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

4-ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد د A_{1432} على7.

التمرين35: دورة جوان2010 الموضوع1

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كمايلي :

$n = \overline{11\alpha00}$ حيث α عدد طبيعي .

1- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 .

2- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

استنتج العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15.

3- نأخذ : $\alpha = 4$ أكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين36: دورة جوان2010 الموضوع2

1-عين، حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي قسمة 10^n على13

2- تحقق أن: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$.

3-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

التمرين37: دورة جوان2009 الموضوع2

1- حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$.

2-نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق: $f(0)=1$. عين عبارة $f(x)$.

3- n عدد طبيعي . أ) أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n .

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$.

4-أ)أحسب بدلالة n ، المجموع $S_n = f(0)+f(1)+...f(n)$

ب)عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

التمرين38: دورة جوان2008 الموضوع1

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1- a وb عددان طبيعيان حيث: $a = n-2$ و$b = 2n+3$

أ-ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ب-بين لأن العددين a وb من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ ضاعفا للعدد 7.

جـ-عين قيم n التي من أجلها $PGCD(a;b)=7$.

2-نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p = 2n^2-7n-15$ و $q = n^2-7n+10$

أ- بيّن أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$

ب-عين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$.

التمرين39: دورة جوان2008 الموضوع2

المعادلة ذات المجهول الصحيحين x و y: $4x-9y=319....(1)$.

1) تأكد أن الثنائية $(82;1)$ حلا للمعادلة (1). ثم حل المعادلة (1)

2)عيّن الثنائيات $(a;b)$ الصحيحة حلول المعادلة : $4a^2-9b^2=319....(2)$

استنتج الثنائيات $(x_0;y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

شعبة الرياضيات

التمرين40: دورة 2018

1) α و β عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$

عيّن العددين α و β ن ثم بيّن أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

2) عيّن كل الثنايات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$.

3) عيّن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$

4-أ) n عدد طبيعي ، أدرس تبعا لقيم n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

ب) L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الاساس 7 كمايلي: $L=\underbrace{\overline{111.......1}}_{\text{2018 مرة}}$

عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

التمرين41: دورة 2017 م1

1-نعتبر المعادلة : $104x-20y=272....(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

أ-أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب-بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2- λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في النظام الذي اساسه 4 ،ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في النظام الذي اساسه 6 حيث α و β عددان طبيعان.عيّن α و β ثم أكتب λ في النظام العشري.

3-تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أوّلي ، ثم عين الثنائيات $(a;b)$ من الاعداد الطبيعية التي تحقق: $2m-d=2017$ حيث: $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

التمرين42: دورة 2017 م2

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـحدّها الأول: $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=7u_n+8$.

1- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n=7^{n+1}-4$.

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=1+7+7^2......+7^n$ و $S_n'=u_0+u_1+......+u_n$

أ-أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بيّن S_n و S'_n.

ب-أستنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

3-أ)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

ب)عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلا القسمة على 5.

التمرين43: دورة 2017 الاستدراكية

نعتبر المعادلة (E)ذات المجهولين الحقيقين x و y حيث : $63x+5y=159...(E)$.

1-تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

2-برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

3-λعدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha 0\alpha}$ في النظام ذي الاساس 7 ويكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في النظام ذي الاساس 5 جد العددين الطبيعيين α و βثم اكتب العدد $\lambda+2$ في النظام العشري.

4-أ-أدرس وحسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^nعلى 5.

ب-عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y}+4n+1438^{2017}$ القسمة على 5 حيث $(x;y)$ حلول للمعادلة (E) و x عدد طبيعي.

التمرين44: دورة 2017 الاستدراكية

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=0$

ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1}=4u_n+1$

1-أ) بيّن أن:من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

ب) تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العددان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\frac{1}{3}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

ب)عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث $S_n=v_0+v_1+v_2.....+v_{3n}$.

3-عين من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم القاسم المشترك الأكبر للعددين 4^n-1 و $4^{n+1}-1$

4-أ)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية 4^n على 7.

ب)عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرف بـ: $A_n=9S_n-6n-3^{6n+4}$ القسمة على 7

التمرين45: دورة 2016 الموضوع 1

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّ هاالاول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$

1) أحسب u_1 و u_2، ثم استنتج قيمة الأساس q

2- نضع : $u_1=e^4$ و $q=e^3$. أ)عبّر عن u_n بدلالة n

ب) نضع: $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+.....+\ln(u_n)$ احسب S_n بدلالة n

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $a_n=n+3$.

3-أ)بيّن أن: $PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)$.

ب) عيّن القيّم الممكنة لـ $PGCD(2S_n;a_n)$

جـ) عيّن قيم العدد الطبيعي بحيث: $PGCD(2S_n;a_n)=7$

4) ادرس بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

5)نضع: $b_n=3n.a_n-2S_n+1437^{2016}+1$

عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n\equiv 0[7] \\ n\equiv 0[5] \end{cases}$

6)بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1}-3\times 4^{12n+1}+52$ يقبل القسمة على 7

التمرين46: دورة 2016 الموضوع 2

1-أ)ادرس بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

ب)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف لـ11

2-نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x-3y=8$ حيث x و y عددان صحيحان

أ)حل المعادلة (E).

ب) d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E).

- ما هي القيم الممكنة للعدد d.

- عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$.

جـ) عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$

التمرين47: دورة 2015 الموضوع 1

1--أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على7.

ب) استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد : $1962^{1954}+1954^{1962}+2015^{53}$ على7.

2-أ) بيّن أن العدد 89 أولي.   ب)عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832 .

جـ) بيّن أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

عيّن x و y علما أن : $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8[22] \end{cases}$

4) a و b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c.

أ) باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن a أولي مع $c\times b$.

ب)باستعمال الاستدلال بالتراجع ،أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$PGCD(a;b^n)=1$ (يرمز PGCD إلى القاسم المشترك الأكبر)

جـ)استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

التمرين48: دورة 2014 الموضوع 1

1) نعتبر المعادلة $(E): 2013x-1962y=54$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) أحسب $PGCD(2013;1962)$. ب) استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

جـ) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 0[6]$.

د) استنتج حلاّ خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $74 \prec x_0 \prec 80$ ثم حل المعادلة (E).

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حلا للمعادلة (E).

أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d.

ب) عيّن قيم العددين a و b حيث: $671a-654b=18$ و $PGCD(a;b)=18$.

التمرين49: دورة 2013 الموضوع 1

1. n عدد طبيعي .نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث: $\alpha=2n^3-14n+2$ و $\beta=n+3$

أ-بيّن أن : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

ب-ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$.

جـ-عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $PGCD(\alpha;\beta)=5$

2. أ- ادرس، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

ب-عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 4^{5n}+4^n+n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[10] \end{cases}$

التمرين50: دورة 2013 الموضوع 3

1. أ-عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n+27\equiv 0[n+1]$

ب- عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية ، حيث : $(b-a)(a+b)=24$

جـ- أستنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2. α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الاساس خمسة على الشكل

$\alpha=\overline{10141}$ و $\beta=\overline{3403}$.

أ- اكتب العددين α و β في النظام العشري.

ب-عيّن الثنائية $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث: $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$

3.أ-جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و1434 .

استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2013x-1434y=27$

التمرين51: دورة 2012 الموضوع 1

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2011x-1432y=31....(1)$

1- أ-بيّن أن العدد 2011 أولي .

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس ، عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حلالمعادلة (1).

2-أ-عيّن تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الأقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب-عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$

N-3 عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا لمتتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1).

عيّن α ، β و γ ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين52: دورة 2011 الموضوع 1

1)نعتبر المعادلة : $13x-7y=-1...(E)$ حيث x و y عددان صحيحان . حل المعادلة (E).

2)عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases}$

3) أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي قسمة 9^n على كلا من 7 و 13

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب ، في نظام التعداد ذي الأساس 9 كمايلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$

حيث α وβ عددان طبيعيان و $\alpha\neq 0$.

عيّن α وβ حتى يكون b قابلا القسمة على 91.

التمرين53: دورة 2010 الموضوع 1

1-برهن أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13

2- أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين

$3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ القسمة على 13.

3-عيّن حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13 واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$

أ-من أجل $p=3n$، عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد A_p على 13

ب-برهن أنه من أجل $p=3n+1$، فإن A_p يقبل القسمة على 13

جـ-عيّن باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p=3n+2$

5- يكتب العددان a و b في نظام العدد ذي الاساس 3 كمايلي:

$a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$

أ-تحقق أن a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من a و b على 13.

التمرين54: دورة 2010 الموضوع 2

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $7x+65y=2009....(1)$.

أ-بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.

ب- حل المعادلة (1).

2- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 .

3-عيّن قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

4-نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$.

أ)تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

ب)حل المعادلة: $(7u_1)x+(u_2)y=126567....(2)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x وy عددان صحيحان.

جـ) عيّن الثنائية $(x_0;y_0)$ حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geq 25$.

التمرين55: دورة 2009 الموضوع 1

x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و y عدد طبيعي .

A عددطبيعي يكتب في النظام ذي الاساس x بالشكل: $A=\overline{5566}$

1-أ- أنشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y

إذ علمت أن: $A=(5x^2+6)(2+2y)$.

ب- أحسب x و y إذا علمت أن x أولي و أصغر من 12.

ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2-أ- عين الاعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a \succ b$ التي تحقق: $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

التمرين56: دورة 2008 الموضوع 2

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x-21y=78....(E)$

1-أ)بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) أثبت أنه إذا كانت الثنائية$(x;y)$من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعالدلة (E) فإن $x\equiv 5[7]$.

استنتج حلول المعادلة (E).

2-أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^nعلى 7 .

ب-عيّن الثنائيات$(x;y)$من $\mathbb{N}^2$ حلول المعالدلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

الجـــزء الثالث:بكالوريات النظام االقديم

التمرين57: دورة 1997ع.دقيقة

1)جد القاسم المشترك الأكبرللأعداد:2490، 32785 و2905

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x+6y=79$ (لاحظ 72+7=79)

3)اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه ، إذا علمنا أن ثمن بذلة اللاعب هو2905 دج وثمن بذلة اللاعبة هو2490 دج وعلمنا ان النادي دفع في المجموع 32785 دج

ما هو عدد اللاعبين واللاعبات؟.

التمرين58: دورة 2001ع.طبيعية

1) أثبت أن العددين 993 ، 170 أوليان فيما بينهما.

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ذات المجهولين x و y حيث : $993x-170y=143....(1)$

أ-عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة(1)حيث: $x_0+y_0=6$

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

3)جد أصغرعدد طبيعيA بحيث يكون باقي قسمة$(A-1)$على كل من العددين 1986 و340 هو 14و300 على التوالي

التمرين59: دورة 1998ع.طبيعية

1)عين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث: $3x-5\equiv 0[11]$

2) نعتبرفي $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x-11y=5....(1)$

• حل هذه المعادلة (يمكن استعمال نتيجة السؤال الأول) .

3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبرللعددين الطبيعيين غيرالمعدومين x وy

ماهي القيم الممكنة للعدد d إذاكان $(x;y)$ حلاً للمعادلة (1)

4)عين الثنائيات$(x;y)$من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة(1)حيث: $d=5$

التمرين60: دورة 2008ع.طبيعية

لتكن في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $13x-11y=23....(1)$

1-عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة(1) حيث: $x_0-y_0=1$ - إستنتج مجموعة حلول المعادلة (1).

-عين الثنائيات$(x;y)$ حلول (1) بحيث يكون: $-10\prec x\prec 40$

2-نفرض أن x وy موجبان و d قاسمهما المشترك الأكبر - ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

-عين الثنائيات$(x;y)$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون:d=23

- أستنتج عندئذ الثنائية$(x;y)$ التي يأخذ من أجلها العدد x أصغر قيمة.

التمرين61: دورة 1995ع. طبيعية

أ- حلل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية .

ب- عيّن كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث: $x+7y=1995$ و $PGCD(x;y)=19$

التمرين62: دورة 1996ع. دقيقة

a، b و c أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$.

عيّن a، b و c والجداء abc علما أنّ في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{555}$.

التمرين63: دورة 1997ع. دقيقة

1)عين القاسم المشترك الأكبر للإعداد 1996 ، 1497و2994

2) لتكن المعادلة $1996x-1497y=3994....(1)$ حيث x و y عددان صحيحان.

-أثبت أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ، ثم عين حلول المعادلة (1).

-عين الحلول $(x;y)$ للمادلة (1) بحيث يكون: $x.y=1950$

التمرين64: دورة 1992ع. دقيقة

1)أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 و 580

2) α عدد صحيح .نعتبر المعادلة $1885x-580y=\alpha..(1)$

- أوجد الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

3) نفرض أن : $\alpha=1305$ - حل المعادلة (1). -أوجد الحلول $(x;y)$ بحيث يكون x قاسما للعدد y.

التمرين65: دورة 1992ع. دقيقة

1)حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $18x+4y=84$.

ماهي الحلول $(x;y)$ لهذه المعادلة التي تحقق $x.y\succ 0$

2) n عدد طبيعي يكتب $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ في النظام ذي الاساس 5 ويكتب $\overline{55\alpha\beta}$ في النظام ذي الاساس 7.

عيّن الاعداد الطبيعية α، β و γ ثم اكتب n في النظام العشري

التمرين66: دورة 1990ع. دقيقة

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x-6y=3....(1)$.

1)أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة(1) فإن x مضاعف لـ3 ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (1).

2)حل المعادلة (1) ثم استنتج حلول الجملة التالية $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

3) من بين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التي هي حلول للمعادلة(1)

ما هي الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق $(x^2-y^2)\prec 56$.

التمرين67: دورة 1996ع. دقيقة

1) x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .أثبت أن العددين $(x+y)$، xy أوليان فيما بينهما

2) α، βعددان طبيعيان أوليان فيما بينهما . عين α، βحتى يكون : $15\alpha^2 - 229\beta = 30\beta$

3) x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

عين مجموعة الثنائيات$(x;y)$التي تحقق:$15(x^2+y^2) = 229(x+y)$

التمرين68: دورة 1997ع. دقيقة

1)حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول$(x';y')$: $9x'-14y'=13$ علماً أنّ $(3,1)$حلا لها .

2) نعتبر $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $45x-28y=130$

أ) بيّن أنه إذا كان$(x;y)$حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5 .

ب) حل هذه المعادلة .

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و$\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7 .

عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري

التمرين69: دورة 2005ع. دقيقة

α وβعددان حيث: $\alpha = n^2+n$ و $\beta = n+2$حيث$n \in \mathbb{N}$

1-أ)برهن أن: $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;n)$

ب) استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$

2- a وbعددان طبيعيان يكتبان في نظام التعداد ذي الأساس n كما يلي:$a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$

أ) برهن أن العدد $3n+2$ هو قاسم مشترك للعددينa و b

ب)استنتج تبعا لقيم n أن: $PGCD(a;b) = 3n+2$ أو$PGCD(a;b) = 2(3n+2)$

جـ)عينα و β إذا علمت أن : $PGCD(a;b) = 41$.

التمرين70: دورة 2007ع. دقيقة

n عدد طبيعي حيث $n \succ 2$.نعتبر الأعداد الطبيعية : $a = 2n+1$، $b = 4n+3$ ، $c = 2n+3$

1)أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما و استنتج أن الأعداد a ، b ، c أولية فيما بينها.

2)عين تبعا لقيم n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b وc

عيّن قيمة n بحيث يكون: $PGCD(b,c) = 3$ و $PPCM(b,c) = 1305$

3)اكتب b^2 في نظام أساسه a .

التمرين71: دورة 1994ع. دقيقة

1/ أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10

ب- استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414}

/2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بحدها العام: $u_n = 2^n$

أ). تحقق من أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية

نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = (5+2^1) + (5+2^2) + ... + (5+2^n)$

ب- اوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10

التمرين72: دورة 2004ع.طبيعية

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 10 .

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $(7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3})$ يقبل القسمة على 10

2) من أجل كل عدد طبيعي ، نضع : $S_n = 1+7+7^2+...+7^n$

ـ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n[10]$.

ـ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي السمة الأقليدية للعدد S_n على 10 .

التمرين73: دورة 1980ع. دقيقة

1-اوجد أعدادا طبيعية مربع كل منها يقسم العدد 1980

2- عين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق: $m^2 - 5d^2 = 1980$

حيث $m = PPCM(a,b)$ و $d = PGCD(a,b)$

التمرين74: دورة 2007ع.طبيعية

نعتبر المعادلة: (E) ....$4862x - 1430y = 2002$ حيث x و y عددان صحيحان.

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 4862 ، 1430 ، 2002 .

2. أ- بيّن أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- حل المعادلة (E) .

3. a و b عددان طبيعيان حيث (a,b) حل للمعادلة (E) ، $d = PGCD(a,b)$ .d.

أ- عيّن القيم الممكنة لـ d .

ب- عيّن الثنائيات (a,b) عندما $d = 7$

التمرين75: دورة 2009ع.طبيعية

n عدد طبيعي . 1) عيّن باقي قسمة 4^{2n} على 5

2) ادرس بواقي قسمة 3^n على 5

3) ما هو باقي قسمة العدد 1429^{2009} على 5؟

4) ليكن العدد الطبيعي $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$

- عيّن قيم n بحيث A_n يقبل القسمة على 5

الجـــزء الرابع:بكالوريات اجنبية

التمرين76: دورة 2003 أسيا

1. أ) n عدد طبيعي ، انشر العبارة $n+3 \quad 3n^2-9n+16$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3-11n+48$ قابلا القسمة على $n+3$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. بيّن أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c تكون المساواة التالية صحيحة: $PGCD\ a;b = PGCD\ bc-a;b$

3. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2، تكون المساواة التالية صحيحة :

$$PGCD\ 3n^3-11n;n+3 = PGCD\ 48;n+3$$

4. أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48

ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا

التمرين77: دورة 2005 لبنان

1. نعتبر المعادلة (E) : $109x-226y=1$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109و226.ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟

ب) برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(141+226k;68+109k)$ ، حيث k عدد صحيح .

جـ) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر من أو يساوي226؛ ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e يحقق $109d=1+226e$ (يطلب تعيين قيمتي d و e).

2. . برهن أن 227 عدد أوّلي .

3. نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a\le 226$.نعتبر الدالتين f و g للمجموعة A في نفسها f ترفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{109} على 227 ؛ g ترفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{141} على 227 .

أ) تحقق من أنّ $g[f(0)]=0$.

ب) برهن أنه من أجل كل $a\in A-\{0\}$ ، $a^{226}\equiv 1[227]$. جـ) استنتج من 1.

ب) أنه من أجل كل $a\in A-\{0\}$ ، $g[f(a)]=a$. ما القول عن $g[f(a)]=a$؟.

التمرين78: دورة 1981 فرنسا

a عدد طبيعي غير معدوم .نعتبر العددين a و b حيث : $a=11n+3$ و $b=13n-1$

1) برهن أن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم أيضا للعدد 50

2) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $50x-11y=3$

3) استنتج قيم n التي يكون من أجلها يكون 50 القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 25 القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

التمرين79: دورة 2008 رياضيات-(تونس)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x-8y=5........(E)$ برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(8k-1;3k-1)$ ، حيث k عدد صحيح .

2-أ) n،x وy ثلاثة أعداد صحيحة بحيث: $\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$ برهن أن الثنائية (x,y) حل للمعادلة (E)

ب)نعتبر الجمـلة (S) : $\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$ حيث n عدد صحيح

برهن أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n\equiv 23[24]$

3-أ) k عدد طبيعي . برهن أن باقي قسمة 2^{2k} على العدد 3 هو باقي قسمة 7^{2k} على العدد 8

ب)تحقق أن 1991 حل للجملة (S) وبيّن أن العدد الطبيعي $1991^{2008}-1$ يقبل القسمة على 24.

التمرين80: دورة 2008 علوم-(تونس)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x وy وحيث $11x-5y=2$.

ا- تأكد أن الثنائية $(2;4)$ حلا للمعادلة (E).

ب- أثبت أن الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان: $11(x-2)=5(y-4)$.

جـ-استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نضع: $a=5n+2$ و $b=7n+5$.

أ-احسب $5b-7a$ ثم استنتج أن $PGCD(a;b)=1$ أو $PGCD(a;b)=11$.

ب-عيّن ، باستعمال السؤال (1) ، الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $PGCD(a;b)=11$

التمرين81: دورة 2011 علوم-(المغرب)

ليكن العدد الصحيح الطبيعي $N=\underbrace{111..........11}_{2010\ \text{مرةالرقم}\ 1}$ الممثل في نظام التعداد العشري .

1-بيّن أن العدد N يقبل القسمة على 11

2-أ) تحقق أن العدد 2011 أولي و أن : $10^{2010}-1=9N$

ب) بيّن أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$.

جـ) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N

3- بيّن أن العدد N يقبل القسمة على 22121.

التمرين82: دورة 2008 علوم-(كالدونيا الجديدة)

نرمز بـ $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\alpha,\beta$ إلى أرقام النظام ذي الأساس 12.

1. أ- N_1 عدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$

عيّن كتابة N_1 في النظام العشري

ب- N_2 عدد مكتوب في النظام العشري كما يلي : $N_2 = 1131$

اكتب العدد N_2 في النظام ذي الأساس 12

2. في كل مايلي عدد طبيعي N يكتب بشكل عام كما يلي : $N = \overline{a_n .....a_1 a_0}^{12}$

3. أ-برهن أن: $N \equiv a_0 [3]$ استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد طبيعي مكتوب في النظام 12

ب- انطلاقا من الكتابة في النظام ذي الأساس 12 ، حدد إذاكان N_2 يقبل القسمة على 12 ثم تحقق من صحة ذلك بكتابته في النظام العشري .

4. أ-برهن أن: $N \equiv a_n + ... + a_1 + a_0 [11]$ ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد طبيعي مكتوب في النظام 12.

ب- انطلاقا من الكتابة في النظام ذي الأساس 12 ، حدد إذاكان N_1 يقبل القسمة على 11 ثم تحقق من صحة ذلك بكتابته في النظام العشري .

4. N عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $\overline{x\,4y}^{12}$.

عين الأعداد الطبيعية x و y حتى يكون العدد N يقبل القسمة على 33

التمرين83: دورة 2001 علوم-(Antilles Guyane)

1. a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث : $PGCD(a+b;ab) = p$ حيث p عدد أولي

أ) برهن أن p يقسم a^2 (يمكنك ملاحظة : $a^2 = a(a+b) - ab$)

ب) استنتج أن p يقسم a ، و استنتج أن p يقسم b

جـ) برهن أن : $PGCD(a;b) = p$

2. a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث $a \le b$

أ)حل الجملة التالية : $\begin{cases} PGCD(a;b) = 5 \\ PPCM(a;b) = 170 \end{cases}$ ، ب)استنتج حلول الجملة : $\begin{cases} PGCD(a+b;ab) = 5 \\ PPCM(a;b) = 170 \end{cases}$

التمرين84: دورة 2011 علوم-(Antilles Guyane)

I - نعتبر المعادلة (E) : $11x - 7y = 5$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) تحقق بواسطة نص مبرهنة أنه توجد ، على الأقل ، ثنائية $(u;v)$ بحيث : $11u - 7v = 5$

- أوجد ثنائية $(u;v)$. ب) استنتج حلول المعادلة (E). جـ) استنتج حلول المعادلة (E) .

د) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر المستقيم (D) المعرف بالمعادلة الديكارتية: $11x - 7y - 5 = 0$. نسمي $\mathscr{E}$ مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث: $0 \leq x \leq 50$ و $0 \leq y \leq 50$.
عيّن عدد النقط من المستقيم (D) و التي تنتمي للمجموعة $\mathscr{E}$ والتي إحداثياتها أعداد صحيحة

II- : نعتبر المعادلة (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$ حيث x و y عددان صحيحان.
أ) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (F) فإن: $x^2 \equiv 2y^2 [5]$
ب) لتكن x و y أعداد صحيحة. أنقل ثم أكمل الجدولين التاليين:

$x \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$x^2 \equiv$						$[5]$

$y \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$2y^2 \equiv$						$[5]$

-ما هي القيم الممكنة لباقي القسمة الإقليدية للعدد x^2 و للعدد $2y^2$ على العدد 5 ؟
ج) استنتج أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (F) فإن x و y من مضاعفات 5.
III- بيّن أنه إذا كان العددين x و y من مضاعفات 5 فإن الثنائية $(x; y)$ ليست حل للمعادلة (F)
ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة (F)

التمرين85: دورة 2011 علوم(Polynésie)

نذكر بالنتيجة المسماة بـ « المبرهنة الصغيرة لِـ فيرما *Fermat* ».''إذا كان p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $a^{p-1} - 1$ ''
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = 10u_n + 21$
1- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3
2- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n = 10^{n+1} - 7$
ب) استنتج من اجل كل عدد طبيعي n ، كتابة العدد u_n في النظام العشري .
3- برهن أن ا u_2 عدد أولي .
نقترح فيما يلي دراسة قابلية القسمة للحدود u_n على بعض الأعداد الأولية
4- برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، u_n لايقبل القسمة على كل من الأعداد 2 ، 3و 5
5- أ) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n \equiv 4 - (-1)^n [11]$
ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على 11.
6- أ) برهن ان : $10^{16} \equiv 1[17]$
برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي k ، u_{16k+8} يقبل القسمة على 17 .

الجـــزءالخامس:تمارين متنوعة مقترحة

التمرين86: مقترح وزاري 2008

1)أثبت أن العدد 251 عدد أولي.

2)حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية .

أ)استنتج كل الأعداد الأولية التي مكعب كل منها يقسم العدد 2008.

ب) عين الأعداد الطبيعية a وb بحيث: $m^3+35d^3=2008$

علما أن: $m=PPCM(a;b)$ و $d=PGCD(a;b)$.

التمرين87:

1-أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.

2.أ-نضع من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=1+5+5^2+....+5^n$. بين أن : $4S_n=5^{n+1}-1$.

ب-ليكن a عدد طبيعي ، بيّن أن $4S_n\equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n\equiv 2a[7]$.

جـ-أستنتج باقي قسمة S_{2016} على 7.

3.نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلتين: $(E_0):5^n x-S_n y=0$ و $(E):5^n x-S_n y=7$

أ-بيّن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون S_n و 5^n أوليان فيما بينهما ثم حل المعادلة (E_0)

جـ-بيّن أن حلول (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $x=35+kS_n$ و $y=28+k5^n$ و $k\in\mathbb{Z}$

ثم حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ الجملة $\begin{cases}25x-31y=7\\PGCD(x,y)=7\end{cases}$

التمرين88:

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

استنتج باقي قسمة العدد : $2015^{10n+4}-10\times1434^{31}$ على 11

2) عين الأعداد الصحيحة x التي تحقق: $x^2+2x+9\equiv0[11]$

استنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد : $5\times9^{4n+1}+2^{2n+1}-2$ مضاعفا لـ 11

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $17^{4n+1}+3\times9^{2n}$ يقبل القسمة على 5 .

استنتج باقي القسمة على 55 للعدد : $187\times17^{4n}+11\times3^{4n+1}+60\times4^{5n-1}$

التمرين89:

n عدد طبيعي ، نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث $a=8n+1$ و $b=7n+1$.

1) بين أن العددين a و b أوليين فيما بينهما.

2) نعتبر المعادلة : $23x-26y=1$ ..... (E) حيث x و y عددان صحيحان.

أ) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E).

3) استنتج الأعداد الطبيعية a حيث : $\begin{cases}0\le a\le 25\\ 23a\equiv 1[26]\end{cases}$

التمرين90:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=10u_n+81$.

$u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=10u_n+81$.

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3.

2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=10^{n+1}-9$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n+8=9+9\times 10+9\times 10^2+\ldots+9\times 10^n$.

جـ) استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، كتابة العدد u_n في النظام العشري.

3. أ) بين أن u_2 عدد أولي .

ب) بين أن u_n لا يقبل القسمة على كل من 2 و 3 و 5.

4. عين قيم العدد الطبيعي n، التي يقبل من أجلها العدد u_n القسمة على 7.

5. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\equiv 2-(-1)^n\,[11]$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على 11.

التمرين91:

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x-2y=1$ .... (E)

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم أ) بين أن الثنائية $(14n+3;21n+4)$ حلا للمعادلة (E).

ب) استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما .

3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$.

أ) بين أن $d=1$ أو $d=13$. ، ب) بين أن $n\equiv 6[13]$ يكافئ $d=13$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n و $n\ge 2$

نضع : $B=28n^3-8n^2-17n-3$ و $A=21n^2-17n-4$.

أ) بين أن A و B قابلان للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين92:

1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 ، 580
2. α عدد صحيح . نعتبر المعادلة $1885x-580y=\alpha......1$
- أوجد الشرط اللازم و الكافي الذي يحققه α حتى تقبل المعادلة 1 حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
3. نفرض فيما يلي أن: $\alpha=1305$
- حل المعادلة 1
- أوجد الحلول x,y بحيث يكون العدد x قاسما للعدد y.

التمرين93:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E).....32x-7y=185$.

1) بين أنه من أجل كل حل $(x;y)$ للمعادلة (E) : $4x\equiv 3[7]$.

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

3) n عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha 8\beta}$ في النظام ذي الأساس 9 و يكتب $\overline{5\alpha\beta\beta}$ في النظام ذي الأساس 7

أ) عين العددين α و β .

ب) أكتب n في النظام العشري .

4. أ) تحقق أن العدد 2017 أولي .

ب) عين العدد الطبيعي a بحيث يكون العدد (a^2-2017) مربعا لعدد طبيعي يطلب تعيينه

التمرين94:

1) عيّن الثنائيات $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث : $PGCD(a;b)=48$ وَ $PPCM(a;b)=2160$.

2) عيّن الأعداد الحقيقة x التي تحقّق : $9x\equiv 17[5]$.

3) إستنتج مما سبق حلول المعادلة $432x-240y=816$ ، حيث x وَ y عددان صحيحان .

4) n عدد طبيعي باقي قسمته على 9 هو 2 ، وَ باقي قسمته على 5 هو 3 :

أ) بيّن أنّ باقي قسمة n على 45 هو 17 .

ب) إستنتج قيمة n علما أنه محصور بين 1980 وَ 2025 .

5-أ)حلّل 2016 إلى جداء عوامل أوّلية ،ثمّ جد الأعداد الطبيعية التي مربّع كل منها يقسم 2016

ب) في أيّ نظام تعداد يكتب 2018 على الشّكل : $\overline{1202}^{x}$.

التمرين95:

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x-2y=1 \quad (E)........$

2)ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . أ) بين أن الثنائية $(14n+3;21n+4)$ حلا للمعادلة (E).

ب) استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما .

3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$.

أ) بين أن $d=1$ أو $d=13$.　　ب) بين أن $n\equiv 6[13]$ يكافئ $d=13$.

4) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ نضع : $B=28n^3-8n^2-17n-3$ و $A=21n^2-17n-4$.

أ) بين أن A و B قابلان للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين96:

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 3^n على 5 .

استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعددين $(1439)^{2018}$ و $(1962)^{1954}$ على 5 .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن العدد :

$(1439)^{2018}+2\times(1962)^{1954}-(2018)^{4n+3}$ مضاعف لـ 5

3) عين الأعداد الطبيعية n حتي يقبل العدد $6-2017^n+3^{4n+1}$ القسمة على 5 .

التمرين97:

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$.

3) عيّن الأعداد الطبيعية n حيث : $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ وَ $10<n\leq 25$.

4) A عدد مكتوب بـ: $\overline{xx0xx02}$ في النظام ذي الأساس3 و مكتوب بـ: $\overline{y612}$ في النظام ذي الأساس7

أ- عيّن كلا من x وَ y .　　ب- أحسب العدد A في النظام العشري .

جـ- أكتب العدد A في النظام ذي الأساس 9 .

التمرين98:

نعتبر الأعداد الصحيحة N التي تحقق الجملة : $(S)\begin{cases}N\equiv 5[13]\\ N\equiv 1[17]\end{cases}$

1) تحقق أنّ العدد 239 حلّ للجملة (S).

2) أثبت أن العدد N يكتب على الشكل $N=1+17x=5+13y$، حيث x و y عددان صحيحان نسبيان يحققان $17x-13y=4$.

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $17x-13y=4$، للمجهولين الصحيحين x و y .

4) استنتج أنه يوجد عدد صحيح k يحقق $N=18+221k$ ، ثم استنتج حلول الجملة (S) .

مجلة الرائد في الرياضيات

****

الحـــــــــلول

الجزء الثاني

تقني رياضي

****

الجزء الثالث

رياضيات

****

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

BAC2020

الأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi @ gmail.com

العربي الجزائري Facebook

الجزء الثاني:تمارين البكالوريا النظام الجديد

شعبة تقني ريـــــاضي

التمرين26: دورة 2019

1- أ)التحقق أن الثنائية $(6n+2;10n+3)$ حلا للمعادلة (E)

الثنائية $(6n+2;10n+3)$ حلا للمعادلة (E) لأن $5(6n+2)-3(10n+3)=1$.

ب)استنتاج أن العددان $10n+3$ و $6n+2$ أوليان فيما بينهما.

العلاقة$5(6n+2)-3(10n+3)=1$ تعني أن $10n+3$و$6n+2$ أوليان فيما بينهما (مبرهنة بيزو)

2-أ) تبيّان أن : $d=1$ أو $d=41$.

لدينا $PGCD(a;b)=d$ حيث: $a=10n+3$ و $b=3n+5$

يجب إيجاد علاقة بين a و b مستقلة عن n

لدينا: $3a-10b=10(3n+5)-3(10n+3)=41$ أي $3a-10b=41$

ولدينا : dيقسم a ومنه dيقسم $3a$ .....(1)

dيقسم bومنه dيقسم $10b$.....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن dيقسم$3a-10b$ وعليه d يقسم 41

لكن 41 عدد أولي أي يقبل قاسمان هما :1 و 41

ب)تبيّان أنه إذا كان $d=41$فإن $n\equiv 12[41]$.

لدينا: $d=41$معناه $\begin{cases} a\equiv 0[41] \\ b\equiv 0[41] \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} 10n+3\equiv 0[41] \\ 3n+5\equiv 0[41] \end{cases}$بالجمع طرف لطرف نجد:

$7n-2\equiv 0[41]$ وعليه $7n\equiv 2[41]$ ومنه $42n\equiv 12[41]$ (بضرب الطرفين في 6)

ومنه $n\equiv 12[41]$ لأن $42\equiv 1[41]$.

3-أ) تبيّان أن العددان A و B يقبلان القسمة على $2n+3$.

لدينا: $A=20n^2+36n+9$ و $B=6n^2+19n+15$

ولدينا: $A=20n^2+36n+9=(2n+3)(10n+3)$ ومنه A يقبل القسمة على 2n+3

$B=6n^2+19n+15=(2n+3)(3n+5)$ ومنه Bيقبل القسمة على 2n+3

ب)إيجاد وبدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

نضع : $PGCD(A;B)=(2n+3)PGCD(a;b)$خاصية

نميز حالتان هما: $d=1$ أو $d=41$.

إذا كان $d=41$ فإن $PGCD(A;B)=41(2n+3)$ حيث $n\equiv 12[41]$

إذا كان $d=1$ فإن $PGCD(A;B)=(2n+3)$ حيث $n\neq 41k+12$ مع $k\in\mathbb{N}$

التمرين27: دورة 2017

1)إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $4^{5k} \equiv 1[11]$

لدينا: $4^5 = 1024 = 11.93+1$ أي $4^5 \equiv 1[11]$

وعليه ومن أجل كل عدد طبيعي k يكون لدينا: $4^{5k} \equiv 1[11]$ خاصية.

2)استنتاج بواقي قسمة العدد 4^n على 11

لتعيين بواقي قسمة 4^n على 11 نشكل الجدول التالي:

من الجواب السابق نستنتج ان بواقي قسمة 4^n على 11 تشكل متتاليةدورية ودورها 5وهي

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3

3)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2\times2017^{5n+3}+3\times1438^{10n}+1$يقبل القسمة على 11

لدينا: $1438^{10n} \equiv (8)^{10n}[11] \equiv 1[11]$ و $2017^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11] \equiv 9[11]$

ومنه: $2\times2017^{5n+3}+3\times1438^{10n}+1 \equiv 2\times9+3\times1+1[11]$

أي $2\times2017^{5n+3}+3\times1438^{10n}+1 \equiv 22[11]$ إذن $2\times2017^{5n+3}+3\times1438^{10n}+1 \equiv 0[11]$

4)تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $2\times2017^{5n+2}+n-3$ قابلا للقسمة على11

$2\times2017^{5n+2}+n-3$ قابلا للقسمة على 11 معناه $2\times2017^{5n+2}+n-3 \equiv 0[11]$

لدينا: $2017^{5n+2} \equiv 4^{5n+2}[11] \equiv 5[11]$

ومنه $2\times2017^{5n+2}+n-3 \equiv 0[11]$ تكافئ $n+7 \equiv 0[11]$ أي $n = 11p+4$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين28: دورة 2017 الاستدراكية

1) تعيّن حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^nعلى 5.

لدينا: $3^0 \equiv 1[5]$، $3^1 \equiv 3[5]$، $3^2 \equiv 4[5]$، $3^3 \equiv 2[5]$، $3^4 \equiv 1[5]$.

بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n \equiv$	1	3	4	2

2)استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017}على 5.

لدينا: $1437 \equiv 2[5]$ أي $1437 \equiv (-3)[5]$ أي $1437^{2017} \equiv (-3)^{2017}[5]$

لكن $(-3)^{2017} \equiv (-1)^{2017}.3^{4(504)+1}[5]$ ومنه $1437^{2017} \equiv (-3)[5]$

لأن $3^{4(504)+1} \equiv 3[5]$ و $(-1)^{2017} = -1$ (2017 عدد فردي)

$1437^{2017} \equiv (-3)[5]$ تكافئ $1437^{2017} \equiv 2[5]$ لأن $(-3) \equiv 2[5]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017}على 5هو 2

3)البرهان أن:من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1)$ مضاعف للعدد 5

العدد $(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1)$ مضاعف للعدد 5 معناه $(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1)\equiv 0[5]$

لدينا: $48\equiv 3[5]$ ومنه $48^{4n+3}\equiv 3^{4n+3}[5]$ أي $48^{4n+3}\equiv 2[5]$ حسب الجدول.

$9^{2n+1}=3^{4n+2}\equiv 4[5]$ حسب الجدول.

ومنه: $(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1)\equiv 2-2\times 4+1[5]$ أي $(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1)\equiv -5[5]$

إذن $(48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1)\equiv 0[5]$ لأن $(-5)\equiv 0[5]$.

4)تعيّين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(3^{4n}+27^{n}-4)$ قابلا للقسمة على 5.

العدد $(3^{4n}+27^{n}-4)$ قابلا للقسمة على 5معناه $(3^{4n}+27^{n}-4)\equiv 0[5]$

لدينا: $27\equiv (3)^{3n}[5]$ ولدينا أيضا: $3^{4n}\equiv 1[5]$ حسب الجدول.

وعليه $(3^{4n}+27^{n}-4)\equiv 0[5]$ تكافئ $(3^{3n})\equiv 3[5]$

من الجدول نستنتج أن $3n\equiv 1[4]$ أي $n\equiv 3[4]$ وأخيرا $n=4p+3$ حيث $p\in\mathbb{N}$

التمرين29: دورة جوان2016 الموضوع1

1)إيجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E)

*$(x_0;y_0)$ حلا خاصا للمعادلة (E) بحيث $x_0=y_0$ معناه $6x_0-7x_0=-19$ أي $x_0=y_0=-19$

*لدينا: $\begin{cases}6x-7y=19\\6x_0-7x_0=19\end{cases}$ بطرح المعادلتين طرف لطرف نجد:

ومنه: $6(x-x_0)-7(y-y_0)=0$ وتكافئ $6(x-x_0)=7(y-y_0).....(1)$

من (1)نستنتج أن: 6 يقسم $7(y-y_0)$ ومنه 6 يقسم $(y-y_0)$ لأن 6 أولي مع7(حسب غوص)

وعليه يكون لدينا: $(y-y_0)=6k$ ومنه $y=6k-19$

بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x=6k-19$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $(x;y)=(7k-19;6k-19)$ حيث k عدد صحيح

2)استنتاج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق $\begin{cases}\lambda\equiv 24[7]\\\lambda\equiv 5[6]\end{cases}$، ثم تعيين باقي قسمة العدد λ على 42

*لدينا: $\begin{cases}\lambda\equiv 24[7]\\\lambda\equiv 5[6]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\lambda=7\alpha+24\\\lambda\equiv 6\beta+5\end{cases}$ وتكافئ $6\beta-7\alpha=19...(E')$

بالمطابقة بيّن المعادلتين (E) و (E') نستنتج أن: $\beta=x=7k-19$

وعليه يكون لدينا: $\lambda\equiv 6(7k-19)+5$ أي: $\lambda\equiv 42k-119$

*$\lambda\equiv 42k-119$ تكافئ $\lambda\equiv 42k+7$ لأن $-119\equiv 7[42]$

ومنه باقي قسمة العدد λ على 42 هو 7.

3) تعيين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x+y-1|\le 13$

لدينا: $(x;y)=(7k-19;6k-19)$ و $|x+y-1|\le 13$

ومنه: $|7k+6k-39|\le 13$ وتكافئ $|13k-39|\le 13$ أي $|k-3|\le 1$ أي $2\le k\le 4$

ومنه: $k\in\{2;3;4\}$ ومنه الثنائيات $(x;y)$ هي: $(-5;-7)$ ، $(2;-1)$ و $(9;5)$

4-أ)دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7

لدينا: $5^0\equiv 1[7]$ ، $5^1\equiv 5[7]$ ، $5^2\equiv 4[7]$ ، $5^3\equiv 6[7]$ ، $5^4\equiv 2[7]$ ، $5^5\equiv 3[7]$ و $5^6\equiv 1[7]$

بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3

ب)تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} n-5^n\equiv 2020[7] \\ n\equiv 1437[6] \end{cases}$

$\begin{cases} n-5^n\equiv 2020[7] \\ n\equiv 1437[6] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n-5^n\equiv 4[7] \\ n\equiv 3[6] \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} 6k+3\equiv 5^{6k+3}+4[7] \\ n\equiv 6k+3 \end{cases}$

وتكافئ $\begin{cases} k\equiv 0[7] \\ n\equiv 6k+3 \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} k\equiv 7p \\ n\equiv 6k+3 \end{cases}$ ومنه $n=42p+3$ حيث p عدد طبيعي.

التمرين30: دورة جوان2015 الموضوع1

1)-أ) تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد 8^n على 13.

لدينا: $8^0\equiv 1[13]$ ، $8^1\equiv 8[13]$ ، $8^2\equiv 12[13]$ ، $8^3\equiv 5[13]$ ، $8^4\equiv 1[13]$

بواقي قسمة 8^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$8^n\equiv$	1	8	12	5

ب) استنتاج باقي القسمة الأقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13.

لدينا: $42\equiv 3[13]$ و $138\equiv 8[13]$ ومنه $138^{2015}\equiv 8^{2015}[13]$

لكن $2015\equiv 3[4]$ ومنه $8^{2015}\equiv 5[13]$ أي $138^{2015}\equiv 5[13]$

لدينا: $2014\equiv 12[13]$ أي $2014\equiv -1[13]$ لأن $12\equiv -1[13]$.

ومنه: $2014^{2037}\equiv(-1)^{2037}[13]$ أي $2014^{2037}\equiv(-1)[13]$ لأن 2037 عدد فردي.

وعليه: $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3\equiv 3\times 5-1-3[13]$

$42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3\equiv 11[13]$

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13 هو 11.

2)-أ)تبيان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)\times 8^{2n}[13]$

لدينا: $64^n=8^{2n}$ و $5\equiv -8[13]$ ومنه $5^{2n+3}\equiv(-8)^{2n+3}[13]$

لكن $(-8)^{2n+3} \equiv (8)^{2n}(-1)^{2n+3}.8^3[13]$ أي $(-8)^{2n+3} \equiv -5.(8)^{2n}[13]$

ومنه : $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1)\times 8^{2n} + 5\times 8^{2n}[13]$

أي: $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)\times 8^{2n}[13]$.

ب)تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون: $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$

من الجواب السابق لدينا: $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)\times 8^{2n}[13]$

ومنه : $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$ تكافئ $(5n+6)\times 8^{2n} \equiv 0[13]$

وتكافئ $(5n+6) \equiv 0[13]$ لأن 8 أولي مع 13 وعليه 8^{2n} أولي مع 13 (خاصية)

$(5n+6) \equiv 0[13]$ تكافئ $5n \equiv -6[13]$ وتكافئ $5n \equiv 20[13]$ لأن $-6 \equiv 20[13]$

$5n \equiv 20[13]$ تكافئ $n \equiv 4[13]$ أي $n = 13p+4$ حيث p عدد طبيعي.

التمرين 31 دورة جوان 2013 الموضوع 1

1) أ- تعيّن $(x_0;y_0)$، حلول المعادلة (E) الذي يحقق: $x_0 + y_0 = -1$.

لدينا:الثنائية $(x_0;y_0)$ تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = -1 \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ -7x_0 - 7y_0 = 7 \end{cases}$

بالجمع طرف لطرف نجد: $4x_0 = 8$ ومنه : $x_0 = 2$ ولدينا: $y_0 = -1 - x_0 = -3$

ومنه الثنائية $(x_0;y_0) = (2;-3)$.

ب- استنتاج حلول المعادلة (E).

لدينا:الثنائية $(x_0;y_0) = (2;-3)$ حل خاص للمعادلة (E)

ومنه: $\begin{cases} 11x + 7y = 1 \\ 11(2) + 7(-3) = 1 \end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد: $11(x-2) + 7(y+3) = 0$

ولدينا: $11(x-2) + 7(y+3) = 0$ تكافئ $11(x-2) = 7(-y-3)......(*)$

المعادلة (*) تعني أن $7/11(x-2)$ ومنه $7/(x-2)$ لأن 7 أولي مع 11 حسب مبرهنة غوص.

أي : $x - 2 = 7k$ إذن $x = 7k+2$ حيث k عدد صحيح.

بتعويض قيمة x في المعادلة (*) نجد: $11(7k) = 7(-y-3)$ أي $y = -11k - 3$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $(x;y) = (7k+2;-11k-3)$

2-أ) تبيّان أن $(a;-b)$ حل للمعادلة (E).

لدينا: $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$ وتكافئ $11a + 1 = 7b + 2$ وتكافئ $11a + 7(-b) = 1$

العلاقة $11a + 7(-b) = 1$ تعني أن الثنائية $(a;-b)$ حلا للمعادلة (E).

ب) تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد S على 77

من الجواب السابق لدينا: $(a;-b)$حلا للمعادلة (E) ومنه: $(a;-b)=(7k+2;-11k-3)$

أي : $a=7k+2$ بتعويض قيمة a في المعادلة $S=11a+1$ نجد: $S=11(7k+2)+1=77k+23$

العلاقة $S=77k+23$ تعني أن 23 هو باقي قسمة S علة 77.

التمرين32: دورة جوان2012 الموضوع1

1-دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^nعلى11

لدينا: $9^0\equiv1[11]$، $9^1\equiv9[11]$، $9^2\equiv4[11]$، $9^3\equiv3[11]$، $9^4\equiv5[11]$، $9^5\equiv1[11]$

بواقي قسمة 9^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وحسب الجدول التالي

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$9^n\equiv$	1	9	4	3	5	$[11]$

2-تعيين باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 .

لدينا: $2011\equiv9[11]$ ومنه $2011^{2012}\equiv9^{2012}[11]$

لكن : $2012\equiv2[5]$ ومنه $2011^{2012}\equiv4[11]$ لأن $9^{2012}=9^{5k+2}\equiv4[11]$انظر الجدول.

ومنه باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 هو 4

3-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعيn،العدد: $4\times9^{15n+1}+4\times2011^{10n}+2011^{2012}$يقبل القسمة على 11

لدينا: $9^{15n+1}=(9^{5n})^3\times9\equiv9[11]$لأن $(9^{5n})\equiv1[11]$

ولدينا: $2011^{10n}\equiv(9^{5n})^2[11]$ ومنه $2011^{10n}\equiv1[11]$ لأن $(9^{5n})\equiv1[11]$.

ولدينا: $2011^{2012}\equiv4[11]$ من الجواب السابق.

وعليه: $4\times9^{15n+1}+4\times2011^{10n}+2011^{2012}\equiv4\times9+4\times1+4[11]$

أي $4\times9^{15n+1}+4\times2011^{10n}+2011^{2012}\equiv0[11]$ لأن: $4\times9+4\times1+4=44=4\times11$

4- تعيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد: $2011^{2012}+2n+2$ يقبل القسمة على 11

$2011^{2012}+2n+2$ يقبل القسمة على 11معناه $2011^{2012}+2n+2\equiv0[11]$

لدينا: $2011^{2012}+2n+2\equiv0[11]$ تكافئ $4+2n+2\equiv0[11]$ لأن $2011^{2012}\equiv4[11]$

تكافئ $2n\equiv-6[11]$ أي $n\equiv-3[11]$

ومنه: $n\equiv8[11]$ إذن $n=11\alpha+8$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

التمرين33: دورة جوان2012 الموضوع2

1- تبيّان أن العدد 153 حل للجملة (S).

لدينا: $\begin{cases}153=15\times10+3\\153=7\times21+6\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}153\equiv3[15]\\153\equiv6[7]\end{cases}$ أي أن 153 حلا للجملة (S)

2-تبيان أن:(x حلا لـ (S)) يكافئ $\left(\begin{cases}x-x_0\equiv0[15]\\x-x_0\equiv0[7]\end{cases}\right)$

1)نبرهن أنه إذا كان x_0 حلا لـ (S) وx حلا للجملة (S) فإن: $\left(\begin{cases} x-x_0 \equiv 0[15] \\ x-x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$

لدينا $\begin{cases} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases}$ ....(1) و x حلا لـ (S) معناه $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ ....(2)

من (1) و(2) نستنتج ان $\begin{cases} x \equiv x_0[15] \\ x \equiv x_0[7] \end{cases}$ ومنه : $\left(\begin{cases} x-x_0 \equiv 0[15] \\ x-x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$

2) نبرهن أنه إذا كان $\left(\begin{cases} x-x_0 \equiv 0[15] \\ x-x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$ وx_0 حلا لـ (S) فإن x حلا للجملة (S)

لدينا: $\left(\begin{cases} x-x_0 \equiv 0[15] \\ x-x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$ ....(2) و $\begin{cases} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases}$ ....(1)

بجمع (1) و(2) طرف لطرف نجد: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ ومعناه ان x حلا للجملة (S)

3- حل الجملة (S) .

لدينا: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 7x \equiv 21[105].....(1) \\ 15x \equiv 90[105]......(2) \end{cases}$ وتكافئ نجد: $x \equiv 153[105]$ من الجواب 1)

وأخيرا $x \equiv 48[105]$ لان $153 \equiv 48[105]$ إذن $x = 105k + 48$ حيث k عدد صحيح.

4-تعيين عدد الكتب

نفرض أن عدد الكتب هو x

ولدينا: استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب معناه $x = 15\alpha + 3$

و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب معناه $x = 7\beta + 6$

ومنه x يحقق الجملة (S) حيث $500 \prec x \prec 600$

لدينا من الجواب 3) أن $x = 105k + 48$ ومنه $500 \prec 105k + 48 \prec 600$

لدينا: $500 \prec 105k + 48 \prec 600$ تكافئ $452 \prec 105k \prec 552$ أي $\frac{452}{105} \prec k \prec \frac{552}{105}$ ومنه $k = 5$

بتعويض قيمة k في المعادلة $x = 105k + 48$ نجد: $x = 573$

التمرين34: دورة جوان2011 الموضوع2

1-التحقق أن : $4 \equiv -3[7]$ ثم تبيّان أن : $A_3 \equiv 6[7]$

لدينا: $7 \equiv 0[7]$ ومنه $4 + 3 \equiv 0[7]$ إذن $4 \equiv -3[7]$

لدينا: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ ومنه $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

ولدينا: $4\equiv -3[7]$ و $5\equiv -2[7]$ و $6\equiv -1[7]$

ومنه : $A_3\equiv 2^3+3^3+(-3)^3+(-2)^3+(-1)^3[7]$

ومنه $A_3\equiv 2^3+3^3-(3)^3-(2)^3-(1)^3[7]$ لان الأس فردي

إذن: $A_3\equiv -1[7]$ ومعناه $A_3\equiv 6[7]$ لأن $-1\equiv 6[7]$.

2-دراسة، وحسب قيم العدد الطبيعي n،بواقي قسمة 2^n و 3^n على7

<u>دراسة بواقي قسمة قسمة 2^n على7</u>

لدينا: $2^0\equiv 1[7]$، $2^1\equiv 2[7]$، $2^2\equiv 4[7]$، $2^3\equiv 1[7]$

بواقي قسمة 2^n على7تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n\equiv$	1	2	4

<u>دراسة بواقي قسمة قسمة 3^n على7</u>

لدينا: $3^0\equiv 1[7]$، $3^1\equiv 3[7]$، $3^2\equiv 2[7]$، $3^3\equiv 6[7]$، $3^4\equiv 4[7]$، $3^5\equiv 5[7]$ و $3^6\equiv 1[7]$

بواقي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n=$	$6k'$	$6k'+1$	$6k'+2$	$6k'+3$	$6k'+4$	$6k'+5$
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5

3- تبيّان أنه إذا كان n فرديا فإن: A_n+1 يقبل القسمة على 7.

لدينا: $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$ حيث n عدد فردي أي $n=2p+1$

نعلم أن: $(-a)^{2p+1}=-a^{2p+1}$

ومنه : $A_n=2^{2p+1}+3^{2p+1}-3^{2p+1}-2^{2p+1}-1^{2p+1}=-1$ وعليه : $A_n+1\equiv 0[7]$

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على7.

بما أن العدد 2011 عدد فردي فإن $A_{2011}+1\equiv 0[7]$ أي $A_{2011}\equiv 6[7]$ ومنه الباقي هو 6

4-تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد د A_{1432} على7.

لدينا: $A_{1432}=2^{1432}+3^{1432}+4^{1432}+5^{1432}+6^{1432}$

نعلم أن: $(-a)^{2p}=a^{2p}$ومنه : $A_{1432}=2^{1432}+3^{1432}+3^{1432}+2^{1432}+1^{1432}=2^{2864}+2.3^{1432}+1$

ولدينا: $2864=3(954)+2$ من الشكل $3k+2$ و $1432=6(238)+4$ من الشكل $6k'+4$

ومنه: $A_{1432}=2^{2864}+2.3^{1432}+1\equiv 4+2.4+1[7]$ أي $A_{1432}\equiv 6[7]$ ومنه الباقي هو 6.

التمرين35: دورة جوان2010 الموضوع1

1- تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 .

n العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كمايلي :

$n=\overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي و $0\le\alpha\le 6$

ومنه: $n=\overline{11\alpha 00}=1.7^4+1.7^3+\alpha.7^2+0.7+0.7^0=49\alpha+2744$ في النظام العشري

* العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 معناه $\alpha\equiv 0[3]$

$\alpha\equiv 0[3]$ معناه $49\alpha+2744\equiv 0[3]$ ومعناه $\alpha+2\equiv 0[3]$ لأن $49\equiv 1[3]$ و $2744\equiv 2[3]$

$\alpha+2\equiv 0[3]$ تكافئ $\alpha\equiv 1[3]$ أي $\alpha=3k+1$ ومنه $\alpha=1$ أو $\alpha=4$ لأن: $0\le\alpha\le 6$

2- تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 .

* العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 معناه $\alpha\equiv 0[5]$

$\alpha\equiv 0[5]$ معناه $49\alpha+2744\equiv 0[5]$ ومعناه $\alpha+1\equiv 0[5]$ لأن $49\equiv -1[5]$ و $2744\equiv -1[5]$

$\alpha+1\equiv 0[5]$ تكافئ $\alpha\equiv 4[5]$ أي $\alpha=5k+4$ ومنه $\alpha=4$ لأن: $0\le\alpha\le 6$

استنتاج العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15.

العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15معناه n قابلا للقسمة على 5 و على 3 معا (خاصية)

ومنه : $\alpha=4$ حسب الجواب 1 و2 السابقين.

3- نأخذ : $\alpha=4$ كتابة العدد n في النظام العشري.

لدينا: $n=49\alpha+2744$ في النظام العشري ومنه : $n=49(4)+2744=2940$

التمرين36: دورة جوان2010 الموضوع2

1-تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي قسمة 10^nعلى13

$10^0\equiv 1[13]$،$10^1\equiv 10[13]$،$10^2\equiv 9[13]$،$10^3\equiv 12[13]$،$10^4\equiv 3[13]$،$10^5\equiv 4[13]$ و$10^6\equiv 1[13]$

بواقي قسمة 10^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n=$	$6k'$	$6k'+1$	$6k'+2$	$6k'+3$	$6k'+4$	$6k'+5$
$10^n\equiv$	1	10	9	12	3	4

2- التحقق أن : $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]$.

لدينا: $2008=6(334)+4$ من الشكل $6k'+4$ ومنه $10^{2008}\equiv 3[13]$ حسب الجدول

ومنه: $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 3^2+3+1[13]$ أي $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 13[13]$

أي $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]$

3-تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $10^{2n}+10^n+1\equiv 0[13]$.

لتعيين قيم العدد الطبيعي n نشكل الجدول التالي

$n =$	$6k'$	$6k'+1$	$6k'+2$	$6k'+3$	$6k'+4$	$6k'+5$
$10^n \equiv$	1	10	9	12	3	4
$10^{2n} \equiv$	1	9	3	1	9	3
$10^{2n}+10^n+1 \equiv$	3	7	0	1	0	7

من الجول السابق نستنتج ان: $n=6k'+2$ أو $n=6k'+4$ حيث k' عدد طبيعي

التمرين37: دورة جوان2009 الموضوع2

1- حل المعادلة التفاضلية: $y'=(\ln 2)y$.

تذكير:حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هو $y=c.e^{ax}-\frac{b}{a}$

وعليه حلول المعادلة التفاضلية: $y'=(\ln 2)y$ هو $y=c.e^{x\ln 2}=c.2^x$ حيث c عدد حقيقي ثابت

2-تعيين الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق: $f(0)=1$. عين عبارة $f(x)$.

لدينا: $y=f(x)=c.2^x$ و $f(0)=1$ ومنه: $c.2^0=1$ أي $c=1$ إذن: $f(x)=2^x$.

3- أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n.

لدينا: $2^0\equiv1[7]$، $2^1\equiv2[7]$، $2^2\equiv4[7]$، $2^3\equiv1[7]$

بواقي قسمة 2^n على7تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n \equiv$	1	2	4

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$.

لدينا: $f(2009)=2^{2009}$ و لدينا: $2009=3(669)+2$ من الشكل $3k+2$

ومنه: $f(2009)-4\equiv 2^{3k+2}-4[7]$ أي $f(2009)-4\equiv0[7]$ لأن: $2^{3k+2}\equiv4[7]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$ هو 0

4-أ) حساب بدلالة n، المجموع S_n

لدينا: $S_n=f(0)+f(1)+...f(n)=2^0+2+2^2+....2^n$

ومنه S_n هو مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 2

وعليه: $S_n=1.\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$

ب)تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

S_n يقبل القسمة على 7 معناه $S_n\equiv0[7]$

$S_n\equiv0[7]$ معناه $2^{n+1}\equiv1[7]$ ومنه $n+1=3k$ حسب الجدول ومنه $n=3k-1$ مع $k\in\mathbb{N}^*$.

التمرين38: دورة جوان2008 الموضوع1

أ-تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

نضع : $d = PGCD(a;b)$ نلاحظ أن: $b - 2a = 7$

لدينا: d يقسم a ويقسم b ومنه d يقسم الفرق $b - 2a$ وعليه d يقسم 7 ومنه: $d = 1$ أو $d = 7$

ب-تبيان أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ ضاعفا للعدد 7.

لدينا العددين a و b من مضاعفات 7 معناه $\begin{cases} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{cases}$ ويكافئ $\begin{cases} 2n+3 \equiv 0[7] ....(1) \\ n-2 \equiv 0[7] .....(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد $n+5 \equiv 0[7]$ ويكافئ $n+5$ ضاعفا للعدد 7.

جـ-تعيين قيم n التي من أجلها $PGCD(a;b) = 7$.

$PGCD(a;b) = 7$ معناه $\begin{cases} 2n+3 \equiv 0[7] ....(1) \\ n-2 \equiv 0[7] .....(2) \end{cases}$ ومعناه $n+5 \equiv 0[7]$ حسب الجواب السابق

$n+5 \equiv 0[7]$ تكافئ $n+5 = 7k$ أي $n = 7k+2$ حيث k عدد طبيعي أكبر من 0

أ- تبيّان أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$

لدينا: $p = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(2n+3)$ ومنه p مضاعف للعدد $n-5$

$q = n^2 - 7n + 10 = (n-5)(n-2)$ ومنه p مضاعف للعدد $n-5$

ب-تعيين تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD(p;q)$.

لدينا: $p = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)b$ و $q = n^2 - 7n + 10 = (n-5)a$

ومنه: $PGCD(p;q) = (n-5)PGCD(a;b)$ خاصية

ولدينا: $PGCD(a;b) = 1$ أو $PGCD(a;b) = 7$ حسب الجواب أ) ومنه نميز حالتين هما:

الحالة1: $PGCD(a;b) = 1$ ومنه $PGCD(p;q) = (n-5)$ حيث n أكبر من 5 مع $n \neq 7k+2$

الحالة2: $PGCD(a;b) = 7$ ومنه $PGCD(p;q) = 7(n-5)$ حيث n أكبر من 5 مع $n = 7k+2$

التمرين39: دورة جوان2008 الموضوع2

1) التأكد أن الثنائية $(82;1)$ حلا للمعادلة (1). ثم حل المعادلة (1)

*الثنائية $(82;1)$ حلا للمعادلة (1) لأن: $4(82)-9(1)=319$

*لدينا: $\begin{cases} 4x-9y=319...(1) \\ 4(82)-9(1)=319.....(2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: $4(x-82)-9(y-1)=0$

ومنه: $4(x-82)=9(y-1).....(*)$

من $(*)$ نستنتج أن: 9 يقسم $4(x-82)$ ومنه 9 يقسم $(x-82)$ لأن 9 أولي مع 4 (حسب مبرهنة غوص)

ومنه: $(x-82)=9k$ أي $x=9k+82$ وبعد تعويض قيمة x في $(*)$ نجد: $y=4k+1$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(x;y)=(9k+82;4k+1)$ مع أن k عدد صحيح.

2) تعيّين الثنائيات $(a;b)$ الصحيحة حلول المعادلة : $4a^2-9b^2=319....(2)$

لدينا: $4a^2-9b^2=319....(2)$ تكافئ $(2a-3b)(2a+3b)=319$

نبحث عن قواسم العدد 319

لدينا: $319=11\times 29$ ومنه عدد القواسم هو $4=(1+1)(1+1)$ ومنه: $D_{319}=\{1;11;29;319\}$

ملاحظة1: إذا كانت الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (2) فإن الثنائية $(-a;-b)$ حلا ايضا.

ومنه يمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط .

ملاحظة2: $2a-3b \prec 2a+3b$

الحالة1: $(2a-3b)(2a+3b)=1\times 319$ وتكافئ: $\begin{cases} 2a-3b=1...(1) \\ 2a+3b=319.....(2) \end{cases}$ بجمع (2) و (1) طرف

لطرف نجد: $4a=320$ ومنه: $a=80$ وبعد تعويض قيمة a في (1) نجد: $b=53$

الحالة2: $(2a-3b)(2a+3b)=11\times 29$ وتكافئ: $\begin{cases} 2a-3b=11...(1) \\ 2a+3b=29.....(2) \end{cases}$ بجمع (2) و (1) طرف

لطرف نجد: $4a=40$ ومنه: $a=10$ وبعد تعويض قيمة a في (1) نجد: $b=3$ ومنه الثنائيات $(a;b)$ هي:

$(80;53)$ ، $(-80;-53)$ ، $(-80;53)$ ، $(80;-53)$ ، $(10;3)$ ، $(-10;-3)$ ، $(-10;3)$ و $(10;-3)$

استنتاج الثنائيات $(x_0;y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

$4a^2-9b^2=319....(2)$ تكافئ $4x_0-9y_0=319....(2)$ حيث $x_0=a^2$ و $y_0=b^2$

ومنه الثنائيات $(x_0;y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين هي:

$(640;2809)$ و $(100;9)$

شعبة الرياضيات :

التمرين40: دورة 2018

1) تعييّن العددين α و β ن ثم بيّن أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

*لدينا: α و β عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$

$\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2\alpha=4036\\ \alpha=1+\beta\end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases}\alpha=2018\\ \beta=\alpha-1=2017\end{cases}$

** العددان $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما معناه $\frac{\alpha}{2}x_0+\beta y_0=1$ حيث $(x_0;y_0)\in\mathbb{Z}^2$ حسب بيزو

لدينا: $1009x_0+2017y_0=1$ حيث $(x_0;y_0)=(2;-1)$ وعليه العددان $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما

ملاحظة:يمكن اثبات ان $PGCD(\beta;\frac{\alpha}{2})=1$

2)تعييّن كل الثنايات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$.

من الجواب السابق لدينا: $1009(2)+2017(-1)=1$ والتي تكافئ $1009(2)-2017(1)=1$

$1009(2)-2017(1)=1$تعني أن الثنائية $(2;-1)$حل خاص للمعادلة $1009x-2017y=1...(1)$

*لدينا: $\begin{cases}1009x-2017y=1\\ 1009(2)-2017(1)=1\end{cases}$ بطرح المعادلتين طرف لطرف نجد:

ومنه: $1009(x-2)-2017(y-1)=0$ وتكافئ $1009(x-2)=2017(y-1).....(1)$

من(1)نستنتج أن: 1009 يقسم$2017(y-1)$ ومنه 1009 يقسم$(y-1)$لأن2017 أولي مع1009

وعليه يكون لدينا: $(y-1)=1009k$ ومنه $y=1009k+1$

بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد:$x=2017k+2$

ومنه حلول المعادلة هي : $(x;y)=(2017k+2;1009k+1)$ حيث k عدد صحيح

3) تعييّن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$

الجملة: $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}a\equiv 2[2017]\\ a\equiv 1[1009]\end{cases}$ لأن$2019\equiv 2[2017]$ و$2019\equiv 1[1009]$

وعليه $\begin{cases}a=2017\alpha+2\\ a=1009\beta+1\end{cases}$ ومنه $1009\beta-2017\alpha=1...(2)$

بمطابقة المعادلتين (1) و(2) نستنتج أن : $\alpha=y=1009k+1$ و $\beta=x=2017k+2$

ومنه: $a=2017(1009k+1)+2=2035153k+2019$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

4-أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

لدينا: $7^0\equiv1[9]$، $7^1\equiv7[9]$، $7^2\equiv4[9]$، $7^3\equiv1[9]$

بواقي قسمة 7^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$7^n\equiv$	1	7	4

ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

لدينا L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الاساس 7 كمايلي: $L=\overline{111...1}$

ومنه: $L=\overline{111...1}=7^0+7^1+7^2+....+7^{2017}$

L هو مجموع متتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 7وعليه: $L=\dfrac{7^{2018}-1}{6}$

$L=\dfrac{7^{2018}-1}{6}$ تكافئ $42L=7^{2019}-7$ وذلك بعد ضرب الطرفين في 42

$7^{2019}-7\equiv0[9]$ لأن $7^{2019}\equiv7[9]$

التمرين41: دورة 2017 م1

1-أ)حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104و 20 ثم تبيّان أن المعادلة (E) تقبل حلولا

*لحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 نستعمل طريقة خوارزمية أقليدس أو طريقة جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين.

الطريقة1: $104=20\times5+4$ و $20=4\times5+0$

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 هو 4 آخر باقي غير معدوم

الطريقة2: $104=2^3\times13$ و $20=2^2\times5$

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 هو $4=2^2$ العوامل المشتركة وبأصغر أس.

* لدينا: $104x-20y=272....(E)$

المعادلة (E) تقبل حلولا لأن القِ.م أ للعددين 104و 20يقسم العدد 272 لأن: $272=4\times68$

ب-تبيّان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv3[5]$

لدينا المعادلة (E) تكافئ $26x-5y=68....(E')$ وذلك بعد تقسيم طرف المعادلة (E) على 4

ولدينا أيضا (E') تكافئ $26x=68+5y$ أي $26x\equiv68[5]$

ومنه $x\equiv3[5]$ لأن $26\equiv1[5]$ و $68\equiv3[5]$.

استنتاج حلول المعادلة (E)

المعادلتين (E) و(E') لهما نفس الحلول لأنهما متكافئتين

وعليه ومن الجواب السابق لدينا: $x\equiv3[5]$ ومعناه $x=5k+3$ حيث k عدد صحيح.

من المعادلة (E') لدينا $5y=-68+26x$ وبعد تعويض قيمة x نجد:
$5y=-68+26(5k+3)=5(21k+2)$ أي $y=21k+2$
والخلاصة حلول المعادلة (E) هي : $(x;y)=(5k+3;26k+2)$ حيث k عدد صحيح.

2)تعيّين α و β ثم أكتابة λ في النظام العشري.

*لدينا: λ يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في النظام الذي اساسه 4 .
ومنه: $\lambda=1\times4^5+\alpha\times4^4+\alpha\times4^3+\beta\times4^2+1=1025+320\alpha+16\beta....(1)$
ولدينا أيضا λ يكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في النظام الذي اساسه 6
ومنه: $\lambda=1\times6^4+\alpha\times6^3+\beta\times6^2+1=1267+216\alpha+36\beta....(2)$
من (1) و (2) نجد: $1025+320\alpha+16\beta=1297+216\alpha+36\beta$
وبعد التبسيط نجد: $104\alpha-20\beta=272$ حيث $0\leq\alpha\leq3$ و $0\leq\beta\leq3$
بمطابقة المعادلة $104\alpha-20\beta=272$ مع المعادلة $104x-20y=272....(E)$
نستنتج أن: $\alpha=x=5k+3$ و $\beta=y=21k+2$
وبمأن $0\leq\alpha\leq3$ و $0\leq\beta\leq3$ نستنتج أن: $k=0$ وعليه يكون: $(\alpha;\beta)=(3;2)$
* لدينا: $\lambda=1025+320\alpha+16\beta$ حيث $(\alpha;\beta)=(3;2)$ ومنه $\lambda=2017$.

3) التحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أوّلي

لدينا: $\sqrt{2017}=44,91$ و $\sqrt{1009}=31,76$
العدد 2017 أوي لأنه لا يقبل القسمة على كلا من الأعداد الأولية الاصغر من 43
العدد 1009 أوي لأنه لا يقبل القسمة على كلا من الأعداد الأولية الاصغر من 31

تعيين الثنائيات $(a;b)$ من الاعداد الطبيعية التي تحقق: $2m-d=2017$

لدينا: $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$
ونعلم أن : $d=PGCD(a;b)$ تكافئ $a=a'.d$ و $b=b'.d$ حيث $PGCD(a';b')=1$
ونعلم أن: $m\times d=a\times b$ أي $m=d\times a'\times b'$
بعد تعويض قيمة $m=d\times a'\times b'$ في العلاقة $2m-d=2017$ نجد: $2a'\times b'-1=\frac{2017}{d}...(*)$
من العلاقة (*) نستنتج أن : d يقسم العدد 2017 أي $d=1$ أو $d=2017$ لأن 2017 أوي
الحالة1: من أجل $d=1$ العلاقة (*) تكافئ $a'\times b'=1009$
وعليه $(a';b')=(1009;1)$ أو $(a';b')=(1;1009)$ لان 1009 أوي
الحالة2: من أجل $d=2017$ العلاقة (*) تكافئ $a'\times b'=1$
لاتوجد قيم للعددين a' و b'
من الحالة 1 نستنتج أن: $(a;b)=(1009;1)$ أو $(a;b)=(1;1009)$

التمرين42: دورة 2017 م2

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

(u_n) معرفة بحدّها الأول: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 7u_n + 8$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $3u_0 = 3$ محققة لأن $u_0 = 1$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $3u_n = 7^{n+1} - 4$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 7u_n + 8$ ومنه $3u_{n+1} = 7(3u_n) + 24$

ولدينا من فرضية التراجع $3u_n = 7^{n+1} - 4$ وعليه $3u_{n+1} = 7(7^{n+1} - 4) + 24$

أي $3u_{n+1} = 7.7^{n+1} - 28 + 24$ وأخيرا $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

ومنه الخاصية $3u_n = 7^{n+1} - 4$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

2) أ-حساب بدلالة n المجموع S_n .

$S_n = 1 + 7 + 7^2 ...... + 7^n$ هو مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 7

ومنه: $S_n = 1\left(\dfrac{7^{n+1} - 1}{7 - 1}\right) = \dfrac{7^{n+1} - 1}{6}$

إيجاد علاقة بيّن S_n و S'_n.

لدينا: $S_n' = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ولدينا أيضا $3u_n = 7^{n+1} - 4$

ومنه: $3S_n' = 3u_0 + 3u_1 + ... + 3u_n$

أي $3S_n' = \left[(7-4) + (7^2 - 4) + ... + (7^{n+1} - 4)\right] = 7(1 + 7 + 7^2 + ...7^n) - 4(n+1)$

إذن $3S_n' = 7S_n - 4(n+1)$

ب-استنتاج أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

من الجواب السابق لدينا $3S_n' = 7S_n - 4(n+1)$ بضرب طرفي هذه العلاقة في 6 نجد

$18S_n' = 7(6S_n) - 24(n+1)$ لكن لدينا $S_n = \dfrac{7^{n+1} - 1}{6}$

ومنه $18S_n' = 7(6\dfrac{7^{n+1} - 1}{6}) - 24(n+1)$ إذن $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$

3-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

لدينا: $7^0 \equiv 1[5]$، $7^1 \equiv 2[5]$، $7^2 \equiv 4[5]$، $7^3 \equiv 3[5]$، $7^4 \equiv 1[5]$.

بواقي قسمة 7^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$7^n \equiv$	1	2	4	3

ب)تعييّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلا القسمة على 5.

S'_n قابلا القسمة على 5معناه $S'_n \equiv 0[5]$ تكافئ $18S'_n \equiv 0[5]$ (ضرب الطرفين في 18)

وتكافئ $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5]$ وتكافئ $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$

لتعيين قيم العدد الطبيعي نميز عدة حالات هي:

1) $n = 4k$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 3[5]$ وعليه $n = 20k'+12$ $(k' \in \mathbb{N})$

2) $n = 4k+1$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 3[5]$ وعليه $n = 20k'+13$ $(k' \in \mathbb{N})$

3) $n = 4k+2$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 2[5]$ وعليه $n = 20k'+10$ $(k' \in \mathbb{N})$

4) $n = 4k+3$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 4[5]$ وعليه $n = 20k'+19$ $(k' \in \mathbb{N})$

التمرين43: دورة 2017 الاستدراكية

1) التحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما .

لإثبات أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(63;5) = 1$

الطريقة: $PGCD(63;5) = 1$

لدينا: $63 = 5.12 + 3$ و $5 = 3.1 + 2$ و $3 = 2.1 + 1$

آخر باقي غير معدوم في القسمات المتتابعة لخوارزمية إقليدس هو 1 ومنه $PGCD(63;5) = 1$

ملاحظة: يمكن استعمال مبرهنة بيزو

تبيّان أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

تذكير: المعادلة $ax + by = c$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ معناه $PGCD(a;b)$ يقسم العدد c

لدينا : $63x + 5y = 159...(E)$

المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ لأن $PGCD(63;5) = 1$ يقسم 159

2)البرهان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$.

لدينا : $63x + 5y = 159...(E)$ تكافئ: $63x = 159 - 5y$ أي $63x \equiv 159[5]$

ومنه $3x \equiv 9[5]$ لأن $63 \equiv 3[5]$ و $159 \equiv 9[5]$

ومنه أيضا $3x \equiv 9[5]$ تكافئ $x \equiv 3[5]$ لأن 3 أولي مع 5

استنتاج حلول المعادلة (E)

من الجواب السابق لدينا: $x \equiv 3[5]$ وعليه $x = 5k + 3$ حيث k عدد صحيح.

لدينا: $63x + 5y = 159...(E)$ تكافئ $5y = 159 - 63x$

بتعويض قيمة $x = 5k + 3$ في المعادلة $5y = 159 - 63x$ نجد:

$-5y + 159 = 63(5k + 3)$ أي $-5y = 30 + 63 \times 5k$ إذن $y = -63k - 6$

الخلاصة :حلول المعادلة (E) هي المجموعة: $\{(x;y) = (5k + 3; -63k - 6); k \in \mathbb{Z}\}$

3) إيجاد العددين الطبيعيين α و β.

لدينا: λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha0\alpha}$ في النظام ذي الاساس 7

ومنه: $\lambda = \overline{5\alpha 0\alpha}^{7} = \alpha + 7^2\alpha + 7^3.5 = 50\alpha + 1715.....(1)$

ولدينا: λ يكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في النظام ذي الاساس 5

ومنه: $\lambda = \overline{\beta 10\beta 0}^{5} = 5\beta + 1.5^3 + 5^4\beta = 630\beta + 125.....(2)$

من (1) و (2) نجد: $630\beta + 125 = 50\alpha + 1715$ وتكافئ $63\beta + 5(-\alpha) = 159....(3)$

بمطابقة المعادلتين (3) و (E) نجد أن: $(\beta;-\alpha) = (x;y) = (5k+3;-63k-6)$

أي $(\beta;\alpha) = (5k+3;63k+6)$ ولدينا أيضا: $0 \le \alpha \le 6$ و $0 \le \beta \le 4$

ومعناه $0 \le 5k+3 \le 6$ و $0 \le 63k+6 \le 4$ أي $k=0$ وعليه : $(\beta;\alpha) = (3;6)$

كتابة العدد $\lambda+2$ في النظام العشري.

من العلاقة (1) لدينا: $\lambda = 50\alpha + 1715$ ومنه $\lambda + 2 = 50\alpha + 1717$ حيث $\alpha = 6$

وعليه $\lambda + 2 = 50(6) + 1717 = 2017$

ملاحظة: نحصول على نفس النتيجة باستعمال العلاقة (2)

4-أ)دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 وذلك حسب قيم العدد الطبيعي n

لدينا: $3^0 \equiv 1[5]$، $3^1 \equiv 3[5]$، $3^2 \equiv 4[5]$، $3^3 \equiv 2[5]$، $3^4 \equiv 1[5]$

بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n \equiv$	1	3	4	2

ب)تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5

العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ يقبل القسمة على 5 معناه $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0[5]$

لدينا: $(x;y) = (5k+3;-63k-6)$ حيث x عدد طبيعي

ومنه $(x-y) = (68k+9)$ وعليه $3^{x-y} = 3^{68k+9} = 3.3^{68k+8} \equiv 3[5]$ لأن $3^{68k+8} \equiv 1[5]$

ولدينا: $1428 \equiv 3[5]$ ومنه $1428^{2017} \equiv 3^{2017}[5]$ أي $1428^{2017} \equiv 3[5]$ لان $3^{2017} \equiv 3[5]$

وعليه يكون لدينا: $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0[5]$ تكافئ $3 + 4n + 3 \equiv 0[5]$

$3 + 4n + 3 \equiv 0[5]$ تكافئ $4n \equiv 4[5]$ إذن $n \equiv 1[5]$ ومعناه $n = 5p+1$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين44: دورة 2017 الاستدراكية

1-أ) تبيّان أن:من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

لدينا المتتالية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 4u_n + 1$

لإثبات $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ من أجل كل عدد طبيعي n نستعمل البرهان بالتراجع

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $u_0=\frac{1}{3}(4^0-1)=0$ محققة لأن $u_0=0$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $u_{n+1}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$

لدينا: $u_{n+1}=4u_n+1$ لكن $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$ من فرضية التراجع

ومنه: $u_{n+1}=4\left(\frac{1}{3}(4^n-1)\right)+1$ أي $u_{n+1}=\frac{4}{3}.4^n-\frac{4}{3}+1=\frac{1}{3}.4^{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$

ومنه الخاصية $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب)التحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العددان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

تذكير:مبرهنة بيزو:

العددان a و b أوليان فيما بينهمامعناه وجود ثنائية $(x_0;y_0)\in\mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة $ax_0+by_0=1$

لدينا: $u_{n+1}=4u_n+1$ تكافئ $u_{n+1}-4u_n=1$

الثنائية $(1;-4)$ تحقق المعادلة: $u_{n+1}-4u_n=1$ معناه العددان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

2-أ)البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها و حدّها الأول v_0

المتتالية (v_n) هندسية أساسها q معناه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=q.v_n$.

لدينا: المتتالية (v_n) معرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\frac{1}{3}$

لدينا: $v_n=u_n+\frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}=4u_n+1+\frac{1}{3}=4u_n+\frac{4}{3}=4(u_n+\frac{1}{3})=4v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=4$ حدّها الاول $v_0=u_0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

ب)التعبير بدلالة n عن المجموع S_n

لدينا: $S_n=v_0+v_1+v_2.....+v_{3n}$. مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

ومنه: $S_n=v_0\left[\frac{q^{3n+1}-1}{q-1}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{(4)^{3n+1}-1}{4-1}\right]=\frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$

3)تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 4^n-1 و $4^{n+1}-1$

لدينا: $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$ ومنه لدينا: $3u_n=4^n-1$ ومنه أيضا: $3u_{n+1}=4^{n+1}-1$

وعليه $PGCD(3u_{n+1};3u_n)=3PGCD(u_{n+1};u_n)$ خاصية

ومنه: $PGCD(4^{n+1}-1;4^n-1)=3.1=3$ لأن $PGCD(u_{n+1};u_n)=1$ حسب 1-ب)

4-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية 4^n على 7.

لدينا: $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 4^n على 7 تشكل متتالية دورية

ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$4^n \equiv$	1	4	2

ب)تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل A_n

لدينا: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$

A_n يقبل القسمة على 7 معناه $A_n \equiv 0[7]$

$A_n \equiv 0[7]$ معناه $9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7]$

لدينا: $9S_n = \left(4^{3n+1} - 1\right)$ ومنه $9S_n = 3[7]$ لأن: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$

ولدينا كذلك: $3^{6n+4} \equiv \left[(-4)^2\right]^{3n+2}[7]$ أي $3^{6n+4} \equiv \left[(4)^{3n+2}\right]^2 \equiv 4[7]$

نستنتج أن: $9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7]$ تكافئ $3 - 6n - 4 \equiv 0[7]$ أي $6n \equiv 6[7]$

وأخيرا $n \equiv 1[7]$ لان 6 أولي مع 7 إذن: $n = 7p+1$ حيث $p \in \mathbb{N}$.

التمرين45: دورة 2016 الموضوع 1

1) حساب u_1 و u_2 واستنتاج الأساس q

لدينا: (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها حيث: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$

*الجملة $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \ln(u_1).(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} (u_1).(u_2) = e^{11} \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$

الحدان u_1 و u_2 هما حلا المعادلة : $x^2 - Sx + P = 0$ حيث: $S = e^4(1+e^3)$ و $P = e^{11}$

حلول المعادلة $x^2 - Sx + P = 0$ هما: $x = u_1 = e^4$ أو $x' = u_2 = e^7$.

*لدينا: $u_2 = q.u_1$ ومنه : $q = \dfrac{u_2}{u_1} = e^3$

2-أ)التعبير عن u_n بدلالة n

لدينا $u_n = u_1.q^{n-1}$ ومنه: $u_n = e^4((e^3)^{n-1}) = e^{3n+1}$

ب)حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$

ومنه: $S_n = \ln(u_0).(u_1)......(u_n) = \ln\left[(u_0)^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = (n+1)\ln((u_0).q^{\frac{n}{2}})$

تطبيق عددي: لدينا: $u_0 = e$ و $q = e^3$ ومنه: $S_n = (n+1)\ln((e).e^{\frac{3n}{2}}) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}$

3-أ)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$

لدينا: $a_n = n+3$ و $2S_n = (n+1)(3n+2) = 3n^2+5n+2$

يمكن كتابة $2S_n = (n+3)(3n-4)+14 = a_n(3n-4)+14$ ومنه: $2S_n - a_n(3n-4) = 14$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $PGCD(2S_n;a_n) = PGCD(a_n;14)$

ب)تعيين القيّم الممكنة لـ $PGCD(2S_n;a_n)$

من الجواب السابق لدينا: $PGCD(2S_n;a_n) = PGCD(a_n;14)$

ومنه $PGCD(2S_n;a_n)$ هي قواسم العدد 14 وهي :1 ، 2 ، 7 و 14

ج) تعين قيم العدد الطبيعي بحيث: $PGCD(2S_n;a_n) = 7$

$PGCD(2S_n;a_n) = 7$ معناه $PGCD(a_n;14) = 7$ ومعناه $PGCD(n+3;14) = 7$ مع $n+3 = 7k$

وعليه يكون $PGCD(n+3;14) = 7$ تكافئ $PGCD(7k;14) = 7$ أي $PGCD(k;2) = 1$

$PGCD(k;2) = 1$ تعني أن k أولي مع 2 أي أن k يكون عدد فردي أي $k = 2k'+1$

ولدينا: $n+3 = 7k$ أي $n = 7k-3$ وبعد تعويض $k = 2k'+1$ نجد: $n = 14k'+4$ حيث $k' \in \mathbb{N}$

4) دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

$2^0 \equiv 1[7]$، $2^1 \equiv 2[7]$، $2^2 \equiv 4[7]$، $2^3 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3وحسب الجدول المقابل

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n \equiv$	1	2	4

5)تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

لدينا: $b_n = 3n.a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1 = 3n^2+9-(3n^2+5n+2)+1437^{2016}+1$

ولدينا: $1437^{2016} \equiv 2^{2016}[7] \equiv 1[7]$ لأن: $1437 \equiv 2[7]$ و $2016 \equiv 1[3]$

وعليه: $b_n \equiv -5n+9[7]$ أي $5n-9 \equiv 0[7]$ وتكافئ $15n \equiv 6[7]$ أي $n \equiv 6[7]$

ومنه: $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} 5n \equiv 0[35] \\ 7n \equiv 0[35] \end{cases}$ بالطرح نجد $2n \equiv 0[35]$

أي $n \equiv 0[35]$ وأخيرا $n = 35k'$ حيث k' عدد طبيعي.

6)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1} - 3\times4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7

العدد: $1437^{9n+1} - 3\times4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7 معناه $1437^{9n+1} - 3\times4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

لدينا: $1437^{9n+1} \equiv (2^{3n})^3.2 \equiv 2[7]$ و $4^{12n+1} \equiv (4^{3n})^4 \times 4 \equiv 4[7]$ و $52 \equiv 3[7]$

وعليه: $1437^{9n+1} - 3\times4^{12n+1} + 52 \equiv 2-3.4+3[7]$ ومنه: $1437^{9n+1} - 3\times4^{12n+1} + 52 \equiv -7[7]$

أي: $1437^{9n+1} - 3\times4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$.

التمرين46: دورة 2016 الموضوع 2

1-أ) دراسة بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

*$3^0 \equiv 1[11]$، $3^1 \equiv 3[11]$، $3^2 \equiv 9[11]$، $3^3 \equiv 5[11]$، $3^4 \equiv 4[11]$ و $3^5 \equiv 1[11]$

بواقي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وهي حسب الجدول التالي

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4

*$7^0 \equiv 1[11]$، $7^1 \equiv 7[11]$، $7^2 \equiv 5[11]$، $7^3 \equiv 2[11]$، $7^4 \equiv 3[11]$، $7^5 \equiv 10[11]$، $7^6 \equiv 4[11]$

$7^7 \equiv 6[11]$ ، $7^8 \equiv 9[11]$ ، $7^9 \equiv 8[11]$ و $7^{10} \equiv 1[11]$

بواقي قسمة 7^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 10 وهي حسب الجدول التالي

n	$10k'$	$10k'+1$	$10k'+2$	$10k'+3$	$10k'+4$
$7^n \equiv$	1	7	5	2	3
n	$10k'+5$	$10k'+6$	$10k'+7$	$10k'+8$	$10k'+9$
$7^n \equiv$	10	4	6	9	8

ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف لـ 11

لدينا: $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11]$ ومنه $1437^{10n+4} \equiv 3[11]$ و $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11] \equiv 4[11]$

وعليه: $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4} \equiv 2.4+3[11]$ أي $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4} \equiv 0[11]$

2-أ) حل المعادلة $7x-3y=8$.

$7x-3y=8$ تكافئ $7x=3y+8$ ومنه $7x \equiv 8[3]$ أي $x \equiv 2[3]$ إذن $x=3k+2$ مع $k \in \mathbb{N}$

بتعويض قيمة $x=3k+2$ في المعادلة $7x=3y+8$ نجد: $y=7k+2$ مع $k \in \mathbb{N}$

ومنه حلول المعادلة $7x-3y=8$ هي الثنائيات $(x;y)=(3k+2;7k+2)$ مع $k \in \mathbb{N}$

ب) تعيين القيم الممكنة للعدد d.

لدينا: d هو القاسم المشترك الأكبر لـ x و y حيث $(x;y)$ حلول المعادلة $7x-3y=8$

لدينا: d/x ومنه $d/7x$.....(1) ، d/y: ومنه $d/3y$.....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $d/7x-3y$ ومنه $d/8$ أي: $d \in D_8=\{1;2;4;8\}$

تعيين الحلول من أجل d=4.

لدينا: $PGCD(3k+2;7k+2)=4$ تكافئ $PGCD(k-2;8)=4$

ولدينا: $k-2=4\alpha$ ومنه $PGCD(4\alpha;8)=4$

أي $PGCD(\alpha;2)=1$ أي $\alpha=2m+1$ لأن α أولي مع 2 حيث m عدد طبيعي

ومنه $k=8m+6$ وبعد تعويض قيمة k في الحلول نجد: $(x;y)=(24m+20;56m+44)$

جـ) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y} \equiv 0[11]$

لدينا: $1437^{3y} \equiv 7^{3y}[11]$ و $2016^{7x} \equiv 3^{7x}[11]$

وعليه: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$ تكافئ $3^{7x} + 7^{3y} \equiv 0[11]$ حيث $(x;y) = (3k+2;7k+2)$

بعد التبسيط نجد: $3^{7x} + 7^{3y} \equiv 0[11]$ تكافئ $3^{k} + 7^{k} \equiv 0[11]$ وبعد عملية توحيد الدورين 5 و 10

ولإيجاد الثائيات المطلوبة نستعمل الجدول التالي:

k	$10p$	$10p+1$	$10p+2$	$10p+3$	$10p+4$
$3^k \equiv$	1	3	9	5	4
$7^k \equiv$	1	7	5	2	3
$3^k + 7^k \equiv$	2	10	3	7	7
k	$10p+5$	$10p+6$	$10p+7$	$10p+8$	$10p+9$
$3^k \equiv$	1	3	9	5	4
$7^k \equiv$	10	4	6	9	8
$3^k + 7^k \equiv$	0	7	4	4	1

توجدحالة وحيدة تحقق هي من أجل $n = 10p+5$ ومن الحلول هي

$(x;y) = (30p+17;70p+37)$ حيث p عدد طبيعي

التمرين47: دورة 2015 الموضوع 1

1)-أ) تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$، $2^1 \equiv 2[7]$، $2^2 \equiv 4[7]$، $2^3 \equiv 1[7]$.

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول المقابل

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n \equiv$	1	2	4

ب)استنتاج باقي القسمة الأقليدية للعدد $2015^{53} + 1954^{1962} - 1962^{1954}$ على 7.

لدينا: $1962 \equiv 2[7]$ و $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$

لكن $1954 \equiv 1[3]$ ومنه $2^{1954} \equiv 2[13]$ أي $1962^{1954} \equiv 2[7]$

لدينا: $1954 \equiv 1[7]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[7]$.

ولدينا: $2015 \equiv 6[7]$ أي $2015 \equiv -1[7]$

ومنه $2015^{53} \equiv (-1)^{53}[7]$ أي $2015^{53} \equiv (-1)[7]$ لأن 53 عدد فردي

وعليه: $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2-1-1[7]$

ومنه: $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0[7]$.

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $2015^{53} + 1954^{1962} - 1962^{1954}$ على 7 هو 0 .

2)-أ)تبيان أن العدد 89 أولي.

$\sqrt{89} = 9,4$ نبين أن العدد لا يقبل القسمة على كل الاعداد الأولية الأصغر من9

الباقي	الحاصل	القاسم الأولي	العدد
1	44	2	89
2	29	3	89
4	17	5	89
5	12	7	89

من الجول السابق أن العدد 89 أولي.

ب)تعيين كل قواسم العدد الطبيعي 7832.

لدينا: تحليل العدد 7832 هو $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$

ومنه عدد قواسم العدد 7832 يساوي$(3+1)(1+1)(1+1) = 16$

لإيجاد قواسم العدد 7832 نستعمل الجدولين التاليين:

$\times$	1	11	89	979
2^0	1	11	89	979
2^1	2	22	178	1958
2^2	4	44	356	3916
2^3	8	88	712	7832

$\times$	11^0	11^1
89^0	1	11
89^1	89	979

نستنتج قواسم العدد 7832 هي:

$$D_{7832} = \{1;2;4;8;11;22;44;88;89;178;376;712;979;1958;3916;7832\}$$

ج) تبيان أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(977;981) = 1$

لدينا: $\begin{cases} 981 = 977 \times 1 + 4 \\ 977 = 4 \times 244 + 1 \end{cases}$ آخر باقي غير معدوم هو 1

ومنه العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

3)تعيين العددان الطبيعيان x وy.

لدينا: $PGCD(x;y) = 2$ معناه $x = 2x'$ و $y = 2y'$ و$PGCD(x';y') = 1$

ومنه: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \\ PGCD(x;y) = 2 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} (x'-y')(x'+y') = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$

نستنتج أن الفرق $x' - y' = 11k + 4$ وهو قاسم للعدد7832

الحالة الوحيدة التي تحقق هي :

$\begin{cases} x' - y' = 11k + 4 = 4 \\ x' + y' = 1958 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x' = 981 \\ y' = 977 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x = 2x' = 1962 \\ y = 2y' = 1954 \end{cases}$

4)-أ)البرهان أن a أولي مع $b \times c$

لدينا: a أولي مع كلا من b و c معناه وجود الثنائيتان $(x_0;y_0)$ و $(x'_0;y'_0)$ من الاعداد الصحيحة يحققان $ax_0+by_0=1...(1)$ و $ax'_0+cy'_0=1...(2)$

ونبرهن أن a أولي مع $b\times c$ معناه وجود الثنائية $(u;v)$ حيث $au+(bc)v=1$

بضرب (1) و(2) طرف لطرف نجد: $(ax_0+by_0)(ax'_0+cy'_0)=1$

ومنه: $a^2x_0x'_0+acx_0y'_0+abx'_0y_0+bcy_0y'_0=1$ أي: $a(x_0x'_0+cx_0y'_0+bx'_0y_0)+bc(y_0y'_0)=1$

ومنه: $u=x_0x'_0+cx_0y'_0+bx'_0y_0$ و $v=y_0y'_0$

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $PGCD(a;b^n)=1$

من أجل $n=1$ فإن: $PGCD(a;b)=1$ محققة من الفرضية.

نفرض أن: $PGCD(a;b^n)=1$ ونبرهن أن $PGCD(a;b^{n+1})=1$

لدينا: $PGCD(a;b^n)=1$ فرضية التراجع و $PGCD(a;b)=1$

ومنه $PGCD(a;b^{n+1})=1$ حسب الجواب 4-أ).

جـ) استنتاج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}

لدينا: $PGCD(981^{1954};977)=1$ و $PGCD(981^{1954};977^{1962})=1$ و $PGCD(981^{1954};2^8)=1$

من 4-أ ينتج $PGCD(1962^{1954};1954^{1962}.)=2^{1954}.PGCD(981^{1954};977^{1962}.2^8)=2^{1954}$

التمرين48: دورة 2014 الموضوع 1

1- أ) حساب $PGCD(2013;1962)$.

لدينا: $2013=3\times671$ و $1962=3\times654$ ومنه $PGCD(2013;1962)=3PGCD(671;654)$

لدينا $PGCD(671;654)=1$ يمكن استعمال خوارزمية إقليدس أو مبرهنة بيزو

ومنه: $PGCD(2013;1962)=3$

ب) استنتاج أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

لدينا: $(E): 2013x-1962y=54$

ولدينا: 3 يقسم 2013 ومنه 3 يقسم $2013x$ و 3 يقسم 1962 ومنه 3 يقسم $1962y$

ومنه: 3 يقسم الفرق $2013x-1962y$ ومنه 3 يقسم 54 ومنه المعادلة (E) تقبل حلول.

جـ) تبيّان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv0[6]$.

لدينا: $(E): 2013x-1962y=54$ تكافئ $671x-654y=18$ وذلك بقسمة طرفي (E) على 3

$671x-654y=18$ تكافئ $671x=654y+18$ وتكافئ $671x=6(109y+3)$

ومنه: $671x\equiv0[6]$ أي $x\equiv0[6]$ لأن 671 أولي مع 6.

د) استنتاج حلاّ خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $74\prec x_0\prec80$ ثم حل المعادلة (E) .

*من الجواب السابق لدينا: $x_0\equiv0[6]$ و $74\prec x_0\prec80$ ومنه $x_0=78$

* من أجل $x_0=78$ نجد $y_0=80$ وذلك بعد تعويض قيمة $x_0=78$ في المعادلة $671x-654y=18$

ومنه الثنائية $(78;80)$ حل خاص للمعادلة $671x-654y=18$

وعليه نحصل على الجملة التالية $\begin{cases}671x-654y=18...(1)\\671(78)-654(80)=18.....(2)\end{cases}$ بطرح (2) من (1) طرف لطرف

نجد: $671(x-78)-654(y-80)=0$ ومنه: $671(x-78)=654(y-80).....(*)$

من (*) نستنتج أن: 671 يقسم $654(y-80)$ ومنه 671 يقسم $(y-80)$ لأن 671 أولي مع 654 (م غوص)

ومنه: $(y-80)=671k$ أي $y=671k+80$ وبعد تعويض قيمة y في (*) نجد: $x=654k+78$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(x;y)=(654k+78;654k+80)$ مع أن k عدد صحيح.

2-أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d.

d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حلا للمعادلة (E).

لدينا: d يقسم x ومنه d يقسم $671x$ و d يقسم ومنه d يقسم $654y$

ومنه: d يقسم الفرق $671x-654y$ أي d يقسم الطرف الثاني 18 إذن : $d\in D_{18}=\{1;2;3;4;6;9;18\}$

ب) تعيّن قيم العددين a و b .

لدينا: الثنائية $(a;b)$ تحقق: الشرطين: $671a-654b=18$ و $PGCD(a;b)=18$.

ومنه: $\begin{cases}a\equiv 0[18]\\b=0[18]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}654k+78\equiv 0[18]\\671k+80=0[18]\end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد: $17k+2\equiv 0[18]$

ولدينا: $-k\equiv -2[18]$ أي $k\equiv 2[18]$ إذن: $k=18p+2$ حيث $p\in\mathbb{N}$

بتعويض قيمة $k=18p+2$ في حلول المعادلة نجد: $(a;b)=(11772p+1386;12078p+1422)$

التمرين 49: دورة 2013 الموضوع 1

1- أ-تبيّان أن : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

تذكير: $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$

حيث: $a=b.q+r$ علما أن q و r هما حاصل وباقي قسمة a على b

لدينا: $\alpha=2n^3-14n+2$ و $\beta=n+3$

باستعمال القسمة الأقليدية للعدد α على β نجد: $\alpha=(2n^2-6n+4)\beta+(-10)$

ومنه: $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;|-10|)$ أي $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

ب-تعيين القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$.

نفرض أن: $PGCD(\alpha;\beta)=d$ ومنه $PGCD(\beta;10)=d$ ومنه d يقسم 10

إذن: $d\in D_{10}=\{1;2;5;10\}$

جـ-تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $PGCD(\alpha;\beta)=5$

$PGCD(\alpha;\beta)=5$ تكافئ $PGCD(\beta;10)=5$ وتكافئ $\beta=0[5]$ ومنه $n+3=5k$

ومنه: $PGCD(5k;5.2)=5$ أي $5PGCD(k;2)=5$ وعليه $PGCD(k;2)=1$

إذن: k عدد فردي أي $k=2p+1$ ومنه: $n=5(2p+1)-3$ وأخيرا $n=10p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$

لدينا: $\beta=0[5]$ تكافئ $n+3=0[5]$ أي $n=5k-3$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم

2.أ- دراسة، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

لدينا: $4^0\equiv1[11]$، $4^1\equiv4[11]$، $4^2\equiv5[11]$، $4^3\equiv9[11]$، $4^4\equiv3[11]$، $4^5\equiv1[11]$

بواقي قسمة 4^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وحسب الجدول التالي

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$4^n\equiv$	1	4	5	9	3	$[11]$

ب-تعيّين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv0[11]\\ n\equiv2[10]\end{cases}$

لدينا: $\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv0[11]\\ n\equiv2[10]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}(4^{5p+1})^5+(4^{5p+1})^2+n\equiv0[11]\\ n\equiv10p+2\end{cases}$

من الجدول لدينا: $4^{5p+1}\equiv4[11]$ ومنه : $(4^{5p+1})^2\equiv5[11]$ و $(4^{5p+1})^5\equiv1[11]$

وعليه الجملة $\begin{cases}(4^{5p+1})^5+(4^{5p+1})^2+n\equiv0[11]\\ n\equiv10p+2\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}n\equiv5[11]\\ n\equiv2[10]\end{cases}$

لدينا: $\begin{cases}n\equiv-6[11]\\ n\equiv2[10]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}10n\equiv-60[110]\\ 11n\equiv22[110]\end{cases}$ بالطرح نجد: $n\equiv82[110]$

إذن: $n\equiv110\alpha+82$ حيث α عدد طبيعي.

التمرين50: دورة 2013 الموضوع 3

1.أ-تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n+27\equiv0[n+1]$

لدينا: $2n+27\equiv0[n+1]$ تكافئ $2n+2+25\equiv0[n+1]$ وتكافئ $25\equiv0[n+1]$

$25\equiv0[n+1]$ تعني أن $n+1$ يقسم 25 ومنه: $n+1\in D_{25}=\{1;5;25\}$

$n+1\in\{1;5;25\}$ تكافئ $n\in\{0;4;24\}$

ب- تعيين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية ، حيث : $(b-a)(a+b)=24$

لتعيين الثنائيات $(a;b)$ نبحث أولا على قواسم العدد 24

لدينا: $24=2^3\times3$ ومنه عدد القواسم هو: $(3+1)(1+1)=8$

ومنه : $D_{24}=\{1;2;3;4;6;8;12;24\}$

الحالات التي تحقق المعادلة $(b-a)(a+b)=24$ حيث $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية هي:

الحالة1: $(b-a)(a+b)=2\times12$ ومعناه $\begin{cases}(a+b)=12\\ (b-a)=2\end{cases}$ ومعناه $(a;b)=(5;7)$

الحالة2: $(b-a)(a+b)=4\times 6$ ومعناه $\begin{cases}(a+b)=6\\(b-a)=4\end{cases}$ ومعناه $(a;b)=(1;5)$

جـ- أستنتاج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

لدينا: $(b-a)(a+b)=24$ تكافئ $b^2-a^2=24$ وتكافئ $b^2=a^2+(\sqrt{24})^2$

الحالة1: $(a;b)=(5;7)$ معناه $7^2=5^2+(\sqrt{24})^2$

حسب فيتاغورس $\sqrt{24}$ هو طول الضلع AB في مثلث ABC قائم A حيث: $AC=5$ و $BC=7$

الحالة2: $(a;b)=(1;5)$ معناه $5^2=1^2+(\sqrt{24})^2$

حسب فيتاغورس $\sqrt{24}$ هو طول الضلع AB في مثلث ABC قائم A حيث: $AC=1$ و $BC=5$

2-أ- كتابة العددين α و β في النظام العشري.

لدينا: $\alpha=\overline{10141}$ ومنه $\alpha=1.5^4+0.5^3+1.5^2+4.5^1+1.5^0=671$

لدينا: $\beta=\overline{3403}$ ومنه $\beta=3.5^3+4.5^2+0.5^1+3.5^0=478$

ب-تعيين الثنائية $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث: $\begin{cases}b^2-a^2=24\\\alpha a-\beta b=9\end{cases}$

الجملة $\begin{cases}b^2-a^2=24\\\alpha a-\beta b=9\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}b^2-a^2=24\\671a-478b=9\end{cases}$

<u>الحالة1:</u> الثنائية $(a;b)=(5;7)$ تحقق الجملة $\begin{cases}b^2-a^2=24\\671a-478b=9\end{cases}$

<u>الحالة2:</u> الثنائية $(a;b)=(1;5)$ لا تحقق الجملة $\begin{cases}b^2-a^2=24\\671a-478b=9\end{cases}$

ومنه حلول الجملة $\begin{cases}b^2-a^2=24\\\alpha a-\beta b=9\end{cases}$ هي الثنائية $(a;b)=(5;7)$

3.أ-إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و1434 .

لدينا: $2013=3.671$ و $1434=3.478$

ومنه : القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و1434 هو 3

استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478

لدينا: $PGCD(2013;1434)=3.PGCD(671;478)$

671 عدد أولي لأن $\sqrt{671}=25,9$ و671 لايقبل القسمة على كل الاعداد الاولية الأصغر من 23

ومنه: $PGCD(671;478)=1$

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2013x-1434y=27$

المعادلة $2013x-1434y=27$ تكافئ $671x-478y=9$

من الجواب 2- ب) نستنتج أن الثنائية $(5;7)$ حل خاص للمعادلة $671x-478y=9$

ومنه نحصل على الجملة التالية $\begin{cases} 671x-478y=9...(1) \\ 671(5)-478(7)=9.....(2) \end{cases}$

*لدينا: $\begin{cases} 671x-478y=9...(1) \\ 671(5)-478(7)=9.....(2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: $671(x-5)-478(y-7)=0$

ومنه: $671(x-5)=478(y-7).....(*)$

من (*) نستنتج أن: 478 يقسم $671(x-5)$ ومنه 478 يقسم $(x-5)$ لأن 671 أولي مع 478 (م. غوص)

ومنه: $(x-5)=478k$ أي $x=478k+5$ وبعد تعويض قيمة x في (*) نجد: $y=671k+7$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(x;y)=(478k+5;671k+7)$ مع أن k عدد صحيح.

التمرين51: دورة 2012 الموضوع 1

1- أ- تبيّان أن العدد 2011 أولي.

2011 عدد أولي لأن: $\sqrt{62011}=44,84$ ولايقبل القسمة على كل الاعداد الاولية الأصغر من 44

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس ، تعيين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حل لمعادلة (1).

*لدينا: $2011=1432\times1+579$ ، $1432=579\times2+274$ ، $579=274\times2+31$ ومنه

$$31=579-274\times2$$
$$31=579-274\times(1432-2\times579)$$
$$31=579-2\times(1432-2\times579)$$
$$31=1432(-2)+5\times579$$
$$31=1432(-2)+5\times(2011-1432)$$
$$31=2011(5)-1432(7)$$

من السطر الأخير نستنتج أن الثنائية $(5;7)$ حلا خاصا للمعادلة (1).

* ومنه نحصل على الجملة التالية $\begin{cases} 2011x-1432y=31...(1) \\ 2011(5)-1432(7)=31.....(2) \end{cases}$

*لدينا: $\begin{cases} 2011x-1432y=31...(1) \\ 2011(5)-1432(7)=31.....(2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد: $2011(x-5)-1432(y-7)=0$

ومنه: $2011(x-5)=1432(y-7).....(*)$

(*) تعني: 1432 يقسم $2011(x-5)$ ومنه 1432 يقسم $(x-5)$ لأن 1432 أولي مع 2011 (م. غوص)

ومنه: $(x-5)=1432k$ أي $x=1432k+5$ وبعد تعويض قيمة x في (*) نجد: $y=2011k+7$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(x;y)=(1432k+5;2011k+7)$ مع أن k عدد صحيح.

2-أ-تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 .

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$.

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n \equiv$	1	2	4

إيجاد باقي القسمة الأقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

لدينا: $2011 \equiv 2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{1432^{2012}}[7]$

ولدينا أيضا: $1432 \equiv 1[3]$ ومنه: $1432^{2012} \equiv 1[3]$ أي 1432^{2012} من الشكل $3k+1$

وعليه: $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{3k+1}[7]$ إذن: $2011^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$

ومنه باقي قسمة العدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2.

ب-تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$

لدينا: $2011 \equiv 2[7]$ ومنه: $2011^n \equiv 2^n[7]$ و $2010 \equiv 1[7]$ ومنه $2010^n \equiv 1[7]$

ولدينا: $1432 \equiv 4[7]$ ومنه $1432^n \equiv (2^n)^2[7]$

وعليه: $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$ تكافئ $1 + 2^n + 2^{2n} \equiv 0[7]$

لتعيين قيم العدد الطبيعي n نشكل الجول التالي

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n \equiv$	1	2	4
$2^{2n} \equiv$	1	4	2
$2^{2n} + 2^n + 1 \equiv$	3	0	0

من الجدول السابق نستنتج أن قيم العدد الطبيعي n هي: $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$

تعيين α ، β و γ ثم كتابة N في النظام العشري.

لدينا: N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9

ولدينا: $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1) معناه $2011\beta - 1432\gamma = 31$

ومنه: $\beta = x = 1432k + 5$ و $\gamma = y = 2011k + 7$ حيث $0 \le \beta \le 8$ و $0 \le \gamma \le 8$

ومنه : $0 \le 1432k + 5 \le 8$ و $0 \le 2011k + 7 \le 8$ أي $k = 0$ (بعد عملية الحصر)

إذن: $\beta = 5$ و $\gamma = 7$

ومن جهة أخرى لدينا: α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا لمتتالية حسابية متزايدة تماما

أي: $3\beta = \alpha + \beta + \gamma$ ومنه $\alpha = 2\beta - \gamma = 3$

لدينا: $N = \overline{2\gamma\alpha\beta} = \overline{2735} = 2.9^3 + 7.9^2 + 3.9 + 5.9^0 = 2057$

التمرين52: دورة 2011 الموضوع 1

1)حل المعادلة (E).

لدينا: $13x - 7y = -1 ...(E)$ حيث x و y عددان صحيحان

يمكن استعمال عدة طرق لحل المعادلة (E) ومن بينها طريقة الموافقة

(E) تكافئ $13x = 7y - 1$ وتكافئ $13x \equiv -1[7]$ وتكافئ $-x \equiv -1[7]$ لأن $13 \equiv -1[7]$

أي $x \equiv 1[7]$ إذن: $x = 7k + 1$ حيث k عدد صحيح

بتعويض قيمة x في المعادلة $13x = 7y - 1$ نجد: $y = 13k + 2$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x;y) = (7k+1;13k+2)$ مع أن k عدد صحيح.

2)تعيّين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$

الجملة $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$ تكافئ كافئ $\begin{cases} 13a \equiv -13[91] \\ 7a \equiv 0[91] \end{cases}$ بالطرح نجد: $6a \equiv -13[91]$ أي $a \equiv 13[91]$

إذن: $a \equiv 91p + 13$ حيث p عدد طبيعي.

ملاحظة:يمكن الاعتماد على حلول المعادلة (E) وإيجاد نفس الحل

3) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على كلا من 7 و 13

دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 7

لدينا: $9^0 \equiv 1[7]$، $9^1 \equiv 2[7]$، $9^2 \equiv 4[7]$، $9^3 \equiv 1[7]$.

بواقي قسمة 9^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$9^n \equiv$	1	2	4	$[7]$

دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 13

لدينا: $9^0 \equiv 1[13]$، $9^1 \equiv 9[13]$، $9^2 \equiv 3[13]$، $9^3 \equiv 1[13]$.

بواقي قسمة 9^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n =$	$3k'$	$3k'+1$	$3k'+2$	
$9^n \equiv$	1	9	3	$[13]$

4)تعيّين α و β حتى يكون b قابلا القسمة على 91.

لدينا: $b = \overline{\alpha 00 \beta 086} = \alpha.9^6 + \beta.9^3 + 8.9 + 6$

b قابلا القسمة على 91 يكافئ $\begin{cases} b \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[13] \end{cases}$ خاصية ($91 = 7.13$ و 7 و 13 أوليان فيمابينهما)

$\begin{cases} \alpha+\beta+1 \equiv 0[7] \\ \alpha+\beta \equiv 0[13] \end{cases}$ لأن $9^6 \equiv 0[7]$ و $9^3 \equiv 0[7]$ وكذلك $9^6 \equiv 0[13]$ و $9^3 \equiv 0[13]$ و $78 \equiv 1[7]$

وحسب ما ورد في الجواب 2) فإن: $\alpha+\beta \equiv 91p+13$

و بمأن: $0 \prec \alpha \leq 8$ و $0 \prec \beta \leq 8$ فإن: $0 \leq 91p+13 \leq 16$ وعليه تكون $p=0$

ومنه الثنائيات المرتبة التي تحقق b قابلا القسمة على 91 هي:

$(\alpha;\beta) = (5;8)$ أو $(\alpha;\beta) = (8;5)$ $(\alpha;\beta) = (6;7)$ أو $(\alpha;\beta) = (7;6)$

التمرين53: دورة 2010 الموضوع 1

1-البرهان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13

لدينا: $3^3 \equiv 1[13]$ ومنه من أجل $n \in \mathbb{N}$، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$

ومنه: من أجل $n \in \mathbb{N}$، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13

2-استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، كل من العددين $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ يقبل القسمة على 13

لدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}$، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه: $3^{3n+1} \equiv 3[13]$ أي $3^{3n+1}-3 \equiv 0[13]$

لدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}$، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه: $3^{3n+2} \equiv 9[13]$ أي $3^{3n+2}-9 \equiv 0[13]$

3-تعييّن حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13.

لدينا: $3^0 \equiv 1[13]$، $3^1 \equiv 3[13]$، $3^2 \equiv 9[13]$، $3^3 \equiv 1[13]$.

بواقي قسمة 3^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n=$	$3k'$	$3k'+1$	$3k'+2$	
$3^n \equiv$	1	3	9	$[13]$

استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13

لدينا: $2005 \equiv 3[13]$ و $2010 \equiv 0[3]$ ومنه $2005^{2010} \equiv 3^{3.670}[13]$ ومنه $2005^{2010} \equiv 1[13]$

وعليه باقي القسمة الأقليدية للعدد 2005^{2010} على 13 هو 1 .

4- أ-تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n$.

لدينا: $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$ ومنه: $A_{3n} = 3^{3n} + 3^{2(3n)} + 3^{3(3n)}$

لدينا: $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه $3^{2(3n)} \equiv 1[13]$ وكذلك $3^{3(3n)} \equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n} \equiv 3[13]$

ب-البرهان أنه من أجل $p=3n+1$، فإن A_p يقبل القسمة على 13

لدينا: $A_{3n+1} = 3^{3n+1} + 3^{2(3n+1)} + 3^{3(3n+1)}$

ولدينا $3^{3n+1} \equiv 3[13]$ ومنه $3^{2(3n+1)} \equiv 9[13]$ وكذلك $3^{3(3n+1)} \equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n+1} \equiv 0[13]$

جـ-تعيين باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p=3n+2$

لدينا: $A_{3n+2}=3^{3n+2}+3^{2(3n+2)}+3^{3(3n+2)}$

ولدينا: $3^{3n+2}\equiv 9[13]$ ومنه $3^{2(3n+2)}\equiv 3[13]$ وكذلك $3^{3(3n+2)}\equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n+2}\equiv 0[13]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p=3n+2$ هو 0

أ-التحقق أن a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري

لدينا: $1.3^9+1.3^6+1.3^3=\overline{1001001000}=a$ ومنه $a=A_3$

لدينا: $1.3^{12}+1.3^8+1.3^4=\overline{1000100010000}=b$ ومنه $b=A_4$

ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من a و b على 13.

لدينا: $a=A_3$ ولدينا $A_3\equiv 3[13]$ ومنه $a\equiv 3[13]$ أي أن باقي قسمة a على 13 هو 3

لدينا: $b=A_4$ ولدينا $A_4\equiv 0[13]$ ومنه $b\equiv 0[13]$ أي أن باقي قسمة b على 13 هو 0

التمرين54: دورة 2010 الموضوع 2

1-أ-تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.

لدينا: $7x+65y=2009....(1)$ تكافئ $65y=2009-7x$ وتكافئ $65y=7(287-x)$

وتكافئ $65y\equiv 0[7]$ ومنه $y\equiv 0[7]$ لأن 65 أولي مع 7

الكتابة $y\equiv 0[7]$ تعني أن y مضاعف للعدد 7.

ب- حل المعادلة (1).

من الجواب السابق لدينا: y مضاعف للعدد 7 ومنه $y=7k$ حيث k عدد صحيح

بتعويض قيمة y في المعادلة $65y=7(287-x)$ نجد: $x=65k+287$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(x;y)=(-65k+287;7k)$ مع أن k عدد صحيح.

2- دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 .

لدينا: $2^0\equiv 1[9]$، $2^1\equiv 2[9]$، $2^2\equiv 4[9]$، $2^3\equiv 8[9]$، $2^4\equiv 7[9]$ ، $2^5\equiv 5[9]$ و $2^6\equiv 1[9]$

بواقي قسمة 2^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$2^n\equiv$	1	2	4	8	7	5

3-تعيين قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

لدينا: العدد $2^{6n}+3n+2$ يقبل القسمة على 9 معناه $2^{6n}+3n+2\equiv 0[9]$

$2^{6n}+3n+2\equiv 0[9]$ تكافئ $1+3n+2\equiv 0[9]$ أي $3n\equiv -3[9]$

أي $n\equiv 2[3]$ إذن: $n\equiv 3p+2$ حيث p عدد طبيعي

4-أ)التحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

لدينا: $u_n = 2^{6n} - 1$

من الجواب 2) لدينا: $2^{6n} \equiv 1[9]$ ومنه $2^{6n} - 1 \equiv 0[9]$ أي $u_n \equiv 0[9]$

إذن u_n يقبل القسمة على 9.

ب)حل المعادلة: $(7u_1)x + (u_2)y = 126567....(2)$

لدينا: $(7u_1)x + (u_2)y = 126567....(2)$ تكافئ $7x + 65y = 2009....(2)$

لأن $u_1 \equiv 1[9]$ و $u_2 \equiv 65[9]$ و $126567 \equiv 2009[9]$

ومنه حلول المعادلة (2) هي حلول المعادلة (1).

ج) تعيين الثنائية $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0 \geq 25$

لدينا: ($y_0 \geq 25$ و $x_0 \geq 0$)تكافئ ($7k \geq 25$ و $-65k + 287 \geq 0$) وتكافئ $\frac{25}{7} \leq k \leq \frac{287}{65}$

ومنه $k = 4$ وعليه: $(x_0; y_0) = (27;28)$.

التمرين55: دورة 2009 الموضوع 1

1-أ- نشر العبارة $(5x^2 + 6)(x+1)$ ثم إيجاد علاقة تربط بين x و y

لدينا: $(5x^2 + 6)(x+1) = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6 = A....(1)$

ولدينا: $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y).....(2)$

من العبرتين (1) و (2) نستنتج أن: $2 + 2y = x + 1$ ومن العلاقة هي : $1 + 2y = x$

ب- حساب x و y علما أن x أولي و أصغر من 12.

لدينا:x محصور بين 7 و 12 وعدد أولي وعليه قيم x هي:7 أو 11

باستعمال العلاقة $1 + 2y = x$ نجد: $y = 3$ من اجل $x = 7$

نجد: $y = 5$ من اجل $x = 11$

كتابة تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

الحالة 1 : من اجل $x = 7$ و$y = 3$ نجد: $A = (5.7^2 + 6)(2 + 2.3) = 2008$

الحالة 1 : من اجل $x = 11$ و$y = 5$ نجد: $A = (5.11^2 + 6)(2 + 2.5) = 7332$

2-أ- تعيين الاعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

لدينا: $584 = 1^2.2^2.2.73$

من خلال التحليل السابق نستنتج أن العددان التي مربعاتها تقسم 584 هما 1 و 2

ب- تعيين الأعداد الطبيعية a و b حيث $b \succ a$ التي تحقق: $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

نفرض أن: $PGCD(a;b)=d$ ومنه $a=d.a'$ و $b=d.b'$ (خاصية) حيث $PGCD(a';b')=1$

ومنه الجملة $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a'+b'=\dfrac{32}{d} \\ a'^2+b'^2=\dfrac{584}{d^2} \end{cases}$

من الجملة الأخيرة نستنتج أن: $d=1$ أو $d=2$

الحالة 1: $d=1$ ومعناه $\begin{cases} a'+b'=32 \\ a'^2+b'^2=584 \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} b'=32-a' \\ a'^2-32a'+220=0 \end{cases}$

الحلول هي: $(10;22)$ أو $(22;10)$ مرفوض لان 10 و22 ليسا أوليان فيما بينهما.

الحالة 1: $d=2$ ومعناه $\begin{cases} a'+b'=16 \\ a'^2+b'^2=146 \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} b'=16-a' \\ a'^2-16a'+55=0 \end{cases}$

الحلول هي: $(11;5)$ مقبول أو $(5;11)$ مرفوض لان 5 أصغر من 11

ومنه قيم العددين a و b هما: $(a;b)=(22;10)$

التمرين56: دورة 2008 الموضوع 2

1-أ)تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

لدينا: $3x-21y=78....(E)$ ولدينا $PGCD(3;21)=3$

المعادلة $3x-21y=78....(E)$ تقبل حلول لأن 3 يقسم 78

ب) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعالدلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$

المعادلة (E) تكافئ المعادلة $x-7y=26....(E')$ وتكافئ $x=26+7y$

المعادلة $x=26+7y$ تعني أن $x \equiv 26[7]$ ومنه $x \equiv 5[7]$ لأن $26 \equiv 5[7]$

استنتاج حلول المعادلة (E).

من الجواب السابق لدينا: $x \equiv 5[7]$ ومنه $x \equiv 7k+5$ حيث k عدد صحيح

بتعويض قيمة $x \equiv 7k+5$ في المعادلة $x-7y=26....(E')$ نجد: $y=k-3$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $(x;y)=(7k+5;k-3)$ مع أن k عدد صحيح.

2-أ- دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

لدينا: $5^0 \equiv 1[7]$، $5^1 \equiv 5[7]$، $5^2 \equiv 4[7]$، $5^3 \equiv 6[7]$، $5^4 \equiv 2[7]$، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

$n=$	$6p$	$6p+1$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+4$	$6p+5$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	32	3

ب-تعيّين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

لدينا حلول المعادلة (E) حيث $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ هي : $(x;y)=(7k+5;k-3)$ حيث k أكبر من 3

نضع: $k'=k-3$ حيث k' عدد طبيعي

ومنه : حلول المعادلة (E) حيث $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ هي : $(x;y)=(7k'+21;k')$

ولدينا من جهة أخرى $5^x+5^y\equiv 3[7]$ ومنه $5^{7k'+26}+5^{k'}\equiv 3[7]$

ومنه: $5^{7k'+26}+5^{k'}\equiv 3[7]$ تكافئ $5^{6k'}.5^{k'}.5^{6.4+2}+5^{k'}\equiv 3[7]$

وتكافئ $5^{k'+1}\equiv 3[7]$ لأن $5^{6k'}\equiv 1[7]$ و $5^{6.4+2}\equiv 4[7]$

ومنه: $k'+1=6p+5$ ومنه $k'=6p+4$

بعد تعويض قيمة k' نجد $(x;y)=(42p+54;6p+4)$ حيث p عدد طبيعي.