مجلة الرائد في الرياضيات

****

الحــــــــــلول

الجزء الثاني

العلوم التجريبية

****

الجزء الثالث

تقني رياضي

****

الجزء الرابع

رياضيات

****

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

BAC2020

الأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook

الجزء الثاني: بكاوريات جزائرية

شعبة العلوم التجريبية

التمرين16: دورة 2019 الموضوع (1)

1-أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

المتتالية (u_n) معرّفة بحدها الأول $u_0 = 13$ ومن اجل كل عدد طبيعي: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $u_0 \succ 1$ محققة لأن $u_0 = 13$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}: u_n \succ 1$ ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}: u_{n+1} \succ 1$

لدينا: $u_n \succ 1$ ومنه $\frac{1}{5}u_n \succ \frac{1}{5}$ ومنه $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \succ 1$ وأخيرا $u_{n+1} \succ 1$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انها متقاربة

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}(u_n - 1)$.

بمأن $u_n \succ 1$ من البرهان السابق فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل ومنه المتتالية متقاربة (مبرهنة)

2) اثبات أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الاول

(v_n) حسابية أساسها q معناه $v_{n+1} - v_n = q$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا: $v_n = \ln(u_n - 1)$ ومنه $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$

لدينا: $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1} - 1) - \ln(u_n - 1) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{5}(u_n - 1)}{(u_n - 1)}\right) = \ln\frac{1}{5}$

ومنه: (v_n) حسابية أساسها $\ln\frac{1}{5}$ وحدها الاول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(12)$

3) كتابة v_n بدلالة n و إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ وحساب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيع n: $v_n = v_0 + n.r$

وعليه $v_n = \ln(12) + n\ln\frac{1}{5} = \ln\left(\frac{1}{5}\right)^n + \ln(12) = \ln(\frac{12}{5^n})$.

لدينا: $v_n = \ln(u_n - 1)$

ومنه $(u_n-1)=e^{v_n}$ أي $u_n=e^{v_n}+1=e^{\ln(\frac{12}{5^n})}+1=1+\frac{12}{5^n}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{5^n}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{5^n}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}5^n=+\infty$

4) تبيان انه من أجل كل عدد طبيعي n: $(u_0-1)(u_1-1)\times.......\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

نضع: $P_n=(u_0-1)(u_1-1)\times.......\times(u_n-1)$

لدينا من الجواب السابق: $u_n-1=\frac{12}{5^n}$.

ومنه $P_n=(u_0-1)(u_1-1)\times.......\times(u_n-1)=\frac{12}{5^0}.\frac{12}{5^1}........\frac{12}{5^n}=\frac{12.12........12}{5^{0+1+2+......+n}}=\frac{12^{n+1}}{5^{\frac{(n+1)n}{2}}}=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

التمرين17: دورة 2019 الموضوع (2)

1-أ)اثبات أن f متزايدة تماما على المجال $]4;7[$

لدينا:الدالة f معرفة على المجال $]4;7[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ اشارة $f'(x)\succ 0$ ومنه الدالة fمتزايدة على المجال $]4;7[$.

ب) استناج أنه من أجل كل $x\in]4;7[$ فإن: $f(x)\in]4;7[$

من أجل كل $x\in]4;7[$ فإن: $f(x)\in]f(4);f(7)[$ لأن f متزايدة على المجال $]4;7[$.

ومنه: $f(x)\in\left[-4;-\frac{13}{12}\right]$ لأن $f(4)=\sqrt{6}+4$ و $f(7)=7$

وعليه $f(x)\in\left]\sqrt{6}+4;7\right[$ لأن $]4;7[$ محتوي في المجال $\left]\sqrt{6}+4;7\right[$

2) البرهان انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال$]4;7[$: $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال$]4;7[$:

$$f(x)-x=\sqrt{x+2}-x+4=\frac{\left(\sqrt{x+2}-(x-4)\right)\left(\sqrt{x+2}+(x-4)\right)}{\left(\sqrt{x+2}+(x-4)\right)}$$

$$=\frac{x+2-(x-4)^2}{\left(\sqrt{x+2}+(x-4)\right)}=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$$

استناج أنه من أجل كل $x\in]4;7[$ فإن: $f(x)-x>0$

لدينا من أجل كل $x\in]4;7[$ فإن: $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$

وعليه اشارة افرق $f(x)-x$ هي حسب إشارة $-x^2+9x-14$ لأن المقام موجب

$-x^2+9x-14=0$ معناه $x=2$ أو $x=7$

ومنه $-x^2+9x-14>0$ من أجل $x\in[2;7[$ وعليه $f(x)-x>0$ من أجل كل $x\in[4;7[$

3- أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4\le u_n<7$

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $4\le u_0<7$ محققة لأن $u_0=4$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $4\le u_n<7$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $4\le u_{n+1}<7$

لدينا: $4\le u_n<7$ ومنه $f(4)\le f(u_n)<f(7)$ لأن f متزيدة

وعليه $4\le u_{n+1}<7$ حسب الجواب 1-ب)

ومنه الخاصية $4\le u_n<7$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم تبيان انها متقاربة

لدينا: $f(u_n)-u_n=u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+9u_n-14}{u_n-4+\sqrt{u_n+2}}>0$ حسب الاستنتاج من الجواب2

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما لان $u_{n+1}-u_n>0$

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأعلى بالعدد 7 ومتزايدة.

4-أ)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $7-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(7-u_n)$

$$7-u_{n+1}=3-\sqrt{u_n+2}=\frac{(3-\sqrt{u_n+2})(3+\sqrt{u_n+2})}{3+\sqrt{u_n+2}}=\frac{(3)^2-u_n-2}{3+\sqrt{u_n+2}}=\frac{(7-u_n)}{3+\sqrt{u_n+2}}$$

$7-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(7-u_n)$ تكافئ $\dfrac{(7-u_n)}{3+\sqrt{u_n+2}}\le\dfrac{(7-u_n)}{4}$

لدينا: $3+\sqrt{u_n+2}\ge4$ ومنه: $\dfrac{1}{3+\sqrt{u_n+2}}\le\dfrac{1}{4}$ ومنه $\dfrac{(7-u_n)}{3+\sqrt{u_n+2}}\le\dfrac{(7-u_n)}{4}$ لأن $u_n<7$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $7-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(7-u_n)$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<7-u_n\le3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ **ثم حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

باستعمال المتباينة $7-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(7-u_n)$

من أجل n=0 : $7-u_1\le\dfrac{1}{4}(7-u_0)$، ومن أجل n= 1 : $7-u_2\le\dfrac{1}{4}(7-u_1)$

....و من أجل n -1 : $7-u_n\le\dfrac{1}{4}(7-u_{n-1})$

بضرب هذه المتبيانات طرف لطرف نجد: $(4-u_0)$ $7-u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n: $(1)........7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ومنه جهة أخرى لدينا: $u_n < 7$ ومعناه $(2).........7-u_n > 0$

من التو طئتين (1) و (2) نستنتج أن : $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

لدينا: $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(7-u_n) = 0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 7$

التمرين18: دورة 2018الموضوع (1)

1- أ)برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$.

(u_n)المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n+5}$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $u_0 > -2$ محققة لأن $u_0 = 1$

*نفرض أن$P(n)$صحيحة أي: $u_n > -2$ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} > -2$

لدينا: $u_n > -2$ **ومنه** $u_n + 5 > 3$ **ومنه** : $\frac{u_n+5}{9} > \frac{1}{3}$ **أي** $\frac{9}{u_n+5} \prec 3$

وعليه $-\frac{9}{u_n+5} \succ -3$ **وأخير** $1-\frac{9}{u_n+5} \succ -2$ **أي** $u_{n+1} > -2$

ومنه الخاصية $u_n > -2$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) تبيّان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج انها متقاربة .

المتتالية (u_n) متناقصة تماما معناه ان الفرق $u_{n+1} - u_n$ سالب تماما من أجل كل عدد طبيعي n.

لدينا: $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n+5} - u_n = \frac{-u^2{}_n - 4u_n - 4}{u_n+5} = \frac{-(u_n+2)^2}{u_n+4} \prec 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

من الجواب أ) نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2

ومن الجواب ب) المتتالية(u_n) متناقصة تماما وعليه نستنتج ان المتتالية(u_n) متقاربة (مبرهنة)

2- اثبات أن المتتالية (v_n)حسابيةأساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعين حدّها الأول

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$

(v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ معناه $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{3}$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لدينا: $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$ ومنه $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}+2}=\dfrac{1}{\dfrac{u_n-4}{u_n+5}+2}=\dfrac{u_n+5}{3(u_n+2)}$ لأن $u_{n+1}=1-\dfrac{9}{u_n+5}=\dfrac{u_n-4}{u_n+5}$

لدينا: $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+5}{3(u_n+2)}-\dfrac{1}{u_n+2}==\dfrac{u_n+2}{3(u_n+2)}=\dfrac{1}{3}$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ و حدّها الأول هو $v_0=\dfrac{1}{u_0+2}=\dfrac{1}{3}$

3) التعبير بدلالة n عن v_n و u_n و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n: لدينا : $v_n=v_0+nr$ ومنه : $v_n=\dfrac{1}{3}(n+1)$

لدينا: $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$ ومنه $u_n+2=\dfrac{1}{v_n}$ وعليه $u_n=\dfrac{1}{v_n}-2=\dfrac{3}{n+1}-2=\dfrac{-2n+1}{n+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2n+1}{n+1}=-2$.

4) تبيان انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0.v_0+u_1.v_1+.....+u_n.v_n=\dfrac{1}{3}(1-n^2)$

لدينا: $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$ ومنه لدينا: $v_n(u_n+2)=1$ أي $v_n.u_n+2.v_n=1$ ومنه $v_n.u_n=1-2v_n$

نضع: $S_n=u_0.v_0+u_1.v_1+.....+u_n.v_n$

ومنه : $S_n=(1-2v_0)+(1-2v_1)+.......+(1-2v_n)=(n+1)-2(v_0+v_1+....+v_n)$

نعلم أن $v_0+v_1+....+v_n=\dfrac{n+1}{2}(v_0+v_n)=\dfrac{n+1}{2}(\dfrac{n+2}{3})$

وعليه: $S_n=(n+1)-2(\dfrac{n+1}{2})(\dfrac{n+2}{3})=\dfrac{3(n+1)-(n+1)(n+2)}{3}=\dfrac{1}{3}(1+n)(1-n)=\dfrac{1}{3}(1-n^2)$

التمرين 19: دورة 2018 الموضوع (1)

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3.

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0=0$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$

ومنه: $u_1=u_0+\ln(3)=\ln 3$ ، $u_2=u_1+\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)=\ln 5$ و $u_3=u_2+\ln\left(\dfrac{7}{5}\right)=\ln 7$

2) تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{2n+3}{2n+1}>1$.

لدينا: $\frac{2}{2n+1}>0$ $\frac{2n+3}{2n+1}-1=\frac{2}{2n+1}>0$ ومنه: $\frac{2n+3}{2n+1}>1$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من الجواب السابق $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ وعليه : $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>0$

لدينا: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ تكافئ $u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3- أ)البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n}=v_n$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $e^{u_0}=e^0=v_0$ **محققة لأن** $v_0=2(0)+1=1$

*نفرض أن$P(n)$صحيحة أي: $e^{u_n}=v_n$ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $e^{u_{n+1}}=v_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ومنه: $e^{u_{n+1}}=e^{u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}=e^{u_n}.e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}=v_n.\frac{2n+3}{2n+1}=2n+3=v_{n+1}$

ومنه الخاصية $e^{u_n}=v_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

لدينا: $e^{u_n}=v_n$ منه $u_n=\ln v_n=\ln(2n+1)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln v_n=\lim\limits_{x\to+\infty}(2n+1)=+\infty$

4) حساب المجموعين: S_n و T

$$S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\dots\dots\dots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right).\left(\frac{v_2}{v_1}\right)\dots\dots\dots\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)=\ln\left(\frac{v_n}{v_0}\right)=\ln v_n=\ln(2n+1)$$

لدينا: $e^{u_n}=v_n$ ومنه $T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+\dots+e^{u_{2018}}=v_{1439}+v_{1440}+\dots\dots+v_{2018}$

من العبارة $v_n=2n+1$ نستنتج ان : (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدّها 1

ومنه $T=\frac{2018-1439+1}{2}(v_{1439}+v_{2018})=2005640$ حيث: $v_{1439}=2(1439)+1=2879$ و $v_{2018}=2(2018)+1=4037$

التمرين20: دورة 2017الموضوع (1)

1-أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le1$

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $0\prec u_0\prec1$ **محققة لأن** $u_0=\frac{1}{4}$

*نفرض أن$P(n)$صحيحة أي: $0\prec u_n\prec1$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0\prec u_{n+1}\prec1$

لدينا: $0 \prec u_n \prec 1$ ومنه $4 \prec u_n + 4 \prec 5$ ومنه $\frac{4}{10} \prec \frac{u_n+4}{10} \prec \frac{5}{10}$

وعليه $\frac{10}{4} \prec \frac{10}{u_n+4} \prec \frac{10}{5}$ ومنه $-\frac{10}{4} \prec -\frac{10}{u_n+4} \prec -\frac{10}{5}$

واخيرا $3-\frac{10}{5} \prec 3-\frac{10}{u_n+4} \prec 3-\frac{10}{4}$ أي : $\frac{1}{2} \prec u_{n+1} \prec 1$ ويمكن القول ان $0 \prec u_n \prec 1$

ومنه الخاصية $0 \prec u_n \prec 1$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) تبيان ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج انها متقاربة

المتتالية (u_n) متزايدة تماما معناه ان الفرق $u_{n+1} - u_n$ موجب تماما من أجل كل عدد طبيعي n.

لدينا: $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n+4} - u_n = \frac{(3-u_n)(u_n+4)-10}{u_n+4} = \frac{(1-u_n)(u_n-2)}{u_n+4}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط $-u_n^2 - u_n + 2$ لأن المقام موجب

$-u_n^2 - u_n + 2 = 0$ معناه $u_n = 1$ أو $u_n = 2$ مرفوض لأن $0 \prec u_n \prec 1$

وعليه اشارة $-u_n^2 - u_n + 2$ تكون حسب الجول التالي

u_n	$-\infty$		1		2		$+\infty$
اشارة الفرق		-	0	+	0	-	
اتجاه التغير		(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما		(u_n) متناقصة تماما	

بمأن $0 \prec u_n \prec 1$ فإن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومتزايدة.

2) أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$.

(v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ معناه المتتالية $v_{n+1} = \frac{5}{2} v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا: $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$ ومنه $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}} = \frac{\left(3-\frac{10}{u_n+4}\right)+2}{1-\left(3-\frac{10}{u_n+4}\right)} = \frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)} = \frac{5}{2} v_n$

التعبير عن عبارة الحد العام v_n بدلالة n

ولدينا $q = \frac{5}{2}$ و $v_0 = \frac{u_0+2}{1-u_0} = 3$ ومنه : $v_n = v_0 . q^n$ ومنه : $v_n = 3 . \left(\frac{5}{2}\right)^n$

ب) اثبات أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}$ واستنتاج النهاية $\lim_{x \to +\infty} u_n$

لدينا: $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$ ومنه $v_n(1-u_n)=u_n+2$ أي $v_n-u_n.v_n=u_n+2$

ومنه: $v_n-2=u_n(1+v_n)$ وأخيرا $u_n=\dfrac{v_n-2}{1+v_n}=\dfrac{v_n+1-3}{1+v_n}=1-\dfrac{3}{1+v_n}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=\lim\limits_{x\to+\infty}3.\left(\dfrac{5}{2}\right)^n=+\infty$ لأن $\left(\dfrac{5}{2}\right)\succ1$ وعليه: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{3}{1+v_n}=1$

التمرين21: دورة 2017الموضوع (2)

I) التحقق أن f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$

لدينا:الدالة f معرفة على المجال $[-4;1]$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$

لدينا: $\dfrac{49}{(x+11)^2}=\dfrac{3(x+11)-1(3x-16)}{(x+11)^2}=f'(x)$

اشارة $f'(x)\succ0$ ومنه الدالة fمتزايدة على المجال $[-4;1]$.

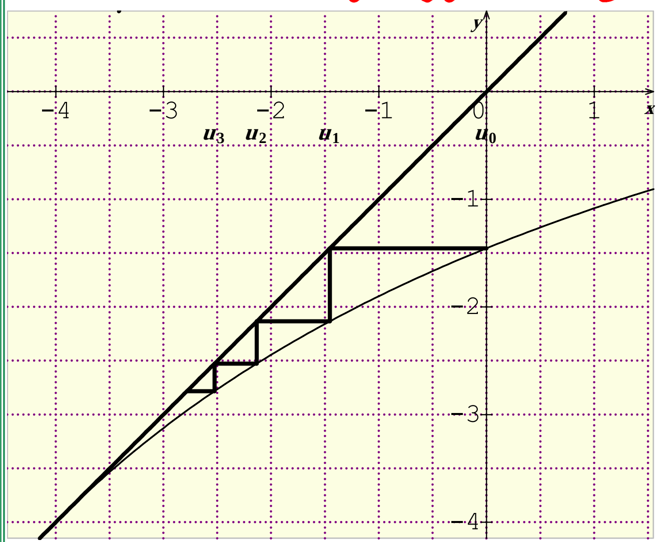
التحقق أنه من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن: $f(x)\in[-4;1]$

من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن: $f(x)\in[f(-4);f(1)]$ لأن f متزايدة على المجال $[-4;1]$.

ومنه: $f(x)\in\left[-4;-\dfrac{13}{12}\right]$ لأن $f(-4)=-4$ و $f(1)=\dfrac{-13}{12}$

وعليه $f(x)\in[-4;1]$ لأن $\left[-4;-\dfrac{13}{12}\right]$ محتوي في المجال $[-4;1]$

II) -1)نقل الشكل وتمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل



وضع تخمين حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو نقطة التقاطع-4

2)البرهان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $-4\le u_n\le0$

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0يكون: $-4\le u_0\le0$ محققةلأن $u_0=0$

*نفرض أن صحة $P(n)$:أي $-4\le u_n\le0$

نبرهن أن صحة $P(n+1)$أي: $-4\le u_{n+1}\le0$

لدينا: $-4\le u_n\le0$ ومنه $f(-4)\le f(u_n)\prec f(0)$

لأن fمتزايدة تماما ومنه: $-4\le u_{n+1}\le-\dfrac{16}{11}$ لأن $\left[-4;-\dfrac{16}{11}\right]$ محتوي في المجال$[-4;0]$

ومنه الخاصية $-4\le u_n\le0$ صحيحة من اجل كل $n\in\mathbb{N}$

تبيان ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما

لدينا: $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n=\frac{-u_n^2-8u_n-16}{u_n+11}=\frac{-(u_n+4)^2}{u_n+11}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب أي اشارة الفرق حسب الجدول

u_n	$-\infty$	-4	$+\infty$
اشارة الفرق	-	0	-
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متناقصة تماما

بمأن $-4\le u_n\le 0$ فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

2) أ)اثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$.

(v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ معناه $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{7}$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لدينا: $v_n\times u_n=1-4v_n$ ومنه $v_n(u_n+4)=1$ أي $v_n=\frac{1}{u_n+4}$

لدينا: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+4}-\frac{1}{u_n+4}=\frac{u_n+11}{7(u_n+4)}-\frac{1}{u_n+4}=\frac{u_n+4}{7(u_n+4)}=\frac{1}{7}$

حساب المجموع S

لدينا: $S=v_0.u_0+v_1.u_1+...+v_{2016}.u_{2016}$ ولدينا أيضا: $v_n\times u_n=1-4v_n$

ومنه: $S=(1-4v_0)+(1-4v_1)+...+(1-4v_{2016})=2017-4(v_0+v_1+....+v_{2016})$

لكن: $(v_0+v_1+....+v_{2016})=\frac{2017}{2}(v_0+v_{2016})$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسبية

تطبيق عددي: $S=2017-2.2017(\frac{1}{2}+288)=-1161792$ حيث $v_0=\frac{1}{4}$ و $v_{2016}=\frac{1}{4}+288$

التمرين22: دورة 2017 الموضوع (1) الاستدراكية

1) حساب الحدين u_1 و v_1.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتين على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=6\\ v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1\end{cases}$

لدينا: $u_1=\frac{3}{4}u_0+1=\frac{7}{4}$ و $v_1=\frac{3}{4}v_0+1=\frac{11}{2}$

2-أ) كتابة $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$.

لدينا: $u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}-\frac{3}{4}u_n=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$

ب)البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

البرهان ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما معناه $u_{n+1}-u_n \succ 0$ من أجل كل عدد طبيعي n.

*التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون لدينا: $u_1-u_0 \succ 0$ محققة لأن $u_1-u_0=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $u_{n+1}-u_n \succ 0$

ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $u_{n+2}-u_{n+1} \succ 0$

من فرضية التراجع لدينا: $u_{n+1}-u_n \succ 0$ ومنه $u_{n+2}-u_{n+1} \succ 0$ لأن $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$

ومنه الخاصية $u_{n+1}-u_n \succ 0$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

البرهان ان المتتالية (v_n) متناقصة تماما:

المتتالية (v_n) متناقصة تماما معناه $v_{n+1}-v_n \prec 0$ من أجل كل عدد طبيعي n.

*التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون لدينا: $v_{n+1}-v_n \prec 0$ محققة لأن $v_1-v_0=\frac{11}{2}-6=-\frac{1}{2}$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $v_{n+1}-v_n \prec 0$ ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $v_{n+2}-v_{n+1} \prec 0$

من فرضية التراجع لدينا: $v_{n+1}-v_n \prec 0$ ومنه $v_{n+2}-v_{n+1} \prec 0$ لأن $v_{n+2}-v_{n+1}=\frac{3}{4}(v_{n+1}-v_n)$

ومنه الخاصية $v_{n+1}-v_n \prec 0$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

3) البرهان أن المتتالية (w_n) هندسية وتعيين أساسها q وحدها الاول w_0

المتتالية (w_n) هندسية معناه من أجل كل عدد طبيعي n، $w_{n+1}=q.w_n$

لدينا المتتالية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $w_n=u_n-v_n$

ومنه: $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3}{4}(u_n-v_n)=\frac{3}{4}w_n$

إذن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ وحدها الاول $w_0=u_0-v_0=-5$

4)تبيّان أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

(u_n) و (v_n) متجاورتان معناه ؛ (u_n) و (v_n) مختلفان في اتجاه التغير و $\lim_{x\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ ؛

*(u_n) و (v_n) مختلفان في اتجاه التغير لان متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما (الجواب ب-2)؛

*$\lim_{x\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{x\to+\infty}w_n=-5\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ لأن $\frac{3}{4}\prec 1$.

التمرين23: دورة 2017الموضوع (2) الاستدراكية

I)تعيّين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) ثابتة

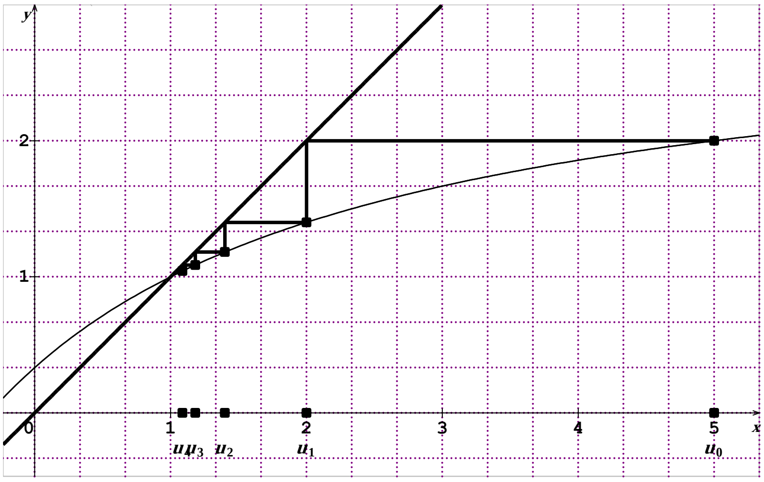
(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول: u_0 حيث $u_0=\alpha$

و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

(u_n) متتالية ثابتة معناه $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}-\alpha=\frac{-\alpha^2+1}{\alpha+3}=0$ ومنه $-\alpha^2+1=0$ أي $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$

II-1-أ)نقل الشكل المقابل ثم تمثيل على حامل محور الفواصل u_0، u_1، u_2 و u_3 (دون حسابها)



ب)وضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال تمثيل الحدودنلاحظ أن المتتالية متناقصة ومتقاربةنحو فاصلة نقطة التقاطع 1

2-أ)البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و تعيين حدّها الأول

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=\frac{1}{2}.v_n$.

لدينا: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1}=\frac{2(u_n-1)}{4(u_n+1)}=\frac{1}{2}v_n$

الحد الاول للمتتالية (v_n) هو: $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{2}{3}$

ب)التعبير بدلالة n عن v_n و u_n ثم حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

*نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0(q)^n$ ومنه $v_n=\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n$

* لدينا: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه $v_n=1-\frac{2}{u_n+1}$ أي $\frac{2}{u_n+1}=1-v_n$ ومنه $u_n+1=\frac{2}{1-v_n}$

ومنه $u_n=\frac{2}{1-v_n}-1$ وأخيرا $u_n=\frac{2}{1-\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n}-1$ وكذلك $\lim_{x\to+\infty}u_n=1$ لأن $\lim_{x\to+\infty}v_n=0$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n

لدينا: $S_n=v_n+v_{n+1}+.....v_{n+2016}$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

$$S_n=v_n\left[\frac{1-q^{2017}}{1-q}\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right]=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right)$$

استنتاج بدلالة n المجموع S'_n

لدينا: $S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+.....+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$

ولدينا أيضا $\frac{2}{u_n+1}=1-v_n$ أي منه $\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{2}(1-v_n)$

وعليه: $S'_n=\frac{1}{2}[(1-v_n)+(1-v_{n+1})+....+(1-v_{n+2016})]$ أي: $S'_n=\frac{1}{2}[(2017)-S_n]$

التمرين24: دورة 2016الموضوع (1)

I-1) أ- حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

لدينا: f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x}=+\infty$

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها.

حساب $f'(x)$ ودراسة اشارته

f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث: $f'(x)=\frac{(2x+8)'}{2\sqrt{2x+8}}=\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$

لدينا: $f'(x)\succ 0$ وعليه f متزايدة تماما على مجال تعريفها.

ومنه جدول تغيراتها يكون كمايلي:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$f(0)$ $\nearrow$ $+\infty$

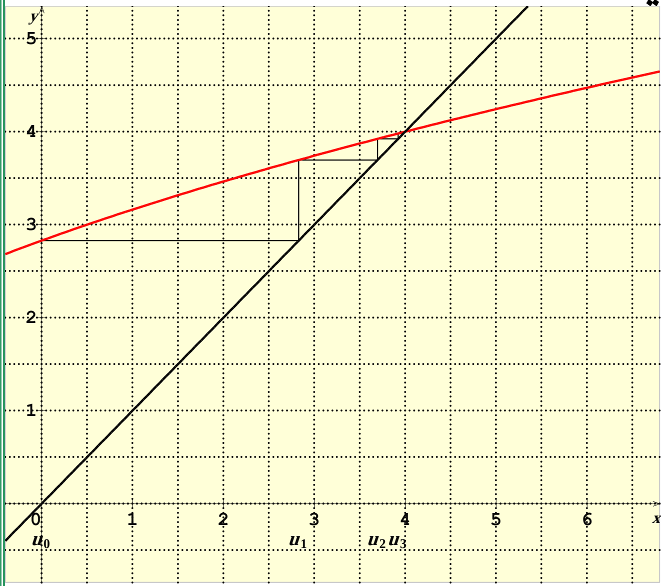
2) تعيين نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ)

لتعيين نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ) نحل المعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x$ تكافئ $[f(x)]^2=x^2$ وتكافئ $x^2-2x-8=0$

حلول المعادلة $x^2-2x-8=0$ هما: $x=4$ أو $x=-2$ مرفوض

وعليه احداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ) هي: $(4;4)$.



3) رسم (C) والمستقيم (Δ)

II-1) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

2-وضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

من خلال التمثيل للحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

على حامل محور الفواصل نخمن أن المتتالية

(u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 4

3-أ) البرهان باتراجع أنه من أجل كل

عدد طبيعي n : $0\le u_n \prec 4$

- التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $0\le u_0 \prec 4$ محققة لأن $u_0=0$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0\le u_n \prec 4$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0\le u_{n+1} \prec 4$

لدينا: $0\le u_n \prec 4$ ومنه $f(0)\le f(u_n)\prec f(4)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $\sqrt{8}\le u_{n+1}\prec 4$

وعليه: $0\le u_{n+1}\prec 4$ لأن $\sqrt{8}\succ 0$ ومنه الخاصية $0\le u_n\prec 4$ صحيحة

ب)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$ وندرس اشارته

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+8}-u_n=\dfrac{(\sqrt{2u_n+8}-u_n)(\sqrt{2u_n+8}+u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}=\dfrac{-u^2{}_n+2u_n+8}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط $-u^2{}_n+2u_n+8$ لأن المقام موجب

$-u^2{}_n+2u_n+8=0$ معناه $u_n=4$ أو $u_n=-2$ مرفوض لأن $0\le u_n\prec 4$

وعليه اشارة $-u^2{}_n+2u_n+8$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0 4	$+\infty$
اشارة الفرق	+ 0	-
اتجاه التغير	(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما

بمأن $0\le u_n\prec 4$ فإن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

جـ)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(4-u_n)$

$$4-u_{n+1}=4-\sqrt{2u_n+8}=\frac{(4-\sqrt{2u_n+8})(4+\sqrt{2u_n+8})}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{(4)^2-2u_n-8}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$$

يمكن كتابة $\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$ على الشكل $\frac{1}{2}(4-u_n)\times\frac{4}{4+\sqrt{2u_n+8}}$

لدينا: $1 \succ \frac{4}{4+\sqrt{2u_n+8}} \succ 0$ وعليه $\frac{1}{2}(4-u_n)\times\frac{4}{4+\sqrt{2u_n+8}} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$

ومنه: $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n.

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$

باستعمال المتباينة $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$

من أجل n=0 : $4-u_1 \le \frac{1}{2}(4-u_0)$، ومن أجل n= 1 : $4-u_2 \le \frac{1}{2}(4-u_1)$

....و من أجل n -1 : $4-u_n \le \frac{1}{2}(4-u_{n-1})$

بضرب هذه المتبيانات طرف لطرف نجد: $4-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n: $4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$

د) استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

لدينا: $4-u_n \le \frac{4}{2^n}$ ولدينا: $4-u_n \ge 0$ ومنه $0 \le 4-u_n \le \frac{4}{2^n}$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{2^n}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-u_n)=0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 4$

التمرين25: دورة 2016الموضوع (2)

1I) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{x}=5$

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها.

حساب $f'(x)$ ودراسة اشارته

f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث: $f'(x)=\frac{5(x+2)-1(5x)}{(x+2)^2}=\frac{10}{(x+2)^2}$

لدينا: $f'(x)\succ 0$ وعليه f متزايدة تماما على مجال تعريفها.

ومنه جدول تغيراتها يكون كمايلي:

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 5$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x) \geq 0$

من جدول تغيرات f لدينا من أجل كل عدد x من المجال $[0;+\infty[$: $0 \leq f(x) \leq 5$ أي $f(x) \geq 0$

II - أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

- التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $1 \leq u_0 \leq 3$ محققة لأن $u_0 = 1$

*نفرض أن صحة $P(n)$ أي: $1 \leq u_n \leq 3$ ونبرهن أن صحة $P(n+1)$ أي: $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

لدينا: $1 \leq u_n \leq 3$ ومنه $f(1) \leq f(u_n) \prec f(3)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $\frac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$

وعليه: $1 \leq u_{n+1} \leq 3$ لأن $\frac{5}{3} \succ 1$ ومنه الخاصية $1 \leq u_n \leq 3$ صحيحة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج انها متقاربة.

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

لدينا: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{5u_n}{u_n+2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n}{u_n+2} = \frac{u_n(-u_n+3)}{u_n+2}$

$u_{n+1} - u_n = 0$ معناه $u_n = 0$ أو $u_n = 3$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب أي اشارة الفرق حسب الجدول

u_n	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ 0		3 $\quad$ $+\infty$
اشارة الفرق	$-$ $\quad$ 0	$+$	0 $\quad$ $-$
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما

بما أن $1 \leq u_n \leq 3$ فإن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(u_n) متقاربة لأنها متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ من الجواب ب) ومحدودة من الأعلى بـ3 الجواب أ)

2) أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وتعيين حدها الأول v_0

(v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ معناه المتتالية $v_{n+1} = \frac{2}{5}.v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n} = \frac{u_n - 3}{u_n}$

ومنه $v_{n+1}=1-\frac{3}{u_{n+1}}=1-\frac{3}{f(u_n)}=1-\frac{3(u_n+2)}{5u_n}=\frac{5u_n-3(u_n+2)}{5u_n}=\frac{2(u_n-3)}{5u_n}=\frac{2}{5}v_n$

والحد الأول هو: $v_0=1-\frac{3}{u_0}=-2$

ب) كتابة v_n بدلالة n و استنتاج عبارة u_n بدلالة n

لمتتالية (v_n) هندسية ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=v_0.q^n=-2.\left(\frac{2}{5}\right)^n$

من العبارة: $v_n=1-\frac{3}{u_n}$ نستنتج أن $u_n=\frac{3}{1-v_n}$ ومنه $u_n=\frac{3}{1-v_n}=\frac{3}{1+2.\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

جـ)حساب نهاية المتتالية (u_n)

لحساب نهاية المتتالية (u_n) نستعمل عبارة الحد العام u_n

$\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{1+2.\left(\frac{2}{5}\right)^n}=3$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ لأن $\left(\frac{2}{5}\right)\prec 1$

3)كتابة المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+.....+\frac{1}{u_n}$ ولدينا: $\frac{1}{u_n}=\frac{1-v_n}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_n$

وعليه: $S_n=(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_0)+(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_1)+.....+(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_n)=\frac{1}{3}(n+1)-\frac{1}{3}(v_0+v_1+...+v_n)$

أي: $S_n=\frac{1}{3}(n+1)-\frac{1}{3}(v_0+v_1+...+v_n)=\frac{1}{3}(n+1)-\frac{1}{3}v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=\frac{1}{3}(n+1)+\frac{10}{9}(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1})$

التمرين26: دورة جوان2016الموضوع (1)

1) أ- تبيان ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $I=[0;4]$

f متزايدة تماما على المجال $I=[0;4]$ معناه $f'(x)\succ 0$ من أجل كل $x\in I$

لدينا: $f'(x)=\frac{13(9x+13)-9(13x)}{(9x+13)^2}=\frac{169}{(9x+13)^2}\succ 0$

ب-تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in I$: $f'(x)$ ينتمي إلى I

لدينا: من أجل كل $x\in I$ أي $0\le x\le 4$ فإن: $f(0)\le f(x)\le f(4)$ لأن f متزايدة

ومنه : $0\le f(x)\le\frac{52}{49}$ لأن $f(0)=0$ و $f(4)=\frac{52}{49}$ ومنه $0\le f(x)\le 4$ لأن $\frac{52}{49}<4$

2-أ)البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 4$

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $0 \le u_0 \le 4$ محققة لأن $u_0 = 4$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $0 \le u_n \le 4$

ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $0 \le u_{n+1} \le 4$

لدينا: $0 \le u_n \le 4$ ومنه $f(0) \le f(u_n) \prec f(4)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $0 \le u_{n+1} \le 4$

ومنه الخاصية $0 \le u_n \le 4$ صحيحة

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتاج انها متقاربة.

*لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{13u_n}{9u_n + 13} - u_n = \dfrac{-9u_n^2}{9u_n + 13}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب وعليه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

*المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 $(u_n \ge 0)$

3- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \ne 0$

نستعمل البرهان بالتراجع

التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون لدينا: $u_0 \ne 0$ محققة لأن $u_0 = 4$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $u_n \ne 0$ ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $u_{n+1} \ne 0$

لدينا: $u_n \ne 0$ ومنه $f(u_n) \ne f(0)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $u_{n+1} \ne 0$ لأن $f(0) = 0$

ومنه الخاصية $u_n \ne 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

4-أ) البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية وتعيين أساسها وحدّها الأول v_0

(v_n) حسابية معناه: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} - v_n = r$ حيث r عدد حقيقي ثابت

لدينا: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{13}{u_{n+1}} - \dfrac{13}{u_n} = 13\left(\dfrac{9u_n + 13}{13u_n}\right) - \dfrac{13}{u_n} = \dfrac{9u_n + 13}{u_n} - \dfrac{13}{u_n} = 9$

ومنه: (v_n) حسابية أساسها r=9 وحدّها الأول $v_0 = 2 + \dfrac{13}{u_0} = 2 + \dfrac{13}{4} = \dfrac{21}{4}$

ب) كتابة v_n بدلالة n

من أجل كل عدد طبيعي n: لدينا : $v_n = v_0 + nr$ ومنه : $v_n = \dfrac{21}{4} + 9n$

ج) استنتاج أن: $u_n = \dfrac{52}{36n + 13}$ وذلك أجل كل عدد طبيعي n ، ثم حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

لدينا: $v_n = 2 + \dfrac{13}{u_n}$ ومنه $v_n - 2 = \dfrac{13}{u_n}$ أي $u_n = \dfrac{13}{v_n - 2}$

ولدينا: $v_n=\frac{21}{4}+9n$ ومنه $u_n=\frac{13}{\frac{21}{4}+9n-2}=\frac{13(4)}{36n+13}=\frac{52}{36n+13}$

$\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{52}{36n+13}=\frac{13}{18n}=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(18n)=+\infty$

التمرين27: دورة جوان2016الموضوع (2)

1) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

(v_n) هندسية معناه: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=v_n.q$ حيث q عدد حقيقي ثابت

ومنه: $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{2u_n+2}{u_n+3}-1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}+2}=\frac{u_n-1}{4(u_n+2)}=\frac{1}{4}v_n$

ومنه: (v_n) هندسية وتعيين أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدّها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=-\frac{1}{2}$

2-أ) كتابة v_n بدلالة n

من أجل كل عدد طبيعي n: لدينا : $v_n=v_0.q^n$ ومنه : $v_n=-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ب) استنتاج عبارة أن: u_n بدلالة n

$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$ تكافئ $v_n(u_n+2)=u_n-1$ تكافئ $v_n.u_n+2v_n=u_n-1$ تكافئ $u_n=-\frac{2v_n+1}{v_n-1}$

وبتعويض $v_n=-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n$ في العبارة $u_n=-\frac{2v_n+1}{v_n-1}$ نجد: $u_n=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}$

جـ) حساب $\lim_{x\to+\infty}u_n$

$\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2v_n+1}{v_n-1}=1$ لأن $\lim_{x\to+\infty}v_n=0$ لأن الأساس $0\prec q\prec1$

3-أ)حساب المجموع S_n :

لدينا: $S_n=v_0+v_1+\ldots++v_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=-\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}\right]=-\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

ب) التحقق أن $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

$u_n=-\frac{2v_n+1}{v_n-1}$ ومنه $u_n+2=-\frac{2v_n+1}{v_n-1}+2=\frac{-3}{v_n-1}$ أي $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$

استنتاج بدلالة n المجموع S'_n

لدينا: $S'_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+....+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}[(1-v_0)+(1-v_1)+....+(1-v_n)]$

ومنه: $S'_n=\frac{1}{3}[(n+1)-(v_0+v_1+.....+v_n)]=\frac{1}{3}[(n+1)-S_n]$

التمرين28: دورة 2015الموضوع (1)

1)حساب u_1 ، u_2 و u_3.

لدينا: $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$ و $u_0=e^2-1$

ومنه: $u_1=(1+u_0)e^{-2}-1=(1+e^2-1)e^{-2}-1=0$

$u_2=(1+u_1)e^{-2}-1=(1+0)e^{-2}-1=e^{-2}-1$

$u_3=(1+u_2)e^{-2}-1=(1+e^{-2}-1)e^{-2}-1=e^{-4}-1$

2)اثبات أن من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n\succ 0$

نستعمل البرهان بالتراجع:

*من أجل n=0 يكون لدينا: $1+u_0\succ 0$ محققة لأن: $1+u_0=e^2\succ 0$

* نفرض أن : $1+u_n\succ 0$ من أجل $n=k$ حيث k عدد طبيعي.

ونبرهن أن : $1+u_n\succ 0$ صحيحة من من أجل $n=k+1$.

من أجل $n=k+1$ يكون لدينا: $1+u_{k+1}\succ 0$.

لدينا من جهة أخرى : $1+u_{k+1}=(1+u_k)e^{-2}-1+1=(1+u_k)e^{-2}$

من فرضية التراجع لدينا: $1+u_k\succ 0$ ونعلم أن $e^{-2}\succ 0$ وعليه: $(1+u_k)e^{-2}\succ 0$

ومنه "$1+u_{k+1}\succ 0$ ومنه الخاصية $1+u_n\succ 0$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n.

3)تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة و دراسة تقاربها.

المتتالية (u_n) متناقصة معناه $u_{n+1}-u_n\prec 0$ من أجل كل عدد طبيعي n.

$u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-1-u_n=(e^{-2}-1)(1+u_n)$

لدينا: $1+u_n\succ 0$ و $(e^{-2}-1)\prec 0$ وعليه: $u_{n+1}-u_n\prec 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة تماما و محدودة من الأسفل $u_n\succ -1$ بالعدد 1-

4 أ)اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول.

المتتالية (v_n) هندسية أساسها q معناه المتتالية $v_{n+1}=q.v_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لدينا: $v_n=3(1+u_n)$ ومنه : $v_{n+1}=3(1+u_{n+1})=3(1+(1+u_n)e^{-2}-1)=3(1+u_n)e^{-2}$

أي: $v_{n+1}=3(1+u_n)e^{-2}=e^{-2}.v_n$ ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=e^{-2}$

وحدّها الأول $v_0=3(1+u_0)=3e^2$

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n، ثم حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

لدينا: المتتالية (v_n) هندسية ومنه : $v_n=v_0.q^n$ ومنه: $v_n=3e^2.(e^{-2})^n=3e^{2-2n}$

لدينا: $v_n=3(1+u_n)$ ومنه: $\frac{1}{3}v_n=1+u_n$ أي $u_n=-1+\frac{1}{3}v_n=e^{2-2n}-1$

ج) تبيان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

لدينا: $\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=\ln(v_0.v_1.....v_n)=\ln(v_0^{\,n+1}.q^{\frac{n}{2}(n+1)})$

ومنه: $\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=\ln(v_0^{\,n+1}.q^{\frac{n}{2}(n+1)})=(n+1)\ln(v_0.q^{\frac{n}{2}})$

تطبيق عددي: $\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=(n+1)\ln(3e^2.(e^{-2})^{\frac{n}{2}})=(n+1)\ln(3e^{2-n})$

وأخيرا: $\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$.

التمرين 29: دورة 2015 الموضوع (2)

I-1) تعيين إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

الدالة f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{4x+1}{x+1}$

لتعين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ نحسب المشتق وندرس اشارته.

لدينا: $f'(x)=\frac{4(x+1)-(4x+1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$

نلاحظ أن: $f'(x)\succ 0$ على المجال $[0;+\infty[$ وعليه تكون متزايدة تماما.

2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ(D) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y\succ 0$

لدينا: $f(x)-y=\frac{4x+1}{x+1}-x=\frac{-x^2+3x+1}{x+1}$

اشارة الفرق هي حسب إشارة العبارة $-x^2+3x+1$ لأن $x+1\succ 0$.

$-x^2+3x+1=0$ معناه $x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\notin[0;+\infty[$ مرفوض أو $x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

إشارة العبارة $-x^2+3x+1$ على المجال $[0;+\infty[$ هي حسب الجدول التالي:

x	0	x_2	$+\infty$
إشارة الفرق	+	0	−

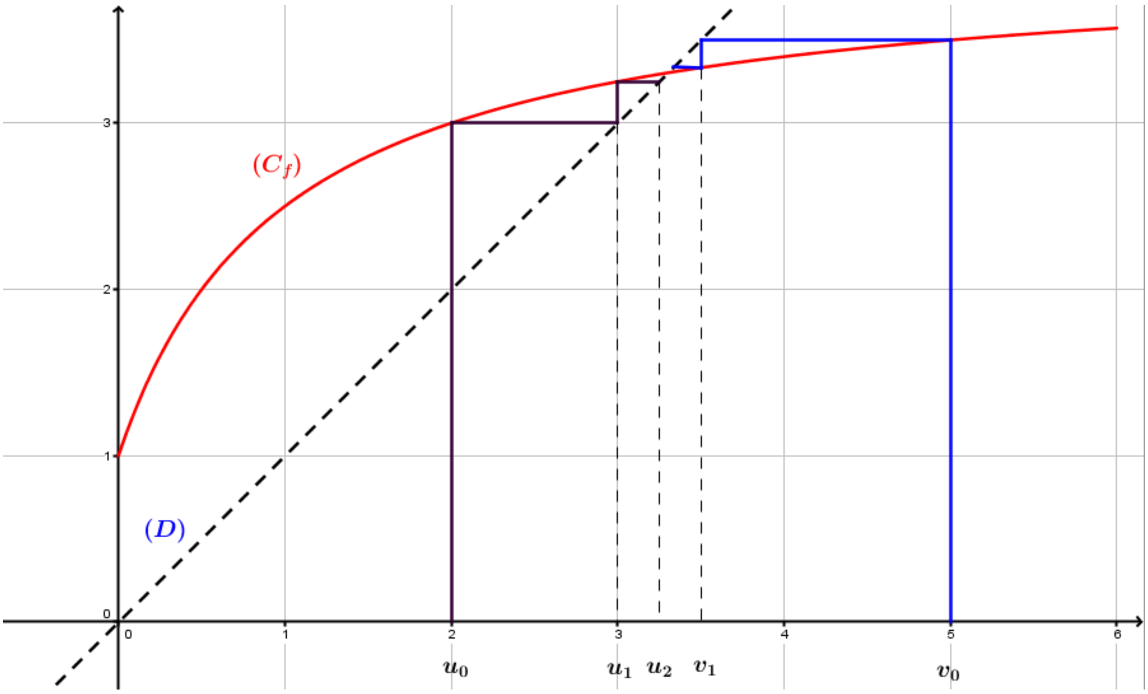
وعليه وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) تكون كمايلي:

* $x \in [0;x_2[$ معناه $f(x)-y \succ 0$ معناه (C_f) فوق (D)

* $x = x_2$ معناه $f(x)-y=0$ معناه (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الفاصلة x_2.

* $x \in]x_2;+\infty[$ معناه $f(x)-y \prec 0$ معناه (C_f) تحت (D).

3) **تمثيل كلا المنحنى (C_f) و المستقيم (D) على المجال $[0;6]$**



II(1) أ) إنشاء على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 **و** u_3، v_0، v_1، v_2 **و** v_3

ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

من خلال إنشاء الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة

وأن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو القيمة $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2) أ) إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n \le \alpha$ **و** $\alpha \le v_n \le 5$ **حيث** $x_2 = \alpha$

نستعمل البرهان بالتراجع:

البرهان أن: $2 \le u_n \le \alpha$ و $\alpha \le v_n \le 5$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

* التحقق من صحة الخاصية $P(0)$.

من أجل $n=0$ تكون $\begin{cases} 2 \le u_0 \le \alpha \\ \alpha \le v_0 \le 5 \end{cases}$ محققتين لأن: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 5 \end{cases}$

* نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة أي: $\begin{cases} 2 \le u_n \le \alpha \\ \alpha \le v_n \le 5 \end{cases}$

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة أي: $\begin{cases} 2 \le u_{n+1} \le \alpha \\ \alpha \le v_{n+1} \le 5 \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases}2\le u_n\le\alpha\\ \alpha\le v_n\le 5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}f(2)\le f(u_n)\le f(\alpha)\\ f(\alpha)\le f(v_n)\le f(5)\end{cases}$ لأن الدالة f متزايدة تماما.

ومنه $\begin{cases}3\le f(u_n)\le f(\alpha)\\ f(\alpha)\le f(v_n)\le \dfrac{7}{2}\end{cases}$ إذن $\begin{cases}2\prec 3\le f(u_n)\le \alpha\\ \alpha\le f(v_n)\le \dfrac{7}{2}\prec 5\end{cases}$

ومنه الخاصيتين $2\le u_n\le\alpha$ و $\alpha\le v_n\le 5$ صحيحتين من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

ب)استنتاج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $\dfrac{-u_n^2+3u_n+1}{u_n+1}=\dfrac{4u_n+1}{u_n+1}-u_n=u_{n+1}-u_n$ ومنه : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-x_1)(u_n-x_2)}{(u_n+1)}$ أنظر 2-I

وعليه اشارة الفرق تكون كمايلي:

u_n	0		2		α		$+\infty$
إشارة الفرق		$+$	|	$+$	0	$-$	

بماأن $2\le u_n\le\alpha$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

اتجاه تغير المتتالية (v_n)

لدينا: $\dfrac{-v_n^2+3v_n+1}{v_n+1}=\dfrac{4v_n+1}{v_n+1}-v_n=v_{n+1}-v_n$

ومنه : $v_{n+1}-v_n=\dfrac{-(v_n-x_1)(v_n-x_2)}{(v_n+1)}$ أنظر 2-I وعليه اشارة الفرق تكون كمايلي:

v_n	0		α		5		$+\infty$
إشارة الفرق		$+$	0	$-$	|	$-$	

بما أن $\alpha\le v_n\le 5$ فإن المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3 أ)اثبات أنه من أجل من أجل كل $n\in\mathbb{N}$. $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}(v_n-u_n)$

يكفي اثبات أن: $(v_{n+1}-u_{n+1})-\dfrac{1}{3}(v_n-u_n)\prec 0$

لدينا: $\dfrac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}=\dfrac{4v_n+1}{v_n+1}-\dfrac{4u_n+1}{u_n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}$

ومنه: $\dfrac{1}{3}(v_n-u_n)\le\dfrac{1}{3}\dfrac{(v_n-u_n)9}{(v_n+1)(u_n+1)}=v_{n+1}-u_{n+1}$ لأن: $\dfrac{9}{(v_n+1)(u_n+1)}\prec 1$

ملاحظة:يمكن استعمال طرق أخرى

ب) تبيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \prec (v_n - u_n) \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

من الجواب السابق لدينا: $(v_n - u_n) \succ 0.....(1)$

نبين أن: $(v_n - u_n) \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

من المتباينة $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $v_1 - u_1 \le \frac{1}{3}(v_0 - u_0)$

من أجل $n = 1$ يكون لدينا: $v_2 - u_2 \le \frac{1}{3}(v_1 - u_1)$

. ...

. ...

من أجل $n-1$ يكون لدينا: $v_n - u_n \le \frac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1})$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $(v_n - u_n) \le \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n .3$

أي (2).... $(v_n - u_n) \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ،من (1) و(2) نستنتج أن : $0 \prec (v_n - u_n) \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج)استنتاج أن: $\lim_{x\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ وتحديد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

لدينا: $0 \prec (v_n - u_n) \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ حسب مبرهنة الحصر.

بمأن المتتالية(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد α($2 \le u_n \le \alpha$)

فإن المتتالية(u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي واليكن L يحقق $f(L) = L$

لكن لدينا : $f(\alpha) = \alpha$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}(u_n) = \alpha$. بنفس الطريقة نجد: $\lim_{x\to+\infty}(v_n) = \alpha$.

التمرين30: دورة 2014الموضوع (1)

1)تبيّان أن (v_n)م .هـ يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

(v_n)م.هـ أساسها q معناه $v_{n+1} = q.v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $v_n = u_n + 4$ و منه : $v_{n+1} = u_{n+1} + 4$ ومنه $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4 = \frac{2}{3}u_n + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(u_n + 4) = \frac{2}{3}v_n$

ومنه : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدّها الأوّل $v_0 = u_0 + 4 = 5$

2) كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n

*لدينا: (v_n) م.هـ أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدّها الأوّل $v_0=5$

ونعلم أن : عبارة الحد العام v_n تعطى بـ: $v_n=v_0.q^n$ وعليه : $v_n=5.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

* لدينا: $v_n=u_n+4$ ومنه: $u_n=v_n-4=5.\left(\frac{2}{3}\right)^n-4$

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ ندرس اشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n$

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\left(5.\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-4\right)-\left(5.\left(\frac{2}{3}\right)^n-4\right)=5.\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)-1\right)=-\frac{5}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

من أجل كل عدد طبيعي n: $-\frac{5}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^n\prec 0$ وعليه تكون المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

4) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$

ولدينا: $u_n=v_n-4$ ومنه: $S_n=(v_0-4)+(v_1-4)+....+(v_n-4)=(v_0+v_1+...+v_n)+(-4)(n+1)$

لكن: $(v_0+v_1+...+v_n)=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=15(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1})$ وعليه: $S_n=15(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1})+(-4)(n+1)$.

5-أ) ببيّان أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ معناه $w_{n+1}-w_n\succ 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

$w_{n+1}-w_n=\frac{5}{v_{n+1}+5}-\frac{5}{v_n+5}=5\left[\frac{v_n}{v_{n+1}+5}-\frac{v_{n+1}}{v_n+5}\right]\succ 0$ لأن (v_n) م.هـ متناقصة لأن $v_0\succ 0$ و $q=\frac{2}{3}\prec 1$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n-w_n)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}(5.\left(\frac{2}{3}\right)^n-4)=-4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(w_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{5}{v_n+5}-5)=-4$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n-w_n)=0$

التمرين31: دورة 2014الموضوع (2)

I -1) تبيّان أن (u_n) م.هـ يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

(u_n) م.هـ أساسها q معناه $u_{n+1}=u.v_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا: $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$ و منه : $u_{n+1}=e^{\frac{1}{2}-(n+1)}$ أي $u_{n+1}=e^{\frac{1}{2}-(n+1)}=e^{\frac{1}{2}-n}.e^{-1}=u_n.e^{-1}$

ومنه : (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-1}=\frac{1}{e}$ وحدّها الأوّل $u_0=e^{\frac{1}{2}-0}=\sqrt{e}$

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$ والاستنتاج

*لدينا: $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{2}-n}=0$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-n}=0$.

3) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ومنه: $S_n=u_0\left[\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ أي $S_n=\sqrt{e}\left[\dfrac{1-(e^{-1})^{n+1}}{1-(e^{-1})}\right]$

II-1)التعبير عن v_n بدلالة n واستنتاج نوع المتتالية (v_n)

*لدينا: $v_n=\ln(u_n)$ ولدينا: $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$ ومنه : $v_n=\ln(e^{\frac{1}{2}-n})=(\dfrac{1}{2}-n)\ln e=(\dfrac{1}{2}-n)$

*لدينا: $v_n=\ln(u_n)$ ومنه : $v_{n+1}-v_n=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)\quad=\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ln e^{-1}=-1$

وعليه (v_n) متتالية حسابية أساسها (-1) وحدها الأول $v_0=\ln(u_0)=\ln\sqrt{e}=\dfrac{1}{2}$

2 -أ) حساب العدد P_n بدلالة n

لدينا: $P_n=\ln(u_0\times u_1\times.....\times u_n)$ ومنه: $P_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+.....+\ln(u_n)$ أي: $P_n=v_0+v_1+.....+v_n$

ومنه: $P_n=\dfrac{(n+1)}{2}(v_0+v_n)$ وأخيرا $P_n=\dfrac{(n+1)}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-n\right)=\dfrac{-n^2+1}{2}$

ب)تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n+4n\succ0$

لدينا: $P_n+4n=\dfrac{-n^2+1+8n}{2}$ و $P_n+4n\succ0$ معناه $-n^2+8n+1\succ0$

أي $4-2\sqrt{5}\prec n\prec4+2\sqrt{5}$ ومنه $0\le n\le8$ لأن: $n\in\mathbb{N}$ وعليه: $n\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$

التمرين32: دورة 2013الموضوع (1)

I-1)تبيان أن (v_n)م هندسية وتحديد أساسها وحدّها الأول

(v_n)متتالية هندسية معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=q.v_n$

$v_{n+1}=\dfrac{5^{n+2}}{6^{n+1}}=\dfrac{5\times5^{n+1}}{6\times6^n}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5^{n+1}}{6^n}=\dfrac{5}{6}\times v_n$ إذن: $v_{n+1}=\dfrac{5}{6}v_n$

أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{5}{6}$ وحدّها الأول هو $v_0=\dfrac{5^{0+1}}{6^0}=5$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^{n+1}}{6^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}5.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n=0$ لأن $-1\prec\dfrac{5}{6}\prec1$

II-1)البرهان بالتراجع أن: $1\le u_n\le6$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ يكون: $1\le u_0\le6$ محققة لأن $u_0=1$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1\le u_n\le6$ ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1\le u_{n+1}\le6$

لدينا: $1 \le u_n \le 6$ ومنه $5 \le 5u_n \le 30$ ومنه $11 \le 5u_n + 6 \le 36$ أي $\sqrt{11} \le \sqrt{5u_n+6} \le 6$

أي $1 \prec \sqrt{11} \le \sqrt{5u_n+6} \le 6$ إذن: $1 \le u_{n+1} \le 6$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n+6} - u_n$. ولمعرفة اشارة الفرق نضرب ونقسم في مرافق الفرق نجد:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{(\sqrt{5u_n+6}-u_n)(\sqrt{5u_n+6}+u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n} = \frac{-u_n^2+5u_n+6}{\sqrt{5u_n+6}+u_n} = \frac{-(u_n+1)(u_n-6)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$$

بما أن $1 \le u_n \le 6$ فإن الفرق يكون موجبا على هذا المجال ومنه المتتالية متزايدة على $\mathbb{N}$.

3-أ) البرهان أن $6-u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا $6-u_{n+1} = 6-\sqrt{5u_n+6} = \frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$ لأن: $\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}} \le \frac{1}{6}$ ومنه $6-u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$

ب) تبيان أن $0 \le 6-u_n \le v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا: $6-u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

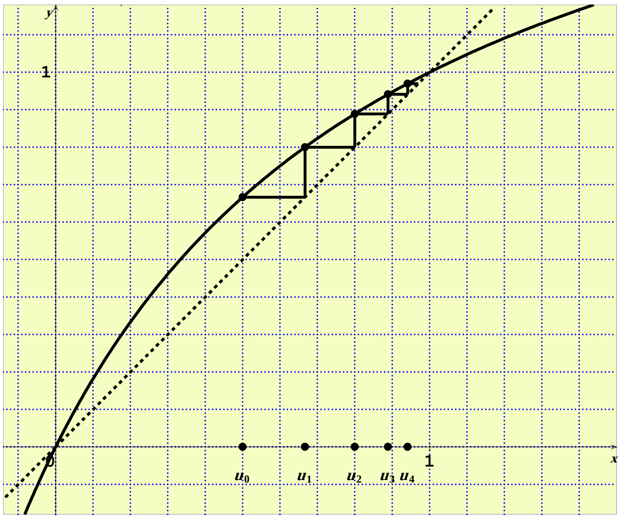
من أجل 0: $6-u_1 \le \frac{5}{6}(6-u_0)$ ومن أجل 1: $6-u_2 \le \frac{5}{6}(6-u_1)$ ... ومن أجل n: $6-u_n \le \frac{5}{6}(6-u_{n-1})$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $6-u_n \le \left(\frac{5}{6}\right)^n (6-u_0)$ أي $0 \le 6-u_n \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^n = v_n$

لدينا: $0 \le 6-u_n \le v_n$ ولدينا ايضا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}(6-u_n) = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

التمرين 33: دورة 2013 الموضوع (2)

1-أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها وإبراز خطوط التمثيل



ب) وضع تخمين حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

من البيان نخمن أن (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

2-أ) إثبات أن f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ معناه $f'(x) \succ 0$

لدينا: $f'(x) = \frac{2(x+1)-1(2x)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \succ 0$

ب) البرهان بالتراجع أن: $0 \prec u_n \prec 1$

من أجل $n=0$ يكون: $0 \prec u_0 \prec 1$ محققة لأن $u_0 = \frac{1}{2}$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \prec u_n \prec 1$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_{n+1}\prec 1$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 1$ ومنه: $f(0)\prec f(u_n)\prec f(1)$ لأن الدالة f متزايدة تماماأي:

$0\prec u_{n+1}\prec 1$ لأن $f(0)=0$ و $f(1)=1$

جـ)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{2u_n}{u_n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n}{u_n+1}=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط لأن المقام موجب تماما

من أجل كل $u_n\in]0;1[$ يكون $u_n(1-u_n)\succ 0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3-أ)البرهان أن (v_n) م.هـ أساسها $\frac{1}{2}$ وحساب حدّها الأول

(v_n) م هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{f(u_n)-1}{f(u_n)}=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{u_n-1}{u_n}$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ الحد الأول: $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=-1$

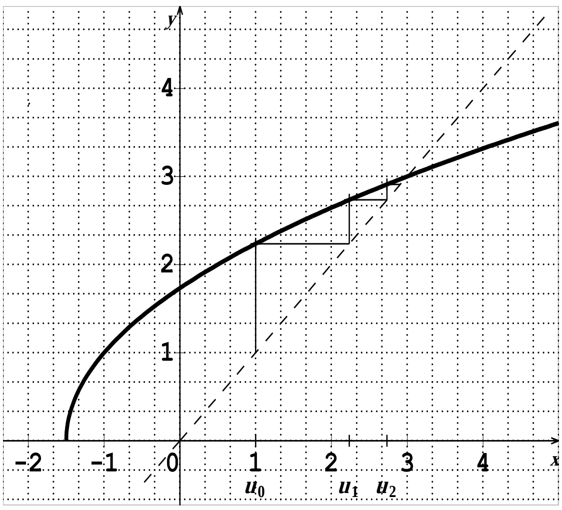
حساب نهاية (u_n)

لدينا: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ ومنه $u_n=\frac{1}{1-v_n}$ ولدينا: $v_n=v_0.q^n=-1.\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ومنه $u_n=\frac{1}{1+2^{-n}}$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+2^{-n}}=1$ أي $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

التمرين34: دورة 2012الموضوع (1)

1-أ)اعادة رسم الشكل وتمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل



ب)وضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

من 1-أ)نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو 3

2)البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 3$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $0\prec u_0\prec 3$ محققة لأن $u_0=1$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 3$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_{n+1}\prec 3$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 3$

ومنه: $h(0)\prec h(u_n)\prec h(3)$ لأن الدالة h متزايدة تماما

أي: $\sqrt{3}\prec u_{n+1}\prec 3$

3-أ)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير (u_n) ندرس اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n=\dfrac{-u_n^2+2u_n+3}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب

$-u_n^2+2u_n+3=0$ معناه $u_n=-1$ أو $u_n=3$ ومنه: $-u_n^2+2u_n+3\succ 0$ من أجل $0\prec u_n\prec 3$

وعليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

طريقة2: لدينا الدالة المرفقة h متزايدة تماما و $u_1\succ u_0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب)استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

المتتالية (u_n) متقاربة لإنها متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ($u_n\prec 3$).

نفرض أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\alpha$ ونحل المعادلة $h(\alpha)=\alpha$

$h(\alpha)=\alpha$ معناه $\sqrt{2\alpha+3}=\alpha$ معناه $2\alpha+3=\alpha^2$ لأن α موجب تماما

معناه $\alpha=3$ أو $\alpha=-1$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

التمرين35: دورة 2012الموضوع (2)

1)البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 3\prec u_n\prec 4$

من أجل $n=0$ يكون: $3\prec u_0\prec 4$ محققة لأن $u_0=\dfrac{13}{4}$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 3\prec u_n\prec 4$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 3\prec u_{n+1}\prec 4$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 3\prec u_n\prec 4$ ومنه: $0\prec u_n-3\prec 1$ أي $0\prec\sqrt{u_n-3}\prec 1$

أي: $3\prec 3+\sqrt{u_n-3}\prec 4$ إذن $3\prec u_{n+1}\prec 4$.

2)تبيان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n-3}+3-u_n=\dfrac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$ وذلك بعد الضرب والقسمة في المرافق $\sqrt{u_n-3}-(3-u_n)$

استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما

إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ هي حسب إشارة $-u_n^2+7u_n-12$

لدينا $-u_n^2+7u_n-12$ ينعدم عند 3 و 4 ومن أجل $3\prec u_n\prec 4$ يكون $-u_n^2+7u_n-12\succ 0$

وعليه تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) تبرير أن المتتالية متقاربة.

من الجواب السابق (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 وعليه المتتالية متقاربة نحو 4.

4-أ)البرهان أن (v_n) م.هـ أساسها $\frac{1}{2}$ وحساب الحد الأول

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

لدينا: $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(\sqrt{u_n - 3}) = \frac{1}{2}v_n$ والحد الأول هو $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln\frac{1}{4}$

ب)كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا: $v_n = v_0.q^n = -\ln 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا: $v_n = \ln(u_n - 3)$ ومنه $e^{v_n} = u_n - 3$ وعليه: $u_n = 3 + e^{v_n} = 3 + e^{-\ln 4.\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty}(3 + e^{-2\ln 2.\left(\frac{1}{2}\right)^n}) = 3 + 1 = 4$

جـ) كتابة P_n بدلالة n وتبيان أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

لدينا: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times ...... \times (u_n - 3)$ ومنه $P_n = e^{v_0}.e^{v_1}.......e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + ... + v_n} = e^{v_0\frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)}}$

ومنه: $\ln P_n = \ln\frac{1}{16}(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1})$ أي $P_n = e^{\ln\frac{1}{16}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln\frac{1}{16}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} = e^{\ln\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$

التمرين36: دورة 2011الموضوع (1)

تحديدالإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاثة مع التعليل

الإقتراح	الإجابة الصحيحة	التعليل
1	ب-هندسية	$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3(u_n + \frac{1}{2}) = 3v_n$
2	النهايةهي: $-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty}(v_n - \frac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2}.3^n - \frac{1}{2}) = -\infty$
3	المجموع S_n هو	$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n\right] = -\frac{1}{2}\left[1.\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right] = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين37: دورة 2011الموضوع (2)

1-أ) بيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها α

(v_n) هندسية أساسها α معناه $v_{n+1} = \alpha.v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$ و $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+1+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha(u_n+\frac{1}{\alpha-1})=\alpha v_n$$

ب) كتابة v_n بدلالة n و α واستنتاج u_n بدلالة n و α

لدينا: $v_n=v_0.q^n$ حيث $v_0=u_0+\frac{1}{\alpha-1}=6+\frac{1}{\alpha-1}$ ومنه: $v_n=\left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right).\alpha^n$

لدينا: $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$ ومنه: $u_n=v_n-\frac{1}{\alpha-1}$ ومنه $u_n=\left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right).\alpha^n-\frac{1}{\alpha-1}$

جـ) تعيين قيم α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة

حتى تكون (u_n) متقاربة يجب أن يكون الأساس $0\prec\alpha\prec1$

2- حساب المجموعين S_n و T_n

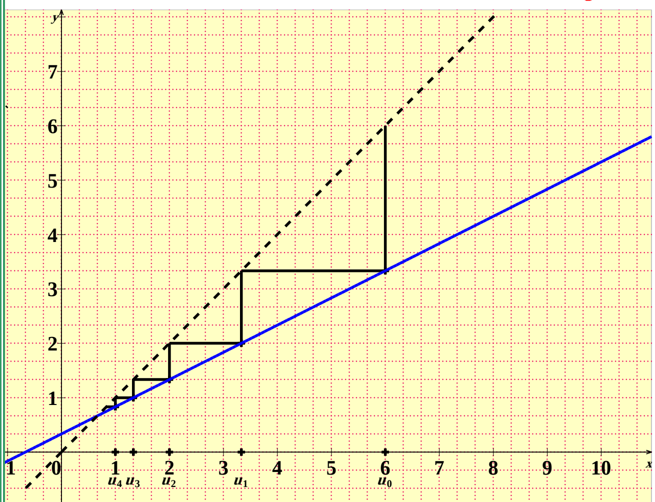
$$S_n=v_0(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1})=8\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]=16(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1)$$

ولدينا $T_n=u_0+u_1+.....+u_n$ نعلم أن $u_n=v_n-\frac{1}{\alpha-1}$ ومنه $u_n=v_n-2$

وعليه:
$$T_n=(v_0-2)+(v_1-2)+.....+(v_n-2)$$
$$=(v_0+v_1+.....+v_n)-2(n+1)=S_n-2(n+1)$$

التمرين38: دورة 2010الموضوع (1)

1-أ)تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 على حامل محور الفواصل



ب)تعيين إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

إحداثي نقطة تقاطع (Δ) و (D) نحل الجملة التالية:

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\\y=x\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\\y=x\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=x\end{cases}$$

ومنه إحداثي نقطة تقاطع (Δ) و (D) هي $(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$

حـ) إعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من التمثيل البياني نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة

2-أ)الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\succ\frac{2}{3}$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 \succ \frac{2}{3}$ محققة لأن $u_0=6$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n \succ \frac{2}{3}$ ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} \succ \frac{2}{3}$

لدينا: $u_n \succ \frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n \succ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنه $\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3} \succ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ وأخيرا $u_{n+1} \succ \frac{2}{3}$

ب)استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-u_n=-\frac{1}{2}(u_n-\frac{2}{3})$ ومنه $u_{n+1}-u_n \prec 0$ لأن $u_n \succ \frac{2}{3}$

3-أ)تبيين أن (v_n) م هندسية وتحديد أساسها وحدّها الأول

(v_n) متتالية هندسية معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=q.v_n$

لدينا: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}(u_n-\frac{2}{3})$

إذن: $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0=u_0-\frac{2}{3}=6-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$

ب)كتابة عبارة الحد العام v_n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=v_0.q^n$ ومنه : $v_n=\frac{16}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ولدينا: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ ومنه $u_n=v_n+\frac{2}{3}=\frac{16}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$

جـ)حساب المجموع S_n واستنتاج المجموع S'_n بدلالة n

لدينا: $S_n=v_0+v_1+....+v_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ ومنه: $S_n=\frac{16}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]=\frac{32}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$$S'_n=u_0+u_1+....+u_n=(\frac{2}{3}+v_0)+(\frac{2}{3}+v_1)+....+(\frac{2}{3}+v_n)=\frac{2}{3}(n+1)+S_n$$

التمرين39: دورة 2009الموضوع (1)

1) حساب v_0 و v_1

لدينا: $v_n=u_{n+1}-u_n$ ومنه: $v_0=u_1-u_0=1$ و $v_1=u_2-u_1=\frac{1}{3}$

2) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها

(v_n) متتالية هندسية معناه: $v_{n+1}=v_n\times q$

لدينا: $v_n=u_{n+1}-u_n$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n-u_{n+1}$

ومنه $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}v_n$ متتالية هندسية (v_n) أساسها : $\boxed{q=\frac{1}{3}}$

3-أ)حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=v_0+v_1+.......+v_{n-1}$ ومنه:

$$S_n=v_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]=1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right]=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ب)البرهان أن: $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا: $S_n=v_0+v_1+.......+v_{n-1}$ ومنه: $S_n=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+.......+(u_n-u_{n-1})$

بعد التبسيط نجد: $S_n=-u_0+u_n$ ومنه: $u_n=u_0+S_n$ وأخيرا: $\boxed{u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1}$

ج) تبيين أن (u_n) متقاربة

(u_n) متقاربة معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ ثابت

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1=\frac{5}{2}$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

التمرين40: دورة 2009الموضوع (2)

1-أ)حساب u_2 والأساس q واستنتاج الحد الأول

لدينا: $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$ أي: $\begin{cases}\frac{u_2}{q}+2u_2+u_2q=32\\u_2^3=216\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}1+2q+q^2=\frac{16}{3}q\\u_2=6\end{cases}$ أي: $\begin{cases}q=3\vee q=\frac{1}{3}\\u_2=6\end{cases}$

وبما أن المتتالية متزايدة فإن: $q=3$ و $u_2=6$

لدينا: $u_2=u_1q$ ومنه : $u_1=\frac{u_2}{q}=\frac{6}{3}=2$

ب)كتابة عبا رة الحد u_n بدلالة n

لدينا: $u_n=u_1q^{n-1}=2.3^{n-1}$

ج) حسبا المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=u_1+u_2+....+u_{n-1}=u_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$ ومنه: $S_n=2\left(\frac{3^n-1}{3-1}\right)=3^n-1$

تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n=728$

$S_n=728$ معناه $3^n-1=278$ أي: $3^n=279=3^6$ إذن: n=6

2-أ) حساب v_2 و v_3

$w_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$ و $v_1=2$ ومنه: $v_2=\frac{3}{2}v_1+u_1=5$ و $v_3=\frac{3}{2}v_2+u_2=\frac{3}{2}(5)+6=\frac{27}{2}$

ب) تبيين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $w_{n+1}=\frac{1}{2}w_n$

لدينا: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ومنه $w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}-\frac{2}{3}=w_{n+1}=\frac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3u_n}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}w_n$

ج) كتابة w_n بدلالة n واستنتاج v_n بدلالة n

$w_n=w_1(q)^{n-1}$ ولدينا: $w_1=\frac{v_1}{u_1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ومنه: $w_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

لدينا: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ومنه: $w_n+\frac{2}{3}=\frac{v_n}{u_n}$ أي: $v_n=u_n(w_n+\frac{2}{3})$ إذن: $v_n=2.3^{n-1}(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3})$

التمرين 41: دورة 2008 الموضوع (1)

1-أ) تبيين أن f متزايدة تماما على I

f قابلة للإشتقاق على I حيث: $f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}\succ 0$ ومنه f متزايدة تماما على I .

ب) تبيين انه من اجل كل x من I فإن f(x) تنتمي لـ I

بماأن مستمرة ومتزايدة تماما على I فإن: $1\le x\le 2$ ومنه $f(1)\le f(x)\le f(2)$ ومنه f(x) تنتمي لـ I .

2-أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل n من N، $1\le u_n\le 2$

من أجل n=0 يكون لدينا: $1\le u_0\le 2$ محققة

نفرض صحة P(n) أي $1\le u_n\le 2$ ونبرهن صحة P(n+1) أي $1\le u_{n+1}\le 2$

لدينا: $1\le u_n\le 2$ معناه $3\le u_n+2\le 4$ ....(1) و $1\le u_n\le 2$ معناه $2\le -u_n+4\le 3$ ....(2)

من (1) و(2) نجد: $1\le\frac{u_n+2}{-u_n+4}\le 2$ ومنه P(n) محققة من اجل كل عدد طبيعي n.

ب) دراسة تغيرات المتتالية (u_n).

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n=\frac{u_n^2-4u_n+2}{-u_n+4}$ أي $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-4u_n+2}{-u_n+4}=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$

البسط سالب تماما لأن $1\le u_n\le 2$ والمقام موجب تماما لأن $2\le -u_n+4\le 3$ ومنه (u_n) متناقصة تماما

استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة.

(u_n) متناقصة تماما على I ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

3-البرهان بالتراجع انه من اجل كل n من N: $u_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 1}$

من أجل n=0 يكون لدينا: $u_0 = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^0 + 1} = \dfrac{3}{2}$ محققة

نفرض صحة P(n) أي $u_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 1}$ ونبرهن صحة P(n+1) أي $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

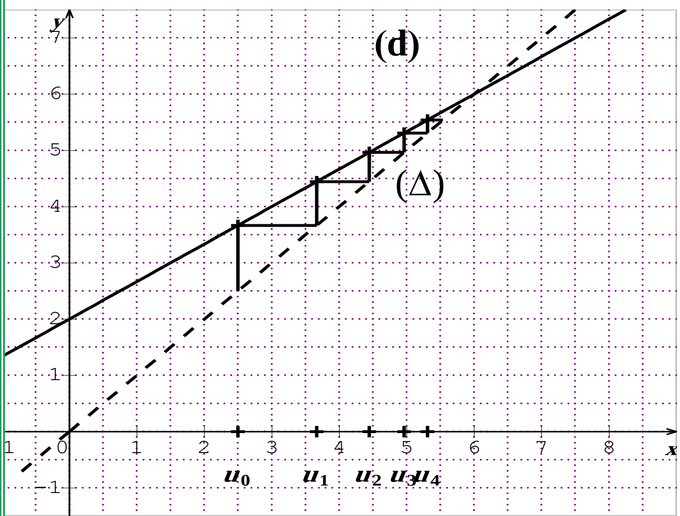
لدينا: $u_{n+1} = -1 + \dfrac{6}{4 - u_n} = \dfrac{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 2} = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

ب)تعيين النهاية : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

التمرين42: دورة 2009الموضوع (2)

1أ-ب)رسم (Δ) و(d)وتمثيل u_0، u_1، u_2، u_3، u_4



جـ)وضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n)، وتقاربها

من الرسم السابق نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 6.

2-أ)البرهان بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$، $u_n \le 6$

من أجل n=0 يكون لدينا: $u_0 = \dfrac{5}{2} \le 6$ محققة

نفرض صحة P(n) أي $u_n \le 6$ ونبرهن صحة P(n+1) أي $u_{n+1} \le 6$

لدينا: $u_n \le 6$ معناه $\dfrac{2}{3}u_n \le 4$ معناه $\dfrac{2}{3}u_n + 2 \le 6$ أي أن $u_{n+1} \le 6$ ومنه $u_n \le 6$ محققة من أجل كل n من N

ب) التحقق أن (u_n) متزايدة

(u_n) متزايدة تماما لأن: $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+2-u_n=-\frac{1}{3}(u_n-6)\succ 0$

ج) دراسة تقارب (u_n)

المتتالية (u_n) متقاربة نحو 6 لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 حسب ما سبق.

3-أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية

(v_n) متتالية هندسية معناه: $v_{n+1}=v_n.q$

$v_n=u_n-6$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{2}{3}u_n+2-6=\frac{2}{3}(u_n-6)$

أي أن : $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=-\frac{7}{2}$

ب) كتابة عبارة u_n بدلالة n ، واستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لدينا:$v_n=u_n-6$ ومنه $u_n=v_n+6$ أي: $u_n=-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+6$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$

التمرين43: دورة 2019الموضوع (1)

1) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

(v_n) هندسية أساسها q معناه المتتالية $v_{n+1}=q.v_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لدينا: (v_n) معرفة بـ: $v_n=u_n-3n+1$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}-3(n+1)+1=u_{n+1}-3n-2$

ولدينا: $u_{n+1}=7u_n-18n+9$ حيث $u_0=0$

وعليه: $v_{n+1}=7u_n-18n+9-3n-2=7u_n-21n+7=7(u_n-3n+1)=7v_n$

ومنه (v_n) هندسية أساسها 7 وحدّها الاول $v_0=u_0-3(0)+1=1$

2) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتاج u_n بدلالة n

*نعلم انه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0.q^n$ ومنه: $v_n=7^n$

** لدينا: $v_n=u_n-3n+1$ ومنه $u_n=v_n+3n-1$ أي $u_n=7^n+3n-1$

3) حساب المجموع S_n بدلالة n .

لدينا: $S_n=u_0+u_1+....+u_n$ باستعمال العلاقة $u_n=v_n+3n-1$ نجد:

$$S_n=(v_0+v_1+....+v_n)+(-1+2+5+......+(3n-1))$$

نضع: $S_1=v_0+v_1+....+v_n$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

$S_2=(-1+2+5+......+(3n-1))$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

لدينا: $S_1=v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)=\left(\frac{7^{n+1}-1}{6}\right)$ و $S_2=\frac{n+1}{2}(-1+(3n-1))=\frac{(n+1)(3n-2)}{2}$

وعليه: $S_n=S_1+S_2=\left(\frac{7^{n+1}-1}{6}\right)+\frac{(n+1)(3n-2)}{2}$

4-أ) دراسة بواقي قسمة العدد 7^n على 9

لدينا: $7^0\equiv1[9]$، $7^1\equiv7[9]$، $7^2\equiv4[9]$، $7^3\equiv1[9]$

بواقي قسمة 7^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وهي حسب الجدول التالي

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$7^n\equiv$	1	7	4

ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $1954^{1962}+1962^{1954}+1440^{2019}$ على 9.

*لدينا: $1442\equiv2[9]$ ومنه $1442^{2019}\equiv2^{2019}[9]$ تكافئ $1442^{2019}\equiv(-7)^{2019}[9]$ لأن $-7\equiv2[9]$

لكن $1442^{2019}\equiv(-7)^{2019}[9]$ تكافئ $1442^{2019}\equiv7^{2019}.(-1)^{2019}[9]$

ولدينا: $7^{2019}=7^{3(673)}\equiv1[9]$ حسب الجدول اعلاه و $(-1)^{2019}\equiv-1[9]$

وعليه: $1442^{2019} \equiv 2^{2019}[9]$ تكافئ $1442^{2019} \equiv -1[9]......(1)$

*$1962 \equiv 0[9]$ ومنه $1962^{1954} \equiv 0[9]......(2)$

*$1954 \equiv 1[9]$ ومنه $1954^{2062} \equiv 1[9]......(3)$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $1440^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962} \equiv 0[9]$ أي الباقي هو 0

ج) إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n $6S_n - 7u_n \equiv 0[9]$.

لدينا: $6S_n = 6\left(\frac{7^{n+1}-1}{6}\right) + \frac{6(n+1)(3n-2)}{2} = 7^{n+1} + 9n^2 + 3n - 7$

ولدينا: $7u_n = 7^{n+1} + 21n - 7$

ومنه: $6S_n - 7u_n = 9n^2 - 18n = 9(n^2 - 2n) \equiv 0[9]$

التمرين44: دورة 2018الموضوع (1)

1- أ)البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > \frac{1}{e}$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$ و(u_n)المتتالية العددية المعرفة

بحدها الأول : $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

- التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون لدينا: $u_0 > \frac{1}{e}$ محققة لأن $u_0 = \frac{5}{4e} > \frac{1}{e}$

نفرض أن صحة P(n) أي: $u_n > \frac{1}{e}$ونبرهن أن صحةP(n+1) أي: $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

لدينا: $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $f(u_n) > f(\frac{1}{e})$ لأن fمتزايدة تماما لأن $f'(x) = \frac{2}{(ex+1)^2} \succ 0$

ومنه $u_{n+1} > \frac{1}{e}$ لأن$f(u_n) = u_{n+1}$ و$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ومنه الخاصية $u_n > \frac{1}{e}$صحيحة من اجل كل$n \in \mathbb{N}$

ب) تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n(\frac{1}{e} - u_n)}{e.u_n + 1}$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2u_n}{eu_n + 1} - u_n = \frac{u_n - eu_n^2}{eu_n + 1} = \frac{e.u_n(\frac{1}{e} - u_n)}{e.u_n + 1}$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتبرّير اهنا متقاربة.

من العبارة $u_{n+1}-u_n=\dfrac{e.u_n(\frac{1}{e}-u_n)}{e.u_n+1}$ نستنتج ان الفرق $u_{n+1}-u_n$ سالب تماما لأن $u_n>\frac{1}{e}$

وعليه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأسفل لأن $u_n>\frac{1}{e}$.

2- تبيّان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2،يطلب تعين حدّها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n.

*المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 معناه $v_{n+1}=2v_n$ من اجل كل عدد طبيعي n

لدينا: $v_n=\dfrac{e.u_n}{e.u_n-1}$ ومنه $v_{n+1}=\dfrac{e.u_{n+1}}{e.u_{n+1}-1}=\dfrac{e.f(u_n)}{e.f(u_n)-1}=\dfrac{e\dfrac{2u_n}{eu_n+1}}{e\dfrac{2u_n}{eu_n+1}-1}=2\dfrac{eu_n}{eu_n-1}=2v_n$

الحدالأول هو $v_0=\dfrac{e.u_0}{e.u_0-1}=5$ لأن $u_0=\dfrac{5}{4e}$

*عبارة الحد الحام للمتتالية (v_n): $v_n=v_0\times q^n$ من اجل كل عدد طبيعي n وعليه: $v_n=5\times 2^n$

3-أ)التحقق أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $v_n=1+\dfrac{1}{e.u_n-1}$

* لدينا من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $\dfrac{e.u_n}{e.u_n-1}=\dfrac{e.u_n-1+1}{e.u_n-1}=1+\dfrac{1}{e.u_n-1}=v_n$

***استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$**

$v_n=1+\dfrac{1}{e.u_n-1}$ ومنه $v_n-1=\dfrac{1}{e.u_n-1}$ أي $e.u_n-1=\dfrac{1}{v_n-1}$ ومنه: $u_n=\dfrac{1}{ev_n-e}+\dfrac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{ev_n-e}+\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=5\lim\limits_{x\to+\infty}2^n=+\infty$

ب) حساب بدلالة n المجموع S_n .

لدينا: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ومنه $S_n=v_0\left[\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right]=5\left[\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}\right]=5(2^{n+1}-1)$

4-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

لدينا: $2^0\equiv1[7]$، $2^1\equiv2[7]$، $2^2\equiv4[7]$، $2^3\equiv1[7]$

بواقي قسمة 2^n على7تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n\equiv$	1	2	4

ب) تعييّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_n قابلا للقسمة على 7.

معناه $S_n=5(2^{n+1}-1)\equiv 0[7]$ معناه $(2^{n+1}-1)\equiv 0[7]$ لأن 5 أولي مع 7
معناه $2^{n+1}\equiv 1[7]$ ومعناه $n+1=3k$ حسب ما ورد في الجدول
ومنه $n=3k-1$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم أو $n=3k+2$ حيث k عدد طبيعي.

التمرين45: دورة 2018الموضوع (2)

1)أثبات أن (w_n) متتالية عددية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$، و تعيين حدّها الأول.

لدينا:(u_n)المتتالية العددية المعرفة بحدها العام $u_n=2(3)^n$

لدينا: (v_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الاول $v_0=4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=5v_n+u_n$

ولدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n=\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{2}$.

المتتالية (w_n)هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ معناه $w_{n+1}=\frac{5}{3}w_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

لدينا $w_n=\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{2}$ ومنه $w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}+\frac{1}{2}=\frac{5v_n+u_n}{3u_n}=\frac{5v_n}{3u_n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}.\frac{v_n}{u_n}+\frac{5}{6}=\frac{5}{3}(\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{2})=\frac{5}{3}w_n$

ومنه لمتتالية (w_n)هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ وحدّها الأول $w_0=\frac{v_0}{u_0}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

ملاحظة: المتتالية (u_n) هندسية أساسها 3 وحدّها الأول $u_0=2(3)^0=2$

2)كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n .

المتتالية (w_n)هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ وحدّها الأول $w_0=\frac{5}{2}$ ومنه $w_n=w_0q^n=\frac{5}{2}.\left(\frac{5}{3}\right)^n=\frac{5^{n+1}}{2.3^n}$

أستنتاج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=5^{n+1}-3^n$

لدينا: $w_n=\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{2}$ ومنه $w_n.u_n-\frac{u_n}{2}=v_n$ وعليه $v_n=\frac{5^{n+1}}{2.3^n}.2.3^n-\frac{2.3^n}{2}=5^{n+1}-3^n$ و.ه.م.

3)دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8

دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 8

لدينا: $3^0\equiv 1[8]$، $3^1\equiv 3[8]$، $3^2\equiv 1[8]$ ومنه بواقي قسمة 3^n على 8 تشكل متتالية دورية ودورها 2 وهي حسب الجدول التالي

$n=$	$2k$	$2k+1$	
$3^n\equiv$	1	3	$[8]$

دراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 8

لدينا: $5^0 \equiv 1[8]$، $5^1 \equiv 5[8]$، $5^2 \equiv 1[8]$ بواقي قسمة 5^n على 8 تشكل متتالية دورية ودورها 2 وهي حسب الجدول التالي

$n =$	$2k$	$2k+1$	
$5^n \equiv$	1	5	$[8]$

4) تعيّين حسب قيم العدد الطبيعي n بوقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8.

لدينا: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$ لتعيين بوقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8نشكل الجدول التالي

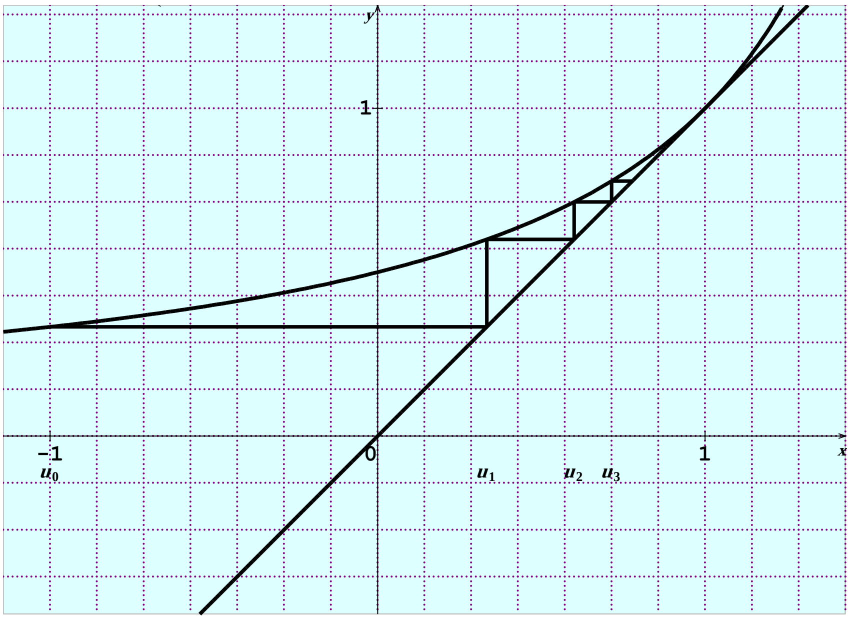
$n =$	$2k$	$2k+1$	
$5^n \equiv$	1	5	$[8]$
$5^{n+1} \equiv$	5	1	$[8]$
$3^n \equiv$	1	3	$[8]$
$5^{n+1} - 3^n \equiv$	4	6	$[8]$

ومنه: من أجل $n = 2k$ فإن باقي قسمة v_n على 8 هو 4

و من أجل $n = 2k+1$ فإن باقي قسمة v_n على 8 هو 6

التمرين46: دورة 2017الموضوع (1)

1)نقل الشكل وتمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل



وضع تخمين حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة التقاطع1

2) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعيn : $u_n \leq 1$

- التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $u_0 \prec 1$ محققة لأن $u_0 = -1$

نفرض أن صحة $P(n)$ أي: $u_n \prec 1$ونبرهن أن صحة $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} \prec 1$

لدينا: $u_n \leq 1$ ومنه $f(u_n) \prec f(1)$ لأن f متزايدة تماما لأن $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} \succ 0$

ومنه $u_{n+1} \prec 1$ لأن $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(1) = 1$

ومنه الخاصية $u_n \leq 1$ صحيحة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتاج انها متقاربة

*لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_{n+1}} - u_n = \frac{2-u_n}{-2u_n+3} - u_n = \frac{2(u_n-1)^2}{-2u_n+3}$

نلاحظ أن البسط موجب والمقام أيضا موجب لأن $u_n \prec 1$

وعليه تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

* المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومتزايدة تماما

4-أ) اثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2.

(v_n) حسابية أساسها 2 معناه $v_{n+1} - v_n = 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا: $v_n = \frac{2}{1-u_n}$ أي $v_{n+1} = \frac{1}{2-u_{n+1}} = \frac{2(2-u_n)}{1-u_n}$

لدينا: $v_{n+1} - v_n = \frac{2(2-u_n)}{1-u_n} - \frac{2}{1-u_n} = \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = 2$

تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = v_0 + nr$

حيث: $v_0 = \frac{2}{1-u_0} = 1$ و $r = 2$ ومنه: $v_n = 2n+1$.

ب) استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

لدينا: $v_n = \frac{2}{1-u_n}$ ومنه $1-u_n = \frac{2}{v_n}$ أي $u_n = 1 - \frac{2}{v_n}$ ومنه $u_n = 1 - \frac{2}{2n+1} = \frac{2n-1}{2n+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{v_n} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = +\infty$

التمرين 47: دورة 2017 الموضوع (2) الاستدراكية

1-أ) تبيّان أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n \succ 0$

المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$

لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n \succ 0$ نستعمل البرهان بالتراجع

*التحقق من صحة $P(1)$

من اجل n=1 يكون لدينا: $u_1 \succ 0$ محققة لأن $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ لأن α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2.

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n \succ 0$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} \succ 0$

لدينا: $u_n \succ 0$ ومنه $(n+1)u_n \succ 0$ ....(1) و كذلك $\alpha u_n \succ 0$ .....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{n+1}{\alpha n}u_n \succ 0$ أي $u_{n+1} \succ 0$

ومنه الخاصية $u_n \succ 0$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة.

* المتتالية (u_n) متناقصة تماما معناه $u_{n+1} - u_n \prec 0$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{\alpha n}u_n - u_n = u_n(\frac{(1-\alpha)n+1}{\alpha n})$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط $(1-\alpha)n+1$ لأن المقام موجب تماما.

لدينا: $\alpha \geq 2$ وعليه $(1-\alpha) \leq -1$ ومنه $(1-\alpha)n \leq -n$ ومنه $(1-\alpha)n+1 \leq 1-n \prec 0$

إذن $u_{n+1} - u_n \prec 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

*المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 و متناقصة تماما.نستنتج مما سبق أنها متقاربة

2- أ)تبيّان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وتعيّن حدّها الأول v_1 بدلالة α.

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ معناه $v_{n+1} = \frac{1}{\alpha}v_n$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

لدينا: $v_n = \frac{1}{\alpha n}u_n$ ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{\alpha(n+1)}u_{n+1}$ لكن $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n}u_n$

وعليه $v_{n+1} = \frac{1}{\alpha(n+1)}\frac{n+1}{\alpha n}u_n = \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\alpha n}u_n) = \frac{1}{\alpha}v_n$

الحد الاول للمتتالية (v_n) هو $v_1 = \frac{1}{\alpha}u_1 = \frac{1}{\alpha^2}$

ب) إيجاد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

*المتتالية (v_n) هندسية ومنه $v_n = v_1(q)^{n-1}$ ومنه $v_n = \frac{1}{\alpha^2}(\frac{1}{\alpha})^{n-1} = (\frac{1}{\alpha})^{n-3} = \alpha^{3-n}$

*لدينا: $u_n = \alpha n.v_n$ ومنه $\ln u_n = 4\ln\alpha + \ln n - n\ln\alpha = 4\ln\alpha + n(\frac{\ln n}{n} - \ln\alpha)$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln u_n = -\infty$ وعليه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

3) حساب بدلالة n و α المجموع S_n

لدينا: $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + ... + \frac{1}{n}u_n$ ولدينا كذلك $u_n = \alpha n.v_n$

ومنه $S_n = \alpha(v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n)$ وعليه: $S_n = v_1\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{\alpha - 1}$

تعيّن قيمة α حيث : $\lim_{x\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$.

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$ معناه $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{\alpha-1} = \frac{1}{2016}$ معناه $\alpha - 1 = 2016$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$

أي $\alpha = 2017$

التمرين48: دورة 2016الموضوع (2)

1-تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

لدينا:الدالة f معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

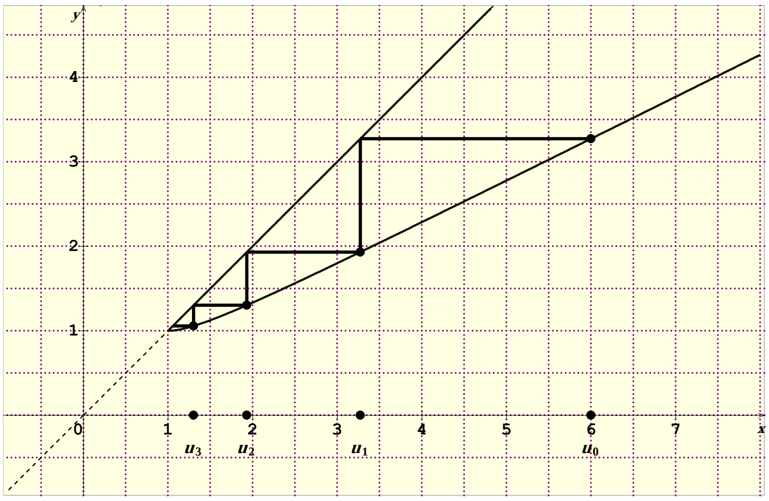
لدينا: $f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2)}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

اشارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $2x(x-1)$ وهي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$2x(x-1)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

ومنه الدالة fمتزايدة على المجال $[1;+\infty[$ لأن $2x(x-1) \geq 0$ على هذا المجال.

2-أ) نقل الشكل وتمثيل الأربعة الحدود الأولى للمتتالية (u_n)



2-ب) إعطاء تخمين حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو نقطة التقاطع1

ج)البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

- التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $1 \le u_0 \le 6$ محققة لأن $u_0 = 6$

*نفرض أن صحة P(n) أي: $1 \le u_n \le 6$ ونبرهن أن صحة P(n+1) أي: $1 \le u_{n+1} \le 6$

لدينا: $1 \le u_n \le 6$ ومنه $f(1) \le f(u_n) \prec f(6)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $1 \le u_{n+1} \le \dfrac{36}{11}$

وعليه: $1 \le u_{n+1} \le 6$ لأن $\dfrac{36}{11} \prec 6$ ومنه الخاصية $1 \le u_n \le 6$ صحيحة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

د) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ وندرس اشارته

لدينا: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \dfrac{u^2_n}{2u_n - 1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \dfrac{u_n(-u_n + 1)}{2u_n - 1}$

$u_{n+1} - u_n = 0$ معناه $u_n = 0$ أو $u_n = 1$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب أي اشارة الفرق حسب الجدول

u_n	$-\infty$	0		1	$+\infty$
اشارة الفرق	-	0	+	0	-
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما		(u_n) متناقصة تماما

بما أن $1 \le u_n \le 6$ فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

هـ) تبرير تقارب المتتالية (u_n)

(u_n) متقاربة لأنها متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ من الجواب ب) ومحدودة من الأسفل بـ 1 الجواب جـ)

3) أ) اثبات أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها 2 وتعيين حدها الأول

(w_n) هندسية أساسها 2 معناه المتتالية $w_{n+1} = 2.w_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

ومنه $w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{\dfrac{u^2_n}{2u_n - 1} - 1}{\dfrac{u^2_n}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2\ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2w_n$

والحد الأول هو: $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\dfrac{u_0 - 1}{u_0}\right) = \ln\dfrac{5}{6}$

ب) كتابة w_n بدلالة ثم v_n بدلالة n

لمتتالية (w_n) هندسية ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = w_0.q^n = \ln\dfrac{5}{6}.(2)^n$

لدينا: $w_n=\ln(v_n)$ ومنه: $v_n=e^{w_n}$ وعليه: $v_n=e^{2^n.\ln\frac{5}{6}}=\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}$

ج) تبيان أن: $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

*لدينا: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ ولدينا: $v_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}$ ومنه $v_n-1=-\dfrac{1}{u_n}$ ومنه $u_n=\dfrac{1}{1-v_n}$ وعليه: $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$

*$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}=1$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}=0$

4) حساب المجموع S_n بدلالة n

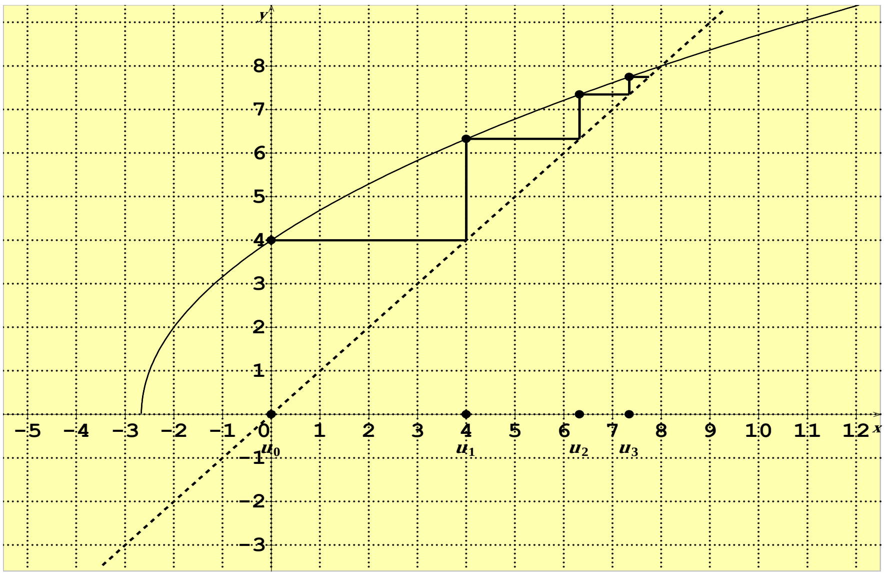
لدينا: $S_n=\dfrac{1}{w_0}+\dfrac{1}{w_1}+...+\dfrac{1}{w_n}=\dfrac{1}{w_0}+\dfrac{1}{w_0.q}+.....+\dfrac{1}{w_0.q^n}=\dfrac{1}{w_0}\left[1+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^2}+.....+\dfrac{1}{q^n}\right]$

نلاحظ أن: $\left[1+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^2}+.....+\dfrac{1}{q^n}\right]$ هو مجموع متتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها $\dfrac{1}{q}$

وعليه: $S_n=\dfrac{1}{w_0}\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{q}}\right]=\dfrac{1}{\ln\frac{5}{6}}\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]=\dfrac{2}{\ln\frac{5}{6}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

التمرين49: دورة 2015الموضوع (2)

1-أ)اعادة رسم الشكل وتمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل



ب)وضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

من 1-أ)نخمن أن المتتالية (u_n)متزايدة ومتقاربة نحو 8

2-أ)البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \prec 8$

من أجل $n=0$يكون لدينا: $0 \leq u_0 \prec 8$ محققة لأن $u_0 = 0$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \prec 8$صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1} \prec 8$صحيحة

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \prec 8$صحيحة

ومنه: $h(0) \leq h(u_n) \prec h(8)$ لأن الدالة h متزايدة تماما

أي: $4 \leq u_{n+1} \prec 8$ إذن $0 \leq u_{n+1} \prec 8$. لأن المجال $[4;8[$محتوى في المجال $[0;8[$

ب) تبيان أن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$.

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{6u_n+16} - u_n = \dfrac{(\sqrt{6u_n+16}-u_n)(\sqrt{6u_n+16}+u_n)}{(\sqrt{6u_n+16}+u_n)}$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(\sqrt{6u_n+16})^2 - u_n{}^2}{(\sqrt{6u_n+16}+u_n)} = \dfrac{-u_n{}^2+6u_n+16}{(\sqrt{6u_n+16}+u_n)}$

تحليل العبارة $-u_n{}^2+6u_n+16$ هو $(8-u_n)(u_n+2)$وعليه: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$.

جـ)استنتاج إتجاه تغيّر (u_n).

لدراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

من العبارة $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$ نستنتج أن إشارة الفرق هي حسب إشارة الجداء

$(8-u_n)(u_n+2)$ وهو حسب الجول التالي:

u_n	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$(8-u_n)(u_n+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبمأن $0 \leq u_n \prec 8$ فإن الفرق يكون موجب تماما

وعليه تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3-أ) تبيان أن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \prec 8 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(8-u_n)$

لدينا: $0 \leq u_{n+1} \prec 8$ ومنه $-8 \leq -u_{n+1} \prec 0$ أي $0 \leq 8 - u_{n+1} \prec 8$ ومنه: $0 \prec 8 - u_{n+1}$ ....(1)

ونبين أيضا أن $8 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(8-u_n)$......(2)

(2) تكافئ $8-u_{n+1}-\frac{1}{2}(8-u_n)\le 0$

لدينا: $8-u_{n+1}-\frac{1}{2}(8-u_n)=8+u_n-2\sqrt{6u_n+16}=\frac{(8+u_n)^2-4(\sqrt{6u_n+16})^2}{(8+u_n+2\sqrt{6u_n+16})}$

وبما أن $\frac{(8+u_n)^2-4(\sqrt{6u_n+16})^2}{(8+u_n+2\sqrt{6u_n+16})}=\frac{u_n^2-8u_n}{(8+u_n+2\sqrt{6u_n+16})}=\frac{u_n(u_n-8)}{(8+u_n+2\sqrt{6u_n+16})}$

$0\le u_n\prec 8$ فإن الفرق يكون سالب .

من(1) و (2) نستنتج أن: $0\prec 8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

ب) تبيان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec 8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ واستنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

من الجواب السابق لدينا: $0\prec 8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

باستعمال هذه العلاقة نجد:

من أجل n=0 يكون: $0\prec 8-u_1\le\frac{1}{2}(8-u_0)$

و من أجل n=1 يكون: $0\prec 8-u_2\le\frac{1}{2}(8-u_1)$

....

....

من أجل n-1يكون: $0\prec 8-u_n\le\frac{1}{2}(8-u_{n-1})$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $0\prec 8-u_1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(8-u_0)$ ومنه $0\prec 8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

* باستعمال المتباينة $0\prec 8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبستعمال $\lim\limits_{x\to+\infty}8\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}(8-u_n)=0$ وعليه $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=8$

التمرين50: دورة 2014الموضوع (1)

1) دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 16للعدد 5^n.

لدينا: $5^0\equiv 1[16]$ ، $5^1\equiv 5[16]$ ،$5^2\equiv 9[16]$ ، $5^3\equiv 13[16]$ ، $5^4\equiv 1[16]$

بواقي قسمة 5^n على 16 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$5^n \equiv$	1	5	9	13

2-أ)تباين أن إذا كان $p=4k+2$ حيث k عدد طبيعي فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق: $C_n = D_p$

من أحل $p=4k+2$ يكون لدينا: $5^{4k+2} \equiv 9[16]$ أي فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق:

$5^{4k+2} \equiv 16n+9$ ومنه $C_n = D_p$ حيث $C_n = 16n+9$ و $D_p = 5^p$.

ب)تعييّن n من أجل $p=6$.

من أجل $p=6$ يكون $5^6 \equiv 16n+9$ وعليه $16n+9=15625$ ومنه $n=976$.

3) دراسة تغيرات الدالة f، ثم استنتاج إشارة f(x).

النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5^{4x} = +\infty$ و لدينا $f(0)=16$

اتجاه التغير: $f'(x) = 4\ln 5 . 5^{4x+2} \succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها.

جدول التغيرات

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$16 \nearrow +\infty$

من جدول التغيرات نستنتج ان : $f(x) \succ 16$ ومنه $f(x) \succ 0$.

4-أ)البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{5^{(4n+2)}-9}{16}$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 = \dfrac{5^{(2)}-9}{16} = 1$ محققة لأن $u_0 = 1$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{5^{(4n+2)}-9}{16}$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{5^{(4n+6)}-9}{16}$ صحيحة

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{5^{(4n+6)}-9}{16} = \dfrac{5^{(4n+2)}.5^4 - 9.5^4}{16} + \dfrac{9.5^4}{16} - \dfrac{9}{16} = 5^4\left[\dfrac{5^{(4n+2)}-9}{16} + \dfrac{9}{16}\right] - \dfrac{9}{16} = u_{n+1}$

ومنه الخاصية $u_n = \dfrac{5^{(4n+2)}-9}{16}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن u_n عدد طبيعي.

لدينا: من الجواب 2-أ) $5^{4k+2} \equiv 9[16]$ ومنه $5^{4k+2} - 9 \equiv 0[16]$

وعليه: $u_n = \dfrac{5^{4k+2}-9}{16} \equiv 0[16]$ إذن: u_n عدد طبيعي.

5)استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا: $u_n = \dfrac{1}{16} f(n)$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن الدالة f متزايدة تماما مجال تعريفها.

التمرين51:دورة 2014الموضوع (2)

I- 1- تحدد حسب قيم x، إشارة $f(x)-x$.

لدينا: $f(x)-x=-\ln(x-1)$ وعليه اشارة الفرق هي حسب اشارة $-\ln(x-1)$

ومنه: $-\ln(x-1)=0$ معناه $x=2$ و $-\ln(x-1)\prec 0$ معناه $x\succ 2$ و $-\ln(x-1)\succ 0$ معناه $1\prec x\prec 2$

2-أ-تعيّين اتجاه تغير f.

لدينا: $f(x)=x-\ln(x-1)$ ومنه : $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)}=\dfrac{x-2}{x-1}$

ومنه : $f'(x)=0$ معناه $x=2$ و $f'(x)\succ 0$ معناه $x\succ 2$ و $f'(x)\prec 0$ معناه $1\prec x\prec 2$

أي f متزايدة على المجال $[2;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]1;2]$.

ب-تبيّان أنه إذا كان $x\in[2:e+1]$ فإن: $f(x)\in[2:e+1]$.

لدينا: $x\in[2:e+1]$ ومنه $f(x)\in[f(2);f(e+1)]$ لأن f متزايد تماما على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا: $f(2)=2-\ln 3$ و $f(e+1)=e+1-1=e$

ومنه $f(x)\in[2:e+1]$ لأن المجال $[f(2);f(e+1)]$ محتوى في المجال $[2:e+1]$.

II) -1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\in[2:e+1]$.

لدينا:من أجل n=0 يكون لدينا: $u_0\in[2:e+1]$ محققة لأن: $u_0=e+1$

نفرض أن: $u_n\in[2:e+1]$ ونبرهن أن $u_{n+1}\in[2:e+1]$

لدينا: $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n-1)$ أي $u_{n+1}=f(u_n)$

ومنه: $u_n\in[2:e+1]$ تعني $f(u_n)\in[f(2);f(e+1)]$ لأن f متزايد تماما على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا: $f(2)=2-\ln 3$ و $f(e+1)=e+1-1=e$

ومنه $f(u_n)\in[2:e+1]$ لأن المجال $[f(2);f(e+1)]$ محتوى في المجال $[2:e+1]$.

ومنه : $u_n\in[2:e+1]$ من أجل كل عدد طبيعي n.

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا: $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n-1)$ تكافئ $u_{n+1}-u_n=-\ln(u_n-1)\prec 0$ لأن $u_n\in[2:e+1]$

وعليه تكون المتتالية (u_n) متناقصة .

3)تبرير تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

*المتتالية (u_n) متقاربة لأن تحقق الشرطين:متناقصة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2.

* نفرض أن: $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\ell$ ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ ومنه : $\ell=f(\ell)$

$\ell=f(\ell)$ تكافئ $\ln(\ell-1)=0$ وعليه: $\ell=2$.

التمرين52:دورة 2013الموضوع (1)

1)تبيان أن (v_n)هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم حساب وحدّها الأول

(v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $v_{n+1}=\frac{1}{2}.v_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

لدينا: $v_n=\frac{1}{2}\ln u_n+\frac{1}{2}$ ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{2}\ln u_{n+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\ln\sqrt{\frac{u_n}{e}}+1)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln\frac{u_n}{e}+1)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln u_n-\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}v_n$

الحد الأول هو $v_0=\frac{1}{2}\ln u_0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln e^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2) كتابة من v_n، ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

(v_n) هندسية أساسها q معناه $v_n=v_0.q^n$ وعليه $v_n=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا: $v_n=\frac{1}{2}\ln u_n+\frac{1}{2}$ ومنه: $\ln u_n=2v_n-1$ ومنه: $u_n=e^{2v_n-1}$ وعليه $u_n=e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n، ثم حساب $\lim_{x\to+\infty}S_n$

$S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=\frac{3}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]=3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية.

$\lim_{x\to+\infty}S_n=\lim_{x\to+\infty}3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=3$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$

4) إيجاد بدلالة n الجداء $P_n=u_0\times u_1\times..\times u_n$ ، ثم حساب $\lim_{x\to+\infty}P_n$.

لدينا: $P_n=u_0\times u_1\times..\times u_n=e^{2v_0-1}\times e^{2v_1-1}\times..\times e^{2v_n-1}=e^{2(v_0+v_1+...+v_n)-(n+1)}=e^{2(S_n)-(n+1)}$

$\lim_{x\to+\infty}P_n=\lim_{x\to+\infty}e^{2(S_n)-(n+1)}=0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-(n+1)}\right)=0$.

التمرين53:دورة 2011الموضوع (1)

1-أثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=1+\frac{1}{n(n+2)}$ و استنتاج أن $u_n\succ 1$.

لدينا: $u_n=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n(n+2)}$

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ فإن: $\frac{1}{n(n+2)}\succ 0$ وعليه $\frac{1}{n(n+2)}+1\succ 1$ ومنه: $u_n\succ 1$.

2-دراسة اتجاه تغير (u_n)،و تبيان أنها متقاربة،وحساب نهايتها.

المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن: $u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{(n+1)(n+3)}-1-\frac{1}{n(n+2)}=\frac{-2n-3}{n(n+2)(n+1)(n+3)}\prec 0$

المتتالية متقاربة لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1.

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n(n+2)} = 1+0 = 1$$

3- اثبات بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $P_n = \dfrac{2n+2}{n+2}$

من أجل n=1 يكون لدينا: $P_1 = \dfrac{2(1)+2}{1+2} = \dfrac{4}{3}$ محققة لأن: $P_1 = \dfrac{(1+1)^2}{1+2} = \dfrac{4}{3}$

نفرض أن: $P_n = \dfrac{2n+2}{n+2}$ ونبرهن أن $P_{n+1} = \dfrac{2n+4}{n+3}$

لدينا: $P_n = u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n$

ومنه: $P_{n+1} = u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_{n+1} = P_n\times u_{n+1} = \left(\dfrac{2n+2}{n+2}\right).\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{2(n+1)(n+2)^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{2n+4}{n+3}$

ليكن الجداء $P_n = u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n$. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $P_n = \dfrac{2n+2}{n+2}$

4-التعبير بدلالة P_n عن S_n.

لدينا: $v_n = \ln(u_n)$ و $S_n = v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n$

ومنه: $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \ldots + \ln u_n = \ln(u_0.u_1......u_n) = \ln(P_n)$

حساب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty}\ln(P_n) = \ln 2$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}(P_n) = 2$.

التمرين54:دورة 2008الموضوع (1)

I- أ) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

لدينا: f معرفة على المجال $]-2\,;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x+2}$

$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{>}-2}\dfrac{9}{x+2} = +\infty$ (لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}-2}(x+2) = 0^+$)، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x+2}$ ومنه: $f'(x) = \dfrac{2x(x+2)-1(x^2+5)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$

$f'(x)=0$ معناه $(x-1)(x+5)=0$ ومعناه $x=1$ أو $x=-5$ مرفوض

$f'(x)\prec 0$ معناه $(x-1)(x+5)\prec 0$ معناه $-2\prec x\prec 1$.

$f'(x)\succ 0$ معناه $(x-1)(x+5)\succ 0$ معناه $x\in]1;+\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	-2	1	$+\infty$

f'(x)	− 0 +
f(x)	$+\infty$ ↘ 2 ↗ $+\infty$

ج)تبيان أن المستقيم (D): y=x-2 مقارب مائل لـ (C_f).

المستقيم (D): y=x-2 مقارب مائل لـ (C_f)معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+5}{x+2}-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{x+2}=0$

رسم المنحنى (C_f) والمستقيم (D).في الجواب II-أ)

د) تبيان أن صورة المجال $\left]1;\frac{5}{2}\right[$ محتواة في المجال $\left]1;\frac{5}{2}\right[$

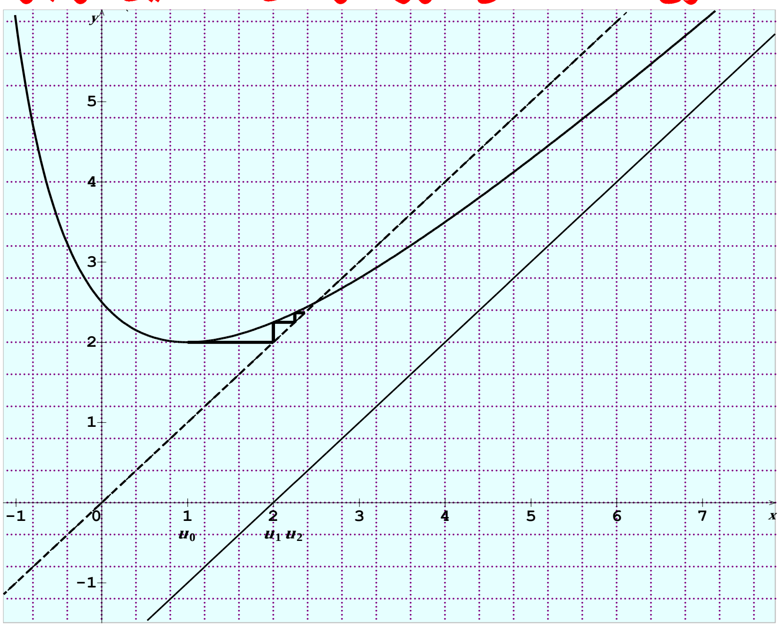
نبين أنه من أجل كل $1\prec x\prec\frac{5}{2}$ فإن $1\prec f(x)\prec\frac{5}{2}$

لدينا من أجل كل $1\prec x\prec\frac{5}{2}$ فإن $f(1)\prec f(x)\prec f(\frac{5}{2})$ لأن f متزايدة تماما على المجال $\left]1;\frac{5}{2}\right[$

ولدينا: $f(1)=2$ و $f(\frac{5}{2})=\frac{29}{18}$ ومنه : $2\prec f(x)\prec\frac{29}{18}$ ومنه $1\prec f(x)\prec\frac{5}{2}$

لأن المجال $\left]2;\frac{29}{18}\right[$ محتوى في المجال $\left]1;\frac{5}{2}\right[$.

II-أ) تمثيل U_0 ، U_1،U_2 (دون حسابها)على محور الفواصل (التمثيل موجود ضمن المنحنى (C_f))



ب) تخمين اتجاه وتقارب المتتالية (U_n).

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية متزايدة ومتقاربة نحو $\frac{5}{2}$.

نعتبر المتتالية العددية (U_n) والمعرفة بـ: $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n

جـ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le U_n \le \frac{5}{2}$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $1 \le U_0 \le \frac{5}{2}$ محققة لأن $u_0 = 1$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \le U_n \le \frac{5}{2}$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \le U_{n+1} \le \frac{5}{2}$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \le U_n \le \frac{5}{2}$ صحيحة

ومنه: $f(1) \le f(U_n) \le f(\frac{5}{2})$ لأن الدالة f متزايدة تماما في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$

ومنه : $2 \prec f(U_n) \prec \frac{29}{18}$ ومنه $1 \prec U_{n+1} \prec \frac{5}{2}$ لأن المجال $\left[2;\frac{29}{18}\right]$ محتوى في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$.

اثبات ان المتتالية (U_n) متزايدة.

المتتالية (U_n) متزايدة لأن الدالة المرفقة متزايدة تماما على المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ و $U_0 \prec U_1$

استنتاج ان (U_n) متقاربة ، ثم حساب : $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

(U_n) متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{5}{2}$.

نفرض أن: $\lim_{x\to+\infty} U_n = \alpha$ ونحل المعادلة $f(\alpha)=\alpha$

$f(\alpha)=\alpha$ معناه $\frac{\alpha^2+5}{\alpha+2}=\alpha$ معناه $2\alpha=5$ معناه $\alpha=\frac{5}{2}$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} U_n = \frac{5}{2}$

التمرين 55: دورة 2008 الموضوع (2)

1-أ- دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$.

اتجاه التغير: لدينا: $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$ ومنه $f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$

$f'(x) \succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;2]$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	0 2
f'(x)	+
f(x)	↗ $\frac{7}{4}$

	$\frac{3}{2}$

ب-إنشاء المنحنى (C) وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل (انظر الجواب 2-ب)

جـ-البرهان أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ ان صورة المجال $[0;2]$ هي المجال $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$

ومنه $f(x) \in [0;2]$ لأن المجال $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$ محتوى في المجال $[0;2]$.

2- أ-تبرير وجود المتتالية (u_n) .احسب u_1 و u_2.

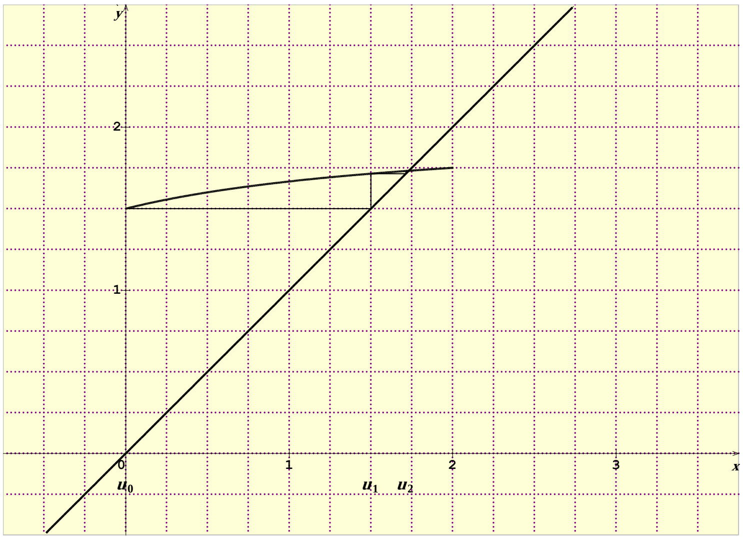
المتتالية (u_n) موجودة لأنها معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

وجميع حدودها تنتمي للمجال $[0;2]$ وذلك حسب الجواب السابق (1-جـ)

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = f(u_1) = f(\frac{3}{2}) = \frac{12}{7} \end{cases}$

نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

ب-إنشاء المنحنى (C) وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل .



جـ-وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

من خلال قيم الحدود u_0 ، u_1 و u_2 أو تمثيلها نخمن أن المتتالية متزايدة ومتقاربة نحو نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم $(D): y = x$.

3-أ-البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0 \le u_n \le \sqrt{3}$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $0 \le u_0 \le \sqrt{3}$ محققة لأن $u_0 = 0$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le\sqrt{3}$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le\sqrt{3}$ صحيحة

ومنه: $f(0)\le f(u_n)\le f(\sqrt{3})$ لأن الدالة f متزايدة تماما في المجال $[0;2]$

ومنه : $\frac{3}{2}\le f(u_n)\le\sqrt{3}$ ومنه $0\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ لأن المجال $\left[\frac{3}{2};\sqrt{3}\right]$ محتوى في المجال $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

ب-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\succ u_n$ والاستنتاج بالنسبة إلى المتتالية (u_n)..

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\succ u_n$ معناه $u_{n+1}-u_n\succ 0$

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{2u_n+3}{u_n+2}-u_n=\frac{-u_n^2+3}{u_n+2}=\frac{-(u_n+\sqrt{3})(u_n-\sqrt{3})}{u_n+2}$$

نلاحظ أن : $u_{n+1}-u_n\succ 0$ لأن البسط موجب تماما والمقام موجب تماما من أجل $0\le u_n\le\sqrt{3}$.

جـ- التحقق أن $(u_{n+1}-\sqrt{3})\le\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$.

لدينا: $(u_{n+1}-\sqrt{3})=\frac{2u_n+3}{u_n+2}-\sqrt{3}=\frac{(2-\sqrt{3})}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$

ولدينا: $1\succ\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\succ 0$ لأن: $\frac{2-\sqrt{3}}{2}\prec\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\prec\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ ومنه: $(u_{n+1}-\sqrt{3})\le\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$

تعيين عددا حقيقيا k من المجال $]0;1[$ بحيث: $\left|(u_{n+1}-\sqrt{3})\right|\le k\left|(u_n-\sqrt{3})\right|$

من المتباينة $(u_{n+1}-\sqrt{3})\le\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ نجد: $\left|(u_{n+1}-\sqrt{3})\right|\le k\left|(u_n-\sqrt{3})\right|$ حيث : $k\le\left|\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\right|$

تبيان أنه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $\left|(u_n-\sqrt{3})\right|\le k^n\left|(u_0-\sqrt{3})\right|$ ثم استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

من المتباينة: $\left|(u_{n+1}-\sqrt{3})\right|\le k\left|(u_n-\sqrt{3})\right|$

*لدينا:من أجل n=0 نجد: $\left|(u_1-\sqrt{3})\right|\le k\left|(u_0-\sqrt{3})\right|$ ومن أجل n=1 نجد: $\left|(u_2-\sqrt{3})\right|\le k\left|(u_1-\sqrt{3})\right|$

من أجل n=2 نجد: $\left|(u_3-\sqrt{3})\right|\le k\left|(u_2-\sqrt{3})\right|$.....و من أجل n-1 نجد: $\left|(u_n-\sqrt{3})\right|\le k\left|(u_{n-1}-\sqrt{3})\right|$

بضرب هذه المساويات طرف لطرف نجد وبعد التبسيط نجد: $\left|(u_n-\sqrt{3})\right|\le k^n\left|(u_0-\sqrt{3})\right|$

* لدينا مماسبق أن $\left|(u_n-\sqrt{3})\right|\le k^n\left|(u_0-\sqrt{3})\right|$

لدينا: k من المجال $]0;1[$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}k^n=0$ وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|(u_n-\sqrt{3})\right|=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\sqrt{3}$

شعبة الرياضيات

التمرين56:دورة 2019 الموضوع (12)

1)حل المعادلة $505x-673y=1.....(E)$.

من الكتابة ($3\times673=2019$ و $4\times505=2020$) نستنتج ان $(505.4-673.3=1.....(E'))$

وعليه الثنائية $(4;3)$ حل خاص للمعادلة (E)

لدينا: $\begin{cases}505x-673y=1.....(E)\\505.4-673.3=1.....(E')\end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد: $505(x-4)-673(y-3)=0$

ولدينا: $505(x-4)-673(y-3)=0$ تكافئ $505(x-4)=673(y-3).....(*)$

(*)تعني أن $673/505(x-4)$ ومنه $673/(x-4)$ لأن 367 أولي مع 505 حسب مبرهنة غوص.

أي : $x-4=673k$ إذن $x=673k+4$ حيث k عدد صحيح.

بتعويض قيمة x في المعادلة (*) نجد: $505(673k)=673(y-3)$ أي $y=505k+3$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $(x;y)=(673k+4;505k+3)$ حيث k عدد صحيح.

2) تبيّان أنه من أجل كل ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x و y من نفس الإشارة.

x و y من نفس الإشارة معناه $(x.y)=(673k+4)(505k+3)=339865k^2+1178k+12>0$

لان المميز $\Delta<0$ ومعامل k^2 موجب.

3)كتابة u_α بدلالة α ثم كتابة v_β بدلالة β .

لدينا: (u_n) و (v_n) متتاليتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=3\\u_{n+1}=u_n+505\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=4\\v_{n+1}=v_n+673\end{cases}$

لدينا $\begin{cases}u_0=3\\u_{n+1}=u_n+505\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}u_0=3\\u_{n+1}-u_n=505\end{cases}...(1)$ و $\begin{cases}v_0=4\\v_{n+1}-v_n=673\end{cases}....(2)$

من الجملتين (1) و (2) نستنتج ان:

المتتالية (u_n) حسابية أساسها 505 وحدّها الأول 3 وعليه $u_\alpha=u_0+\alpha r$ أي $u_\alpha=3+505\alpha$

المتتالية (v_n) حسابية أساسها 673 وحدّها الأول 4 وعليه $v_\beta=v_0+\beta r'$ أي $v_\beta=4+673\beta$

4-أ)تبيان أن الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعين أساسها وحدّها الأول

*الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي حدود المتتالية (w_n) وتحقق: $u_\alpha=v_\beta$

$u_\alpha=v_\beta$ تكافئ $3+505\alpha=4+673\beta$ وتكافئ $505\beta-673\alpha=1$ ومعناه $\alpha=y$ و $\beta=x$

وعليه وحسب الجواب 1) نستنتج أن: $(\beta;\alpha)=(673k+4;504k+3)$ حيث k عدد طبيعي

وعليه الحدود المشتركة هي حدود المتتالية (w_n) حيث: $w_k=3+505(673k+4)=339865k+2023$

** لدينا : $w_{k+1}-w_k=339865(k+1)-339865k=339865$

وعليه المتتالية (w_n) حسابية أساسها 339865 وحدّها الأول 2023

ب) حساب بدلالة n الجداء P

لدينا : $P = X_1.X_2.X_3........X_n$ حيث $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$

$$X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023) = \frac{1}{505}(339192n) = \frac{1}{505}(505 \times 673n) = 673n$$

ومنه: $P = X_1.X_2.X_3........X_n = (673)^n (1.2.3.......n) = (673)^n .n!$

التمرين57:دورة 2019الموضوع (2)

1-أ)التحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

(u_n)متتالية عددية حدودها معرّفة بحدّها الأول $u_1 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$

$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$ تكافئ $\left(\sqrt{u_{n+1}}\right)^2 = \left(\sqrt{u_n}\right)^2 + 2\sqrt{u_n} + 1$ و تكافئ $\left(\sqrt{u_{n+1}}\right)^2 = \left(\sqrt{u_n} + 1\right)^2$

وتكافئ $\left(\sqrt{u_{n+1}}\right) = \left(\sqrt{u_n} + 1\right)$ أي $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ وهو المطلوب

ب)استنتاج كتابة الحد العام u_n بدلالة n.

بوضع : $\sqrt{u_n} = k_n$ فإن $\sqrt{u_{n+1}} = k_{n+1}$ ومنه $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ تكافئ $k_{n+1} - k_n = 1$

ومنه نستنتج أن المتتالية (k_n) حسابية أساسها 1 وحدّها الأول $k_1 = 0$ أي $k_n = n - 1$

وعليه $\sqrt{u_n} = k_n = n - 1$ ومنه $u_n = (n-1)^2$

2) التحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = n(n-2) + 1$

لدينا: $u_n = n(n-2) + 1$ تكافئ $u_n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$ وهو المطلوب

3) تعيّين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها: $(n-2)$ يقسم $(n-5)$

لدينا: $(n-2)$ يقسم $(n-5)$معناه $\frac{n-5}{n-2}$عدد صحيح نسبي

لكن $\frac{n-5}{n-2} = 1 - \frac{3}{n-2}$ ومعناه $\frac{3}{n-2}$عدد صحيح نسبي ومعناه ان $(n-2)$ يقسم 3

$(n-2)$ يقسم 3 معناه $(n-2) \in D_3 = \{-3;-1;1;3\}$ ومنه $n \in \{1;3;5\}$

4-أ) تبيّان أن: $PGCD(n-2;u_n) = 1$

لدينا: $u_n = n(n-2) + 1$ معناه $u_n - n(n-2) = 1$

معناه وجود ثنائية $(1;n)$ تحقق: $u_n - n(n-2) = 1$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو $PGCD(n-2;u_n) = 1$

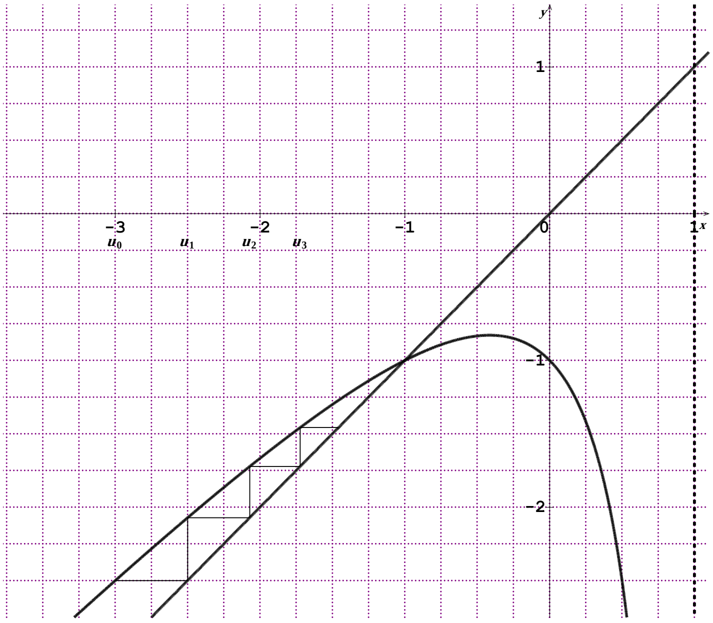
ب) تعيّين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها : $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$

لدينا: $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$ و $PGCD(n-2;u_n) = 1$ ومنه وحسب مبرهنة غوص

فإن $(n-2)$ يقسم $(n-5)$ ومنه $n \in \{1;3;5\}$ حسب ما ورد في الجواب3) $n \in \{3;5\}$ لان $n \geq 2$

التمرين58:دورة 2018الموضوع (2)

1)اعادة رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .



اعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

من خلال تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو نقطة التقاطع-1.

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \le u_n \le -1$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون: $-3 \le u_0 \le -1$ محققة لأن $u_0 = -3$

*نفرض أن صحة $P(n)$:أي $-3 \le u_n \le -1$ ونبرهن أن صحة $P(n+1)$ أي: $-3 \le u_{n+1} \le -1$

لدينا: $-3 \le u_n \le -1$ ومنه $f(-3) \le f(u_n) \prec f(-1)$ لأن f متزايدة تماما

ومنه: $-1 \le u_{n+1} \le 5$ لأن : $f(-3) = 5$ و $f(-1) = -1$

لكن $-1 \le u_{n+1} \le 5$ تكافئ $-3 \le u_{n+1} \le -1$ لأن $-3 < 5$

ومنه الخاصية $-3 \le u_n \le -1$ صحيحة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$.

3-أ) تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n + 1)$.

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n + 1)$ تكافئ $(u_{n+1} + 1) - \frac{3}{4}(u_n + 1) \ge 0$

لدينا: $(u_{n+1} + 1) - \frac{3}{4}(u_n + 1) = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1} - \frac{3}{4}(u_n + 1) = \frac{(u_n + 3)(u_n + 1)}{4(u_n - 1)} \ge 0$

لأن: $(u_n + 3) > 0$ و $(u_n + 1) < 0$ و $(u_n - 1) < 0$ لأن $-3 \le u_n \le -1$

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim_{x \to +\infty} u_n$.

باستعمال المتباينة $u_{n+1}+1\geq\frac{3}{4}(u_n+1)$

من أجل $n=0$: $u_1+1\geq\frac{3}{4}(u_0+1)$. ومن أجل $n=1$: $u_2+1\geq\frac{3}{4}(u_1+1)$

.... و من أجل $n-1$: $u_n+1\geq\frac{3}{4}(u_{n-1}+1)$

بضرب هذه المتبيانات طرف لطرف نجد: $u_n+1\geq\left(\frac{3}{4}\right)^n(u_0+1)$ أي $u_n+1\geq-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

د)استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

لدينا: $u_n+1\geq-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ولدينا: $-2\leq u_n+1\leq0$ أي $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\leq u_n+1\leq0$

لكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ لأن $\left(\frac{3}{4}\right)<1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n+1)=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=-1$

4)تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** : $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq(u_0+1)+(u_1+1)+.....+(u_n+1)<0$

باستعمال المتباينة $u_n+1\geq-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$: $u_0+1\geq-2\left(\frac{3}{4}\right)^0$. ومن أجل $n=1$: $u_1+1\geq-2\left(\frac{3}{4}\right)^1$

.... و من أجل $n-1$: $u_n+1\geq-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

بجمع هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $u_n+1\geq\left(\frac{3}{4}\right)^n(u_0+1)$

$$(u_0+1)+(u_1+1)+.....+(u_n+1)\geq-2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+........+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

نضع: $T_n=\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+........+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

ومنه : $T_n=\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}=4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$

ومنه $(u_0+1)+(u_1+1)+.....+(u_n+1)\geq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]...(1)$

ولدينا ايضا: $(u_0+1)+(u_1+1)+.....+(u_n+1)<0...(2)$ لأن $T_n>0$

من (1) و (2) نستنتج أن : $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq(u_0+1)+(u_1+1)+.....+(u_n+1)<0$

استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$.

$(u_0+1)+(u_1+1)+.....+(u_n+1)<0$ ومنه $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n<-n-1$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-n-1)=-\infty$ وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n=-\infty$ حسب مبرهنة الحد من الأعلى.

التمرين59:دورة 2017الموضوع (2)

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n=7^{n+1}-4$.

(u_n)معرفة بـحدّها الأول: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=7u_n+8$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $3u_0=3$ محققة لأن $u_0=1$

*نفرض أن$P(n)$صحيحة أي: $3u_n=7^{n+1}-4$ونبرهن أن $P(n+1)$صحيحة أي:$3u_{n+1}=7^{n+2}-4$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=7u_n+8$ ومنه $3u_{n+1}=7(3u_n)+24$

ولدينا من فرضية التراجع $3u_n=7^{n+1}-4$ وعليه $3u_{n+1}=7(7^{n+1}-4)+24$

أي $3u_{n+1}=7.7^{n+1}-28+24$ وأخيرا $3u_{n+1}=7^{n+2}-4$

ومنه الخاصية $3u_n=7^{n+1}-4$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

2) أ-حساب بدلالة n المجموع S_n .

$S_n=1+7+7^2......+7^n$ هو مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها7

ومنه: $S_n=1\left(\frac{7^{n+1}-1}{7-1}\right)=\frac{7^{n+1}-1}{6}$

إيجاد علاقة بيّن S_n و S'_n.

لدينا: $S_n'=u_0+u_1+......+u_n$ ولدينا أيضا $3u_n=7^{n+1}-4$

ومنه: $3S_n'=3u_0+3u_1+......+3u_n$

أي $3S_n'=\left[(7-4)+(7^2-4)+......+(7^{n+1}-4)\right]=7(1+7+7^2+....7^n)-4(n+1)$

إذن $3S_n'=7S_n-4(n+1)$

ب-استنتاج أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

من الجواب السابق لدينا$3S_n'=7S_n-4(n+1)$ بضرب طرفي هذه العلاقة في 6 نجد

لكن لدينا $18S_n' = 7(6S_n) - 24(n+1)$ $S_n = \frac{7^{n+1}-1}{6}$

ومنه $18S_n' = 7(6\frac{7^{n+1}-1}{6}) - 24(n+1)$ إذن $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$

3-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

لدينا: $7^0 \equiv 1[5]$، $7^1 \equiv 2[5]$، $7^2 \equiv 4[5]$، $7^3 \equiv 3[5]$، $7^4 \equiv 1[5]$.

بواقي قسمة 7^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$7^n \equiv$	1	2	4	3

ب)تعييّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلا القسمة على 5.

S'_n قابلا القسمة على 5معناه $S'_n \equiv 0[5]$ تكافئ $18S'_n \equiv 0[5]$ (ضرب الطرفين في 18)

وتكافئ $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5]$ وتكافئ $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$

لتعيين قيم العدد الطبيعي نميز عدة حالات هي:

1) $n = 4k$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 3[5]$ وعليه $n = 20k'+12$ $(k' \in \mathbb{N})$

2) $n = 4k+1$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 3[5]$ وعليه $n = 20k'+13$ $(k' \in \mathbb{N})$

3) $n = 4k+2$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 2[5]$ وعليه $n = 20k'+10$ $(k' \in \mathbb{N})$

4) $n = 4k+3$ تكون $7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $k \equiv 4[5]$ وعليه $n = 20k'+19$ $(k' \in \mathbb{N})$

التمرين60:دورة 2017الموضوع (2) الاستدراكية

1-أ) تبيّان أن:من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

لدينا المتتالية (u_n)معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 4u_n + 1$

لإثبات $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ من أجل كل عدد طبيعي n نستعمل البرهان بالتراجع

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون لدينا: $u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1) = 0$ محققة لأن $u_0 = 0$

*نفرض أن$P(n)$صحيحة أي: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

لدينا: $u_{n+1} = 4u_n + 1$ لكن $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ من فرضية التراجع

ومنه: $u_{n+1}=4\left(\frac{1}{3}(4^n-1)\right)+1$ أي $u_{n+1}=\frac{4}{3}.4^n-\frac{4}{3}+1=\frac{1}{3}.4^{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$

ومنه الخاصية $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب)التحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العددان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

تذكير:مبرهنة بيزو:

العددان a و b أوليان فيما بينهمامعناه وجود ثنائية $(x_0;y_0)\in\mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة $ax_0+by_0=1$

لدينا: $u_{n+1}=4u_n+1$ تكافئ $u_{n+1}-4u_n=1$

الثنائية $(1;-4)$ تحقق المعادلة: $u_{n+1}-4u_n=1$ معناه العددان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

2-أ)البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها و حدّها الأول v_0

المتتالية (v_n) هندسية أساسها q معناه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=q.v_n$.

لدينا: المتتالية (v_n) معرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\frac{1}{3}$

لدينا: $v_n=u_n+\frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}=4u_n+1+\frac{1}{3}=4u_n+\frac{4}{3}=4(u_n+\frac{1}{3})=4v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=4$ حدّها الاول $v_0=u_0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

ب)التعبير بدلالة n عن المجموع S_n

لدينا: $S_n=v_0+v_1+v_2.....+v_{3n}$.مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

ومنه: $S_n=v_0\left[\frac{q^{3n+1}-1}{q-1}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{(4)^{3n+1}-1}{4-1}\right]=\frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$

3)تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 4^n-1 و $4^{n+1}-1$

لدينا: $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$ ومنه لدينا: $3u_n=4^n-1$ ومنه أيضا: $3u_{n+1}=4^{n+1}-1$

وعليه $PGCD(3u_{n+1};3u_n)=3PGCD(u_{n+1};u_n)$ خاصية

ومنه: $PGCD(4^{n+1}-1;4^n-1)=3.1=3$ لأن $PGCD(u_{n+1};u_n)=1$ حسب 1-ب)

4-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية 4^n على 7.

لدينا: $4^0\equiv1[7]$، $4^1\equiv4[7]$، $4^2\equiv2[7]$، $4^3\equiv1[7]$

بواقي قسمة 4^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$4^n\equiv$	1	4	2

ب)تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n

لدينا: $A_n=9S_n-6n-3^{6n+4}$

A_n يقبل القسمة على 7 معناه $A_n\equiv 0[7]$

$A_n\equiv 0[7]$ معناه $9S_n-6n-3^{6n+4}\equiv 0[7]$

لدينا: $9S_n=\left(4^{3n+1}-1\right)$ ومنه $9S_n=3[7]$ لأنّ: $4^{3n+1}\equiv 4[7]$

ولدينا كذلك: $3^{6n+4}\equiv\left[(-4)^2\right]^{3n+2}[7]$ أي $3^{6n+4}\equiv\left[(4)^{3n+2}\right]^2\equiv 4[7]$

نستنتج أن: $9S_n-6n-3^{6n+4}\equiv 0[7]$ تكافئ $3-6n-4\equiv 0[7]$ أي $6n\equiv 6[7]$

وأخيرا $n\equiv 1[7]$ لان 6 أولي مع 7 إذن: $n=7p+1$ حيث $p\in\mathbb{N}$.

التمرين61: دورة 2016الموضوع (1)

1) حساب u_1 وu_2 واستنتاج الأساس q

لدينا: (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها حيث: $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$

*الجملة $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\ln(u_1).(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases}(u_1).(u_2)=e^{11}\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$

الحدان u_1 و u_2 هما حلا المعادلة : $x^2-Sx+P=0$ حيث: $S=e^4(1+e^3)$ و $P=e^{11}$

حلول المعادلة $x^2-Sx+P=0$ هما: $x=u_1=e^4$ أو $x'=u_2=e^7$.

*لدينا: $u_2=q.u_1$ ومنه : $q=\dfrac{u_2}{u_1}=e^3$

2-أ)التعبير عن u_n بدلالة n

لدينا $u_n=u_1.q^{n-1}$ ومنه: $u_n=e^4(e^3)^{n-1})=e^{3n+1}$

ب)حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+.....+\ln(u_n)$

ومنه: $S_n=\ln(u_0).(u_1)......(u_n)=\ln\left[(u_0)^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]=(n+1)\ln((u_0).q^{\frac{n}{2}})$

تطبيق عددي: لدينا: $u_0=e$ و $q=e^3$ ومنه: $S_n=(n+1)\ln((e).e^{\frac{3n}{2}})=\dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}$

3-أ)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)$

لدينا: $a_n=n+3$ و $2S_n=(n+1)(3n+2)=3n^2+5n+2$

يمكن كتابة $2S_n=(n+3)(3n-4)+14=a_n(3n-4)+14$ ومنه: $2S_n-a_n(3n-4)=14$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)$

ب)تعيين القيّم الممكنة لـ $PGCD(2S_n;a_n)$

من الجواب السابق لدينا: $PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)$

ومنه $PGCD(2S_n;a_n)$ هي قواسم العدد 14 وهي :1 ، 2 ، 7 و 14

ج) تعين قيم العدد الطبيعي بحيث: $PGCD(2S_n;a_n)=7$

$PGCD(2S_n;a_n)=7$ معناه $PGCD(a_n;14)=7$ و معناه $n=14k+4$ مع $n\in\mathbb{N}$

4) دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

$2^0\equiv1[7]$ ، $2^1\equiv2[7]$ ، $2^2\equiv4[7]$ ، $2^3\equiv1[7]$ بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3وحسب الجدول المقابل

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n\equiv$	1	2	4

5)تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون: $\begin{cases}b_n\equiv0[7]\\n\equiv0[5]\end{cases}$

لدينا: $b_n=3n.a_n-2S_n+1437^{2016}+1=3n^2+9-(3n^2+5n+2)+1437^{2016}+1$

ولدينا: $1437^{2016}\equiv2^{2016}[7]\equiv1[7]$ لأن: $1437\equiv2[7]$ و $2016\equiv1[3]$

وعليه: $b_n\equiv-5n+9[7]$ أي $5n-9\equiv0[7]$ وتكافئ $15n\equiv6[7]$ أي $n\equiv6[7]$

ومنه: $\begin{cases}b_n\equiv0[7]\\n\equiv0[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}n\equiv0[7]\\n\equiv0[5]\end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases}5n\equiv0[35]\\7n\equiv0[35]\end{cases}$ بالطرح نجد $2n\equiv0[35]$

أي $n\equiv0[35]$ وأخيرا $n=35k'$ حيث k' عدد طبيعي.

6)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52$ يقبل القسمة على 7

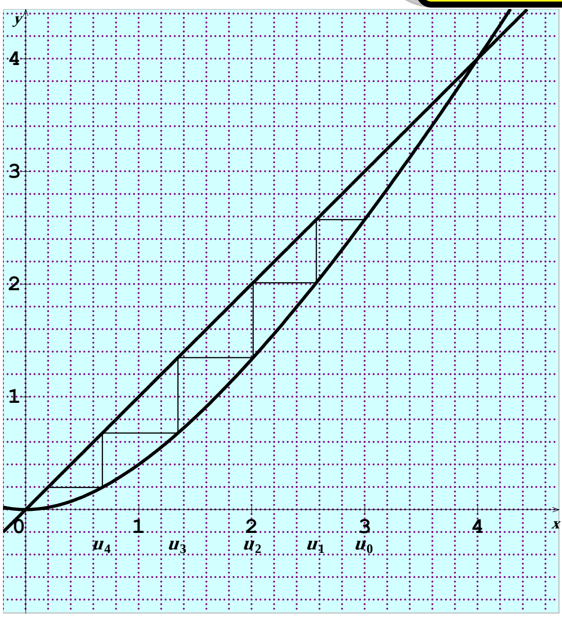
العدد: $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52$ يقبل القسمة على 7 معناه $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52\equiv0[7]$

لدينا: $1437^{9n+1}\equiv(2^{3n})^3.2\equiv2[7]$ و $4^{12n+1}\equiv(4^{3n})^4\times4\equiv4[7]$ و $52\equiv3[7]$

وعليه: $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52\equiv2-3.4+3[7]$ ومنه: $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52\equiv-7[7]$

أي: $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52\equiv0[7]$

التمرين62: دورة 2014الموضوع (1)



1) تبيان ان الدالة f متزايدة تماما.

f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\frac{2x^2}{x+4}$

fمتزايدة تماما معناه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)\succ0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

: $f'(x)=\frac{4x(x+4)-2x^2}{(x+4)^2}=\frac{2x(x+8)}{(x+4)^2}$

$f'(x)\succ0$ لأن $x\in[0;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما .

2-أ)تمثيل الحدود u_0، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على حامل

ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

نخمن ان المتتالية متناقصة تماما ومتقاربة نحو 0

3) أ) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}: 0 \le u_n \le 3$.

- التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون: $0 \le u_0 \le 3$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $0 \le u_n \le 3$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $0 \le u_{n+1} \le 3$

لدينا: $0 \le u_n \le 3$ ومنه $f(0) \le f(u_n) \le f(3)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $0 \le u_{n+1} \le \frac{18}{7}$

وعليه: $0 \le u_{n+1} \le 3$ لأن $\frac{18}{7} \prec 3$ ومنه الخاصية $0 \le u_n \le 3$ صحيحة .

ب) تبيّان أن المتتالية (u_n) متناقصة.

المتتالية (u_n) متناقصةمعناه $u_{n+1} \le u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{u_n + 4} - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط $u_n^2 - 4u_n$ لأن المقام موجب

$u_n^2 - 4u_n = 0$ معناه $u_n = 4$ أو $u_n = 0$ وعليه اشارة $-u_n^2 + 2u_n + 8$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	4	$+\infty$
اشارة الفرق	-	0	+
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما

بمأن $0 \le u_n \le 3$ فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

ج) استنتاج أن (u_n) متقاربة.

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة تماما من الجواب 3-ب) ومحدودة من الأسفل من الجواب 3-أ).

4) أ) دراسة إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$.

*لدينا: $7u_{n+1} - 6u_n = \frac{14u_n^2}{u_n + 4} - 6u_n = \frac{8u_n(u_n - 3)}{u_n + 4} =$

اشارة $7u_{n+1} - 6u_n$ هي حسب اشارة البسط $u_n(u_n - 3)$ لأن المقام موجب

$u_n(u_n - 3) = 0$ معناه $u_n = 3$ أو $u_n = 0$ وعليه اشارة $7u_{n+1} - 6u_n$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	3	$+\infty$
اشارة $7u_{n+1} - 6u_n$	-	0	+

من الجدول نستنتج أن $7u_{n+1} - 6u_n \prec 0$ لأن $0 \le u_n \le 3$.

* ستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$

من الجواب السابق لدينا: $7u_{n+1}-6u_n \succ 0$ وتكافئ $u_{n+1} \prec \frac{6}{7}u_n$ .....(1) ولدينا: $0 \le u_{n+1} \le 3$ ....(2)

من المتباينتين (1) و (2) نستنتج أن : $0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$.

ب) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

- التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون لدينا: $3\left(\frac{6}{7}\right)^0 = 3$ $0 \le u_0 \le$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $0 \le u_{n+1} \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

لدينا: $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ تكافئ $0 \le \frac{6}{7}u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$ وذلك بعد ضرب الطرفين في $\frac{6}{7}$

لكن $0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$ ومنه $0 \le u_{n+1} \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

ومنه الخاصية $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

لدينا: $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ولدينا أيضا: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ حسب مبرهنة الحصر.

التمرين63:دورة 2012الموضوع (2)

المتتالية (u_n) العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 6u_n - 9$

1-أ) احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 على 7 .

لدينا: $u_0 = 16$ و $u_{n+1} = 6u_n - 9$

ومنه: $u_0 = 16 \equiv 2[7]$، $u_1 = 6u_0 - 9 \equiv 3[7]$، $u_2 = 6u_1 - 9 \equiv 2[7]$ و $u_4 = 6u_3 - 9 \equiv 3[7]$

ب) تخمين قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث : $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$

من الجواب السابق نخمن أن $u_{2k} \equiv 2[7]$ و $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

2- أ) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $u_{n+2} \equiv u_n[7]$.

- التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون لدينا: $u_2 \equiv u_0[7]$ محققة لأن $u_2 \equiv 2[7]$ و $u_0 \equiv 2[7]$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $u_{n+2} \equiv u_n[7]$

ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $u_{n+3} \equiv u_{n+1}[7]$

لدينا: $u_{n+1} = 6u_n - 9$ ومنه $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 9 = 6(6u_{n+1} - 9) - 9 = 36u_{n+1} - 63$

لكن $36 \equiv 1[7]$ و $63 \equiv 0[7]$ و منه $u_{n+3} \equiv u_{n+1}[7]$.

ب) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي k، $u_{2k} \equiv 2[7]$.

- التحقق من صحة P(0)

من اجل k=0 يكون لدينا: $u_0 \equiv 2[7]$ محققة

*نفرض أن P(k) صحيحة أي: $u_{2k} \equiv 2[7]$ و ونبرهن أن P(k+1) صحيحة أي: $u_{2k+2} \equiv 2[7]$

من الجواب السابق لدينا: $u_{n+2} \equiv u_n[7]$ من اجل كل عدد طبيعي n

ومنه $u_{2k+2} \equiv u_{2k}[7]$ وذلك بوضع :n=2k

ومن فرضية التراجع لدينا: $u_{2k} \equiv 2[7]$ ومنه $u_{2k+2} \equiv 2[7]$

ومنه الخاصية $u_{2k} \equiv 2[7]$ صحيحة من كل عدد طبيعي k.

استنتاج أن: $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

لدينا: $u_{n+1} = 6u_n - 9$ ومنه $u_{2k+1} = 6u_{2k} - 9$

ومنه $u_{2k+1} \equiv 6(2) - 9[7]$ لأن $u_{2k} \equiv 2[7]$ وعليه $u_{2k+1} \equiv 3[7]$.

3- أ- تبيّان أن المتتالية (v_n) هندسية و تعيين أساسها وحدّها الأول.

لدينا: من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

المتتالية (v_n) هندسية معناه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = q.v_n$

لدينا: $v_n = u_n - \frac{9}{5}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{5} = 6u_n - 9 - \frac{9}{5} = 6u_n - \frac{54}{5} = 6(u_n - \frac{9}{5}) = 6v_n$

ومنه (v_n) هندسية أساسها 6 وحدّها الأول هو $v_0 = u_0 - \frac{9}{5} = 16 - \frac{9}{5} = \frac{71}{5}$

ب- حساب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

حساب بدلالة n عبارة u_n

لدينا: $v_n = u_n - \frac{9}{5}$ ومنه $u_n = v_n + \frac{9}{5} = q^n.v_0 + \frac{9}{5} = \frac{71}{5}.(6)^n + \frac{9}{5}$

حساب بدلالة n عبارة S_n

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 + \frac{9}{5}) + (v_1 + \frac{9}{5}) + ... + (v_n + \frac{9}{5}) = (v_0 + v_1 + ... + v_n) + \frac{9}{5}(n+1)$

ولدينا من أخرى $(v_0 + v_1 + ... + v_n) = v_0\left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right]$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

تطبيق عددي: $S_n == \frac{71}{5}\left[\frac{6^{n+1} - 1}{5 - 1}\right] + \frac{9}{5}(n+1) = 71\left[\frac{6^{n+1} - 1}{25}\right] + \frac{9}{5}(n+1)$

التمرين64:دورة 2011الموضوع (1)

1-تعيينّ الحدين u_3 و u_5 .

(u_n)متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m+d = 42 \end{cases}$ حيث $\begin{cases} m = PPCM(u_3;u_5) \\ d = PGCD(u_3;u_5) \end{cases}$

نعلم أن : $d = PGCD(u_3;u_5)$ معناه $u_3 = d.u'_3$ و $u_5 = d.u'_5$ حيث $PGCD(u'_3;u'_5) = 1$

ونعلم أن: $m.d = u_3.u_5$ ومعناه $m = d.u'_3.u'_5$

وعليه: $m+d = 42$ تكافئ $u'_3.u'_5 + 1 = \dfrac{42}{d}$....(1)

ولدينا: u_3 ، u_4 و u_5 حدود متعاقبة لمتتالية حسابية متزايدة تماما زمعناه $u_5 + u_3 = 2u_4$ خاصية

ومنه : $u_5 + u_3 = 2u_4$ تكافئ $u'_3 + u'_5 = \dfrac{30}{d}$....(2)

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن: d يقسم كلا من 30 و 42 أي $d \in D_6 = \{1;2;3;6\}$

نلاحظ أن الحالة الوحيدة التي تحقق الجملة المتكونة من العلاقتين (1) و(2) هي من أجل: $d = 6$

من أجل $d = 6$ يكون لدينا: $u'_3.u'_5 = 6$ و $u'_3 + u'_5 = 5$ وفي هذه الحالة نجد: $u'_3 = 2$ و $u'_5 = 3$

وعليه يكون لدينا: $u_3 = 12$ و $u_5 = 18$.

استنتج u_0.

(u_n)متتالية حسابية معناه $u_3 = u_0 + 3r$ حيث $u_4 - u_3 = r = 3$ وعليه $u_0 = u_3 - 3r = 3$

2-كتابة u_n بدلالة n .

نعلم انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = u_0 + n.r$ ومنه $u_n = 3 + 3n$

تبيان أن:2010 حد من حدود (u_n)وتعين رتبته.

2010 حد من حدود (u_n) معناه يوجد عدد طبيعي n يحقق: $u_n = 2010$

$u_n = 2010$ يكافئ $2010 = 3n + 3$ ومنه $n = 669$

لدينا: $n = 669$ تعني أن $u_{669} = 2010$ ومنه الحد 2010 رتبته 670.

3-تعيين الحد الذي إبتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080.

نفرض ان الحد هو u_p

مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080معناه $\dfrac{5}{2}(u_p + u_{p+4}) = 10080$

ولدينا: $u_{p+4} = u_p + 4r$ ومنه $\dfrac{5}{2}(u_p + u_{p+4}) = 10080$ تكافئ $\dfrac{5}{2}(2u_p + 4r) = 10080$

ومنه : $u_p = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{5}(10080) - 4r\right]$ وبعد تعويض $r = 3$ نجد $u_p = 2010$

4-أ- احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+...+u_{2n}$

لدينا: $S=u_0+u_1+...+u_{2n}=\frac{2n+1}{2}(u_0+u_{2n})=\frac{2n+1}{2}(6n+6)=3(2n+1)(n+1)$

ب-استنتاج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2

لدينا: $S_1=u_0+u_2+u_4...+u_{2n}=u_0+(u_0+2r)+(u_0+4r)...+(u_0+2nr)$

ومنه S_1 هو مجموع متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها $2r$

وعليه: $S_1=\frac{n+1}{2}(2u_0+2nr)=3(n+1)^2$ و $S_2=u_1+u_3+u_4...+u_{2n-1}=S-S_1=3n(n+1)$

التمرين65:دورة 2009الموضوع (1)

1-أ) دراسة تغيرات الدالة f.

الدالة f على المجال $[1,5]$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{5}{x})$

اتجاه التغير: من أجل كل عدد حقيقي من x من المجال $[1,5]$: $f'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{5}{x^2})=\frac{x^2-5}{2x^2}$

$f'(x)=0$ معناه $x^2-5=0$ ومعناه $x=\sqrt{5}$ أو $x=-\sqrt{5}$ مرفوض

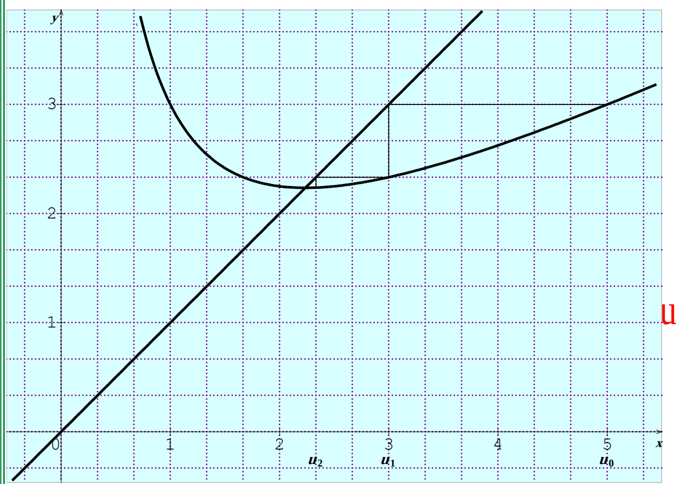
$f'(x)\prec 0$ معناه $x\in[1;\sqrt{5}[$ و $f'(x)\succ 0$ معناه $x\in[\sqrt{5};5[$

جدول التغيرات

x	1		$\sqrt{5}$		5
f'(x)		−	0	+	
f(x)	3	↘	$\sqrt{5}$	↗	3

ب) إنشاء (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

2-أ) حساب u_1 و u_2.



(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{5}{u_n})$ و $u_0=5$

ومنه: $u_1=\frac{1}{2}(u_0+\frac{5}{u_0})=3$ و $u_2=\frac{1}{2}(u_1+\frac{5}{u_1})=\frac{7}{3}$

تمثيل الحدود u_0، u_1 و u_2 وعلى محور الفواصل.

3)أ-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq\sqrt{5}$

- التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون: $u_0\geq\sqrt{5}$ محققة لأن $u_0=5$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n \geq \sqrt{5}$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$

لدينا: $u_n \geq \sqrt{5}$ ومنه $f(u_n) \geq f(\sqrt{5})$ لأن f متزايدة على المجال $[\sqrt{5};5[$

$f(u_n) \geq f(\sqrt{5})$ تكافئ $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$ لأن $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

ومنه الخاصية $u_n \geq \sqrt{5}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب-تبيّان أن (u_n) متناقصة تماما، ولأستنتاج بالنسبة لتقاربها

(u_n) متناقصة تماما معناه $u_{n+1} - u_n \prec 0$ من أجل كل عدد طبيعي n.

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{5}{u_n}) - u_n = \frac{1}{2}(-u_n + \frac{5}{u_n}) = \frac{1}{2}(\frac{-u^2{}_n + 5}{u_n})$

لدينا:الفرق $\frac{1}{2}(\frac{-u^2{}_n + 5}{u_n}) \prec 0$ لأن $u_n \geq \sqrt{5}$ ومنه (u_n) متناقصة تماما.

نستنتج مماسبق أن المتتالية متقاربة لأنها محدودة من الأسفل ومتناقصة.

4)أ-البرهان أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$.

لدينا: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$ تكافئ $(u_{n+1} - \sqrt{5}) - \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5}) \leq 0$

لدينا: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) - \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(u_n + \frac{5}{u_n}) - \frac{1}{2}u_n - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2u_n} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - u_n)}{2u_n}$

وبماأن $u_n \geq \sqrt{5}$ فإن $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - u_n)}{2u_n} \leq 0$ ومنه $(u_{n+1} - \sqrt{5}) - \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5}) \leq 0$

ب-استنتاج أن $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$ وتعيين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

*لدينا من الجواب السابق : مهما يكن $n \in \mathbb{N}$: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$

من أجل n=0 يكون لدينا: $(u_1 - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_0 - \sqrt{5})$

من أجل n=1 يكون لدينا: $(u_2 - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_1 - \sqrt{5})$ومن أجل n=3يكون لدينا: $(u_3 - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_2 - \sqrt{5})$

....

من أجل n-2 يكون لدينا: $(u_{n-1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_{n-2} - \sqrt{5})$

من أجل n-1 يكون لدينا: $(u_n - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - \sqrt{5})$

بعد ضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد: $(u_n-\sqrt{5})\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{5})$

*لدينا: $0\le(u_n-\sqrt{5})\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{5})$ ولدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{5})=0$.

ومنه : : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-\sqrt{5})=0$ حسب مبرهنة الحصر ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{5}$.

التمرين66:دورة 2009الموضوع (2)

1-تعيين α وβ بحيث تكون المتتالية(v_n) متتالية هندسية ، و حساب أساسها وحدّها الأول.

المتتالية(v_n)هندسية معناه $v_{n+1}=q.v_n$ حيث q عدد ثابت

لدينا: $v_n=u_n+\alpha n+\beta$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3u_n+2n+1+\alpha n+\alpha+\beta$

ومنه: $v_{n+1}=3u_n+2n+1+\alpha n+\alpha+\beta...(1)$

من العلاقة $v_n=u_n+\alpha n+\beta$ نجد: $u_n=v_n-\alpha n-\beta$

بعد تعويض قيمة $u_n=v_n-\alpha n-\beta$ في العبارة (1) نجد:

$v_{n+1}=3v_n-3\alpha n-3\beta+2n+1+\alpha n+\alpha+\beta=3v_n+2(1-\alpha)n-2\beta+1$

نلاحظ أنه تكون المتتالية (v_n)هندسية معناه $-2(\alpha-1)-2\beta+\alpha+1=0$

ومنه: $\alpha-1=0$ و $-2\beta+\alpha+1=0$ ومنه $\alpha=1$ و $\beta=1$

حساب أساسها وحدّها الأول.

من أجل $\alpha=1$ و $\beta=1$ يكون لدينا: $v_{n+1}=3.v_n$

ومنه الاساس هو 3 والحد الأول هو: $v_0=u_0+1.0+1=1$

2-حساب كلا من v_n و u_nبدلالة n.

المتتالية (v_n)هندسية معناه $v_n=v_0.q^n=1.(3)^n$

لدينا: $u_n=v_n-n-1=(3)^n-n-1$

3-حساب المجموعين S و'S.

لدينا: $S=v_0+v_1+v_2+...+v_n=v_0\left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right]=1.\left[\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right]=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

لدينا: $S'=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ ولدينا: $u_n=v_n-n-1$

ومنه: $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_n-(0+1+2+....+n)-(n+1)=S\text{-}(n+1)(n+2)$

4-أ- تعيّين حسب قيم العدد الطبيعي n،بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 5.

*$3^0\equiv1[5]$، $3^1\equiv3[5]$، $3^2\equiv4[5]$، $3^3\equiv2[5]$، $3^4\equiv1[5]$

بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتاليةدورية ودورها 4وهي حسب الجدول التالي

n	4k	4k+1	4k+2	4k+3	
$3^n\equiv$	1	3	4	2	

ب-تعين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها u_n مضاعف للعدد5.

u_n مضاعف للعدد5معناه $(3)^n - n - 1 \equiv 0[5]$ وتكافئ $(3)^n - n \equiv 1[5]$

نميز الحالات التالية:

1) $n = 4k$ معناه $-4k \equiv 0[5]$ أي $k \equiv 0[5]$ أي $k = 5p$ وعليه $n = 20p$ حيث p عدد طبيعي

2) $n = 4k+1$ معناه $k \equiv 4[5]$ أي $n = 20p+17$.

3) $n = 4k+2$ معناه $k \equiv 4[5]$ أي $n = 20p+18$.

4) $n = 4k+3$ معناه $k \equiv 2[5]$ أي $n = 20p+11$.

التمرين67:دورة 2008الموضوع (1)

1) أحسب $\lim\limits_{x \succ 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسر النتيجة هندسيا.

f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ كمايلي: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

لدينا: $\lim\limits_{x \succ 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \succ 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x \succ 1} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

نقول ان الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين

التفسير الهندسي:المنحنى (C_f) يقبل مماسا يوازي حامل محور التراتيب معادلته: $x = 1$

- دراسة تغيرات الدالة f.

النهايات: $\lim\limits_{x \succ 1} f(x) = f(1) = 3$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 + \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$

اتجاه التغير: الدالة قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ حيث: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

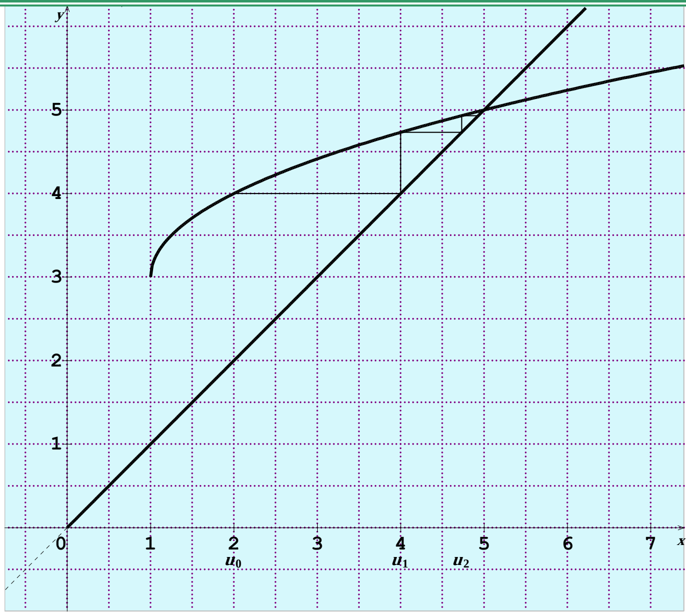
الدالة f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ لأن: $f'(x) \succ 0$

جدول التغيرات:

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	3 $\nearrow$ $+\infty$

- باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي"انشاء (C_f)

رسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$



2-أ)باستعمال(D)و(C_f)تمثيلu_0، u_1 و u_2على محور الفواصل (انظر الشكل أعلاه)

ب) وضع تخمينا حول أتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

من خلال التمثيل السابق نخمن ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة نحو 5

3)أ-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 \le u_n \le 5$

- التحقق من صحة $P(1)$

من اجل $n=1$ يكون لدينا: $2 \le u_1 \le 5$ محققة لأن $u_1 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $2 \le u_n \le 5$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $2 \le u_{n+1} \le 5$

لدينا: $2 \le u_n \le 5$ ومنه $f(2) \le f(u_n) \le f(5)$ لأن f متزايدة على المجال $]1;+\infty[$

$f(2) \le f(u_n) \le f(5)$ تكافئ $4 \le u_{n+1} \le 5$ لأن $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(2) = 4$ و $f(5) = 5$

ولدينا: $4 \le u_{n+1} \le 5$ تكافئ $2 \le u_{n+1} \le 5$ لأن: المجال $[4;5]$ محتوى في المجال $[2;5]$

ومنه الخاصية : $2 \le u_n \le 5$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

ب-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} \succ u_n$

- التحقق من صحة $P(1)$

من اجل $n=1$ يكون لدينا: $u_2 \succ u_1$ محققة لأن $u_1 = 3$ و $u_2 = f(u_1) = 4$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_{n+1} \succ u_n$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+2} \succ u_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} \succ u_n$ ومنه $f(u_{n+1}) \succ f(u_n)$ لأن f متزايدة على المجال $]1;+\infty[$

$f(u_{n+1}) \succ f(u_n)$ تكافئ $u_{n+2} \succ u_{n+1}$ لأن $f(u_n) = u_{n+1}$ و $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$

ومنه الخاصية : $u_{n+1} \succ u_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

ب-استنتاج أن (u_n) متقاربة . وحساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

*لدينا: $u_{n+1} \succ u_n$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: ومعناه (u_n) متتالية متزايدة
$2 \le u_n \le 5$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: معناه (u_n) متتالية محدودة من الأعلى بـ 5
نستنتج مماسبق ان المتتالية متقاربة.

- بما أن المتتالية متقاربة لنفرض أن نهايتها هي α أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

لدينا: $f(u_n) = u_{n+1}$ ومنه $f(\alpha) = \alpha$ ومنه $3+\sqrt{\alpha-1} = \alpha$

$3+\sqrt{\alpha-1} = \alpha$ تكافئ $\sqrt{\alpha-1} = \alpha-3$ وتكافئ $\alpha-1 = (\alpha-3)^2$ حيث $\alpha \ge 3$

ومنه : $\alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$ وحلولها هما : $\alpha = 5$ أو $\alpha = 2$ مرفوض إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$

التمرين68:دورة 2008الموضوع (1)

1) حساب u_1، u_2 و u_3.

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ و $u_0 = 2$

ومنه: $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{7}{3}$ ، $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{16}{9}$ و $u_3 = \frac{2}{3}u_2 + 1 = \frac{81}{27}$

2- البرهان بالتراجع أن (v_n) ثابتة،استنتج عبارة u_n بدلالة n و حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا: (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

نعلم ان : (v_n) ثابتة معناه $v_{n+1} = v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

- التحقق من صحة $P(0)$

من اجل n=0 يكون $v_1 = v_0$ لأن: $v_1 = u_1 + \left(\frac{2}{3}\right) = v_0 = u_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $v_{n+1} = v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $v_{n+2} = v_{n+1}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $v_{n+2} = u_{n+2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ و $v_{n+1} = u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

ومنه : $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{2}{3}\left[u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - \frac{2}{3}\left[u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \frac{2}{3}(v_{n+1} - v_n) = 0$ لأن: $v_{n+1} = v_n$

لدينا: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $u_n = v_n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = v_0 = 3$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0 = 3$ لان المتتالية (v_n) ثابتة و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

3-حساب المجموع: $S = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$.

لدينا: (w_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ومنه: $S = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n = \frac{2}{3}(0+1+2+.......+n) - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

نعلم أن: $(0+1+2+.......+n) = \frac{n(n+1)}{2}$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالي حسابية

$\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{2}{3}\right) - 1}\right] = -3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

ومنه: $S = \frac{1}{3}\left[n^2 + n + 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 3\right]$