



”

الدوال العددية

From A to Z

موجهة للشعب: □

رياضيات

تقني رياضي

علوم تجريبية

الاستاذ شعبان أسامة



S'abonner · عقبة بن نافع

شعار العمل لجموع التلاميذ الشرفاء !!
،، تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط ،،

10 h J'aime Répondre 116

حساباتي عبر منصات التواصل الاجتماعي:



5min maths

الدمعة

اليك أيها الطالب " مجلة min Maths 5 " للدوال العددية / شعب علمية / بكالوريا 2022



وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للموسم الدراسي الحالي، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد وربما يكون حلك أحسن وأقصر لكن النتائج والأهداف واحدة .

في الأخير نرجوا من الله التقدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك ويهديك الى سبيل الخير



الأستاذ شعبان أسامة

”

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلي الكريمة أولا

وثانيا لجميع محبي المادة

تمه هذه المجلة: دعوة خالصة من القلب

مجلة الرياضيات الإلكترونية للطور
الثانوي بمختلف مستوياته الثلاثة، تم
إصدار أول نسخة بتاريخ: 2019/09/13



تجدون في هذا العهل

الاستعداد للباكوريا

1. ملخص الدرس + تطبيقات

2. الاستمرارية و النهايات

3. اختبار معلوماتك

4. حلول تمارين من الكتاب المدرسي.

5. تمارين محلولة

6. تمارين الباكوريا 2008-2021 محلولة

تقويم المحور 





كيفية الاستعداد للبيكالوريا.....

” ما يجب فعله في الفصل الأول:

- يجب الانطلاق في الجهد والعمل منذ اليوم الأول من الدراسة ,
- لا يجب اهمال مادة عن أخرى حتى ولو كان معاملها صغير ,
- فيما يخص مواد الحفظ (تاريخ، جغرافيا وشريعة اسلامية) بمجرد القيام بدرس في الثانوية يجب أن يحفظ قبل أن يأتي درس اخر (لا يجب أن تتراكم الدروس).
- مراجعة الدروس (رياضيات، فزياء والعلوم أو التكنولوجيا بنسبة للتقني رياضي) عشية القيام به والاكتفاء بحل تمارين الكتب المدرسية وسلاسل تمارين خارجية،
- الفلسفة والتي تعتبر النقطة السوداء لتلاميذ والحل الوحيد هو قراءة الدرس جيدا و حفظ الأقوال الفلسفية فقط ثم كتابة مقالات فلسفية متعلقة بالموضوع وبأسلوبك الخاص (احتفظ بمقالاتك للمراجعة النهائية) ويمكن الاعتماد على مقالات نموذجية وأنصح بتقديم المسودة الى أستاذك لتصحيحها.

” امتحان الفصل الأول:

حضر له كأنه بكالوريا لاتستهزئ به أكيد انه لن يحتسب ولكنه مقياس لمدى استوعابك دروس الفصل الأول كما أن نتيجته لا تعني مستواك الحقيقي،

- خصص يوم واحد للراحة التامة دون دراسة

” ما يجب فعله في عطلة الشتاء:

- مواد الحفظ راجعها جيدا وأبدأ بحفظ الشخصيات والمصطلحات التاريخية،
- العلوم او التكنولوجيا بنسبة للتقني رياضي، الفزياء والرياضيات قم بكتابة ملخصات منظمة فيها كل اساسيات والقوانين،
- أحضر مواضيع الثانويات المجاورة أو الأعوام الماضية (فصل 1) وقم بحلها بتفصيل ولا تتجاهل الأسئلة البسيطة.
- الفلسفة راجع الدرس ومقالاتك الخاصة،
- خصص 3 أو 4 أيام للراحة دون أن تلمس ولا كراس ولا كتاب،

” ما يجب فعله في عطلة الربيع:

نفس الشيء بنسبة للفصل الأول وعطلة الربيع دون أن تنسى قراءة ملخصاتك للفصل الأول وحل مواضيع تشمل الفصلين (80 بالمئة من مواضيع البكالوريا تشمل الفصلين الأول والثاني). وقبل الامتحان التجريبي عليك بالتحضير له فهو يعد ذاته تحضيرا للبيكالوريا ويجب أن تجتازه بكل جدية (ويبقى مجرد امتحان تحضيرى للبيكالوريا في الأخير لكن له دور مهم في نفسية المترشح).

” المراجعة الشاملة والنهائية للبيكالوريا:

- مواد الحفظ (تاريخ وجغرافيا وشريعة) :مراجعة كاملة لدروس السنة مع اكمال ماتبقى من الشخصيات والمصطلحات.
- الفلسفة: مراجعة المقالات التي كتبها بأسلوبك الخاص (الفلسفة ليست مادة حفظ) ومراجعة الدروس،
- المواد العلمية: مراجعة القوانين والأساسيات التي تجدها في الملخصات التي أنجزتها خلال السنة الدراسية.
- قم بجمع البكالوريات التجريبية للثانويات الأخرى والبيكالوريات الرسمية السابقة وقم بحلها ثم قارن جوابك بالأجوبة النموذجية وفي هذه المرحلة (مرحلة حل المواضيع) أنصح بالدراسة في مجموعة لاتتجاوز 4 أفراد (العمل الجماعي ن أحببت ذلك).
- توقف عن الدراسة لمدة 3 أيام قبل البكالوريا وذلك لاكتساب طاقة تخصصها في أسبوع الأمتحان الرسمي.



1. ملخص الدرس

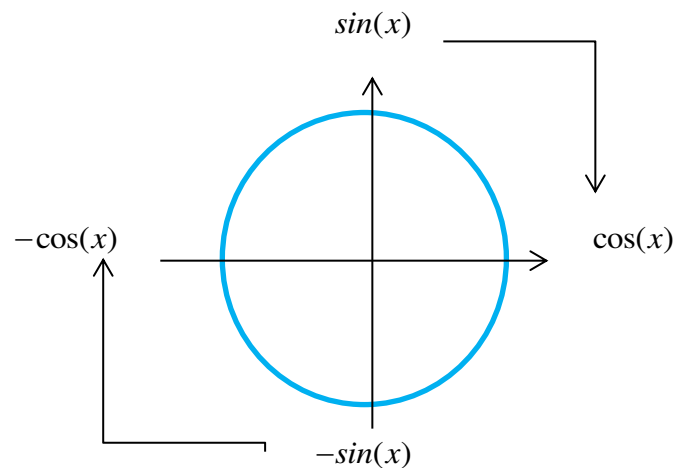
0. الجدول التالي يلخص الدوال المشتقة للدوال المألوفة :

الدالة f حيث	معرفة على	قابلة للاشتقاق على	ودالتها المشتقة f' معرفة كمايلي:
$f(x) = k$ حيث: $k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$ حيث: a, b عدنان حقيقيان	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ حيث: $n \in \mathbb{N}$ و $n > 1$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ حيث: $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \right\}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \right\}$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

تحرك حسب السهم (مع عقارب الساعة) يعني:

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(-\cos(x))' = \sin(x)$$



الجدول التالي يلخص العمليات على الدوال المشتقة : g, f دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I من \mathbb{R} ، k عدد حقيقي .

مثال تطبيقي	ودالتها المشتقة هي	قابلة للاشتقاق على	الدالة
ليكن $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = x^2$ $f'(x) + g'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f' + g'$	I	$f + g$
ليكن $f'(x) = 12x^3$ ، $f(x) = 3x^4$	$-f'$	I	$-f$
ليكن $g(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = 3x^2$ $f'(x) - g'(x) = 6x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 6x + \frac{1}{x^2}$	$f' - g'$	I	$f - g$
ليكن $f(x) = 3(2x^2 + 1)$ ، $f'(x) = 3(4x) = 12x$	kf'	I	kf
ليكن $f(x) = (2x^2 + 5)^2$ $f'(x) = 2(2x^2 + 5)(4x)$	$2f \times f'$	I	f^2
$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ ، $f(x) = \frac{1}{x+2}$	$\frac{-f'}{f^2}$	I باستثناء قيم x حيث : $f(x) = 0$	$\frac{1}{f}$
ليكن $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = x^2$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(2x)(\sqrt{x}) - (x^2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2}$ $= \frac{3x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$	I باستثناء قيم x حيث : $g(x) = 0$	$\frac{f}{g}$
ليكن $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 1$ ، $f'(x) = 6x^2 - 2x - 5$	$f'(x) = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$	\mathbb{R}	$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$
$f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$ $f'(x) = \frac{3(-1) - (2)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2}$	$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$	$]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}; +\infty[$	حيث : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $c \neq 0$
$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ $f'(x) = \frac{2(2x)}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f(x) > 0$	\sqrt{f}
$f(x) = (-3x+1)^5$ $f'(x) = 5(-3)(-3x+1)^4 = -15(-3x+1)^4$	$(n \in \mathbb{N}^*) \quad n.f'.f^{n-1}$	I	$(n \in \mathbb{N}^*) \quad f^n$
$f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$ $f'(x) = \frac{-3}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$	$f'.e^f$	I	e^f
$f'(x) = \frac{4x}{2x^2-1}$ ومنه $f(x) = \ln(2x^2-1)$	$\frac{u'(x)}{u(x)} : u(x) > 0$	$u(x) > 0$	$\ln[u(x)]$

$$h(x) = -2\cos(\sqrt{x})$$

$$h'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{x}} [-\sin(\sqrt{x})] = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$g'(x) \times f'[g(x)]$$

I

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

1 تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I من \mathbb{R} وليكن (C) منحنيا البياني في معلم $(O; I, J)$. نقول عن f أنها مستمرة على I إذا استطعنا رسم منحنيا (C) بدون رفع القلم وفق خط مستمر.

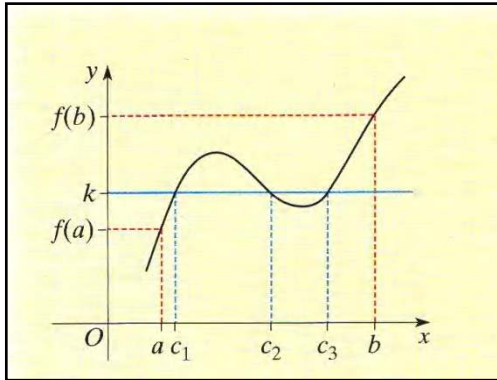
- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على \mathbb{R} .
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

2 مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$.

بصيغة أخرى: إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b .

ملاحظة مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x) = k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإنباع خوارزميات مختلفة.



التفسير البياني

f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$ وليكن (C)

منحنيا البياني في معلم $(O; I, J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b . بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1, c_2 و c_3 .

3 نهايات الدوال الهرجعية

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty & * \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty & * \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty & * \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty & * \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty & * \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty & * \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty & * \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty & * \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty & * \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 & * \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 & * \end{aligned}$$

4 العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$.

• **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

• نهاية جداء دالتين:ير

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

• نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة | تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين" (ح ع ت)

يوجد أربع حالات عدم التعيين: $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، $0 \times (\pm\infty)$ و $\pm\infty \mp \infty$

قاعدة |
 • النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.
 • النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

5 المستقيمات المقاربة

a و b عدنان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(O; I, J)$.

التمثيل البياني	المستقيم المقارب	النهاية
	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = a$ والموازي لمحور الترتيب مستقيم مقارب للمنحني (C)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
	المستقيم (D) ذو المعادلة $y = b$ والموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$
	المستقيم (d) ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



ملاحظة إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f .

6 الوضع النسبي لهنحن والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y = ax + b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x) - (ax + b)]$.

إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.

إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.

7 الدالة مركب

الدالة مركب دالتين

تعريف: v دالة معرفة على مجال J و u دالة معرفة على مجال I بحيث من أجل كل x من I ، $u(x) \in J$.

الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $v \circ u$ والمعرفة على I

ب: $(v \circ u)(x) = v[u(x)]$. ونقرأ v دائرة u لـ x .

نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على \mathbb{R} كما يلي: $u(x) = 2x^2 - 3$ و $v(x) = -3x + 1$

* الدالة $v \circ u$ معرفة على \mathbb{R} و لدينا: $v \circ u(x) = v[u(x)] = v(2x^2 - 3) = -6x^2 + 10$

* الدالة $u \circ v$ معرفة على \mathbb{R} و لدينا: $u \circ v(x) = u[v(x)] = u(-3x + 1) = 18x^2 - 12x - 1$

مثال:

نهاية دالة مركب دالتين

a, b, c وتمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u, v, f دوال حيث $f = v \circ u$.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ وإذا كانت $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}$ و نريد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

🔔 f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ و $v(x) = \sqrt{x}$ ($f = v \circ u$)

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} v(x) = \sqrt{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$

8 النهايات بالمقارنة

f, g, h دوال و l عدد حقيقي.

* إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فإن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

* إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \geq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

* إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \leq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة نمدد هذه الخواص إلى حالتها النهائية عند $-\infty$ و عند عدد حقيقي.

9 العدد المشتق

f دالة معرفة على مجال I من \mathbb{R} و a و $a+h$ عدنان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.
القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه لما يؤول h إلى 0 النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تؤول إلى عدد حقيقي نرمز له بالرمز $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a .

ملاحظة | إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و نسمى الدالة $f':x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

التفسير البياني

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته:
 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة a هي: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

التفسير الاقتصادي

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية. تعطى الكلفة الهامشية بالعلاقة:
 $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ حيث C هي الدالة " الكلفة الإجمالية " نلاحظ أن $C'(q)$ هو تقريب جيد لـ $C_m(q)$ في الاقتصاد نضع $C_m(q) = C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C .

10 مشتقة الدالة مركب

إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من \mathbb{R} و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا:
 $(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$

1 1 المشتقة و اتجاه التغيرات

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من \mathbb{R} .

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$ ، ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي

تندعم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I .

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) < 0$ ، ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي

تندعم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I .

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) = 0$ ، فإن الدالة f ثابتة على I .

1 2 القيم الحدية المحلية

f دالة معرفة على مجال I من \mathbb{R} و x_0 عدد حقيقي من I .

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \leq f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \geq f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

1 3 نقطة انعطاف

يمكن تعيين نقطة الانعطاف من خلال احدي الطرق التالية:

1. المماس (T) يخرق المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 . (بيانيا)

2. الدالة المشتقة f' تندعم عند x_0 و لا تغير من اشارتها. (حسابيا)

3. المشتقة الثانية f'' تندعم عند x_0 و تغير من اشارتها. (حسابيا)

4 1 مركز تناظر

لاثبات أن النقطة $\omega(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x) + f(a+x) = 2b$.

المقاربة 2:

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

المقاربة 3: تغيير المعلم $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i}; \vec{j})$ واثبات أن الدالة المحصل عليها دالة فردية

* **تطبيق** بين أن النقطة $\Omega(2,3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ للدالة f المعرفة على

$$f(x) = \frac{3x}{x-2} \text{ في }]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

حل: من أجل كل x و $4-x$ من D_f نتحقق من صحة المساواة: $f(4-x) + f(x) = 6$

$$f(4-x) + f(x) = \frac{3(4-x)}{4-x-2} + \frac{3x}{x-2}$$

$$= \frac{12-3x}{2-x} + \frac{3x}{x-2}$$

$$\text{و عليه} = \frac{3x-12+3x}{x-2} \quad \text{أذن النقطة } \Omega(2,3) \text{ مركز تناظر للمنحنى } (C_f)$$

$$= \frac{6x-12}{x-2}$$

$$= 6 \left(\frac{x-2}{x-2} \right) = 6$$

5 1 محاور تناظر

لاثبات أن المستقيم $x = a$: محور تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x) = f(a+x)$.

المقاربة 2:

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x) = f(x)$.

المقاربة 3:

تغيير المعلم $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i}; \vec{j})$ واثبات أن الدالة المحصل عليها دالة زوجية

* **تطبيق** بين أن المستقيم $x = 2$ محور تناظر للمنحنى (C_f) الممثل في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ للدالة f المعرفة

$$\text{على } \mathbb{R} \text{ في } f(x) = (x-2)^2 + 1$$

حل: من أجل كل x و $4-x$ من D_f نتحقق من صحة المساواة: $f(4-x) = f(x)$

$$f(4-x) = (4-x-2)^2 + 1$$

$$= (2-x)^2 + 1 \quad \text{لدينا}$$

$$= (x-2)^2 + 1$$

$$= f(x)$$

منه $f(4-x) = f(x)$ إذن المستقيم $x = 2$ محور تناظر للمنحنى (C_f) .

6 1 المناقشة البيانية

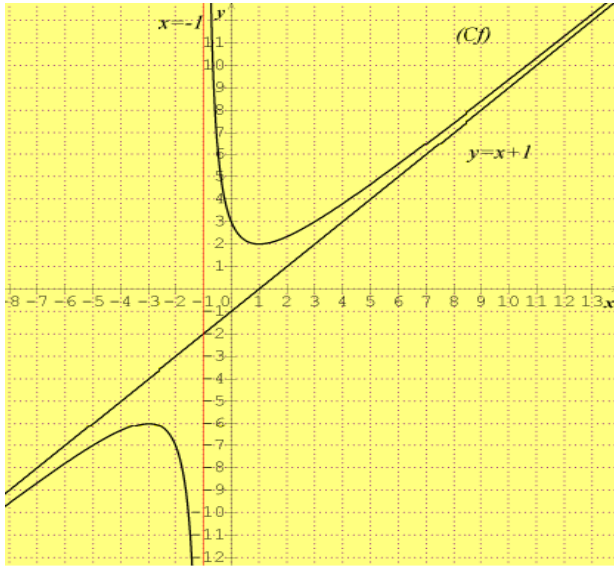
أنواع المناقشة البيانية : أفقية ، مائلة ودورانية .

ليكن m عدد حقيقي. f دالة معرفة على I و (C) تمثيلها البياني في معام متعامد ومتجانس.

1 المناقشة البيانية الأفقية: لها أشكال مختلفة منها: $f(x) = m$ ، $f(x) = -m$ ، $f(x) = m+1$ ، $f(x) = m-1$ ، $f(x) = m^2$ ،

$$f(x) = f(m) , f(x) = -|m| , f(x) = |m|$$

مثال: لتكن الدالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ و (C_f) تمثيلها موضح في الشكل المقابل:



حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة: $y = m$ وعليه:

- للمعادلة حلين مختلفين من أجل: $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$.

- للمعادلة حل مضاعف من أجل: $m = 2$ أو $m = -6$.

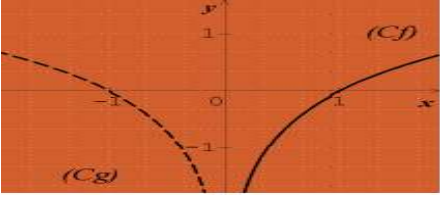
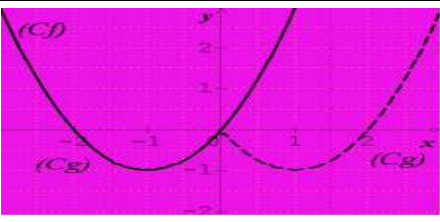
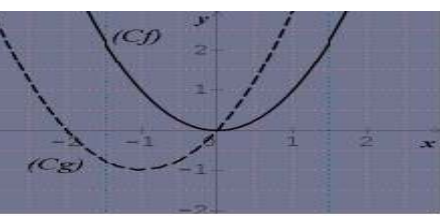
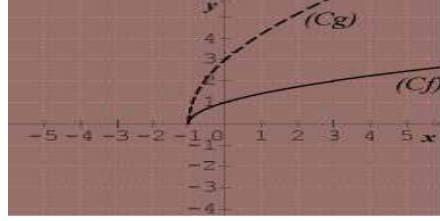
- ليس للمعادلة حلول من اجل: $m \in]-6; 2[$.

6 1 استنتاج تمثيل بياني انطلاقا من تمثيل بياني آخر

f و g دالتان معرفتان على I و (C_f) و (C_g) تمثيلهما البياني على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$.

$$k \in \mathbb{R}^* , a, b \in \mathbb{R}$$

التمثيل البياني	مثال تطبيقي	التفسير الهندسي	الحالات الممكنة
	$f(x) = x^2$ $g(x) = -x^2$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .	$g(x) = -f(x)$
	$f(x) = e^x$ $g(x) = e^{-x}$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.	$g(x) = f(-x)$
	$f(x) = x^3$ $g(x) = -(-x)^3$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة الى مبدأ المعلم O	$g(x) = -f(-x)$
	$f(x) = x^3$ $g(x) = x^3 $	(C_g) ينطبق على لما يقع فوق محور الفواصل . (C_g) هو نظير بالنسبة لمحور الفواصل لما يقع تحت محور الفواصل.	$g(x) = f(x) $

	$f(x) = \ln(x)$ $g(x) = \ln(x)$	<p>دالة زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما x موجب</p>	$g(x) = f(x)$
	$f(x) = (x+1)^2 - 1$ $g(x) = (- x +1)^2 - 1$	<p>دالة زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما سالب.</p>	$g(x) = f(- x)$
	$f(x) = x^2$ $g(x) = (x+1)^2 - 1$ $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	<p>(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه \vec{u} حيث: أي: $\vec{u} = -a\vec{i} + b\vec{j}$</p>	$g(x) = f(x+a) + b$
	$f(x) = \sqrt{x+1}$ $g(x) = 3\sqrt{x+1} - 1$	<p>لتكن $M(x, y) \in (C_f)$ تكافئ: $M'(kx, ky) \in (C_g)$</p>	$g(x) = k.f(x)$

حيث a و b عددان حقيقيان.

أوجد العلاقة بين a و b حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 2$.

2

1. f دالة عددية معرفة على $[-1; +\infty[$ ب:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}; x \neq 2 \\ f(2) = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة f عند $x_0 = 2$.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 0$.

3. m عدد حقيقي. f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} ب:

$$\begin{cases} f(x) = -x; x < 0 \\ f(x) = x^2; 0 < x < 1 \\ f(x) = mx - 1; x > 1 \end{cases}$$

أنضع: $m = 1$.

أرسم (C_f) ، هل الدالة f مستمرة على \mathbb{R} .

ب- عين قيمة m حتى تكون f مستمرة على \mathbb{R} .

4. m عدد حقيقي. f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} ب:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + mx; x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x-2}; x \geq 2 \end{cases}$$

أ- من أجل أي قيمة ل m تكون f مستمرة عند $x_0 = 2$.

ب- من أجل القيمة المحصلة ل، أرسم (C_f) .

3

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$$

أ- أثبت أنه من أجل كل $x > 0$ ، $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$ ثم استنتج نهاية f عند

$+\infty$.

2.

النهايات

+

الاستمرارية و الاشتقاقية

1 النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 + 2x + 7}{2x^3 + x^2 + x - 1} \quad \text{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 + 2x + 7 \quad \text{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \quad \text{4} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \quad \text{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x + 7} - 3x \quad \text{6} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 - x + 2}{x^3 - x^2 + 2x - 2} \quad \text{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{8} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \quad \text{7}$$

2 الاستمرارية و الاشتقاقية

1

1. f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $x \neq 2$:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \\ f(2) = m \end{cases}$$

عين قيمة m حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 2$.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 + b - a}{x} \\ f(x) = x^2 + 2x - a \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

و بالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = 1$$

اذن

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 - x + 2}{x^3 - x^2 + 2x - 2} \quad \text{⑤}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + 2x - 2) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (-x^3 - x + 2) = 0$$

لدينا:

$$\frac{0}{0}$$

تظهر لنا حالة عدم التعيين من الشكل:

1 هو حل لكثير الحدود كلا من البسط والمقام و بالتالي نقوم بتحليل البسط والمقام باخراج $(x-1)$ كعامل مشترك .

لدينا: $-x^3 - x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$. باستعمال المطابقة

$$\begin{cases} a = -1 \\ -a + b = 0 \\ -b + c = -1 \\ -c = 2 \end{cases} \quad \text{نجد: وهذا يعني أن: } a = -1, b = -1, c = -2$$

$$-x^3 - x + 2 = (x-1)(-x^2 - x - 2)$$

اذن

$$x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2 + 1)$$

بنفس الطريقة نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 - x + 2}{x^3 - x^2 + 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x^2 - x - 2)}{(x-1)(x^2 + 1)}$$

و بالتالي:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x - 2}{x^2 + 1} = \frac{-4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 - x + 2}{x^3 - x^2 + 2x - 2} = \frac{-4}{3}$$

اذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x + 7} - 3x \quad \text{⑥}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 + 2x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 = +\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x + 7} = +\infty$$

باستعمال نهاية تركيب دالة نجد:

ب- أثبت أنه من أجل كل $x < 0$ ، $f(x) \leq x + \frac{1}{x}$ ، ثم استنتج نهاية f عند $-\infty$.

$$f(x) = \frac{3x^2 - \cos x}{x^2 + 1}$$

2. f دالة معرفة على \mathbb{R} كمايلي:

$$\frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

أثبت أنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا:

ب- استنتج نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

حلول مقترحة

① النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 + 2x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 + 2x + 7}{2x^3 + x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 + 2x + 7}{2x^3 + x^2 + x - 1} = 0$$

أي:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \quad \text{③}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2}$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = +\infty$$

و بالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \quad \text{④}$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ تظهر لنا حالة عدم

$$\frac{+\infty}{+\infty}$$

التعيين من الشكل:

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \quad \text{و} \quad x > 0 \quad \text{فان} \quad x \rightarrow +\infty$$

بما أن:

حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$ وبالتالي تظهر لنا حالة عدم التعيين من

الشكل: $+\infty - \infty$.

باستعمال عبارة المرافق نجد أن:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 2x + 7} - 3x &= \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x + 7} - 3x)(\sqrt{4x^2 + 2x + 7} + 3x)}{\sqrt{4x^2 + 2x + 7} + 3x} \\ &= \frac{-5x^2 + 2x + 7}{\sqrt{4x^2 + 2x + 7} + 3x} \end{aligned}$$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 + 2x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x + 7} = +\infty$

تظهر لنا حالة عدم التعيين من جديد ولكن من الشكل: $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x; & x > 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases} \text{ تذكير:}$$

وبالتالي: بما أن $x \rightarrow +\infty$ فإن $x > 0$ ومنه: $\sqrt{x^2} = |x| = x$

$$\frac{-5x^2 + 2x + 7}{\sqrt{4x^2 + 2x + 7} + 3x} = \frac{-5x^2 \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{7}{-5x^2}\right)}{2x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2x} + \frac{7}{4x^2} + \frac{3}{2}}\right)}$$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{7}{-5x^2}\right) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2x} + \frac{7}{4x^2} + \frac{3}{2}}\right) = 5$$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 2x + 7}{\sqrt{4x^2 + 2x + 7} + 3x} = -\infty$

اذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x + 7} - 3x = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \quad \text{7}$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. حالة عدم التعيين من

الشكل $\frac{0}{0}$.

باستعمال العدد المشتق نقوم برفع "ح ع ت" نضع: $f(x) = \cos x$

بما أن $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{ اذن}$$

حيث: $f'(0) = -\sin(0) = 0$

وبالتالي: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{8}$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

باستعمال العدد المشتق نقوم برفع "ح ع ت" نضع: $f(x) = \sin x$

بما أن $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ ومنه:}$$

و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \cos(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ اذن}$$

2 الاستمرارية والاشتقاقية

1

1. تعيين قيمة m :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}, & x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

f مستمرة عند $x_0 = 2$ يعني: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ومنه:

$$m = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ نحسب}$$

استمرارية الدالة f عند $x_0 = 2$ معناها: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

f معرفة عند $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$$

بالتعويض المباشر نجد "ح ع ت" من الشكل $\frac{0}{0}$.

لرفع "ح ع ت" نقوم بضرب وقسمة في مرافق بسط وبسط عبارة $f(x)$.

أي:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x+3}-3) \times (\sqrt{3x+3}+3)}{(2-x) \times (\sqrt{3x+3}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-6)}{(-1)(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(-1)(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(-\sqrt{3x+3}-3)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{1}{2} \text{ وبالتالي}$$

اذن الدالة f مستمرة عند $x_0 = 2$.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases} \text{ 2. } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ ب:}$$

تعين قيمة α :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0): \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha \text{ أي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \text{ لدينا:}$$

بالتعويض المباشر نجد "ح ع ت" من الشكل $\frac{0}{0}$.

لرفع "ح ع ت" نقوم بضرب وقسمة في مرافق بسط وبسط عبارة $f(x)$.

تذكير: a و b عدنان حقيقيان، مرافق العدد $a+b$ هو $a-b$

مثال: مرافق العدد $\sqrt{2}-1$ هو $\sqrt{2}+1$

أي:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-\sqrt{x+2}) \times (x+\sqrt{x+2}) \times (\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3) \times (x+\sqrt{x+2}) \times (\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \frac{18}{16} \end{aligned}$$

و بالتالي: $m = \frac{9}{8}$.

2. العلاقة بين a و b :

حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 2$ يجب أن نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x - a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + b - a}{x} \text{ أي:}$$

$$\frac{8+b-a}{2} = 4+4-a \text{ نجد:}$$

وهذا يعني: $8+b-a=16-2a$ اذن: $a+b=8$.

2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}; x \neq 2 \\ f(2) = \frac{-1}{2} \end{cases} \text{ 1. } f \text{ معرفة على } [-1; +\infty[\text{ ب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} mx - 1 = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \text{ وبالتالي}$$

$$.m = 2 \text{ و منه } m - 1 = 1$$

اذن من أجل x من $[1; +\infty[$ لدينا: $f(x) = 2x - 1$

$$.4 \text{ } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ ب: } \begin{cases} f(x) = x^2 + mx; x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x-2}; x \geq 2 \end{cases}$$

أ- تعيين قيمة m :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ يعني } x_0 = 2 \text{ مستمرة عند}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + mx$$

$$\text{اذن } 0 = 4 + 2m \text{ و منه } m = -2$$

من أجل x من $[2; +\infty[$ لدينا: $f(x) = x^2 - 2x$

$$f(x) = x^2 - 2x^*$$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 2[$ حيث: $f'(x) = 2x - 2$

x	$-\infty$	1	2
$f'(x)$	--	0	+

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2x = 0$$

$$f(x) = \sqrt{x-2}; x \geq 2^*$$

$$f \text{ قابلة للاشتقاق حيث: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$$

f غير قابلة للاشتقاق عند 2.

$$.f(2) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

ومن جدول التغيرات الدالة f هو كالاتي:

x	$+\infty$	2	1	$-\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		0	$+\infty$

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1+x^2})}{x} \times \frac{(1 + \sqrt{1+x^2})}{(1 + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x^2)}{x(1 + \sqrt{1+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(1 + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1 + \sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

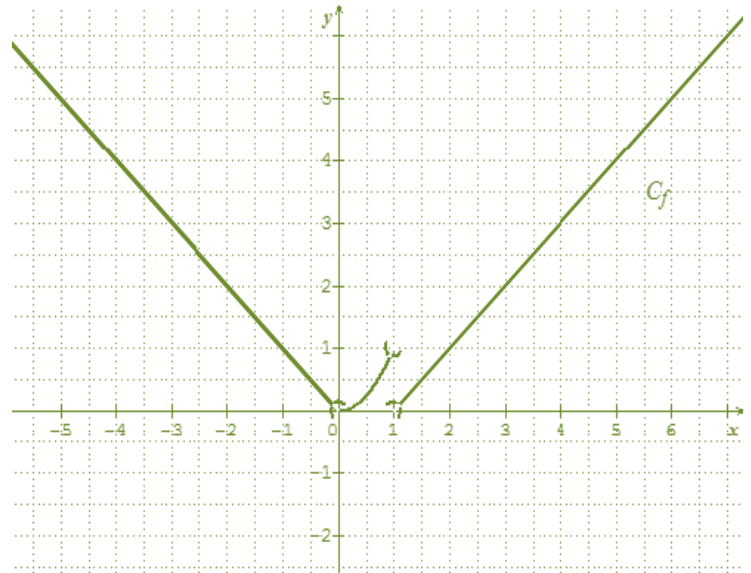
وبالتالي نجد: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

اذن: $\alpha = 0$

3. أ-نضع: $m = 1$ يعني:

$$\begin{cases} f(x) = -x; x < 0 \\ f(x) = x^2; 0 < x < 1 \\ f(x) = x - 1; x > 1 \end{cases}$$

رسم (C_f) : بأخذ قيم مساعدة في مجال تعريف الدالة.



f ليست مستمرة على \mathbb{R} لأنها ليست مستمرة عند $x_0 = 1$.

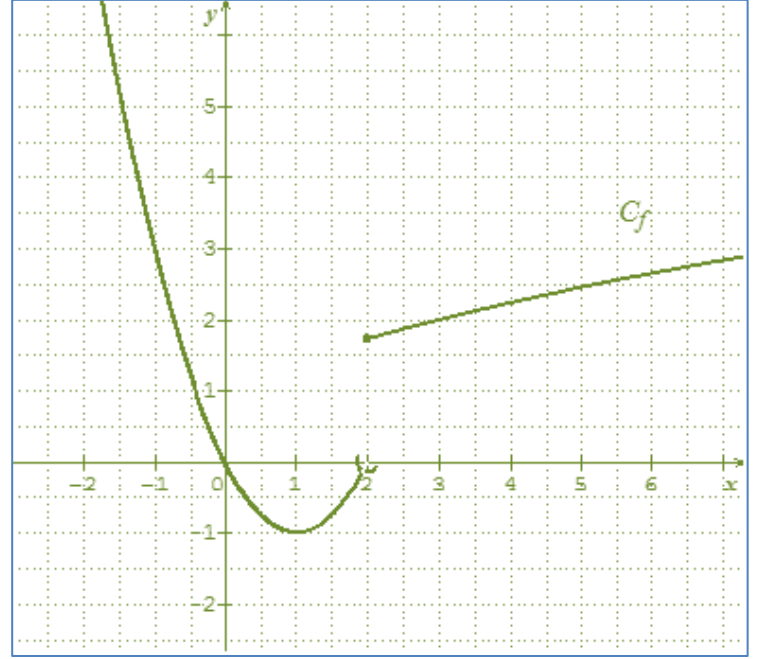
ب- تعيين قيمة m :

تكون f مستمرة على \mathbb{R} اذا كانت مستمرة عند $x_0 = 1$

$$\text{أي: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

ب-من أجل: $m = -2$.

رسم (C_f)



لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x} = +\infty$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ب-بنفس الطريقة نجد من أجل كل $x < 0$, $f(x) \leq x + \frac{1}{x}$.

نهاية f عند $-\infty$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. f دالة معرفة على \mathbb{R} كمايلي: $f(x) = \frac{3x^2 - \cos x}{x^2 + 1}$.

أ-

تذكير: من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

لدينا: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

أي: $-1 \leq -\cos x \leq 1$.

بإضافة $3x^2$ لكل أطراف المتباينة نجد:

$$3x^2 - 1 \leq 3x^2 - \cos x \leq 3x^2 + 1$$

تذكير: a, b عدنان حقيقيان غير معدومين و من نفس الاشارة

لدينا: $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

$$\text{ومنه: } \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq \frac{3x^2 - \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\text{أي: } \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

ب- نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\text{لدينا: } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\text{و } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

و بالتالي: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

3

1. f معرفة على \mathbb{R}^* كمايلي: $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$.

من أجل كل $x > 0$, $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$.

تذكير: من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا: $-1 \leq \sin x \leq 1$.

لدينا: $-1 \leq \sin x \leq 1$.

و بالتالي من أجل كل $x > 0$: $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

بإضافة x لكل أطراف المتباينة نجد:

$$-\frac{1}{x} + x \leq \frac{\sin x}{x} + x \leq \frac{1}{x} + x$$

$$\text{ومنه: } x - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x + \frac{1}{x}$$

اذن: $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$.

نهاية f عند $+\infty$.

3. اختبر معلوماتك !!

<p>دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = x + \frac{4}{x+1}$</p> <p>1.أ- احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$. ماذا تستنتج؟</p> <p>ب- أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.</p>	1
<p>دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$</p> <p>أ- أثبت أن الدالة g زوجية.</p>	2
<p>دالة معرفة على: $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$، الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = f(x)$.</p> <p>بين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقاً من (C_f). ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.</p> <p>ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x) = m^2$.</p>	3
<p>دالة للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$: $x \neq 2$</p> <p>$f(2) = m$</p> <p>عين قيمة m حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 2$.</p>	4
<p>دالة المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$: $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$</p> <p>$f(0) = 0$</p> <p>1. بين أن f مستمرة عند القيمة 0.</p> <p>2. بين أن f تقبل الاشتقاق عند القيمة 0.</p>	5
<p>احسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$</p>	6

1. دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} \quad \text{أ- حساب}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 5h}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h-5}{h+1} = -5$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -5 \quad \text{ومنه:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} \quad \text{ولدينا:}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h-3}{h+1} = -3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -3 \quad \text{ومنه:}$$

نستنتج أن: k الدالة دالة غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأن العدد المشتق من اليمين (-3) لا يساوي العدد المشتق من اليسار (-5) .

ب- التفسير الهندسي:

بما أن الدالة k قابلة للاشتقاق من اليمين وقابلة للاشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ملاحظة: يمكن القول أن النقطة $(0; 4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k .

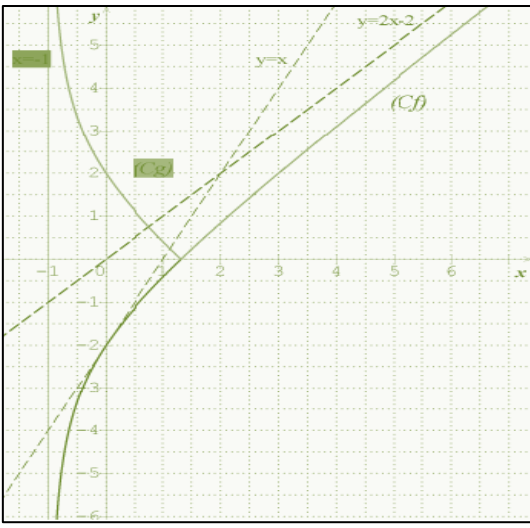
2. دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

أ- اثبات أن الدالة g زوجية:

تذكير: f دالة معناه: من أجل كل x من D_f و $-x$

من D_f لدينا: $f(-x) = f(x)$.



$$g(-x) = |-x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = g(x)$$

ومنه: الدالة g زوجية.

شرح طريقة الرسم:

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

أي: اذا كان $x > 0$ فان (C_g) منطبق على (C_f) .

اذا كان فان (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

3. g دالة g معرفة على $]-1; +\infty[$ بالعبارة: $g(x) = |f(x)|$.

كيفية انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) :

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} g(x) = f(x), & x > x_0 \\ g(x) = -f(x), & x < x_0 \end{cases}$$

وبالتالي:

من أجل (C_g) $x > x_0$ منطبق على (C_f) .

من أجل (C_g) $x < x_0$ نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

ناقش بيانيا، عدد واشارة حلول المعادلة: $g(x) = m^2$.

لدينا من أجل:

$m = 0$ للمعادلة حل وحيد موجب $(x = x_0)$.

$0 < |m| < \sqrt{2}$ للمعادلة حلين موجبين.

$|m| = \sqrt{2}$ للمعادلة حلان أحدهما موجب والآخر معدوم.

$|m| > \sqrt{2}$ للمعادلة حلان مختلفان في الاشارة.

4. تعيين قيمة m :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}, & x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

f مستمرة عند $x_0 = 2$ يعني: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ومنه: $m = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

نحسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$$

بالتعويض المباشر نجد "ح ع ت" من الشكل $\frac{0}{0}$.

لرفع "ح ع ت" نقوم بضرب وقسمة في مرافق بسط ومقام عبارة $f(x)$.

تذكير: a و b عددان حقيقيان، مرافق العدد $\sqrt{a} + b$ هو $\sqrt{a} - b$ مثال: مرافق العدد $\sqrt{2} - 1$ هو $\sqrt{2} + 1$.

أي:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})}{(\sqrt{4x+1}-3)} \times \frac{(x + \sqrt{x+2})}{(x + \sqrt{x+2})} \times \frac{(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x + \sqrt{x+2})} = \frac{18}{16} \end{aligned}$$

و بالتالي: $m = \frac{9}{8}$.

5. 1. الدالة f مستمرة عند القيمة 0 لان: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x) \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = 0$ و $f(0) = 0$.

2. الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 لان:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

6. لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$. تظهر لنا حالة عدم التعيين من الشكل: $\frac{+\infty}{+\infty}$.

بما أن: $x \rightarrow +\infty$ فان: $x > 0$ ومنه: $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = 1 \quad \text{اذن}$$

$$f(x) = m. \text{ حلول المعادلة}$$

حل مقترح

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

1. أحساب نهايات الدالة f :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = +\infty$$

ب- ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول التغيرات.

الدالة f قابلة للاشتقاق على حيث:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - (x^3 - 4x^2 + 8x - 4)(2x-2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)^4} \text{ و منه:}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة: $x^2 - 4x + 3$ أي:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	+

و منه جدول تغيرات الدالة كالتالي:

4.

حلول بعض تمارين الكتاب المدرسي

تمرين 80 صفحة 59:

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \text{ كما يلي:}$$

C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول التغيرات.

(2) أ) عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$$

ب) استنتج أن C_f يقبل المستقيم D الذي معادلته $y = x - 2$ كمستقيم مقارب.

ج) حدد وضعية C_f بالنسبة إلى D .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً واحداً α في المجال $] -\infty; 1[$. استنتج حصر α بتقريب 10^{-2} .

(4) أنشئ D و C_f في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور الترتيب)

و منه اشارة الفرق من اشارة: $3x-2$ أي:

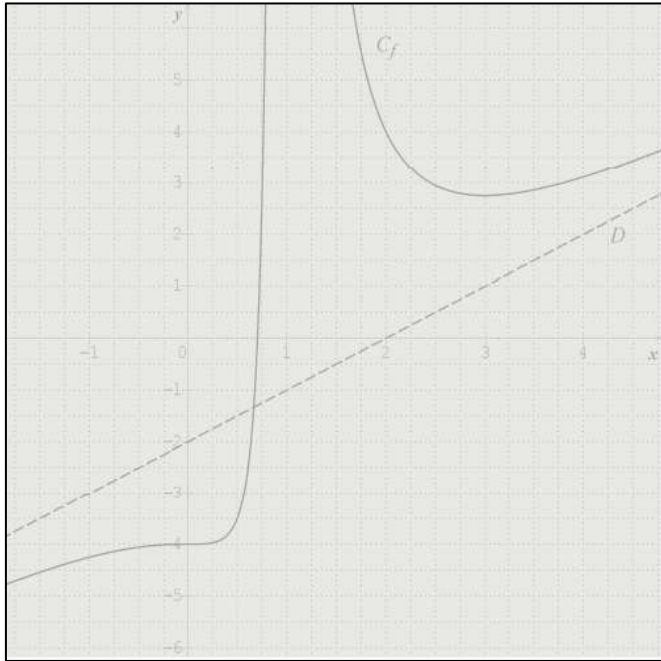
x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	-	0	+	+
الوضعية	تحت C_f D		فوق C_f D	

D يقطع C_f ($\frac{2}{3}; f(\frac{2}{3})$)

3. الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ و منه: أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-\infty; 1[$.

حصر α

4. أنشئ D و C_f في المعلم $(O; \bar{i}, \bar{j})$. (الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور الترتيب)



5. استنتج بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$. هي نقط تقاطع المنحنى C_f مع المستقيم ذو المعادلة:

$$y = m$$

من أجل $m \in]-\infty; \frac{11}{4}[$ يوجد حل واحد.

من أجل $m = \frac{11}{4}$ يوجد حلان.

من أجل $m \in]\frac{11}{4}; +\infty[$ يوجد ثلاث حلول.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

حيث: $f(3) = \frac{11}{4}$

2. أ-تعين الأعداد الحقيقية a, b, c, d و

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + d}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + x^2(-2a+b) + x(a-2b+c) + b+d}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} \text{ و منه: } \begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -4 \\ a - 2b + c = 8 \\ b + d = -4 \end{cases}$$

$$\text{و بالتالي: } f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

ب- المستقيم المقارب D :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2} - (x - 2) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3x - 2}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0$$

و منه نستنتج أن المنحنى C_f يقبل المستقيم D الذي معادلته:

$$y = x - 2 \text{ كمستقيم مقارب.}$$

ج- وضعية C_f بالنسبة إلى D :

$$\text{لدينا: } f(x) - y = \left[\frac{3x - 2}{(x-1)^2} \right]$$

x	3	1	-3
$f(x)$	$f(1)$		

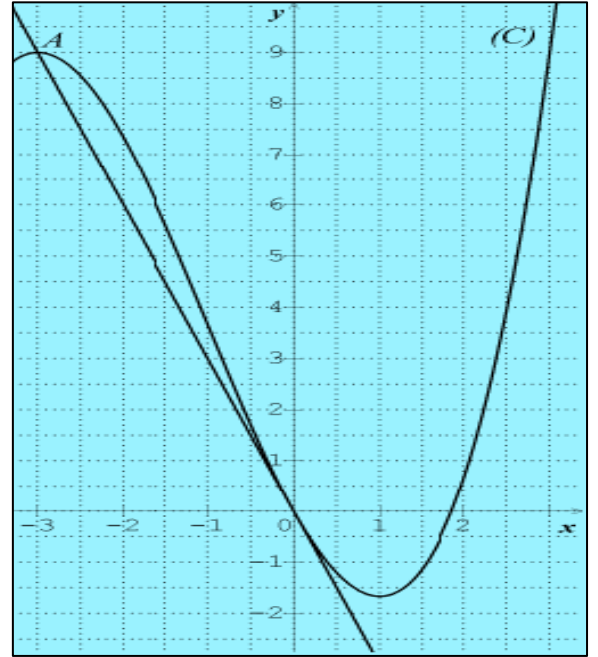
الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة وقابلة

للاشتقاق على المجال $[-3; 3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث:

* يمر (C) بمبدأ المعلم O ويشمل النقطة $A(-3; 9)$.

* يمر (C) في النقطة B التي فاصلتها A مماسا أفقيا. ويقبل المستقيم (OA)

كماس عند النقطة O .



1. ماهو معامل توجيه المستقيم (OA) .

2. عين اتجاه تغير الدالة f .

3. حل بيانيا في المجال $[-3; 3]$ المتراجحة: $f(x) \geq -2$.

4. نفرض أن: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث: a, b, c, d أعداد حقيقية.

بين أن: $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = -3, d = 0$.

3. نلاحظ من التمثيل البياني للدالة أنه من أجل كل x من $[-3; 3]$,

$$f(x) \geq -2$$

ومن مجموعة حلول المتراجحة: $f(x) \geq -2$ هي المجال $[-3; 3]$.

4. لدينا من المعطيات:

$$\begin{cases} -27a + 9b - 3c + d = 9 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} f(-3) = 9 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = -3 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a + b = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases} \text{ و هذا يعني:}$$

و عليه نحصل على: $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = -3, d = 0$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$$

تمرين 64 صفحة 81

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^3}$$

C هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$ الوحدة $3cm$.

1. درس تغيرات f ، شكل جدول التغيرات.

2. أ- حل المعادلة $f(x) = 0$ ، استنتج أن للمنحنى C لا يقطع محور

الفواصل.

ب- حسب جدول التغيرات ناقش حسب قيم اعداد الحقيقي

$$f(x) = m$$

حل مقترح

1. معامل توجيه المستقيم (OA) :

$$\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{9 - 0}{-3 - 0} = \frac{9}{-3} = -3$$

2. الجدول الموالي يبين اتجاه تغير الدالة f :

x	$+\infty$	1	$\frac{1}{2}$	0
$f'(x)$		-	0	+ 0 --

و جدول تغيراتها هو كالتالي:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		--	0	+ 0 --
$f'(x)$		$+\infty$	$\frac{5}{2}$	0

حيث: $f(1) = \frac{5}{2}$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

2. أ- حل المعادلة $f(x) = 0$

لدينا: $f(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{6x^2 - \left(\frac{9}{2}\right)x + 1}{x^3}$

$6x^2 - \left(\frac{9}{2}\right)x + 1 = 0$ أي: $\frac{6x^2 - \left(\frac{9}{2}\right)x + 1}{x^3} = 0$ معناه: $f(x) = 0$

نلاحظ أن: $\Delta = \frac{-15}{4}$ و بالتالي: $6x^2 - \left(\frac{9}{2}\right)x + 1 > 0$

اذن المنحنى C لا يقطع محور الفواصل.

ب- حسب جدول التغيرات ناقش حسب قيم اعداد الحقيقي.

حلول المعادلة $f(x) = m$ هي:

من أجل $m \leq 0$ لا يوجد حلول.

من أجل $0 < m < 2$ يوجد حل وحيد.

من أجل $m = 2$ أو $m = \frac{2}{5}$ يوجد حلان.

من أجل $2 < m < \frac{2}{5}$ يوجد ثلاث حلول.

من أجل $m > \frac{2}{5}$ يوجد حل وحيد.

ج- معادلة المماسات:

تعين معادلة المماس T_1 :

لدينا: $T_1: y = f'(1)(x-1) + f(1)$ حيث: $f'(1) = 0$ و $f(1) = \frac{5}{2}$

ج- عين معادلة لكل من المماسين T_1 و T_2 للمنحنى C عند النقطتين اللتين فاصلتهما $\frac{1}{2}$ و 1.

3. أنشئ المماسين T_1 ، T_2 و المنحنى C .

حل مقترح

الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^3}$

1. درس تغيرات f ، شكل جدول التغيرات .

النهايات:

تذكير: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم و a عدد حقيقي.

و منه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$

تظهر لنا حالة عدم التعيين من الشكل: $+\infty - \infty$.

لدينا: $\frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{6x^2 - \frac{9}{2}x^2 + 1}{x^3}$

و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - \frac{9}{2}x^2 + 1}{x^3}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{x} = +\infty$

المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ حيث:

$f'(x) = \frac{-6}{x^2} - \frac{9}{2} \left(\frac{-2}{x^3} \right) - \frac{3}{x^4} = \frac{-6}{x^2} + \frac{9}{x^3} - \frac{3}{x^4}$

أي: $f'(x) = \frac{-6x^2 + 9x - 3}{x^4}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي: $-6x^2 + 9x - 3$.

لدينا: $\Delta = 9$ (المميز) و منه $x = 1$ أو $x = \frac{1}{2}$.

اذن: $y = \frac{5}{2}$ معادلة المماس T_1 عند النقطة التي فاصلتها 1.

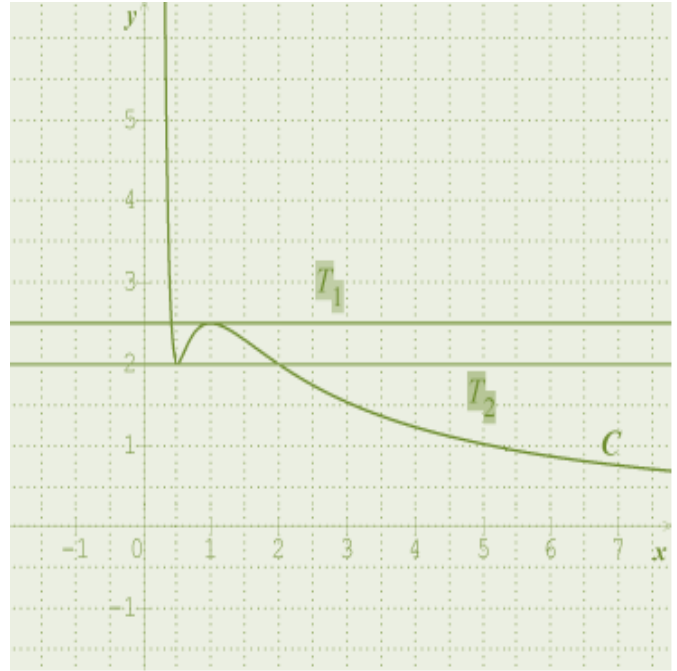
تعين معادلة المماس T_2 :

لدينا: $f' \left(\frac{1}{2} \right) = 0$ حيث $T_2: y = f' \left(\frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) + f \left(\frac{1}{2} \right)$ و

$$f \left(\frac{1}{2} \right) = 2$$

اذن: $y = 2$ معادلة المماس T_2 عند النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{2}$.

3. أنشاء المماسين T_1, T_2 و المنحني C .



1. عين النهايات للدالة f . ماذا تستنتج بيانياً؟

2. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$

3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4. بين أن: $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$ ثم عين حصراً للعدد $f(\alpha)$.

5. عين معادلة (T) المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6. تحقق انه من أجل كل x من $]-1; 1[$:

$$f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

7. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

8. أرسم (T) و (C_f) .

حل مقترح

1. P كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1. دراسة تغيرات P :

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

و منه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$

المشتقة

P دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث:

$$P'(x) = 6x^2 - 6x$$

$P'(x) = 0$ يعني $6x^2 - 6x = 0$ أي: $x = 1$ أو $x = 0$

اذن اشارة $P'(x)$ كالتالي:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$--$
			0	$+$

تمرين 75 صفحة 85

1. ليكن P كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1. أدرس تغيرات الدالة P ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين ان المعادلة $P(x) = 0$ تقبل تقبل حلاً وحيداً α على المجال

$$[1; +\infty[. \text{ عين حصراً ل } \alpha \text{ سعته } 10^{-1}.$$

3. استنتج حسب قيم اشارة $P(x)$ على \mathbb{R} .

ii. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب: $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

نلاحظ أن: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ إشارة $x+1$: لأن $x < -1$:
 $\Delta = -36 < 0$ مميزه $x^2 - x + 1$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
P'(x)		+	0	-- 0 +
P(x)	$-\infty$	\nearrow	-1 \searrow	$+\infty$

2. المعادلة $P(x) = 0$ تقبل تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1; +\infty[$

لأن: الدالة P مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1; +\infty[$

و $P(1) < 0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ اذن يوجد عنصر وحيد α على المجال

$[1; +\infty[$

حصر α سعته 10^{-1}

لدينا: $P(1,7) = 0,21$ و $P(1,6) = -0,49$ ، $P(1,5) = -1$

اذن $\alpha \in]1,6; 1,7[$

3. استنتاج اشارة $P(x)$ على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
P(x)		-- 0 +	

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب: $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$

1. تعين نهايات الدالة f:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

منه:

x	$+\infty$	α	-1	$-\infty$
f'(x)		--	-- 0 +	
f(x)	0	\searrow	$+\infty$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

و بالتالي: $f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$ وهو المطلوب.

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

بما أن $f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$ فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $P(x)$

ومنه جدول تغيرات هو كالاتي:

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
f'(x)		--	-- 0 +	
f(x)	0	\searrow	$+\infty$	0

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
x+1		-- 0 +	

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{x^3+1}$$

ندرس اشارة $x^3 + 1$

6. تحقق انه من أجل كل x من $]-1;1[$:

$$f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1-x}{x^3+1} + x-1 = \frac{(1-x) + (x-1)(x^3+1)}{x^3+1}$$

$$= \frac{1-x+x^4+x-x^3-1}{x^3+1} = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

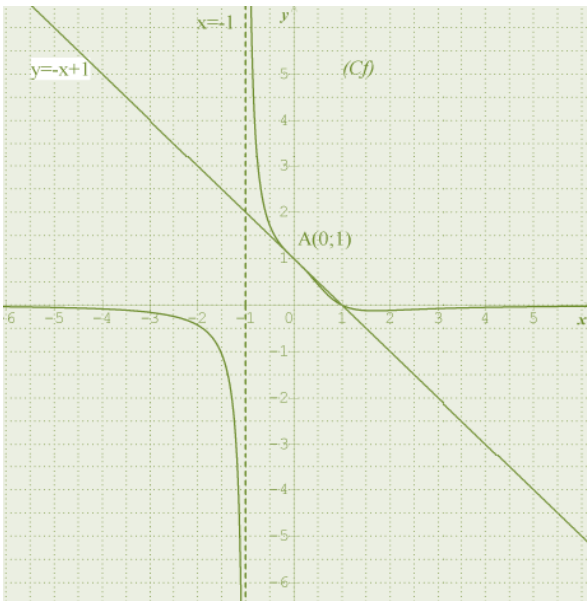
و هو المطلوب.

7. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

$$f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

x	-1	0	1
$x+1$		--	
x^3		--	0 +
x^3+1			+
$\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$		+	0 --
الوضعية	فوق (C_f)	↓ (Δ)	تحت (C_f)
			(Δ)
	$(C_f) \cap (\Delta) = \{A(0;1)\}$		

8. رسم (C_f) و (T) .



$$f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)} \quad \text{بين أن: 4}$$

$$f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha^3+1} \quad \text{لدينا:}$$

نعلم أن $P(\alpha) = 0$: أي $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$ و بالتالي:

$$f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\frac{3\alpha^2+1}{2} + 1}$$

$$f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^3+1)} \quad \text{و بالتالي: أي: } f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{3\alpha^2+3}$$

تعين حصرا للعدد $f(\alpha)$:

$$1,6 < \alpha < 1,7 \quad \text{لدينا:}$$

$$-1,4 < 2(1-\alpha) < -1,2$$

$$\text{ومنه: } (1) \dots 1,2 < -2(1-\alpha) < 1,4$$

$$(2) \dots 10,68 < 3(\alpha^3+1) < 11,67$$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج أن } \frac{-1,4}{11,67} < \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^3+1)} < \frac{-1,2}{10,68}$$

$$\text{ومنه: } \frac{1,2}{11,67} < \frac{-2(1-\alpha)}{3(\alpha^3+1)} < \frac{1,4}{10,68}$$

$$\text{أي: } 0,1 < -f(\alpha) < 0,13 \quad \text{و بالتالي:}$$

$$-0,13 < -f(\alpha) < -0,1$$

5. معادلة المماس (T) :

$$\text{لدينا: } y = f'(0)(x-x) + f(0) \quad \text{حيث: } f'(0) = -1 \text{ و}$$

$$f(0) = 1$$

$$\text{ومنه } y = -x+1 \text{ . معادلة (T) المماس ل (C_f) عند النقطة ذات}$$

الفصلة 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{2x-1}{x^4} - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2x-1}{x^4} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^3} = 0$$

و منه: المستقيم Δ الذي معادلته: $y = x$ مستقيم مقارب لـ (C_g) عند $+\infty$.

ب- الوضع النسبي:

* وضعية (C_f) بالنسبة إلى Δ :

$$\text{لدينا: } f(x) - y = \frac{x+1}{x^3}$$

من أجل كل x من $[1; +\infty[$ لدينا: $\frac{x+1}{x^3} > 0$ وبالتالي: (C_f) فوق Δ .

* وضعية (C_g) بالنسبة إلى Δ :

لدينا: $g(x) - y = \left[-\frac{2x-1}{x^4} \right]$ و منه اشارة الفرق من اشارة البسط أي: $-2x+1$ اذن:

x	1	$+\infty$
$-2x+1$		-
الوضعية	(C_g) تحت Δ	

ج-

* تغيرات الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$ حيث:

$$f(x) = x + \frac{x+1}{x^3}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x^3 - (3x^2)(x+1)}{(x^3)^2} = 1 + \frac{x^3 - 3x^3 - 3x^2}{x^6}$$

$$= 1 + \frac{-2x^3 - 3x^2}{x^6} = 1 + \frac{-x^2(2x-3)}{x^6}$$

$$\text{أي: } f'(x) = 1 + \frac{-2x+3}{x^4} = \frac{x^4 - 2x + 3}{x^4}$$

$$\text{و منه: } f'(x) = \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 3)}{x^4}$$

f و g دالتان معرفتان على $[1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x - \frac{2x-1}{x^4} \text{ و } f(x) = x + \frac{x+1}{x^3}$$

(C_g) و (C_f) هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس الوحدة على المحورين $1cm$

1-أ- تحقق من أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب لـ (C_f) و (C_g) عند $+\infty$.

ب- عين وضعية (C_f) بالنسبة إلى Δ ثم وضعية (C_g) بالنسبة إلى Δ .

ج- ادرس تغيرات كل من f و g على $[1; +\infty[$.

د- شكل جدولي تغيرات كل من f و g .

هـ- أنثئ Δ ، (C_f) و (C_g) .

2- أ- عين دالة أصلية للدالة $H: x \mapsto \frac{x+1}{x^3}$ على $[1; +\infty[$

ثم دالة أصلية للدالة $K: x \mapsto \frac{2x-1}{x^4}$ على $[1; +\infty[$

$$\text{ب- احسب } \int_3^4 \frac{2x-1}{x^4} dx \text{ و } \int_3^4 \frac{x+1}{x^3} dx$$

ج- قارن بين مساحتي الحيزين المحددين بـ (C_f) و Δ من جهة والمنحني (C_g) و Δ من جهة أخرى على المجال $[3; 4]$.

حل مقترح

f و g دالتان معرفتان على $[1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x - \frac{2x-1}{x^4} \text{ و } f(x) = x + \frac{x+1}{x^3}$$

1. أ- المستقيم المقارب:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{x+1}{x^3} - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

و منه: المستقيم Δ الذي معادلته: $y = x$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

لدينا:

2. أ- الدوال الأصلية:

تعيّن دالة أصلية للدالة $H : x \mapsto \frac{x+1}{x^3}$ على $[1; +\infty[$:

$$\int H(x)dx = \int \frac{x+1}{x^3} dx = \int \frac{x}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^3} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c_1. \text{ حيث } c_1 \text{ عدد حقيقي}$$

لذكّبر:

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x^{n-1})} + c \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي } n \geq 2.$$

تعيّن دالة أصلية للدالة $K : x \mapsto \frac{2x-1}{x^4}$ على $[1; +\infty[$:

$$\int k(x)dx = \int \frac{2x-1}{x^4} dx = \int \frac{2x}{x^4} dx - \int \frac{1}{x^4} dx$$

$$\int \frac{2}{x^3} dx - \int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} + c_2$$

حيث c_2 عدد حقيقي.

$$\text{ب- حساب } \int_3^4 \frac{x+1}{x^3} dx$$

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{x+1}{x^3} dx &= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right]_3^4 \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{32} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{18} \right) = \frac{31}{288} ua \end{aligned}$$

$$\text{ج- حساب } \int_3^4 \frac{2x-1}{x^4} dx$$

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{2x-1}{x^4} dx &= \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} \right]_3^4 \\ &= \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{192} \right) - \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{81} \right) = \frac{645}{15552} ua \end{aligned}$$

ج- المقارنة:

لتكن S_f مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و Δ على المجال $[3; 4]$.

بما أن (C_f) يقع فوق Δ فإن S_f تكتب من الشكل:

إشارة $f'(x)$ من إشارة: $x^3 - x^2 + x - 3$.

* تغيرات الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$ حيث:

$$g'(x) = 1 - \frac{2x^4 - (4x^3)(2x-1)}{(x^4)^2} = 1 - \frac{2x^4 - 8x^4 + 4x^3}{(x^4)^2}$$

$$= 1 - \frac{-6x^4 + 4x^3}{x^8} = 1 - \frac{-6x + 4}{x^5}$$

و بالتالي: $g'(x) = \frac{x^5 + 6x - 4}{x^5}$.

لدينا من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $g'(x) > 0$ ومنه الدالة متزايدة تماما على $[1; +\infty[$.

د-

* جدول تغيرات g .

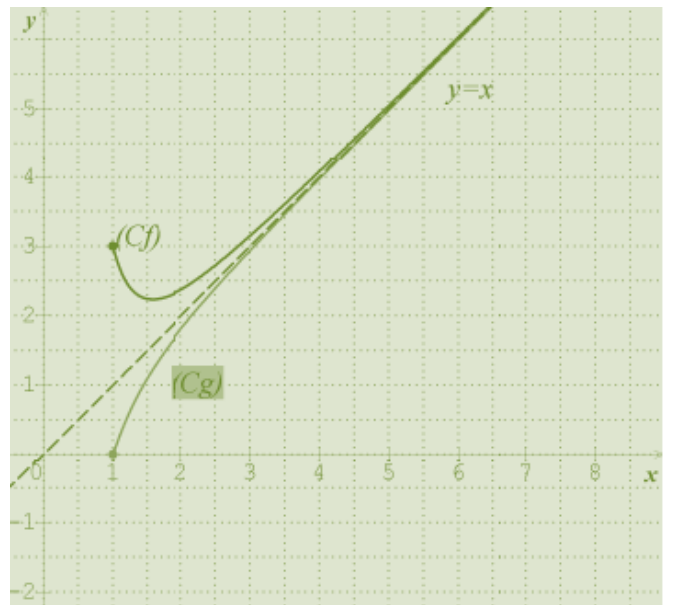
نحسب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^4} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{2x-1}{x^4} = +\infty$$

و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 0$.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$0 \rightarrow +\infty$

هـ - أنشئ Δ ، (C_f) و (C_g) .



$$S_f = \int_3^4 f(x) - y dx = \int_3^4 \frac{x+1}{x^3} dx$$

$$. S_f = \frac{31}{288} ua \text{ من السؤال (ب) نجد أن:}$$

لنكن S_g مساحة الحيز المحدد بـ (C_g) و Δ على المجال $[3;4]$.

بما أن (C_g) يقع تحت Δ فإن S_g تكتب من الشكل:

$$S_g = \int_3^4 y - g(x) dx = \int_3^4 \frac{2x-1}{x^4} dx$$

$$. S_g = \frac{645}{15552} ua \text{ من السؤال (ب) نجد أن:}$$

و منه: $S_f > S_g$.

5. تمارين محاولة

1 التمرين

f الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x + 2; x \in]-\infty; 1] \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}; x \in]1; 3[\cup]3; +\infty[\end{cases}$$

(C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. ادرس نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجالات مجموعة تعريفها.

2. أ- ادرس استمرارية الدالة f عند العدد 1.

ب- ادرس استمرارية الدالة f على المجال $]-\infty; 3[$.

3. احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

فسر النتيجة بيانياً.

4. اكتب معادلة للمستقيم (Δ) المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

2 التمرين

اعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α يطلب تعيينه، استنتج إشارة g .

3. نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. 1. احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

استنتج جدول تغيرات الدالة f .

3. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة.

4. بين أن المستقيم $y = x$ (Δ') مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

5. أدرس وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -3x$ والمستقيم (Δ') .

6. أرسم (C_f) ، (Δ) و (Δ') .

3 التمرين

1. الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسيًا.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{-2x(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) المقارب الأفقي له.

ب- عين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

ج- أرسم المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) .

د- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $(3-m)x^2 + (m-1)x + 2(m-1) = 0$.

4. أ- عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 و 2 لدينا: $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة على المجال $]2; +\infty[$.

5. لتكن $S(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 3$ و $x = \lambda, x = 3$ حيث λ عدد حقيقي ينتهي للمجال $]2; 3[$.

أ- احسب المساحة $S(\lambda)$ بدلالة λ .

ب- احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 2} S(\lambda)$.

6. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ كما يلي: $g(x) = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2}$

أ-بين أن الدالة دالة g زوجية.

ب-أدرس قابلية الاشتقاق للدالة g عند $x_0 = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

7. أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة وباستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم

4

التدريب

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; \pi]$ كما يلي: $g(x) = x \cos x - \sin x$.

1.-أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $[0; \pi]$.

3. لتكن الدالة f العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $[-\pi; \pi]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x}; x \in [-\pi; 0[\cup]0; \pi] \end{cases}$$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أدرس شفعية الدالة f على $[-\pi; \pi]$.

2. أدرس تغيرات الدالة f على $[-\pi; \pi]$.

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$

ارشاد: يمكنك استعمال الدالة h المعرفة على بالعلاقة: $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ ، أحسب h' ، h'' و h''' (المشتقة الثالثة)

ثم استنتج إشارة $h(x)$.

4. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ثم احسب $f'(0)$.

5. أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T) .

7. أرسم (C) و (T) .

5 التمرين

لتكن f دالة معرفة كما يلي: $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$ ، حيث m وسيط حقيقي غير معدوم.

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .

2. أ- احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب- فسر النتائج هندسيا.

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4. بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي الى كل المنحنيات (C_m) .

5. عين المنحنى (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيات $(4;1)$.

6 التمرين

1. الدالة f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $f(x) = \frac{-x^2}{x+1}$ على المجال $]-\infty; -1[$.

1. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty; -1[$.

2. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل

$$\text{كل } x \text{ من } D_f : f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

3. استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقارنين (D_1) و (D_2) يطلب تعيينهما.

4. أثبت أن المعدلة $f(x) = 5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-4; -3[$ ، ماذا تستنتج بيانيا؟

5. أنشئ (D_1) ، (D_2) و (C_f) .

II في معلم آخر متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

لتكن النقط $A(-1; 2)$ ، $M(x; 0)$ مع $x < -1$ و N نقطة تقاطع (AM) و (yy') .

1. أوجد احداثيات N بدلالة x .

2. احسب مساحة المثلث OMN بدلالة x .

3. استنتج قيمة للعدد x حتى تكون مساحة OMN أصغرا يمكن 4. احسب عندئذ هذه المساحة.

7 التمرين

f دالة عددية معرفة على $]1; +\infty[$ ب: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2. احسب النهايات f .

3. ضع جدول التغيرات للدالة f .

4. أ- أثبت أن (C) منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (d) معادلته: $y = x + \frac{1}{2}$ بجوار $+\infty$.

ب- أدرس وضعية (C) بالنسبة ل (d) .

5. أرسم (d) و (C) .

8 التمرين

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب:

$$f(x) = |x - 2| + \frac{1}{x - 1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أكتب عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

2. أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0 = 2$

3. أ- احسب $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) اكتب معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2

4. أدرس تغيرات الدالة f

5. أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$

6. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (x - 2)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)]$ ماذا تستنتج؟

7. أنشئ (Δ_1) و (Δ_2) والمستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f)

8. أ- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $|x - 2| + \frac{1 - m(x - 1)}{(x - 1)} = 0$

ب- استنتج مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ :

$$\theta \in]0, 2\pi[\text{، حيث } |\cos \theta - 2| + \frac{1 - m(\cos \theta - 1)}{(\cos \theta - 1)} = 0$$

9 التمرين

1. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج إشارة g .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

استنتج جدول تغيرات الدالة f .

3. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$ ثم فسّر بيانيا هذه النتيجة.

4. بين أن المستقيم $y = x$ (Δ') مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

5. أدرس وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -3x$ والمستقيم (Δ') .

6. أرسم (C_f) ، (Δ) و (Δ') .

10 التمرين

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$.

1. ادرس نهايات الدالة g .

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ، شكل جدول التغيرات.

3. حل في \mathbb{R} المعادلة: $g(x) = 0$.

4. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \leq 0$.

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = -x + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ و (C) تمثيلها البياني.

1. اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

2. احسب النهايات، ادرس اتجاه التغير و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + f(-x) = 2$ ، ماذا تستنتج؟

4. اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5. بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1 < \beta < 2$.

6. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 2]$ ماذا تستنتج؟

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ ماذا تستنتج؟

7. انشئ (C) .

8. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $(-x+1)\sqrt{x^2+1} = m\sqrt{x^2+1} - x$.

حل التمرين 1:

1. النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) \text{ أي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ أي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ أي:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ أي:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3} \right) \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3} \right) \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty \text{ إذن:} \quad \begin{cases} (x^2 - 1) \rightarrow 8 \\ (x - 3) \rightarrow 0^- \end{cases} \text{ لأن } x \rightarrow 3^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3} \right) \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty \text{ إذن:} \quad \begin{cases} (x^2 - 1) \rightarrow 8 \\ (x - 3) \rightarrow 0^+ \end{cases} \text{ لأن } x \rightarrow 3^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) \text{ أي:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) \text{ أي:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3} \right) \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ ومنه:}$$

2. أ- دراسة استمرارية الدالة f عند العدد 1.

العدد 1 غير معزول من D_f يعني: $1 \in D_f$.

- لدينا: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

إذن: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ أي: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ومنه الدالة f مستمرة عند 1.

ب- دراسة استمرارية الدالة f على المجال $]-\infty; 3[$.

الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty; 1[$ لأنها كذلك على \mathbb{R} لأنها دالة كثير الحدود... (1)

- الدالة f مستمرة على المجال $1; 3[$ لأنه مجال من مجموعة تعريفها وهي دالة ناطقة... (2)

- الدالة f مستمرة عند 1... (3) من (1)، (2) و (3) نستنتج أن الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty; 3[$.

$$3. \text{ إذا كان } x \in]-\infty; 1[\text{ فإن } \frac{f(x)}{x-1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$$

$$\text{لما } x \rightarrow 1^- \text{ فإن: } \begin{cases} (x^2 - 3x + 2) \rightarrow 0 \\ (x-1) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ إذن: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} \text{ حالة عدم التعيين.}$$

نقوم بإزالة حالة عدم التعيين:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) \quad \text{أي:} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$$\text{أي:} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -1$$

$$- \text{ إذا كان } x \in]1; 3[\cup]3; +\infty[\text{ فإن } \frac{f(x)}{x-1} = \frac{x^2 - 1}{(x-3)(x-1)}$$

$$\text{لما } x \rightarrow 1^+ \text{ فإن: } \begin{cases} (x^2 - 1) \rightarrow 0 \\ (x-3)(x-1) \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{إذن: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} \text{ حالة عدم التعيين}$$

إزالة حالة عدم التعيين:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -1 \quad \text{أي:} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-3} \quad \text{أي:}$$

* مما سبق نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 من اليمين ومن اليسار و عددها المشتق عند 1 من اليمين و من اليسار هو (-1).

إذن: الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = -1$.

* المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه (-1).

4. المماس (Δ) معرف بالمعادلة: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

أي: $y = -x + 1$.

حل التمرين 2:

(I). الدالة g معرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث:

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{ومنه:} \quad g'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

وبالتالي: إشارة $g'(x)$ من إشارة $2\sqrt{x^2+1}-x$. لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} : $g'(x) > 0$. وبالتالي: g دالة متزايدة تماما على \mathbb{R} .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج إشارة g .

$$g(x) = 0 \quad \text{يعني:} \quad 2x - \sqrt{x^2 + 1} = 0 \quad \text{أي:} \quad 2x = \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

من أجل: $x < 0$ المعادلة (1) مستحيلة.

من أجل: $x > 0$ $4x^2 = x^2 + 1$ أي: $4x^2 - x^2 - 1 = 0$ ومنه: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (حل مرفوض).

لدينا g مستمرة ورتيبة على \mathbb{R} وبالتالي: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

إشارة g :

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II). نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$.

1. حساب نهائي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

2. بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{x^2+1} - x \\ f'(x) &= \frac{2(2x)}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \\ &= \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}} \text{ و بالتالي:}$$

هذا يعني أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\sqrt{x^2+1} > 0$ أي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	$+\infty$

$$\text{حيث: } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$$

3. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{x^2 + 1} - x + 3x] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{x^2 + 1} + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[2\sqrt{x^2 + 1} + 2x] \times [2\sqrt{x^2 + 1} - 2x]}{[2\sqrt{x^2 + 1} - 2x]} \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] = 0 & \text{ لدينا:} \quad \text{لدينا:} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{[2\sqrt{x^2 + 1} - 2x]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{[2\sqrt{x^2 + 1} - 2x]} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{[\sqrt{x^2 + 1} - 2x]} = 0
\end{aligned}$$

التفسير البياني:

المستقيم ذو المعادلة: $y = -3x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

4. بين أن المستقيم $y = x$ (Δ') مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x^2 + 1} - x - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x^2 + 1} - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2\sqrt{x^2 + 1} - 2x] \times [2\sqrt{x^2 + 1} + 2x]}{[2\sqrt{x^2 + 1} + 2x]} \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0 & \text{ لدينا:} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{[2\sqrt{x^2 + 1} + 2x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{[2\sqrt{x^2 + 1} + 2x]} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{[\sqrt{x^2 + 1} + 2x]} = 0
\end{aligned}$$

والتالي: المستقيم $y = x$ (Δ') مستقيم مقرب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

5. الوضع النسبي:

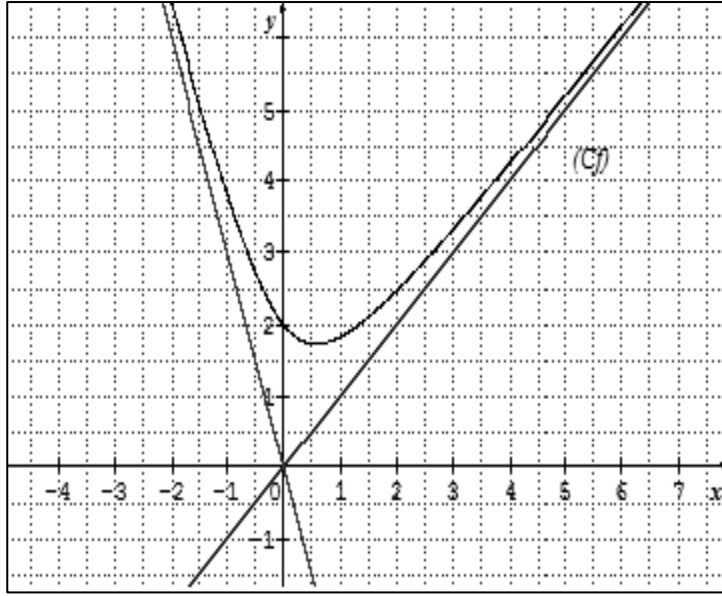
دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -3x$:

لدينا: $f(x) + 3x = 2\sqrt{x^2 + 1} + 2x > 0$ وبالتالي: (C_f) فوق (Δ).

دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ') ذو المعادلة: $y = x$ (Δ'):

$f(x) - x = 2\sqrt{x^2 + 1} - 2x > 0$ وبالتالي: (C_f) فوق (Δ').

6. رسم (C_f)، (Δ) و (Δ').



حل التمرين 3:

1. الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$

1. حساب نهايات الدالة f :

لحساب النهاية عند -1 و 2 ندرس إشارة المقام أي: $x^2 - x - 2$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	- 0	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقارين موازيين لمحور الترتيب معادلتهم $x = -1$ و $x = 2$ و يقبل كذلك مستقيم (Δ) مقارب موازي لمحور الفواصل معادلته $y = 3$.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ الدالة قابلة للاشتقاق لدينا:

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(x^2-x-2) - (2x-1)(3x^2-x-2)}{(x-x-2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 8x}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-2x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$$

ومنه:

ب- اتجاه تغير الدالة f : اشارة $f'(x)$ تتعلق باشارة $-2x(x+4)$:

$$-2x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \text{ وبالتالي:}$$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$		
$-2x(x+4)$		-	0	+	0	-

جدول تغيراتها.

x	$-\infty$	-4	-1	0	2	$+\infty$									
$f'(x)$		-	0	+	+	0	-	-							
$f(x)$		3		$\frac{25}{9}$		$+\infty$		$-\infty$	1		$-\infty$		$+\infty$		3

3. ادراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس اشارة الفرق: $f(x) - y$ أي:

$$f(x) - y = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} - 3 = \frac{2x + 4}{x^2 - x - 2}$$

وبالتالي اشارة الفرق نلخصها في الجدول:

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$x+4$		-	0	+	+
x^2-x-2			+	-	+
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-2; 3)$.

ب- نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات:

مع محور الفواصل: نقوم بحل المعادلة $f(x) = 0$:

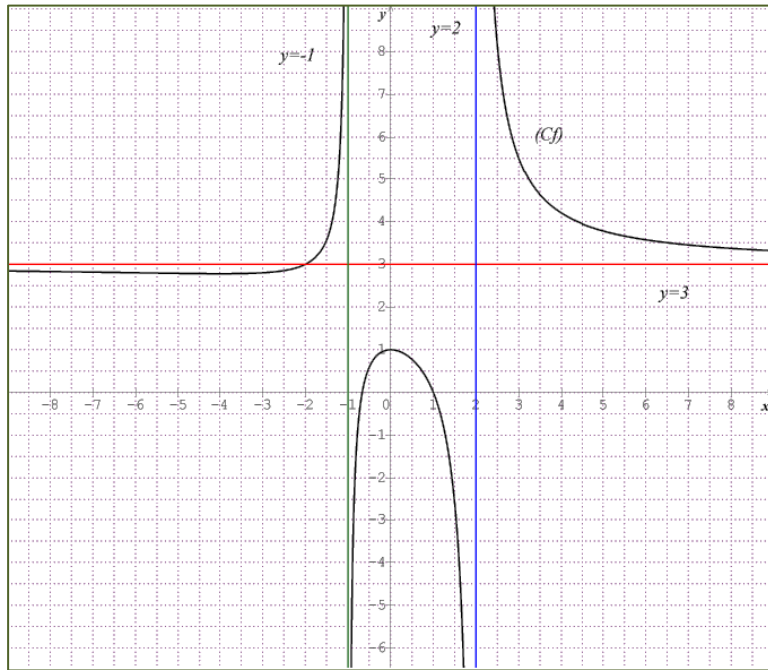
$$\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - x - 2 \neq 0 \end{cases} \text{ أي:}$$

$$3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$(C_f) \cap (x'x) = \left\{ \left(\frac{-2}{3}; 0 \right), (1; 0) \right\}$$

مع محور الترتيب: لدينا: $f(0) = 1$ ومنه: $(C_f) \cap (y'y) = \{(0; 1)\}$

ج- رسم المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) .



د- المناقشة:

$$(3-m)x^2 + (m-1)x + 2(m-1) = 0 \text{ لدينا:} \\ \Rightarrow f(x) = m$$

حلول هذه المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = m$ المعادلة

اذا كان $m < -1$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة .

اذا كان $m = 1$ و $m = \frac{25}{9}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

اذا كان $1 < m < \frac{25}{9}$ المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $3 < m < \frac{25}{9}$ المعادلة تقبل حلين سالبين.

إذا كان $m = 3$ المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $m > 3$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

4.أ- تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c :

لدينا:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2} = \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)}{x^2 - x - 2}$$

$$= \frac{ax + (b-a+c)x - 2a - 2b + c}{x^2 - x - 2}$$

والمطابقة نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b - a + c = -1 \\ -2a - 2b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{اذن: } f(x) = 3 + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{4}{3(x-2)}$$

ب- استنتاج دالة أصلية للدالة على المجال $[2; +\infty[$.

$$F(x) = 3x + \frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{4}{3} \ln(x-2) + c; c \in \mathbb{R}$$

5.أ- حساب المساحة $S(\lambda)$ بدلالة λ :

لدينا من أجل كل x من $[2; +\infty[$ (C_f) فوق (Δ) وبالتالي:

$$S(\lambda) = \int_{\lambda}^3 f(x) - 3dx = \left[3x + \frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{4}{3} \ln(x-2) - 3x \right]_{\lambda}^3$$

$$= \left[\frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{4}{3} \ln(x-2) \right]_{\lambda}^3 = \frac{\ln 144}{3} - \frac{\ln \left[(\lambda+1) \ln(\lambda-2)^2 \right]^2}{3}$$

ب- احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 2} S(\lambda)$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 2} \frac{\ln 144}{3} - \frac{\ln \left[(\lambda+1) \ln(\lambda-2)^2 \right]^2}{3} = +\infty$$

6. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ كما يلي: $g(x) = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2}$

أثبت أن الدالة دالة g زوجية.

لدينا من اجل كل: $x \in D_g$ و $-x \in D_g$ فان:

$$g(-x) = \frac{3(-x)^2 - |-x| - 2}{(-x)^2 - |-x| - 2} = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2} = g(x)$$

ومنه g دالة زوجية.

ب-دراسة قابلية الاشتقاق للدالة g عند $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{x(x^2 - x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x^2 - x - 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2}{x(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x^2 + x - 2} = 0$$

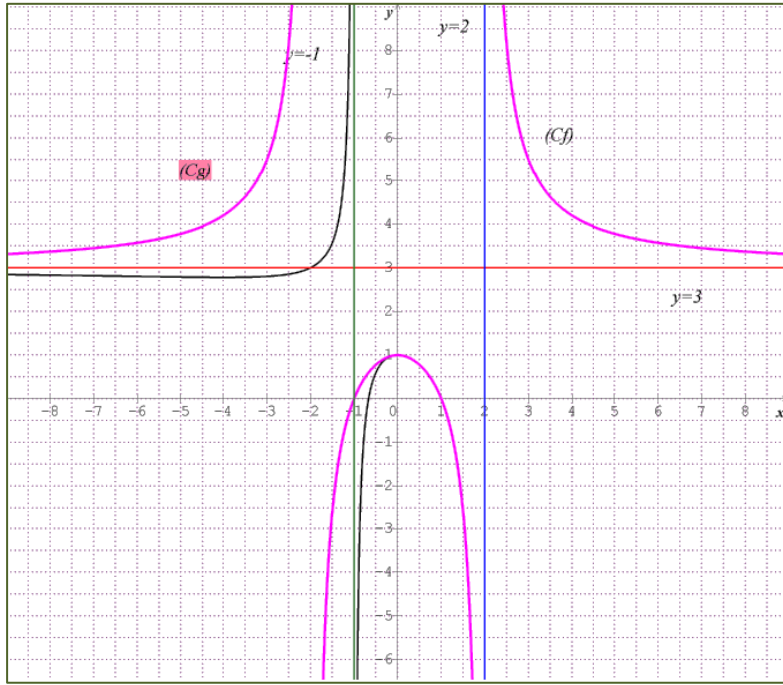
ومنه لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$ اذن الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0.

التفسير: المنحنى يقبل مماس عند النقطة $\omega(0;1)$ موازي لمحور الفواصل.

7.كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$g(x) = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2} = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}; x \in]0; 2[\cup]2; +\infty[\\ \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2}; x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\end{cases}$$

وباستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.



حل التمرين 4:

1. الدالة g المعرفة على $[0; \pi]$ كما يلي: $g(x) = x \cos x - \sin x$.

1.- أدرس اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0; \pi]$ ،

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x \cos x - \sin x)' \\ &= \cos x - x \sin x - \cos x \\ g'(x) &= -x \sin x \end{aligned}$$

من أجل $x \in [0; \pi]$ لدينا: $\sin x > 0$ وبالتالي: $g'(x) < 0$ و $g(\pi) = -\pi$ و $g(0) = 0$

و عليه الدالة g متناقصة تماما على $[0; \pi]$

جدول التغيرات:

x	0	π
$g'(x)$	-	
$g(x)$	0	$-\pi$

2 إشارة $g(x)$ على المجال $[0; \pi]$:

لدينا الدالة g متناقصة تماما على $[0; \pi]$ ، $g(0) = 0, g(\pi) = -\pi$

ومن جدول التغيرات $g(x) < g(0)$ أي $g(x) < 0$ من أجل كل $x \in [0; \pi]$.

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x}; x \in [-\pi; 0[\cup]0; \pi] \end{cases}$$

II. الدالة f معرفة على $[-\pi; \pi]$ كما يلي:

1. شفعية الدالة f على $[-\pi; \pi]$.

من أجل كل x ، $-x$ من $[-\pi; \pi]$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2. دراسة تغيرات الدالة f على $[-\pi; \pi]$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-\pi; \pi]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin x}{x} \right)' \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $[-\pi; \pi]$ ، $x^2 > 0$ وبالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

أي: $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \pi]$.

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$

لدينا الدالة h قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، $h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

لدينا الدالة h' قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، $h''(x) = -\sin x + x$

لدينا الدالة h'' قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، $h'''(x) = -\cos x + 1$

من أجل $x \neq 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ ، لدينا $\cos x < 1$ وبالتالي: $-\cos x + 1 > 0$ يعني: $h'''(x) > 0$

فبالتالي: h'' دالة متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بما أن $h''(0) = 0$ فان من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $h''(x) \geq 0$ فبالتالي: h' دالة متزايدة على $[0; +\infty[$.

ولدينا من جهة أخرى: $h'(0) = 0$ ومن أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $h'(x) \geq 0$ فبالتالي: h دالة متزايدة على $[0; +\infty[$.

$$(1) \dots\dots x - \sin x \leq \frac{x^3}{6} \text{ و عليه: } \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0 \text{ أي: } h(x) \geq 0 \text{ من } [0; +\infty[\text{ كل } x$$

ونعلم أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ أي $h''(x) \geq 0$ أي $0 \leq x - \sin x$ (2).

$$\text{من (1) و (2) نجد: } 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$$

4. اثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 :

$$\text{علينا حساب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ ولكن}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$$

ومن السؤال السابق لدينا: $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ أي: $-\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{6} \right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x^2} \right) \leq 0$$

بالقسمة على (x^2) نتحصل على

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) \leq 0$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{6} \right) = 0$ وبتطبيق خاصية "حصص النهايات" نجد: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

وبالتالي: الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 : ومنه $f'(0) = 0$.

5. معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T): y = 1$$

6. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T) .

$$f(x) - y = \frac{\sin x}{x} - 1$$

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ نجد:

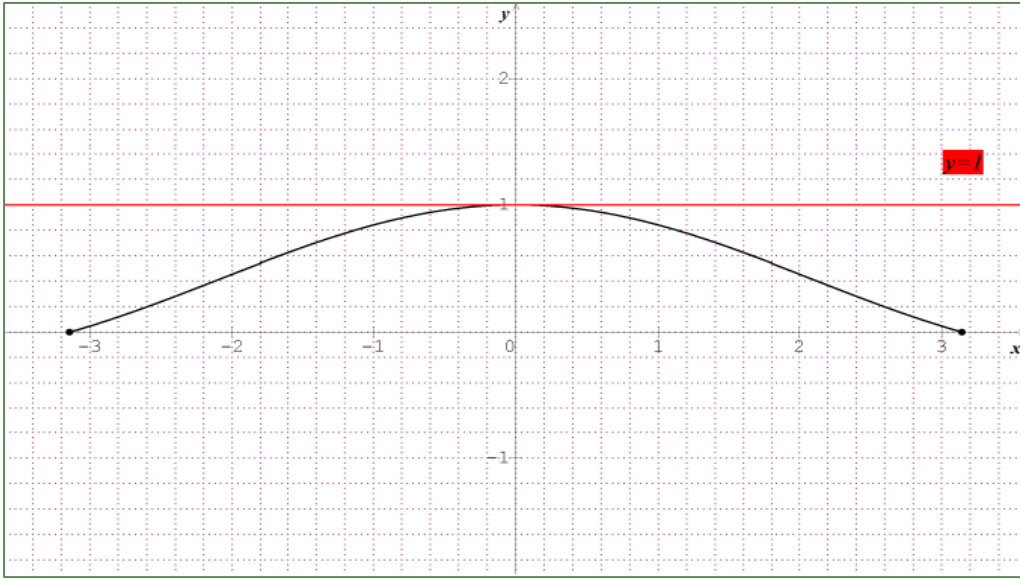
$$= \frac{\sin x - x}{x}$$

لدينا: $h''(x) = x - \sin x$ ونعلم أن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ $h''(x) > 0$.

ومنه $-h''(x) = \sin x - x < 0$ أي: $f(x) - y < 0$ و عليه المنحنى (C) يقع تحت المماس (T) .

وبما أن الدالة f دالة زوجية فإن منحناها البياني متناظر مع محور الترتيب فبالتالي المنحنى (C) يقع تحت المماس (T) . من أجل $x < 0$

7. رسم (C) و (T) :



حل التورين 5:

$$f \text{ دالة معرفة كما يلي: } f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$$

1. تعين مجموعة f :

الدالة f معرفة من أجل: $x^2 - mx - 3 \neq 0$ لدينا:

$$\Delta = m^2 + 12 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \\ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2} \end{cases}$$

وعليه: $x_1 - x_2 = -\sqrt{m^2 + 12} < 0 \Rightarrow x_1 < x_2$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \\ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2} \end{cases} \text{ وبالتالي: } D_f =]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[\text{ حيث:}$$

2. أ- حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

نقوم بدراسة اشارة المقام أي: $x^2 - mx - 3$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$x^2 - mx - 3$		+	0	-	0	+

ب-التفسير:

$$\text{المستقيم ذو المعادلة } x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \text{ مقارب للمنحنى } (C_m)$$

$$\text{المستقيم ذو المعادلة } x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2} \text{ مقارب للمنحنى } (C_m).$$

$$\text{المستقيم ذو المعادلة } y = 1 \text{ مقارب للمنحنى } (C_m) \text{ بجوار } -\infty \text{ و } +\infty.$$

3.دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f حيث:

$$\begin{aligned} f'_m(x) &= \frac{(2x - m)(x^2 - mx - 3) - (2x - m)(x^2 - mx - 15)}{(x^2 - mx - 3)^2} \\ &= \frac{(2x - m)[x^2 - mx - 3 - x^2 + mx + 15]}{(x^2 - mx - 3)^2} \\ &= \frac{12(2x - m)}{(x^2 - mx - 3)^2} \end{aligned}$$

اذن اشارة $f'_m(x)$ من اشارة $2x - m$:

x	$-\infty$	x_1	$\frac{m}{2}$	x_2	$+\infty$
$2x - m$		-	0	+	

x	$-\infty$	x_1	$\frac{m}{2}$	x_2	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	-	0	+	+
$f_m(x)$	1	$+\infty$	$f_m\left(\frac{m}{2}\right)$	$+\infty$	1

4. تعين نقطة التي تنتمي الى كل المنحنيات (C_m)

$$A(a;b) \in (C_m) \text{ معناه تحقق : } \frac{a^2 - ma - 15}{a^2 - ma - 3} = b \text{ من أجل كل عدد حقيقي } m.$$

وبالتالي: من أجل كل عدد حقيقي m .

$$a^2 - ma - 15 = b(a^2 - ma - 3)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ba^2 - 15 + 3b + m(ab - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - ba^2 - 15 + 3b = 0 \dots (1) \\ (ab - a) = 0 \dots (2) \end{cases}$$

المعادلة (2) تكافئ: $(a=0; b=1)$

من أجل $a=0$ المعادلة (1) تكافئ $-15 + 3b = 0$ أي $b=5$

من أجل $b=1$ المعادلة (1) تكافئ $-15 + 3 = 0$ (مستحيل)

اذن من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(0;5)$ تنتمي الى كل المنحنيات (C_m) .

طريقة أخرى: لدينا: $\begin{cases} A(a;b) \in (C_m) \\ A(a;b) \in (C_{m-1}) \end{cases}$ معناه نقوم بحل المعادلة:

$$\begin{aligned} f_m(x) &= f_{m-1}(x) \\ \Rightarrow \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} &= \frac{x^2 - (m-1)x - 15}{x^2 - (m-1)x - 3} \end{aligned}$$

5. تعين المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيات $(4;1)$.

معناه: $(4;1) \in (C_m)$

$$f_m(4) = 1 \Rightarrow \frac{16 - 4m - 15}{16 - 4m - 3} = 1$$

$$\text{(مستحيل)} \quad 16 - 4m - 15 = 16 - 4m - 3 - 15 = -3$$

ومنه النقطة ذات الاحداثيات (4;1) لا تنتمي الى أي من المنحنيات (C_m) .

حل التمرين 6:

1. الدالة f معرفة ب: $f(x) = \frac{-x^2}{x+1}$ على المجال $]-\infty; -1[$.

1. دراسة تغيرات الدالة f

*النهايات:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2}{x+1} = +\infty$$

*المشتقة: f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty; -1[$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{(-2x)(x+1) + x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}$$

من اشارة $-x^2 - 2x$ و بالتالي:

$$-x^2 - 2x = 0 \text{ يعني: } x = -2 \text{ أو } x = 0 \text{ (حل مرفوض).}$$

x	$-\infty$	-2	-1
$f'(x)$		-- 0	+

*جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	-1
$f'(x)$		-- 0	+
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

2. تعين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

طريقة 1: توحيد المقامات: من أجل كل x من D_f : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$$f(x) = \frac{ax(x+1) + (x+1) + c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$$

أي:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ و منهُ: } \begin{cases} a = -1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد:}$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ اذن } f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

3. المستقيمات المقاربة:

بما أن: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2}{x+1} = +\infty$ فان (D_1) مستقيم مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $x = -1$.

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$$

اذن (D_2) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -x + 1$.

4. أثبت أن المعادلة $f(x) = 5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-4; -3]$.

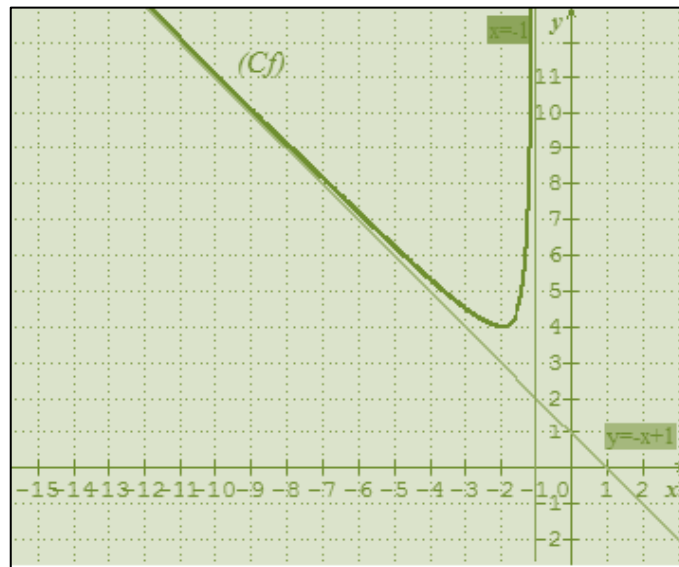
f مستمرة ورتيبة تماما على $[-4; -3]$.

لدينا: $f(-4) = 5,33$ و $f(-3) = 4,5$ $f(-3) < 5 < f(-4)$.

اذن يوجد عنصر α على المجال $[-4; -3]$ حيث $f(\alpha) = 5$.

نستنتج أن يقطع المستقيم الذي معادلته: $y = 5$ في النقطة ذات الفاصلة: $x = \alpha$.

$$(C_f) \cap (\Delta) = \begin{cases} C(\alpha; 5) \\ (\Delta): y = 5 \end{cases} \text{ أي:}$$



5. انشاء (D_1) ، (D_2) و (C_f)

لدينا النقط $A(-1;2)$ ، $M(x;0)$ مع $x < -1$ و N نقطة تقاطع (AM) و (yy') .

1. ايجاد احداثيات النقطة N بدلالة x :

$$N \in (yy') \text{ اذن } N(0; y_N)$$

النقط M, A, N على استقامة واحدة اذن $\overline{AM} // \overline{AN}$.

تذكير: ليكن \vec{u}, \vec{v} شعاعان من المستوي حيث:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \text{ وبالتالي: } \begin{cases} \frac{x'}{x} = k \\ \frac{y'}{y} = k \end{cases} \text{ معناه: } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \text{ أي: عدد حقيقي. أي: } \vec{u} = k\vec{v} \text{ تكافئ } \vec{u} // \vec{v} \text{ و } \vec{u} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ و } \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{معناه } x'y - xy' = 0$$

$$\text{لدينا: } \overline{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ و } \overline{AN} \begin{pmatrix} 1 \\ y_N - 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AM} // \overline{AN} \text{ تكافئ } y_N - 2 = \frac{-2}{x+1} \text{ ومنه: } y_N = \frac{-2}{x+1} + 2 \text{ اذن } y_N = \frac{2x}{x+1} \text{ وبالتالي: } N \left(0; \frac{2x}{x+1} \right)$$

2. حساب مساحة المثلث OMN بدلالة x .

$$S_{OMN} = \frac{OM \times ON}{2} \text{ حيث } \overline{OM} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{ON} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2x}{x+1} \end{pmatrix}$$

نحسب الأطوال OM, ON بدلالة x .

$$ON = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2x}{x+1} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2x}{x+1} \right)^2} = \left| \frac{2x}{x+1} \right| \text{ وهذا يعني:}$$

$$\frac{2x}{x+1} < 0 \text{ اذن } x+1 < 0 \text{ و } 2x < 0 \text{ فان: } x < -1$$

$$\text{ومنه: } ON = \frac{2x}{x+1}$$

$$\overline{OM} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ وبالتالي: } OM = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{بما أن } x < -1 \text{ فان: } OM = -x$$

$$.S_{OMN} = \frac{OM \times ON}{2} = \frac{-x \left(\frac{2x}{x+1} \right)}{2} = \frac{-x^2}{x+1}$$

3. استنتاج قيمة x حتى تكون مساحة OMN أصغر ما يمكن .

نلاحظ أن تكون مساحة OMN هي الدالة f وبالتالي قيمة x حتى تكون مساحة OMN أصغر ما يمكن هي القيمة الحدية الصغرى للدالة f وتساوي 4 من أجل $x = -2$ (حسب جدول تغيرات الدالة f).

4. حساب المساحة S_{OMN}

$$S_{OMN} = 4 \text{ من أجل } x = -2 \text{ نجد}$$

حل التمرين 7:

$$f \text{ معرفة على }]1; +\infty[\text{ ب: } f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

1. دراسة اتجاه تغير الدالة $f: f$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال حيث:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-1) - (x^3)}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2}{2(x-1)^2 \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2 \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \end{aligned}$$

وبالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة: $2x-3$ أي:

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	+

الدالة f متناقصة تماما على $\left]1; \frac{3}{2}\right]$ و متزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

2. النهايات :

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ اذن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = +\infty$$

3. جدول التغيرات:

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$

4. أ- المستقيم المقارب المائل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \text{ لدينا:}$$

تظهر حالة عدم التعين من الشكل: $+\infty - \infty$ و بالتالي:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \times \left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}{x-1}}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]} \text{ و منه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} \text{ لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] = +\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] = 0 \text{ و منه:}$$

هذا يعني أن (C) منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (d) معادلته: $y = x + \frac{1}{2}$ بجوار $+\infty$.

ب- دراسة وضعية (C) بالنسبة ل (d):

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}} \quad \text{لدينا:}$$

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) > 0 \quad \text{و بالتالي:} \quad \left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}\right] > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}{x-1} > 0 \quad \text{لدينا:} \quad]1; +\infty[\quad \text{من أجل كل } x$$

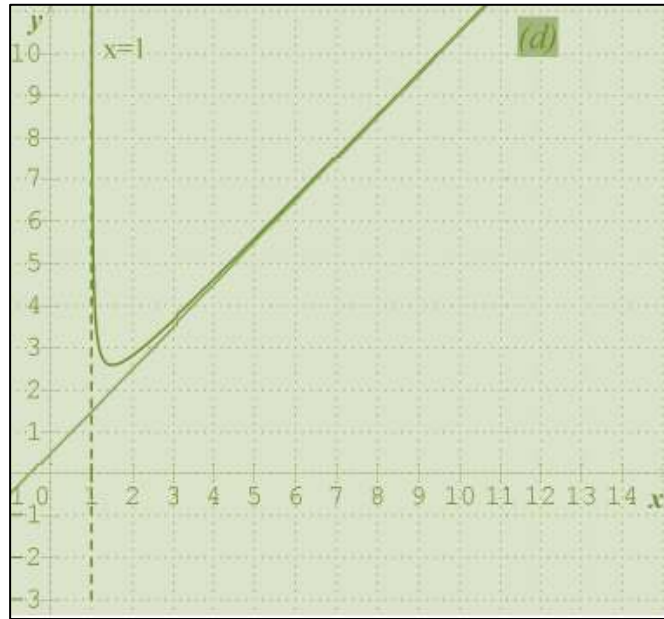
هذا يعني أن المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (d).

5. رسم (d) و (C).

بما أن: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ فان $x=1$ هي معادلة مستقيم مقارب بجوار $+\infty$. (غير مطلوب)

لرسم المستقيم (d) علينا أخذ قيم مساعدة:

x	1	2
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$



حل التمرين 8:

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = |x - 2| + \frac{1}{x - 1}$

1. كتابة عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 + \frac{1}{x - 1} & ; x \in [2; +\infty[\\ -x + 2 + \frac{1}{x - 1} & ; x \in]-\infty; 1[\cup]1; 2] \end{cases}$$

2. دراسة استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0 = 2$: لدينا $f(2) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x - 2 + \frac{1}{x-1} \right) = 1$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1 \quad \text{بما أن:} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(-x + 2 + \frac{1}{x-1} \right) = 1$$

فإن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0 = 2$.

3. أ- حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(h+2)}{h(h+1)} = -2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h(h+1)} = 0$$

بما أن: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في 2.

التفسير البياني:

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس في 2 على اليمين معامل توجيهه معدوم ، ويقبل نصف مماس في 2 على اليسار معامل توجيهه 2. ومنه $A(2;1)$ نقطة زاوية .

ب- كتابة معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2: ومنه $(\Delta_1): y = 1$

و $(\Delta_2): y = f'(2)(x-2) + f(2)$ ، $x \leq 2$ ومنه $(\Delta_2): y = -2x + 5$

4. دراسة تغيرات الدالة f : النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + 2 + \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(|x-2| + \frac{1}{x-1} \right) \nearrow^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(|x-2| + \frac{1}{x-1} \right) \nearrow^{-\infty} = -\infty$$

* اتجاه التغير:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty; 1[\cup]1; 2[$ ، $]2; +\infty[$ ، دالتها المشتقة f' :

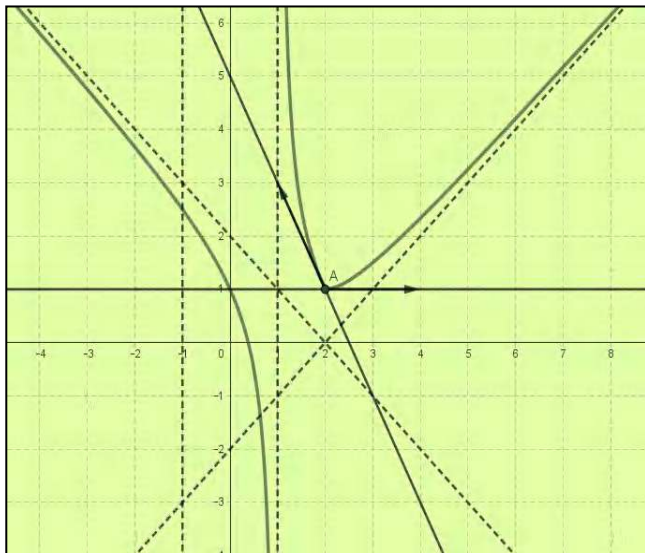
$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} & ; x \in]2; +\infty[\\ -1 - \frac{1}{(x-1)^2} = -\left(1 + \frac{1}{(x-1)^2} \right) & ; x \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[\end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	-	+

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	--	0		--	- 2 0 +
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

5. إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}; f(0) = 1 \alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$
لدينا الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ (قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right[$) ورتيبة تماما على المجال

$$\left]0; \frac{1}{2}\right[\text{ (متناقصة تماما على المجال } \left]0; \frac{1}{2}\right[\text{) و}$$



حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f\left(\frac{1}{2}\right); f(0) < 0$

لدينا: $(\Delta_1): y = f'(2)(x-2) + f(2), x \geq 2$

$f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث: $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$

نستنتج أن: المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة

وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$

6. حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (x-2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

نستنتج أن: المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين $(D_1); (D_2)$ بجوار $+\infty; -\infty$ معادلتهمما على الترتيب: $y = -x + 2; y = x - 2$

7. إنشاء (Δ_1) و (Δ_2) والمستقيمات المقاربة و (C_f) :

8. مناقشة بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(E) \dots |x-2| + \frac{1-m(x-1)}{(x-1)} = 0$

$$(E) \text{ تكافئ } |x-2| + \frac{1}{(x-1)} - m \frac{(x-1)}{(x-1)} = 0$$

$$(E) \text{ تكافئ } |x-2| + \frac{1}{(x-1)} - m = 0$$

$$f(x) = m \text{ تكافئ } |x-2| + \frac{1}{(x-1)} = m$$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي معادلاتها: $y = m, m \in \mathbb{R}$

m	$-\infty$	1	$+\infty$
عدد و إشارة حلول المعادلة (E)	حل وحيد موجب	حل مضاعف موجب وحل معدوم	حليين موجبيين وحل ثالث سالب

* استنتاج مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ :

$$(E') \dots |\cos \theta - 2| + \frac{1 - m(\cos \theta - 1)}{(\cos \theta - 1)} = 0$$

$$f(\cos \theta) = m \text{ تكافئ } (E') \text{ ومنه } |\cos \theta - 2| + \frac{1}{(\cos \theta - 1)} = m \text{ تكافئ } (E')$$

$$f(-1) = \frac{5}{2} \text{ بوضع: } \cos \theta = x \text{ مع } -1 \leq x < 1, \text{ نأخذ } \theta \in]0; 2\pi[\text{ لدينا:}$$

$$(1) \text{ إذا كان } m \in \left] -\infty; \frac{5}{2} \right[\text{ فإن للمعادلة } (E') \text{ حليين}$$

$$(2) \text{ إذا كان } m = \frac{5}{2} \text{ فإن المعادلة } (E') \text{ تقبل حل مضاعف هو } \pi, \text{ } \cos \theta = -1 \text{ يكافئ } x = \pi$$

$$(1) \text{ إذا كان } m \in \left] -\infty; \frac{5}{2} \right[\text{ فإن للمعادلة حليين}$$

$$(2) \text{ إذا كان } m \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[\text{ فإن المعادلة } (E') \text{ لا تقبل حلول}$$

لذكير: نعلم ان الربع الاول و الرابع لهما نفس \cos و الربع الثاني و الثالث لهما نفس \cos

حل التمرين 9:

(. الدالة g معرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g .

$$g'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ حيث: } \mathbb{R} \text{ على الاشتقاق}$$

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ ومنه: } g'(x) \text{ و بالتالي: اشارة } g'(x) \text{ من اشارة: } 2\sqrt{x^2 + 1} - x$$

لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} : $g'(x) > 0$ و بالتالي: g دالة متزايدة تماما على \mathbb{R} .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج اشارة g .

$$g(x) = 0 \text{ يعني: } 2x - \sqrt{x^2 + 1} = 0 \text{ أي: } 2x = \sqrt{x^2 + 1} \dots (1) \text{ من أجل: } x < 0 \text{ المعادلة (1) مستحيلة.}$$

من أجل: $4x^2 = x^2 + 1$ $x > 0$ أي: $4x^2 - x^2 - 1 = 0$ ومنه: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (حل مرفوض).

لدينا g مستمرة ورتيبة على \mathbb{R} وبالتالي: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

إشارة g :

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II). نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$.

1. حساب نهائي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

2. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{x^2+1} - x \\ f'(x) &= \frac{2(2x)}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \\ &= \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

وبالتالي: $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

هذا يعني أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\sqrt{x^2+1} > 0$ أي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
-----	-----------	----------------------	-----------

$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	$+\infty \rightarrow \sqrt{3} \rightarrow +\infty$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} \text{ حيث:}$$

3. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{x^2+1} - x + 3x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{x^2+1} + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[2\sqrt{x^2+1} + 2x] \times [2\sqrt{x^2+1} - 2x]}{[2\sqrt{x^2+1} - 2x]} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] = 0 \text{ لدينا:} & \quad \text{لدينا:} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x^2+1) - 4x^2}{[2\sqrt{x^2+1} - 2x]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{[2\sqrt{x^2+1} - 2x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{[\sqrt{x^2+1} - 2x]} = 0 \end{aligned}$$

التفسير البياني:

المستقيم ذو المعادلة: $y = -3x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

4. بين أن المستقيم $y = x$ (Δ') مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x^2+1} - x - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x^2+1} - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2\sqrt{x^2+1} - 2x] \times [2\sqrt{x^2+1} + 2x]}{[2\sqrt{x^2+1} + 2x]} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0 \text{ لدينا:} & \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x^2+1) - 4x^2}{[2\sqrt{x^2+1} + 2x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{[2\sqrt{x^2+1} + 2x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{[\sqrt{x^2+1} + 2x]} = 0 \end{aligned}$$

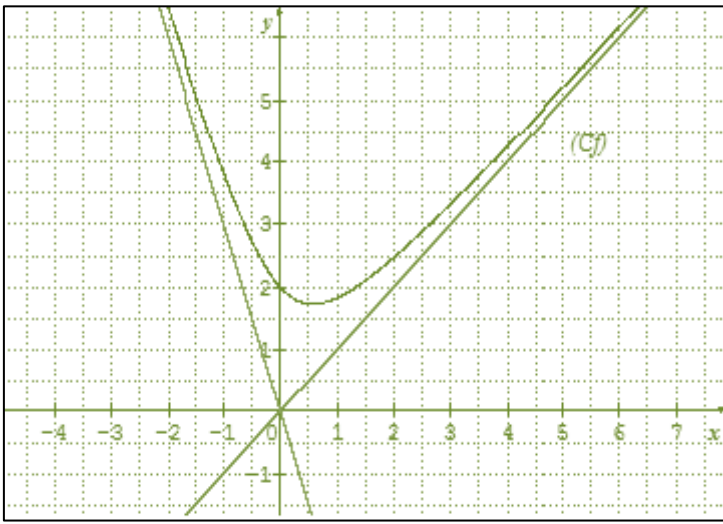
وبالتالي: المستقيم $y = x$ (Δ') مستقيم مقرب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

5. الوضع النسبي:

دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -3x$:

لدينا: $f(x) + 3x = 2\sqrt{x^2+1} + 2x > 0$ وبالتالي: (C_f) فوق (Δ) .

دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ') ذو المعادلة: $y = x$ (Δ'):



(Δ') فوق (C_f): وبالتالي $f(x) - x = 2\sqrt{x^2+1} - 2x > 0$

6. رسم (Δ') ، (Δ) ، (C_f) .

حل التمرين 10:

1.(1). نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

2. اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = \frac{-3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} : \mathbb{R} \text{ الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty; 0]$ و متناقصة تماما على $[0; +\infty[$.

* جدول التغيرات الدالة g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

3. المعادلة: $g(x) = 0$ تكافئ $x = 0$

4. من جدول التغيرات نلاحظ أن: $g(x) \leq 0$

(II). 1. الدالة المشتقة:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \text{ ومنه: } f'(x) = -1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} : \mathbb{R} \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وبالتالي: الدالة f متناقصة على \mathbb{R}

* جدول التغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	--
$f(x)$	∞		$-\infty$

3. البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + f(-x) = 2$.

و منه: $f(x) + f(-x) = 2$ نستنتج أن $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

4. معادلة المماس (D): $y = 1$ معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5. حل المعادلة $f(x) = 0$.

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين 1 و 2 لأن الدالة f مستمرة متناقصة تماما على المجال $[1;2]$.

و $f(1) \times f(2) < 0$ حيث $f(1) \approx 0.71$ و $f(2) \approx -0.11$.

6. * حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 2]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 2] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}\right) = 0 \end{aligned}$$

نستنتج أن: المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 2$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

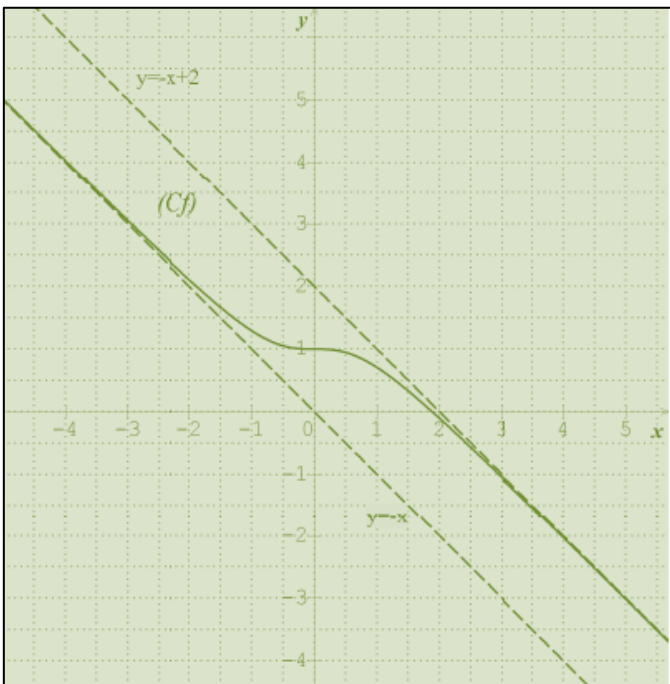
* حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}\right) = 0 \end{aligned}$$

نستنتج أن: المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل بجوار

$-\infty$

7. إنشاء (C):



6. نمازين البكالوريا

2020-2008

□ الشعب العلمية + تسيير و اقتصاد

ج- احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ ثم فسر

النتيجتين بيانيا.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. نأخذ $\alpha \approx 0,26$.

أ- عين مدور $f(\alpha)$ الى 10^{-2} .
ب- أرسم المنحنى (Γ) .

4. أ- أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$

حيث a و b عدنان حقيقيان .

ب- عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ و التي تحقق: $F(1) = 2$.

كل حل مقترح

الدالة العددية g المعرفة على المجال: $]-1; +\infty[$ كما يأتي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1. أ- جدول تغيرات الدالة g .

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-2	$\nearrow +\infty$

بقراءة بيانية: $g(0) = -1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

ب- التعليل:

طريقة 1:

نلاحظ أن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل مرة واحدة في $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ ، يوجد عدد حقيقي α ، $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ ، $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$ يحقق:

$$g(\alpha) = 0$$

طريقة 2:

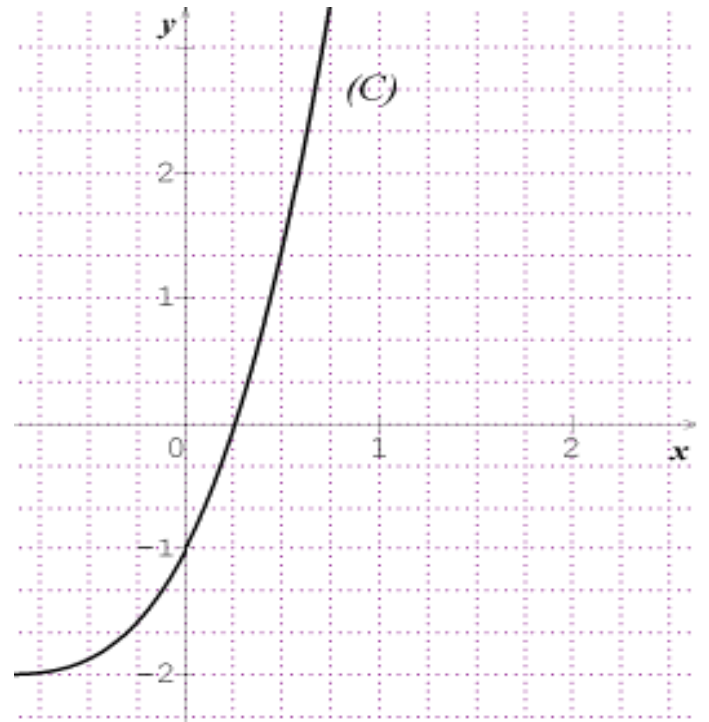
حسب نظرية القيم المتوسطة: g مستمرة على $\left]0; \frac{1}{2}\right[$

و $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ اذن يوجد على الأقل عدد حقيقي α

حيث:

$\left]0; \frac{1}{2}\right[$ بحيث: $g(\alpha) = 0$ و بما أن متزايدة تماما

على $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ فان α وحيد.



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل الباني للدالة العددية g المعرفة على المجال: $]-1; +\infty[$ كما يأتي:
 $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

1. أ- بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g و حدد $g(0)$

واشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

ج- استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

2. f هي الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$ حيث f' هي الدالة المشتقة

للدالة f .

ب- عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة

بيانيا.

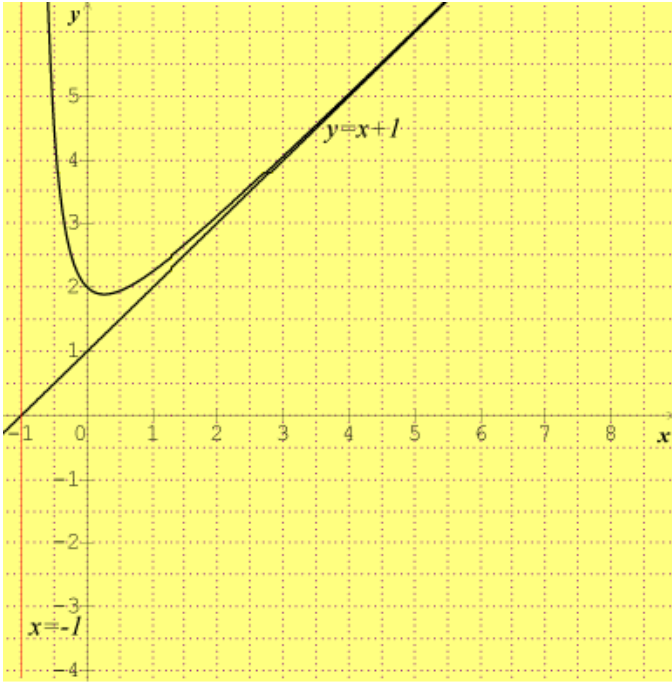
ج- اشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

$$c \in \mathbb{R} , F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + c$$

لدينا F تحقق: $F(1) = 2$.

اذن: $c = 1$ ومنه: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + 1$ هي دالة

الأصلية للدالة f .



x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$--$	0	$+$

2. التحقق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3} \quad \text{ومنه:}$$

ب-

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^2} = 0$$

لأن:

$$g(\alpha) = 0$$

التفسير: المماس للمنحنى (Γ) في النقطة ذات الفاصلة α

يوازي محور الفواصل.

$$\text{ج-} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

المستقيم الذي معادلته: $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل

للمنحنى (Γ) في جوار $+\infty$

د- جدول التغيرات:

بكالوريا جوان 2008 / شعبة تسيير واقتصاد / الموضوع الأول

لتكن f هي الدالة العددية المعرفة على كل مجال من

مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$--$	$--$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$	3	$+\infty$

تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ حيث a, b, c

و c أعداد حقيقية.

1. احسب $f'(x)$.

2. اعتمادا على جدول التغيرات الدالة:

أ- عين الأعداد الحقيقية a, b, c .

ب- عين $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ج- قارن بين صورتين العدديتين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بدلالة الدالة f معللا

اجابتك.

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$--$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

3. أ- بأخذ $\alpha \approx 0,26$.

$$\text{مدور } f(\alpha) \text{ الى } 10^{-2}: f(\alpha) = \frac{3}{(1,26)^2} = 1,89$$

ب- رسم المنحنى (Γ) . (أنظر أسفله)

4. أ- بتوحيد المقامات و المطابقة مع العبارة الأولى للدالة f

$$\text{نجد: } a = b = 1 \text{ أي: } f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

ب- تعين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

$$f(x) - y = \frac{1}{4(x+1)} \text{ لدينا:}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	--		+
الوضعية	(C) تحت (Δ)		(C) فوق (Δ)

ج- أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر المنحنى (C):
طريقة سحب المحاور.

$$\text{نضع: } \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases} \text{ ولدينا: } y = f(x)$$

$$\text{ومنه: } Y + 2 = f(X + 1)$$

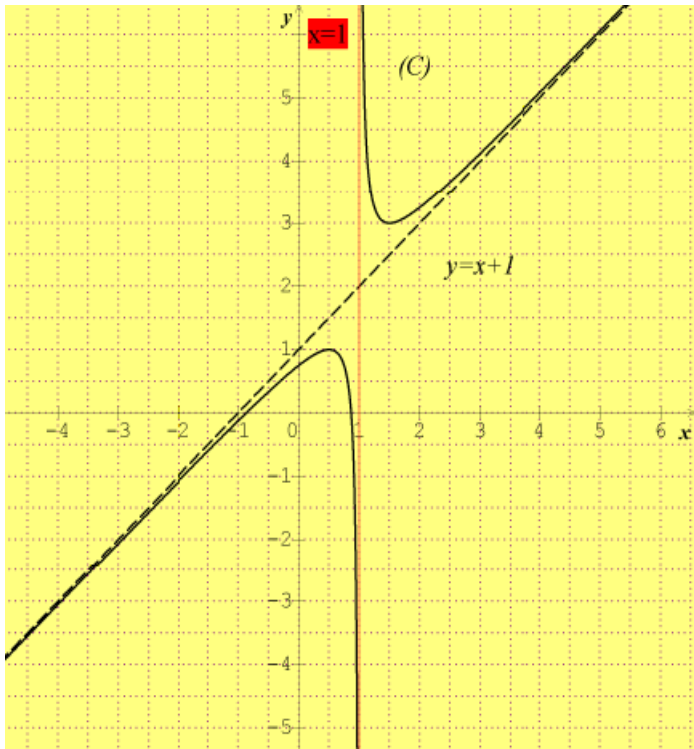
$$\text{أي: } Y = f(X - 1) + 2 = X + \frac{1}{4X}$$

$$\text{بوضع: } g(X) = X + \frac{1}{4X} \text{ نجد دالة فردية}$$

$$\text{لأن: } g(-X) = -g(X)$$

وبالتالي: النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C).

د- تعين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.



$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \text{ و } f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, f(0) = \frac{3}{4}$$

الرسم:

4. المناقشة البيانية:

$$]-1;1[\text{ للمعادلة حلان.}$$

$$\lambda = -1 \text{ أو } \lambda = 1 \text{ للمعادلة حل مضاعف.}$$

3. نأخذ: $a=1, b=1, c=\frac{1}{4}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ- بين أنه عندما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y = x + 1$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج- أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر المنحنى (C).

د- عين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

4. λ عدد حقيقي، عين بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي λ عدد حلول المعادلة: $f(x) = |\lambda|$.

حل مقترح

1. احسب $f'(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على حيث:

$$f'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$$

2. أ- ايجاد a, b, c :

باستعمال جدول التغيرات دالة f :

$$\begin{cases} a - 4c = 0 \\ \frac{1}{2}a + b - 2c = 1 \\ \frac{1}{2}a + b + 2c = 3 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

وبالتالي: $a=1, b=1, c=\frac{1}{4}$.

ب- حساب

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

ومنه: نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة: $x = -1$ مقارب ل (C)

بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يوازي محور الترتيب.

ج- المقارنة:

$$\text{لدينا: } f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{4}\right) \text{ لأن: } \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \text{ و } f \text{ متناقصة على } \left] \frac{1}{2}; 1 \right[.$$

3. أ- المستقيم المقارب المائل:

$$\text{لدينا: } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[x + 1 + \frac{1}{4(x+1)} - (x+1) \right]$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4(x+1)} \right] = 0$$

وبالتالي: عندما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل

مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y = x + 1$.

ب- الوضعية:

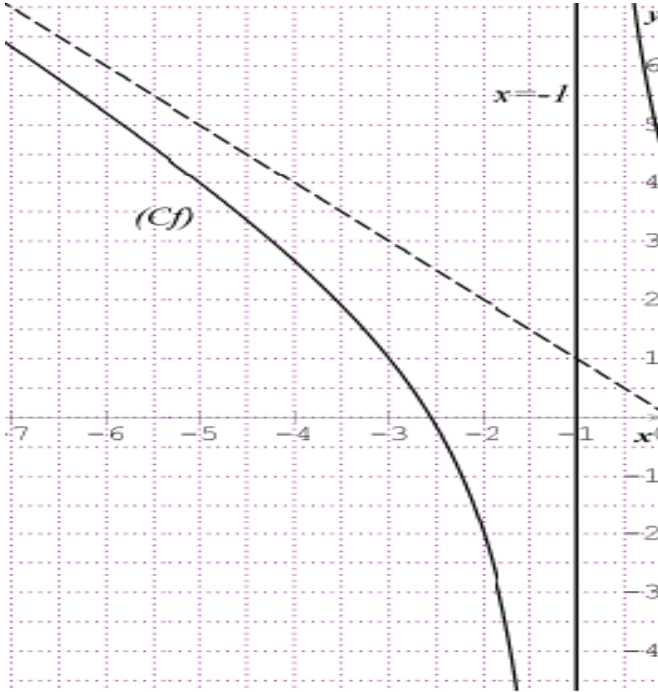
$\lambda \in]-3; 1[\cup]1; 3[$ لا توجد حلول للمعادلة.
 $\lambda = -3$ أو $\lambda = 3$ للمعادلة حل مضاعف.
 $\lambda \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ للمعادلة حلان.

بكالوريا جوان 2009 / شعبة علوم تجريبية / الموضوع الأول

1. (ا) دالة معرفة على $] -\infty; -1[\cup] -1; 0]$: ب:

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1} \quad (C_f)$$

متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، كما هو مبين في الشكل:



1.أ- احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة ل I .

ب- براءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

2. دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1} \quad (C_g)$$

و متجانس .

أ- احسب نهاية g عند $+\infty$.

ب- تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعين معادلة له.

ج- أدرس تغيرات g .

(II) دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

$$1.أ- احسب \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \text{ و } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$$

ماذا تستنتج؟.

ب- أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

2. أكتب معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي

فاصلتها $x_0 = 0$.

بكالوريا جوان 2009 / شعبة تسيير واقتصاد / الموضوع الأول / التمرين 1

f دالة عددية معرفة على $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني و جدول تغيراتها يعطى كما يلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	2

أجب ب: خطأ أو صحيح على كل سؤال مما يلي مع تبرير الإجابة:

1. المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحنى (C_f) .

2. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.

3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي :

$$S =] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$$

4. في المجال $] -\infty; -1[$ يكون $f(-2) > f(x)$ عندما يكون $x < -2$.

5. النقطة $A(-3; 1)$ تنتمي الى المنحنى (C_f) .

6. الدالة f زوجية.

حل مقترح

1. صحيح

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

2. خطأ

لأن: من جدول التغيرات نلاحظ أن .

3. صحيح

لأن لدينا: $f(x) > 2$ من أجل كل x من D_f وبالتالي

$$f(x) > 0 \text{ لما } x \in D_f$$

4. صحيح

لأن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $] -\infty; -1[$ وبالتالي من أجل

$$x < -2 \text{ نجد: } f(x) < f(-2) \text{ أي: } f(-2) > f(x)$$

5. خطأ

لأن: من أجل كل x من D_f لدينا: $f(x) > 2$ وبالتالي :

$$f(-3) \neq 1 \text{ ومنه: النقطة } A(-3; 1) \text{ لا تنتمي الى المنحنى } (C_f) .$$

6. خطأ

لأن لدينا: $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ نلاحظ أن D_f غير

$$\text{متناظر بالنسبة للمبدأ } O \text{، أي: } -1 \notin D_f \text{ ولكن } 1 \in D_f$$

$g'(x)$	--	0	+
---------	----	---	---

* جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	--	0	+
$g(x)$	4	$g(1)$	$+\infty$

حيث: $g(1) = 3$.

(II) دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

$$1. \text{ أ- حساب } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 5h}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-5}{h+1} = -5$$

$$\text{ومنه: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -5$$

ولدينا:

$$. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-3}{h+1} = -3$$

$$\text{ومنه: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -3$$

نستنتج أن:

k الدالة دالة غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأن العدد المشتق من اليمين (-3) لا يساوي العدد المشتق من اليسار (-5).

ب- التفسير الهندسي:

بما أن البدالة k قابلة للاشتقاق من اليمين وقابلة للاشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ملاحظة: يمكن القول أن النقطة (0;4) هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k .

2. أكتب معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$

* معادلة نصف مماس (Δ_1):

(Δ_1) هو نصف مماس عند $x_0 = 0$ حيث: $x_0 \geq 0$

ومنه: $y = k'(0)(x-0) + k(0)$

وبالتالي: $y = -3(x-0) + 4$ أي: $y = -3x + 4$: (Δ_1).

* معادلة نصف مماس (Δ_2):

3. أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

4. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و

المستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$ و $x = -\frac{1}{2}$.

كل حل مقترح

1. (f) دالة معرفة على: $]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$ ب:

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

1. أ- حساب نهايات f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

يمكن استخراج هذه النهايات من خلال التمثيل البياني (C_f).

ب- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	4

2. g دالة معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

أ- نهاية g عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ب- التحقق:

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) = 0$$

فان: المنحنى (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$

معادلته هي: $y = x$.

ج- دراسة تغيرات g :

* اتجاه التغير:

قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ حيث:

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x) = 0$ تكافئ: $(x-1)(x+3) = 0$ أي: $x = 1$ و $x = -3$ حل

مرفوض).

ومنه اشارة هي حسب الجدول التالي:

x	0	1	$+\infty$
-----	---	---	-----------

(Δ_2) هو نصف مماس عند $x_0 = 0$ حيث: $x_0 \leq 0$

ومنه: $y = k'(0)(x-0) + k(0)$

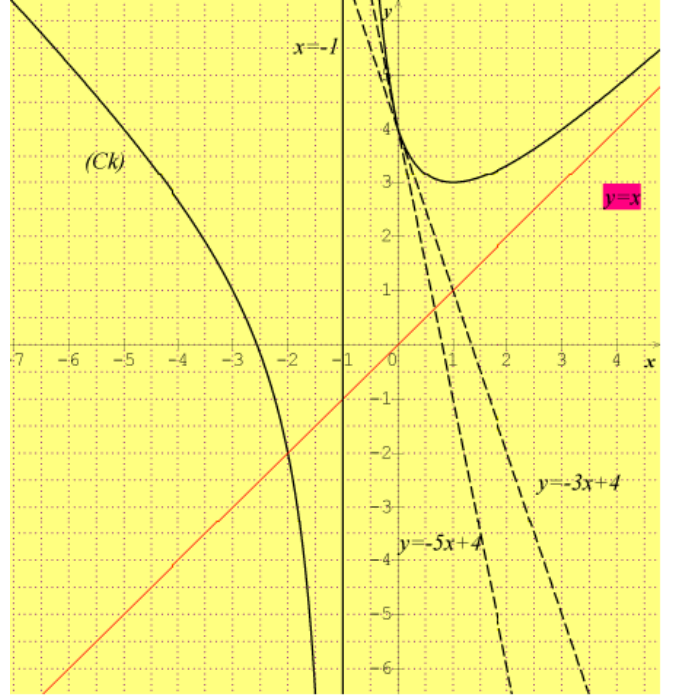
وبالتالي: $y = -5(x-0) + 4$ أي: $y = -5x + 4$: (Δ_2) .

3. رسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

لرسم (C_k) نلاحظ:

- إذا كانت $x \leq 0$ فان: $k(x) = f(x)$ ومنه: $(C_f) = (C_k)$

- إذا كانت $x \geq 0$ فان: $k(x) = g(x)$ ومنه: $(C_g) = (C_k)$



4. حساب المساحة:

نرمز ب S لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات

التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$ و $x = -\frac{1}{2}$.

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 k(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} k(x) dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{8} - 4 \ln 2 + 4 \ln 3 - 4 \ln 2 = 4 \ln 3 - \frac{1}{2}$$

وبالتالي: $S = 4 \ln 3 - \frac{1}{2}$

f دالة معرفة على: $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أدرس تغيرات الدالة f .

2. أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما

(D) معادلته $y = x$.

ب- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D) .

3. أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة

فاصلتها x_0 حيث $1,3 < x_0 < 1,4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه

مع محور الترتيب.

ج- أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

4. أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة

0 للمتغير x .

5. g الدالة العددية معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة:

$$g(x) = |f(x)|$$

بين كيف يمكن انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) . ثم أرسمه

في نفس المعلم السابق.

6. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة

حلول المعادلة: $g(x) = m^2$.

كحل مقترح

$$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

1. دراسة تغيرات الدالة f .

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{\sqrt{x+1}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0 \quad \text{لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$$

المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ حيث:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(\sqrt{x+1})^2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \quad \text{ومنه:}$$

$f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. أ- المستقيمات المتقاربة:

بما أن: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ فإن: $x = -1$ هي معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right] = 0$$

ومنه: $y = x$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3. أ- f مستمرة ورتيبة تماما على $]-1; +\infty[$ حيث:

$$f(1,3) \cdot f(1,4) < 0 \quad \text{ومنه: } f(1,4) \in]1, 3[\quad \text{و} \quad f(1,3) = -0,01$$

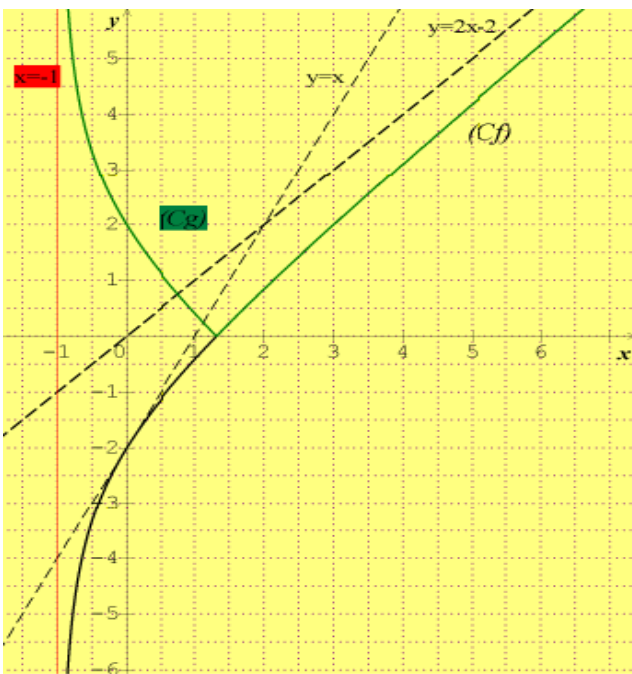
اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

ب- لدينا: $f(0) = -2$ ومنه: $A(0; -2)$ هي نقطة تقاطع (C_f) مع محور الترتيب.

معادلة المماس (Δ) :

$$\text{لدينا: } y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad \text{أي: } (\Delta): y = 2x - 2$$

ج- رسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.



4. لتكن F الدالة الأصلية للدالة f :

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int x dx - \int \frac{2}{\sqrt{x+1}} dx \quad \text{أي:}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x+1} + c$$

لأن: $\frac{1}{2(\sqrt{x+1})}' = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})}$ حيث: c عدد حقيقي.

نعلم أن: F تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x يعني: $F(0) = 0$ وبالتالي: $c = 4$.

5. دالة g معرفة على $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = |f(x)|$.

كيفية انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) :

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} g(x) = f(x), & x > x_0 \\ g(x) = -f(x), & x < x_0 \end{cases}$$

وبالتالي:

من أجل $x > x_0$ (C_g) منطبق على (C_f) .

من أجل $x < x_0$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

6. ناقش بيانيا، عدد واشارة حلول المعادلة: $g(x) = m^2$.

لدينا من أجل:

$m = 0$ للمعادلة حل وحيد موجب. ($x = x_0$)

$0 < |m| < \sqrt{2}$ للمعادلة حلين موجبين.

$|m| = \sqrt{2}$ للمعادلة حلان أحدهما موجب والآخر معدوم.

$|m| > \sqrt{2}$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة.

الدالة العددية f معرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

يرمز (C_f) لتمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس .

1.(I) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل

$$x \in \mathbb{R} - \{-1\} : f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

2. احسب نهايات f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور

الترتيب يطلب تعيين معادلته.

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم

مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

5. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

1.(II) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فان:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} , \text{ و } f' \text{ هي الدالة المشتقة للدالة } f .$$

2. عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها و

شكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي

فاصلتها 0.

1.(III) بين أن النقطة $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. أرسم كلا من (D) ، (Δ) و (C_f) .

3. عين بيانا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة:

$$f(x) = m \text{ حلان مختلفان.}$$

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و

المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و

$$x = e^2 - 1$$

كحل مقترح

1.(I) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1} : \mathbb{R} - \{-1\} \text{ من أجل كل } x$$

$$= \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x + 1}$$

$$= \frac{ax^2 + (a + b)x + (b + c)}{x + 1}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 3 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد:}$$

2. النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 1} = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{4}{x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{4}{x + 1} = -\infty \text{ وبالتالي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x + 1} = -\infty : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x - 1 + \frac{4}{x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x + 1} = +\infty : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - 1 + \frac{4}{x + 1} = +\infty$$

3. بما أن : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ فان المنحنى

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترتيب معادلته: $x = -1$

4. المستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{4}{x + 1} - (x - 1)$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 1}$$

$$= 0$$

ومنه: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل

للمنحنى (C_f) .

5. دراسة الوضعية ل (C_f) و (Δ) .

$$\text{لدينا: } f(x) - y = [f(x) - (x - 1)] = \frac{4}{x + 1}$$

$$\text{ندرس إشارة } \frac{4}{x + 1} \text{ نجد:}$$

لما $x < -1$ المنحنى (C_f) تحت (Δ) .

ولما $x > -1$ المنحنى (C_f) فوق (Δ) .

1.(II) المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{(x + 1)^2 - 4}{(x + 1)^2}$$

$$\text{لذكير: } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1 - 2)(x + 1 + 2)}{(x + 1)^2}$$

2. عين اتجاه تغير الدالة f .

* إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط (لأن المقام موجب تماما على

$\mathbb{R} - \{-1\}$ وهي:

$$0 = (x - 1)(x + 3) \text{ معناه: } (x - 1) = 0 \text{ أو } (x + 3) = 0 \text{ أي:}$$

$$x = 1 \text{ أو } x = -3$$

و عليه

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$(x-1)(x+3)$	$+$	0	$--$	0	$+$

f : متزايدة تماما على المجال: $]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$
 و متناقصة تماما على المجال: $]-3; -1[\cup]-1; 1[$
 (لأن: $-1 \notin D_f$).
 *جدول تغيرات:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$--$	$--$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-6	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

$$f(1) = 2 \text{ و } f(-3) = -6$$

3. معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0:
 تكتب من الشكل: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ حيث: $f(0) = 3$
 و $f'(0) = -3$ اذن: $y = -3x + 3$

III.1. تبيان أن النقطة $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

الطريقة 1:

لذكير: $A(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) معناه: من
 حل كل $x, 2\alpha - x$ من D_f , لدينا:
 $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

لدينا: $\alpha = -1$ و $\beta = -2$ وبالتالي:

$$f(-2-x) = -2-x-1 + \frac{4}{-2-x+1}$$

$$f(-2-x) = -x-3 + \frac{4}{-x-1} = -x-3 - \frac{4}{x+1}$$

$$\text{ومنه: } f(-2-x) + f(x) = -4 \text{ و أي:}$$

$$f(2(-1)-x) + f(x) = 2(-2)$$

وبالتالي النقطة $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

الطريقة 2: سحب المحاور.

$$\text{نضع: } \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 2 \end{cases} \text{ و لدينا: } y = f(x)$$

$$\text{و منه: } Y - 2 = f(X - 1)$$

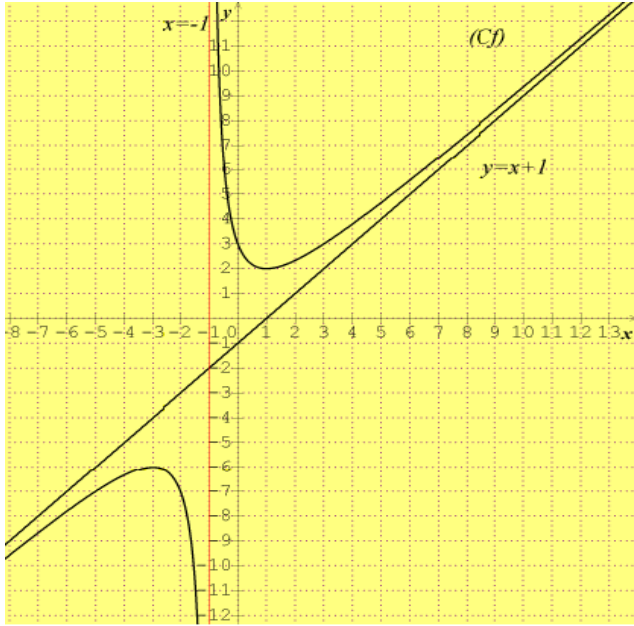
$$\text{أي: } Y = f(X - 1) + 2 = X + \frac{4}{X}$$

$$\text{بوضع: } g(X) = X + \frac{4}{X} \text{ نجد } g \text{ دالة فردية}$$

$$\text{لأن: } g(-X) = -g(X)$$

و بالتالي: النقطة $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

2. رسم (D), (Δ), و (C_f).



3. المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة: $y = m$ وعليه:

- للمعادلة حلين مختلفين من أجل: $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$

- للمعادلة حل مضاعف من أجل: $m = 2$ أو $m = -6$

- ليس للمعادلة حلول من أجل: $m \in]-6; 2[$

4. حساب المساحة:

$$S = \int_1^{e^2-1} [f(x) - (x-1)] dx = \int_1^{e^2-1} \frac{4}{x+1} dx = [4 \ln(x+1)]_1^{e^2-1} ua.$$

$$S = 4(\ln e^2 - \ln 2) ua = (8 - 4 \ln 2) ua \text{ ومنه:}$$

بكالوريا جوان 2010 / شعبة تقني رياضي / الموضوع الثاني

f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و

متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أثبت أن الدالة f فردية.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

ج- أدرس تغيرات الدالة f .

2. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات

الفاصلة 0.

ب-أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

ج-بين أن (d) ذو المعادلة: $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ثم استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر.

د-أرسم (d) ، (d') و (C_f) في المعلم السابق.

3. g دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

أ-أثبت أن الدالة g زوجية.

ب-انطلاقاً من (C_f) أرسم (C_g) منحنى الدالة في نفس المعلم السابق.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{ومنه:}$$

ج-دراسة تغيرات الدالة f .
النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

لدينا: $f'(x) > 0$ إذن دالة متزايدة تماماً على \mathbb{R} ومنه جدول تغيراتها هو كالاتي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. أ-معادلة المماس (T) :

لدينا: $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ حيث: $f'(0) = 2$ و

$$f(0) = 0$$

ومنه: $y = 2x$ هي معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= f(x) - 2x = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - x = \frac{x - x\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{x(1 - \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

أشارة الفرق من اشارة البسط أي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0
الوضعية		(C_f) فوق (T)	(C_f) تحت (T)

$(C_f) \cap (T) = \{O(0;0)\}$

نستنتج أن:

(C_f) يقطع (يخرق) المماس (T) في المبدأ وبالتالي: $O(0;0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

ج-بين أن (d) ذو المعادلة: $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) + x \left(\frac{-2x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

كل حل مقترح

f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

1. أ- اثبات أن الدالة f فردية.

لذكير: f دالة فردية معناها: من أجل كل x من D_f و $-x$ من D_f لدينا: $f(-x) = -f(x)$.

لدينا:

$$-x, x \in D_f$$

$$f(-x) = -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \right)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= - \left[x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \right] \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

وبالتالي: الدالة f فردية.

ب- المشتقة:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x الدالة f قابلة للاشتقاق:

ومنه: الدالة g زوجية.

ب- الرسم:

لدينا:

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$$

أي: إذا كان $x > 0$ فإن (C_g) منطبق على (C_f) .

إذا كان $x < 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

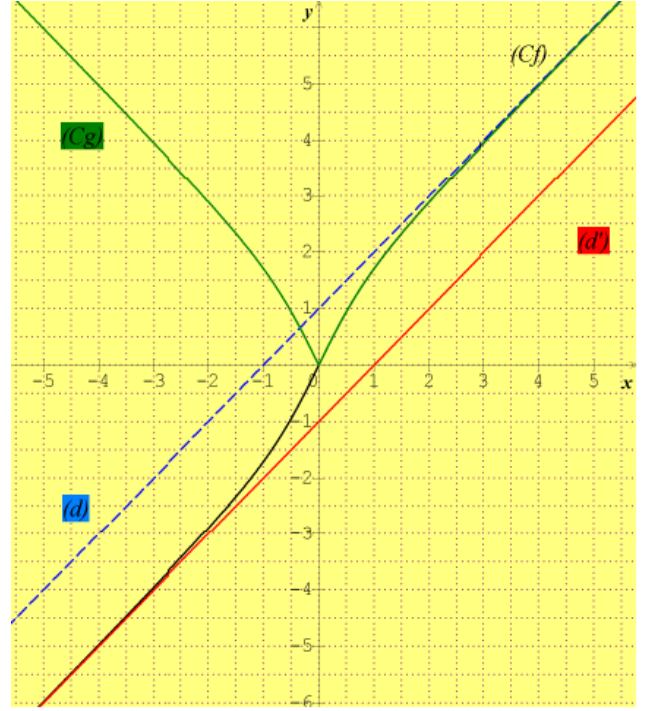
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - x - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = 0$$

وبالتالي: المستقيم (d) ذو المعادلة: $y = x + 1$ مقارب للمنحنى

(C_f) في جوار $+\infty$.

نلاحظ أن: المستقيم $x - 1$ هو مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $-\infty$.



لأن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - x + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 = 0$$

وبالتالي: $y = x - 1$ هي معادلة المستقيم المقارب الآخر

(C_f) .

د- رسم (d) ، (d') و (C_f) : (أنظر أسفله \mathbb{R})

3. g دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

أ- اثبات أن الدالة g زوجية:

لذكير: f دالة معناها: من أجل كل x من D_f و $-x$ من D_f

لدينا: $f(-x) = f(x)$.

$$g(-x) = |-x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= g(x)$$

بكالوريا جوان 2010 / شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الأول

f دالة عددية معرفة على \mathbb{R}^* كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و

متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* فإن: $f(x) = x - 5 + \frac{\alpha}{x^2}$ ،

حيث α عدد حقيقي يطلب تعيينه

2. احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. أ- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* فإن:

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2}$$

استنتج تغير الدالة f .

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل

، يطلب تعيين معدلتهما..

5. أوجد معادلة ل (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات

الفاصلة 1.

6. أرسم (Δ) والمنحنى (C_f) .

7. أ- عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ و

التي تحقق: $F(2) = -10$.

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و

محور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$.

كل حل مقترح

f دالة عددية معرفة على \mathbb{R}^* كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$$

1. تعيين α :

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^3(x-5) + 4}{x^3}$$

وبالتالي: معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة أهي: $y = -7x + 7$.

6. رسم (Δ) والمنحنى (C_f). (أنظر أسفله)

7. أتعين الدالة الأصلية F للدالة f :

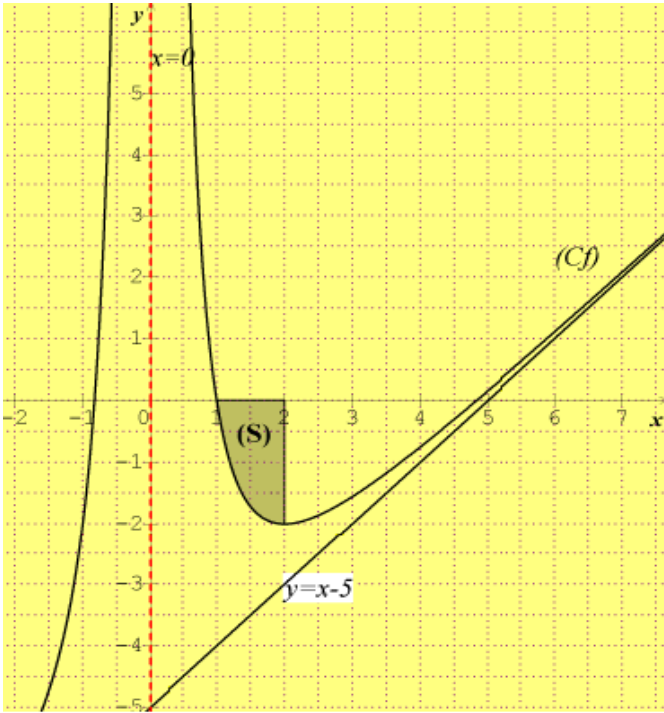
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - 4\frac{1}{x} + c \text{ ، حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

لدينا F تحقق: $F(2) = -10$ معناه: $c = 0$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - 4\frac{1}{x}$$

ب-المساحة:

تذكير: * إذا كانت f الدالة سالبة على المجال $[a; b]$ و S المساحة المحددة بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $x = a$



$$S = \int_a^b -f(x)dx \text{ فان } y=0 \text{ و } x=b$$

$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx \text{ *}$$

$$S = \int_1^2 -f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx$$

$$\text{ومنه: } S = F(1) - F(2) \text{ و بالتالي: } S = \frac{3}{2}ua$$

بكالوريا جوان 2011 / شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \text{ بالعبارة: } \mathbb{R}$$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و

متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الوحدة 1cm على محور الفواصل و 4cm على محور الترتيب.

6. تمارين البكالوريا

#مجلة الدوال العددية - بكالوريا 2021

أي: $f(x) = x - 5\frac{4}{x^2}$ وبالتالي: $\alpha = 5$.

2. النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 5\frac{4}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 5\frac{4}{x^2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 5\frac{4}{x^2} \right) = +\infty$$

3. أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* :

$$\text{لدينا: } f'(x) = 1 - \frac{8x}{x^4} = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 2x + 4)}{x^3} \text{ لأن:}$$

$$(x-2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 - 8$$

لدينا: $x^2 + 2x + 4 > 0$ مميزه: $\Delta = -12$ ومنه: $x^2 + 2x + 4 > 0$ و

بالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة: $\frac{x-2}{x^3}$ وبالتالي:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-- 0	+

f متزايدة تماما على $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

f متناقصة تماما على $]0; 2]$

ب- جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-- 0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

4. المستقيمين المقاربين:

بما أن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ فان $x=0$ معادلة مستقيم مقارب

يوازي محور الترتيب.

ونلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2} \right) = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x^2} \right) = 0$$

ومنه: $y = x - 5$ معادلة مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

5. معادلة المماس (Δ):

المعادلة هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ (Δ).

حيث: $f(1) = 0$ و $f'(1) = -7$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} :

$$f'(x) = \frac{-1(x^2 + 1) + x(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

* إشارة $f'(x)$ من إشارة: $x^2 - 1$.

ومنه: $x^2 - 1 = 0$ أي: $(x-1)(x+1) = 0$ إذن: $x = 1$ أو $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$(x-1)(x+1)$	$+$	0	$--$	0	$+$

* اتجاه التغير:

وعليه: f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال: $]-1; 1]$.

* جدول تغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$--$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$	1

5. لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2 - f(x) = 2 - 1 + \frac{x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 + 1} = f(-x)$$

نستنتج أن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر (C) .

ملاحظة: بما أن $\Omega(0;1) \in (C)$ فإن Ω نقطة انعطاف أيضا.

6. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C) .

2. احسب نهاية الدالة $+\infty$ عند وعند $-\infty$ ، واستنتج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادله له.

3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

4. احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$f(-x) = 2 - f(x)$ واستنتج أن (C) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

6. أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C) .

$$7. \text{أحسب التكامل: } \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

ب- احسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى و محور الفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 0$ و $x = 1$.

كل حل مقترح

الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بالعبارة: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$.

1. التبيان:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 1} = 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

اذن: $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ و $-\infty$ ، يوازي محور الفواصل.

3. الوضعية:

لدينا: $f(x) - y = f(x) - 1 = \frac{-x}{x^2 + 1}$ إشارة الفرق $f(x) - y$ هي من إشارة: $-x$

معناه:

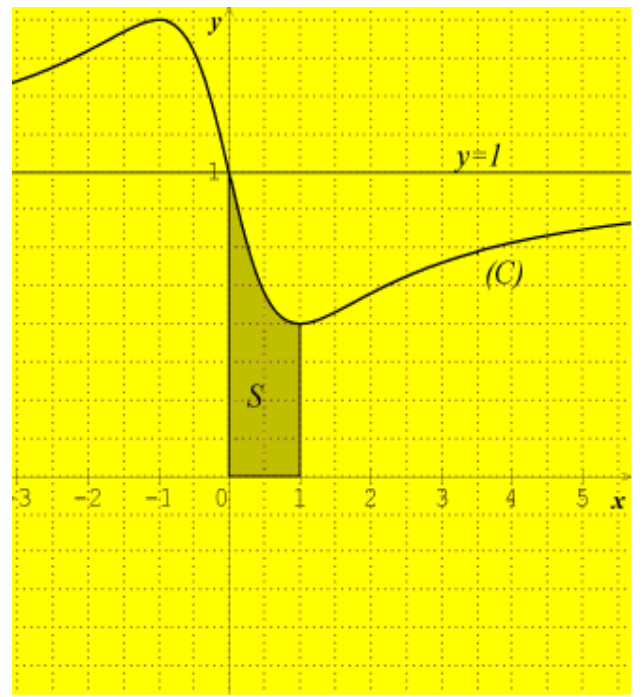
لما $x < 0$ المنحنى (C) فوق (Δ) .

ولما $x > 0$ المنحنى (C) تحت (Δ) .

في النقطة $A(0,1)$ المنحنى (C) يقطع (Δ) .

4. حساب $f'(x)$:

إنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5; 200]$ بالدالة f .
 أي: من أجل كل x من المجال $[5; 200]$ ، $C_m(x) = f(x)$.
 أ- ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع
 لكي تكون التكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟
 ب- نرمز بالرمز $C(x)$ للتكلفة الإجمالية لإنتاج آلة ونذكر
 أن: $C'(x) = C_m(x)$
 جد عبارة التكلفة الإجمالية $C(x)$ ، علماً أن التكلفة الإجمالية
 لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000، ثم استنتج قيمة التكلفة
 الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.



حل مقترح

f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:
 1. النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

2. أ- المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x^2+1)^2 - 57600}{(x+1)^2}$$

ومنه: $f'(x) = \frac{(x^2+x)^2 - 57600}{(x+1)^2}$

ب- اتجاه التغير:

نلاحظ أن:

$$(x^2+x)^2 - 57600 = (x^2+x-240)(x^2+x+240)$$

لدينا من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $x^2+x+240 > 0$ ، ومنه:

إشارة $f'(x)$ من إشارة: $x^2+x-240$.

نجد: $\Delta = 961$ و بالتالي: يوجد حلان هما: 15 و -16

(-16) حل مرفوض لأنه لا ينتمي إلى مجموعة تعريف

(الدالة f).

x	-1	15	$+\infty$
$x^2+x-240$	--	0	+

ومنه: متزايدة تماماً على $[15; +\infty[$

ومتناقصة تماماً على $]-1; 15]$

*جدول تغيرات:

7. أ- حساب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

ب- المساحة:

$$S = 4 \cdot \int_0^1 f(x) dx = 4 \text{ cm}^2 \times \left(\int_0^1 1 - \frac{x}{x^2+1} dx \right) \text{ cm}^2$$

$$S = 4 \times \left(1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \text{ cm}^2 \text{ ومنه:}$$

$$S = (4 - 2 \ln 2) \text{ cm}^2 \text{ أي:}$$

بكالوريا جوان 2012 / شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الثاني

f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعبارة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$$

1. احسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل

جدول تغيراتها.

ج- جد الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال

$]-1; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x=0$.

3. تنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات

على الأقل و 200 آلة على الأكثر. نمذج التكلفة الهامشية C_m

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ- بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب-استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \quad \text{كما يلي :}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا

(Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

3. أ- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

حيث f' مشتقة الدالة f .

ب-استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول

تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)

4. احسب $f(1)$ ثم حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$.

5. أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6. لتكن h الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

السابق.

أ- تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $h(x) = f(x) - 2$

ب- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط

يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .

كل حل مقترح

1. (I) أ- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} :

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} :

$$\text{لدينا: } g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$$

$g'(x) > 0$ وبالتالي g متزايدة تماما على \mathbb{R} .

x	-1	15	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	+
$f(x)$	$+\infty$	4825	$+\infty$

ج-

الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1; +\infty[$:

$$\text{لدينا: } H(x) = \int h(x) dx = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) + c$$

حيث c عدد حقيقي.

نعلم أن H تنعدم من أجل $x = 0$ أي: $H(0) = 0$

وبالتالي: $c = 0$.

3. أ- عدد الآلات

الكلفة الهامشية أقل ما يمكن أي نبحث عن القيمة الحدية

الصغرى للدالة f .

من جدول التغيرات نجد أن f لها قيمة الحدية الصغرى تبلغها

من أجل: $x = 15$.

وبالتالي عدد الآلات هو 15.

ب-الكلفة الإجمالية

نعلم أن: $C'(x) = C_m(x)$ ومنه: C هي الدالة الأصلية للدالة f

لأن: $C_m(x) = f(x)$.

أذن:

$$C(x) = \int f(x) dx = \int f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100x + \frac{57600}{x+1} dx$$

$$\text{أي: } C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln(x+1) + k$$

حيث: k عدد حقيقي.

علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000 يعني:

$$C(5) = 4000 \quad \text{ومنه: } k = \frac{473375}{12} - 57600 \ln 6$$

وبالتالي:

عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$ هي:

$$C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12}$$

استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى:

$$C(15) = 101662,43 \text{ DA}$$

بكالوريا جوان 2014 / شعبة علوم تجريبية / الموضوع الثاني

1. لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2. أ- g مستمرة ورتيبة تماما على \mathbb{R} حيث: $g(0,7) \approx -0,37$ و $g(0,8) \approx 0,06$
 إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا
 وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$.
 ب- الإشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	--	0	+

(II). 1. النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

ب- المستقيم المقارب مائل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}(x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{2(2x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{4x} = 0$$

إذن: المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته:

$$y = \frac{1}{2}(x+1)$$

ج- ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

$$f(x) - \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

العبارة: $2(2x^2-2x+1) > 0$ لأن مميزها: $\Delta = -16 < 0$
 وبالتالي:

$$\text{إشارة: } f(x) - \frac{1}{2}(x+1) \text{ من إشارة: } 1-3x$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x) - y$	--	0	+
الوضعية	المنحنى (C_f) تحت (Δ)	نقطة التقاطع $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	المنحنى (C_f) فوق (Δ)

3. أ- من أجل كل من:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{-3(2(2x^2-2x+1) - (1-3x)(8x-4))}{4(2x^2-2x+1)^2}$$

بتوحيد المقام نجد:

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2x^3 - 4x^2 + 7x - 4)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} \text{ أي:}$$

$$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2} \text{ ومنه:}$$

إشارة: $f'(x)$ من إشارة: $x.g(x)$ أي:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$x.g(x)$	--	0	--	+

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	--	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	\searrow	\nearrow

4. حساب $f(1)$:

$$f(1) = 0$$

ثم حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ يعني: } \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1} = 0 \text{ وبالتالي:}$$

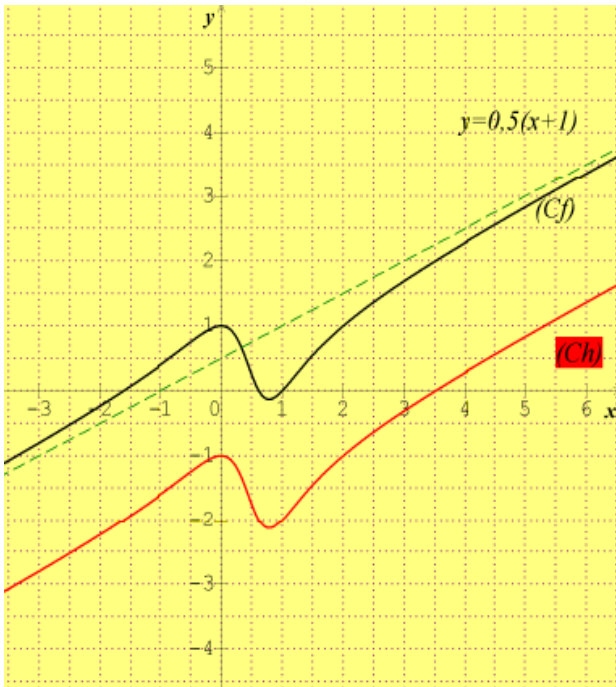
$$(x+1)(x^2+x-1) = 0$$

وبالتالي: $x+1=0$ أو $x^2+x-1=0$.

إذن حلول المعادلة هي:

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_0 = 1$$

5. أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)



6. h دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

أ- التحقق:

من أجل كل x من \mathbb{R} : $h(x) = f(x) - 2$ يعني:

$$h(x) + 2 = f(x)$$

$$h(x) + 2 = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} + 2$$

$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1 + 2(2x^2 - 2x + 1)}{2x^2 - 2x + 1}$$

أي:

$$= \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} = f(x)$$

وبالتالي:

$$h(x) + 2 = f(x)$$

ب- نستنتج أن:

$$(C_h) \text{ هو صورة } (C_f) \text{ بالانسحاب الذي شعاعه } \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. g دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R}

لدينا: الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال \mathbb{R} حيث:

$$g'(x) = 3x^2 + 6$$

g دالة متزايدة تماما على لأن: $3x^2 + 6 > 0$

2. g مستمرة ورتيبة تماما على \mathbb{R} حيث: $g(-1, 48) = ?$ و

$$g(-1, 47) = ?$$

اذن:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

$$\alpha \in]-1, 48; -1, 47[$$

اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	--	0	+

1. f معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$

1. أ- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

وبالتالي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

ب- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال \mathbb{R} حيث:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 2) - 2x(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4 + 12x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $x.g(x)$ أي:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	--	+

الدالة f متناقصة تماما على $[\alpha; 0]$

و متزايدة تماما على $]-\infty; \alpha] \cup [0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

بكالوريا جوان 2017 / شعبة تقني رياضي / الموضوع الثاني

1. لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} .

2. بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$\alpha \in]-1, 48; -1, 47[$$

اشارة $g(x)$.

11. نعتبر الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2 + 2)^2}$

ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} ثم شكل جدول تغيراتها.

2.1- بين أن المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ مقارب مائل للمنحنى

(C_f)

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

3. بين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

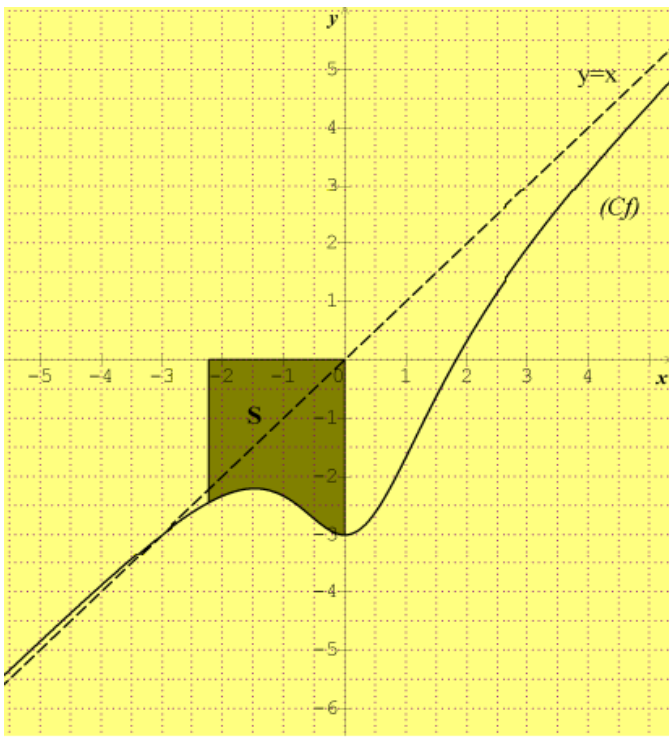
4. أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

5. نرسم S الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و

المستقيمت التي معادلاتها: $x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$.

أثبت أن من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$

ثم بين ان $\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$



x	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$f(\alpha)$	-3	$+\infty$

2. أ- المستقيم المقارب المائل:

بما أن:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6 - x(x^2 + 2)}{x^2 + 2}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-6 - 2x}{x^2 + 2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ ومنه: المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - y = \frac{-6 - 2}{(x^2 + 2)^2}$ إشارة الفرق من إشارة: $-6 - 2x$ أي:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$--$
الوضعية	(Δ) فوق (C_f)	\downarrow (Δ) تحت (C_f)	$(C_f) \cap (\Delta) = \{I(-3; -3)\}$

3. تبيان أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$.

لدينا: $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2}$ ومن السؤال (1) و (2) لدينا:

$$g(\alpha) = 0$$

أي: $\alpha^3 + 6\alpha + 12 = 0$ وبالتالي: $\alpha^3 = -6\alpha - 12$ و

$$\alpha^2 = -6 - \frac{12}{\alpha}$$

بالتعويض في (1) نجد: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا: $-1,48 < \alpha < -1,47$ وبالتالي:

$$-2,22 < f(\alpha) < -2,21$$

4. أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :

5. أثبت أن من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$

* من جدول التغيرات للدالة f نجد:

$$-3 \leq f(x) \leq f(\alpha) \text{ فان: } \alpha \leq x \leq 0$$

* لدينا:

$$\int_0^\alpha -3 dx \leq \int_0^\alpha f(x) dx \leq \int_0^\alpha f(\alpha) dx$$

S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات

التي معادلاتها: $x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$ وبما أن الدالة سالبة

على المجال $\alpha \leq x \leq 0$ اذن

$$-\int_\alpha^0 f(\alpha) dx \leq -\int_\alpha^0 f(x) dx \leq -\int_\alpha^0 -3 dx$$

$$\text{أي: } -\int_\alpha^0 \frac{3}{2} \alpha dx \leq -\int_\alpha^0 f(x) dx \leq -\int_\alpha^0 -3 dx$$

$$\text{ومنه: } -\int_\alpha^0 \frac{3}{2} \alpha dx \leq -\int_\alpha^0 f(x) dx \leq -\int_\alpha^0 -3 dx$$

$$-\left[\frac{3}{2}\alpha x\right]_\alpha^0 \leq S \leq -[-3x]_\alpha^0$$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$$

بكالوريا جوان 2019 / شعبة تسيير واقتصاد / الموضوع الأول

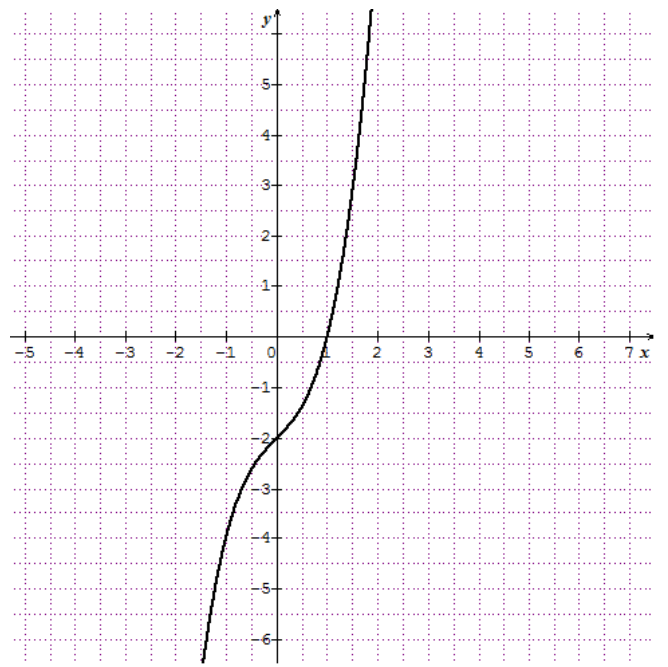
(1) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = x^3 + x - 2$

و تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل:

الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} : $g(x) = x^3 + x - 2$ (I)
 • $g(1) = 0$
 إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

الدالة المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي : $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$ (II)
 أ (1)



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \end{aligned}$$

بقراءة بيانية عين $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* :

$$f(x) = x - \frac{1-x}{x^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً.

(2) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ يبين أنه من أجل كل x غير معدوم:

- استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ- يبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل

للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(4) يبين أن المعادلة $f(\alpha) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال

$]-1, 4; -1, 3[$.

(5) أرسم (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

(6) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و

المستقيمات التي معادلاتها : $y = x$ ، $x = 1$ و $x = 3$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

(2) تبيان أنه من أجل كل x غير معدوم: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}^* و من أجل كل x غير معدوم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1 \times x^2 - 2x(x-1)}{(x^2)^2} \\ &= 1 - \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = 1 - \frac{-x^2 + 2x}{x^4} \\ &= \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x(x^3 + x - 2)}{x^4} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

- إتجاه تغير الدالة f :

لندرس إشارة $f'(x)$:

كل حل مقترح

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و

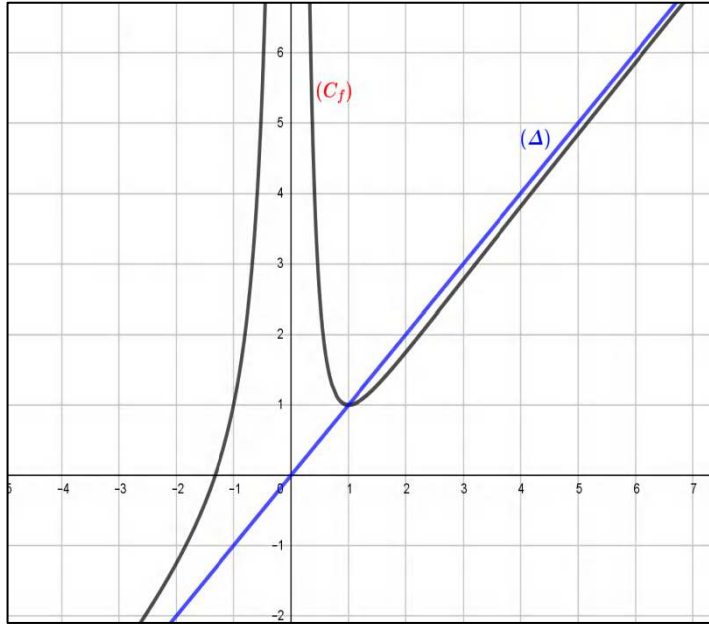
$$\begin{cases} f(-1.4) = -0,17 \\ f(-1.3) = 0,06 \end{cases} \text{ و }]-1,4; -1,3[\subset]-\infty; 0[$$

أي $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، بحيث

$$-1.4 < \alpha < -1.3$$

5-الرسم :



6-حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين التي معادلاتها : $x = 1$ و $x = 3$ و $y = x$.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (x - f(x)) dx \\ &= \int_1^3 \left(\frac{x-1}{x^2} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{x} \right]_1^3 \\ &= \left(\ln 3 - \frac{2}{3} \right) u.a \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g(x)$		-	○	+
x^3	-	○	+	
$f'(x)$	+		-	+

من أجل $x \in]0; 1[$ ، يكون $f'(x) < 0$ و بالتالي الدالة

متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$.

من أجل $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ ، يكون $f'(x) > 0$ و

بالتالي الدالة متزايدة تماما على كل من المجالين $]1; +\infty[$ و

$]-\infty; 0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$

3- أ - تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب

مائل للمنحنى (C_f) .

$$\text{لدينا : } f(x) - y = f(x) - x = -\frac{x-1}{x^2} = \frac{-x+1}{x^2}$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x+1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0 \text{ و}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل

للمنحنى (C_f) .

ب - دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

$$f(x) - x = -\frac{x-1}{x^2} = \frac{-x+1}{x^2}$$

: $f(x) - x$ من إشارة $-x+1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	○	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

4-تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

$]-1,4; -1,3[$:

الدالة العددية f معرفة على \mathbb{R} كمايلي: $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 2}$ ،
(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد
المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وفسر النتيجة
هندسيا.

2. من أجل كل x من \mathbb{R} نضع: $g(x) = f(x) - 1$

أ- أدرس حسب قيم x إشارة $g(x)$.

ب- أدرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة
 $y = 1$.

أ-3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$$

ب- بين أن f متزايدة تماما على كل من $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$
ومتناقصة تماما على $[-1; 3]$.

ج شكل جدول تغيرات الدالة f .

أ-4. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي
فاصلتها 1.

ب- تحقق أن (T) يقطع (C) في النقطة $A\left(-2; \frac{5}{2}\right)$.

5. أرسم (T)، (Δ)، و (C).

6. الدالة المعرفة على \mathbb{R} ب: $h(x) = \frac{x^2 - |x| + 4}{x^2 + |x| + 2}$ ،
(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- بين أن الدالة h زوجية.

ب- تحقق أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $h(x) = f(x)$

ج- اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) وأرسمه.

الدالة العددية f معرفة على \mathbb{R} كمايلي: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ ،
(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد
المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- بين أن f دالة زوجية.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وفسر
النتيجتين هندسيا.

ج- أدرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة
 $y = 1$.

أ-2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$

ب- استنتج أن f متناقصة تماما على $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما
على $[0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

أ-3. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي
فاصلتها 2.

ب- جد احداثيات نقطتي تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل.

4. أرسم (T)، (Δ)، و (C).

5. الدالة العددية g معرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x^2 + 1}$ ،
(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- بين أن: من أجل كل x من $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ ،
 $g(x) = f(x)$.

و من أجل كل x من $[-2; 2]$ ، $g(x) = -f(x)$.

ب- شكل جدول تغيرات دالة g .

سيتم نشر حل التمرين لاحقا

تقوية وحدة الدوال العددية

نص التمرين:

I. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = ax^3 - 4x^2 - 6x + b$.

(C_g) تمثيلها البياني المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (T) مماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة -2.

كما هو موضح في الشكل المقابل:

بقراءة بيانية :

1. احسب $g'(-2)$ ثم أكتب معادلة المماس (T) .

2. شكل جدول تغيرات الدالة g .

3. عين اشارة $g(x)$.

4. عين العددين a و b .

II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ على $f(x) = -2x - 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند -1 ثم فسر النتيجة بيانيا.

2. احسب نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{2x \cdot g(x)}{(x+1)^4}$.

4. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-1,7 < \beta < -1,6$.

6. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

7. أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $(x+1)^2 + m + mx^2 = -1 - 2mx$.

انتهى



هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ
و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

**تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي
للصفحة**

5min  Maths

