5 min Maths

مجلة

بكالوريا 2021

الأستاذ شعبان أسامة
CHABANE Oussama

يقدم لكم ...

الدوال العددية

شعبة تسيير و اقتصاد

"ستحقق كلا أحلامك اذا كنت تملك الشجاعة لمطاردتها"

والت ديزني

1. ملخص الدرس
2. تمارين البكالوريا 2008-2019
3. تمارين مقترحة

اصدار 2021 تلمسان 0775737163

5min maths

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها الطالب " مجلة 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي لشعبة تسيير و اقتصاد لمحور

الدوال العددية

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر

الأستاذ شعبان أسامة

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة،تم اصدار أول نسخة
بتاريخ :2019/09/13

5min Maths

CHABANE Oussama

تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس
2. تمارين البكالوريا 2008-2019
3. تمارين مقترحة

#5min Maths

1. ملخص الدرس

❶ تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$. نقول عن f أنها مستمرة على I إذا استطعنا رسم منحنيها (C) بدون رفع القلم وفق خط مستمر.

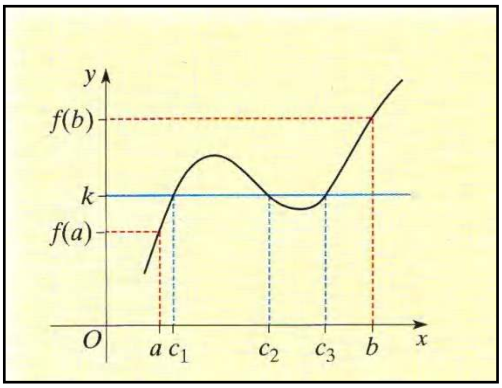
- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

❷ مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

بصيغة أخرى: إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.



التفسير البياني

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحني (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b. (بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).

❸ نهايات الدوال المرجعية

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \quad *\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \quad *\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \quad *\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \quad *\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty \quad *\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \quad *\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0 \quad *\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \frac{1}{x}=+\infty \quad *\ \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} \frac{1}{x}=-\infty$

❹ العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$.

- **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- **نهاية جداء دالتين:ير**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

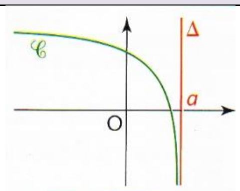
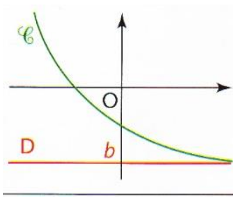
ملاحظة | تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات **"عدم التعيين"** (ح ع ت)

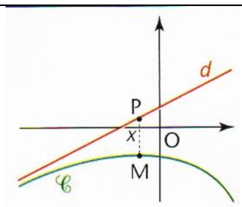
يوجد أربع حالات عدم التعين : $\dfrac{0}{0}$ ، $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، $0\times(\pm\infty)$ و $\pm\infty\mp\infty$

قاعدة
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

5 المستقيمات المقاربة

a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحنى (C)	
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$	المستقيم (D) ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	المستقيم (d) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	

ملاحظة إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$

فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f.

6 الوضع النسبي لمنحن والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.

إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.

إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.

7 الدالة مركب

الدالة مركب دالتين

تعريف: v دالة معرفة على مجال J و u دالة معرفة على مجال I بحيث من أجل كل x من I، $u(x)\in J$.

الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمزلها بالرمز $v\circ u$ و المعرفة على I بـ: $(v\circ u)(x)=v\left[u(x)\right]$. و نقرأ v دائرة u لِ x.

مثال: نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x)=2x^2-3$ و $v(x)=-3x+1$

* الدالة $v\circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا: $v\circ u(x)=v\left[u(x)\right]=v\left(2x^2-3\right)=-6x^2+10$

* الدالة $u\circ v$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا: $u\circ v(x)=u\left[v(x)\right]=u(-3x+1)=18x^2-12x-1$

نهاية دالة مركب دالتين

a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و إذا كانت $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$ و نريد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ و $v(x)=\sqrt{x}$. $(f=v\circ u)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to2}v(x)=\sqrt{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$

8 النهايات بالمقارنة

f، g و h دوال و l عدد حقيقي.

* إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

* إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\geq g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

* إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\leq g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ملاحظة | نمدد هذه الخواص إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ و عند عدد حقيقي.

9 العدد المشتق

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.

القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه لما يؤول h إلى 0 النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تؤول إلى عدد حقيقي نرمزله بالرمز $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a .

ملاحظة | إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و نسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

التفسير البياني

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا معامل توجهه $f'(a)$ و معادلته:
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة a هي: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

التفسير الاقتصادي

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية. تعطى الكلفة الهامشية بالعلاقة:
$C_m(q)=C(q+1)-C(q)$ حيث C هي الدالة " الكلفة الإجمالية " نلاحظ أن $C'(q)$ هو تقريب جيد لِ $C_m(q)$. في الاقتصاد نضع $C_m(q)=C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C.

10 مشتقة الدالة مركب

إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(v\circ u)'(x)=v'[u(x)]\times u'(x)$

11 المشتقة و اتجاه التغيرات

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

12 القيم الحدية المحلية

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\leq f(x_0)$.
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\geq f(x_0)$.
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لِ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

3 1 نقطة انعطاف

يمكن تعين نقطة الانعطاف من خلال احدى الطرق التالية:

1.المماس (T) يخرق المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0. (بيانيا)

2.الدالة المشتقة f' تنعدم عند x_0 و لا تغير من اشارتها. (حسابيا)

3.المشتقة الثانية f'' تنعدم عند x_0 و تغير من اشارتها. (حسابيا)

4 1 مركز تناظر

لاثبات أن النقطة $\omega(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x)+f(a+x)=2b$.

المقاربة 2 :

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x)+f(x)=2b$.

المقاربة 3: تغير المعلم $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i};\vec{j})$ و اثبات أن الدالة المحصل عليها دالة فردية

5 1 محور تناظر

لاثبات أنالمستقيم $(\Delta): x=a$ محور تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x)=f(a+x)$.

المقاربة 2 :

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x)=f(x)$.

المقاربة 3:

تغير المعلم $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i};\vec{j})$ و اثبات أن الدالة المحصل عليها دالة زوجية

6 1 المناقشة البيانية

أنواع المناقشة البيانية : أفقية ، مائلة ودورانية .

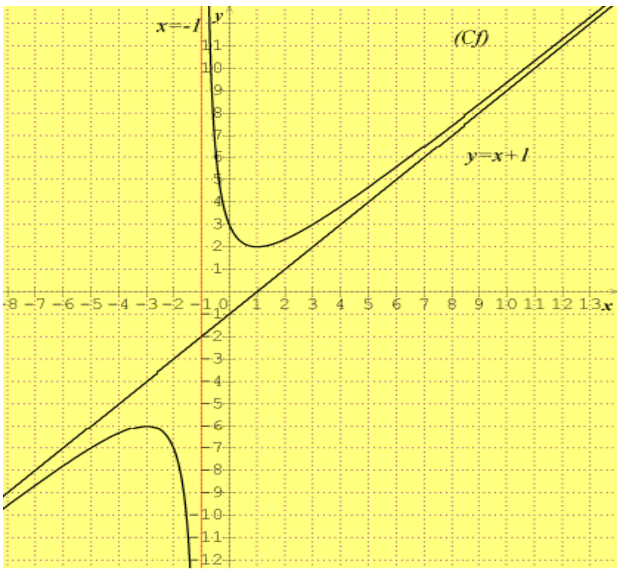
ليكن m عدد حقيقي. f دالة معرفة على I و (C) تمثيلها البياني في معام متعامد و متجانس.

❶المناقشة البيانية الأفقية: لها أشكال مختلفة منها: $f(x)=m$ ،

$f(x)=-m$ ، $f(x)=m+1$ ، $f(x)=m-1$ ، $f(x)=m^2$ ،

$f(x)=|m|$ ، $f(x)=-|m|$ ، $f(x)=f(m)$.

مثال: لتكن الدالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و (C_f) تمثيلها موضح في الشكل المقابل:



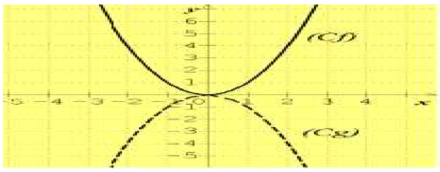
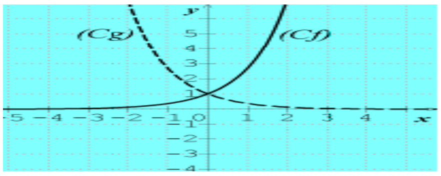
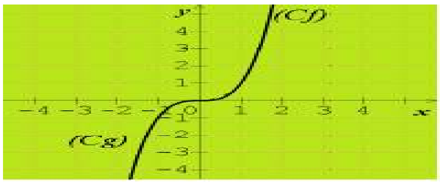
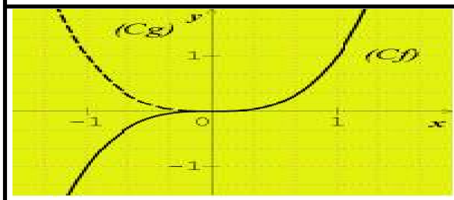
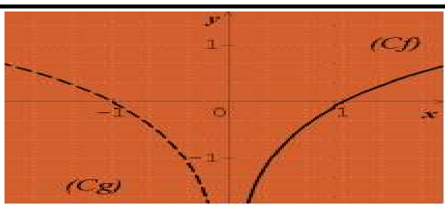
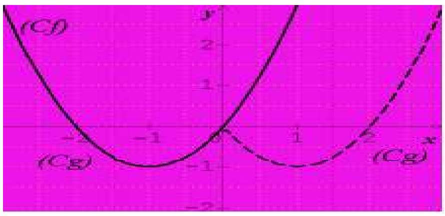
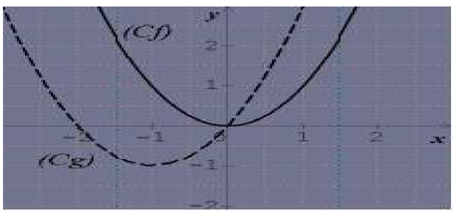
حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة: $y=m$ وعليه:

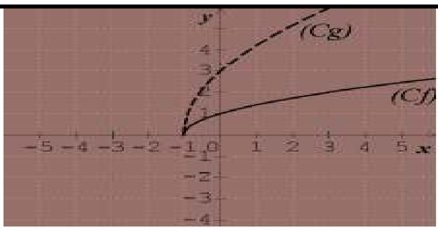
- للمعادلة حلين مختلفين من أجل : $m\in]-\infty;-6[\cup]2;+\infty[$.
- للمعادلة حل مضاعف من أجل: $m=-6$ أو $m=2$.
- ليس للمعادلة حلول من اجل: $m\in]-6;2[$.

16 استنتاج تمثيل بياني انطلاقا من تمثيل بياني آخر

f و g دالتان معرفتان على I و (C_f) و (C_g) تمثيلهما البياني على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$.

$a,b\in\mathbb{R}$ ، $k\in\mathbb{R}^*$

الحالات الممكنة	التفسير الهندسي	مثال تطبيقي	التمثيل البياني
$g(x)=-f(x)$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .	$f(x)=x^2$ $g(x)=-x^2$	
$g(x)=f(-x)$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.	$f(x)=e^x$ $g(x)=e^{-x}$	
$g(x)=-f(-x)$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة الى مبدأ المعلم O	$f(x)=x^3$ $g(x)=-(-x)^3$	
$g(x)=\lvert f(x)\rvert$	(C_g) ينطبق على لما يقع فوق محور الفواصل . (C_g) هو نظير بالنسبة لمحور الفواصل لما يقع تحت محور الفواصل.	$f(x)=x^3$ $g(x)=\lvert x^3\rvert$	
$g(x)=f(\lvert x\rvert)$	دالة زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما x موجب	$f(x)=\ln(x)$ $g(x)=\ln(\lvert x\rvert)$	
$g(x)=f(-\lvert x\rvert)$	دالة زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما سالب.	$f(x)=(x+1)^2-1$ $g(x)=(-\lvert x\rvert+1)^2-1$	
$g(x)=f(x+a)+b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}=-a\vec{i}+b\vec{j}$ ، أي: $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$	$f(x)=x^2$ $g(x)=(x+1)^2-1$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$	

$g(x)=k.f(x)$	لتكن $M(x,y)\in(C_f)$ تكافئ: $M'(kx,ky)\in(C_g)$	$f(x)=\sqrt{x+1}$ $g(x)=3\sqrt{x+1}$	

.2
تمارين الدوال العددية
بكالوريا
2019-2008

لتكن f هي الدالة العددية المعرفة على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية.

1.احسب $f'(x)$.

2.اعتمادا على جدول التغيرات الدالة :

أ- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c .

ب- عين $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x)$ ثم فسرالنتيجة بيانيا.

ج- قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بدلالة الدالة f معللا اجابتك.

3.نأخذ: $a=1$ ، $b=1$ ، $c=\frac{1}{4}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ- بين أنه عندما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ فان المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y=x+1$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج- أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر المنحنى (C) .

د- عين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

4. λ عدد حقيقي ، عين بيانيا،حسب قيم العدد الحقيقي λ عدد حلول المعادلة: $f(x)=|\lambda|$.

حل مقترح

1. احسب $f'(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على حيث:

$f'(x) = a - \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

2. أ- ايجاد a ، b و c :

باستعمال جدول التغيرات دالة f :

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \end{cases} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} a - 4c = 0 \\ \frac{1}{2}a + b - 2c = 1 \\ \frac{1}{2}a + b + 2c = 3 \end{cases}$$

و بالتالي: $a = 1$ ، $b = 1$ و $c = \dfrac{1}{4}$.

ب- حساب

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$$

ومنه: نستنتج أن المستقيم ذوالمعادلة : $x = -1$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يوازي محور التراتيب.

ج- المقارنة:

لدينا: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) > f\left(\dfrac{3}{4}\right)$ لأن: $\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4}$ و f متناقصة على $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

3. أ- المستقيم المقارب المائل:

لدينا: $\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} \left[x + 1 + \dfrac{1}{4(x+1)} - (x+1) \right]$

$$= \lim_{|x| \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{4(x+1)} \right] = 0$$

و بالتالي: عندما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ فان المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y = x + 1$.

ب- الو ضعية:

لدينا: $f(x) - y = \dfrac{1}{4(x+1)}$

x	$+\infty$ 1	$-\infty$
$f(x) - y$	--	+
الوضعية	(C) فوق (Δ)	(C) تحت (Δ)

ج- أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر المنحنى (C):

طريقة سحب المحاور.

نضع: $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$ و لدينا: $y = f(x)$

و منه: $Y + 2 = f(X+1)$

أي: $Y = f(X-1) + 2 = X + \dfrac{1}{4X}$

بوضع: $g(X) = X + \dfrac{1}{4X}$ نجد g دالة فردية

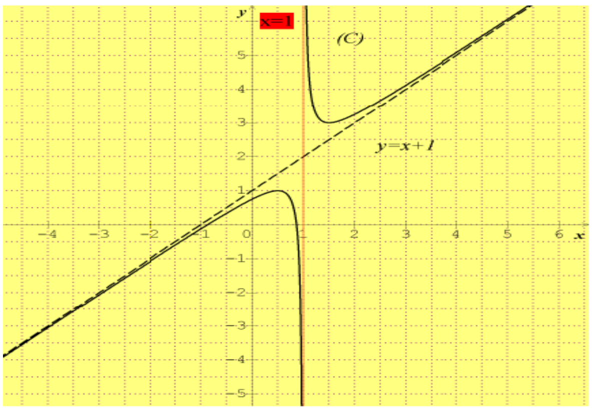
لأن: $g(-X) = -g(X)$

و بالتالي : النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

د-تعين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

$$f(0) = \frac{3}{4} \text{،} \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad \text{و} \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

الرسم:



4. المناقشة البيانية:

$\lambda \in]-1;1[$ للمعادلة حلان .

$\lambda = -1$ أو $\lambda = 1$ للمعادلة حل مضاعف.

$\lambda \in]-3;1[\cup]1;3[$ لا توجد حلول للمعادلة.

$\lambda=-3$ أو $\lambda=3$ للمعادلة حل مضاعف.

$\lambda\in]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$ للمعادلة حلان.

بكالوريا جوان 2009/ شعبة تسيير و اقتصاد / الموضوع الأول / التمرين 1

f دالة عددية معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني و جدول تغيراتها يعطى كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$ $+\infty$	$\parallel$	$+\infty$ $\searrow$	2

أجب ب: خطأ أو صحيح على كل سؤال مما يلي مع تبرير الاجابة:

1.المستقيم الذى معادلته : $y=2$ مقارب للمنحنى (C_f) .

2.المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.

3.مجموعة حلول المتراجحة : $f(x)>0$ هي :

$S=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

4.في المجال $]-\infty;-1[$ يكون : " $f(-2)>f(x)$ عندما يكون $x<-2$."

5.النقطة $A(-3;1)$ تنتمي الى المنحنى (C_f) .

6.الدالة f زوجية.

حل مقترح

1. صحيح

لأن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=2$.

2. خطأ

لأن :من جدول التغيرات نلاحظ أن .

3. صحيح

لأن لدينا : $f(x)>2$ من أجل كل x من D_f و بالتالي $f(x)>0$ لما $x\in D_f$.

4. صحيح

لأن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ وبالتالي من أجل $x<-2$ نجد : $f(x)<f(-2)$ أي: $f(-2)>f(x)$

5. خطأ

لأن: من أجل كل x من D_f لدينا : $f(x)>2$ و بالتالي :

$f(-3)\neq 1$ و منه: النقطة $A(-3;1)$ لا تنتمي الى المنحنى (C_f).

6. خطأ

لأن لدينا: $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ نلاحظ أن D_f غير متناظر بالنسبة للمبدأ O ، أي: $-1\notin D_f$ و لكن $1\in D_f$.

بكالوريا جوان 2009/ شعبة تسيير واقتصاد / الموضوع الأول / التمرين 4

الدالة العددية f معرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$ ، يرمز (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .

I) 1.عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

2. احسب نهايات f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعين معادلته.

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

5. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

II) 1.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فان:

$f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ ، و f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

2. عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها و شكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

III) 1.بين أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. أرسم كلا من (D) ، (Δ) و (C_f) .

3. عين بيانا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة: $f(x)=m$ حلان مختلفان.

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=e^2-1$.

حل مقترح

I).1.تعين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

$$=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$=\frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=0\\b+c=3\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=4\end{cases}$.

2.النهايات:

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-1+\frac{4}{x+1}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{4}{x+1}=0$

و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-1=+\infty$.

وبالتالي: $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x-1+\frac{4}{x+1}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\mapsto-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\mapsto-1}} x-1+\frac{4}{x+1}=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\mapsto-1}}\frac{4}{\underset{\to0^-}{x+1}}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\mapsto-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\mapsto-1}} x-1+\frac{4}{x+1}=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\mapsto-1}}\frac{4}{\underset{\to0^+}{x+1}}=+\infty$

3. بما أن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\mapsto-1}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\mapsto-1}} f(x)=-\infty$ فان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=-1$.

4. المستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

لدينا: $\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x-1+\frac{4}{x+1}-(x-1)$

$$=\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\frac{4}{x+1}$$

$$=0$$

و منه: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

5. دراسة الوضعية ل (C_f) و (Δ) .

لدينا: $\left[f(x)-(x-1)\right]=f(x)-y=\frac{4}{x+1}$

ندرس اشارة $\frac{4}{x+1}$ نجد:

لما $x<-1$ المنحنى (C_f) تحت (Δ).

و لما $x>-1$ المنحنى (C_f) فوق (Δ). $-\infty$

II).1. المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$:

لدينا: $f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}$

$$=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$$

نذكر: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

و منه: $f'(x)=\frac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

2. تعين اتجاه تغير الدالة f .

*اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط (لأن المقام موجب تماما على $\mathbb{R}-\{-1\}$) و هي:

$(x-1)(x+3)=0$ معناه: اما $(x-1)=0$ أو $(x+3)=0$ أي: $x=1$ أو $x=-3$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$(x-1)(x+3)$		+	0	--	0	+	

و عليه : f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

و متناقصة تماما على المجال : $[-3;-1[\cup]-1;1]$

(لأن: $-1\notin D_f$).

*جدول تغيرات:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$--$	||	$--$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

$f(-3)=-6$ و $f(1)=2$.

3. معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0:

تكتب من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث: $f(0)=3$

و $f'(0)=-3$ اذن: $y=-3x+3$.

III).1. تبيان أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

الطريقة1:

تذكير: $A(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) معناه: من جل كل x، $2\alpha-x$ من D_f، لدينا: $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$.

لدينا: $\alpha=-1$ و $\beta=-2$ و بالتالي:

: $f(-2-x)=-2-x-1+\dfrac{4}{-2-x+1}$

و منه: $f(-2-x)=-x-3+\dfrac{4}{-x-1}=-x-3-\dfrac{4}{x+1}$.

و $f(-2-x)+f(x)=-4$ أي :

$f(2(-1)-x)+f(x)=2(-2)$.

و بالتالي النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

الطريقة2 : سحب المحاور.

نضع: $\begin{cases} x=X-1 \\ y=Y-2 \end{cases}$ و لدينا: $y=f(x)$

و منه: $Y-2=f(X-1)$

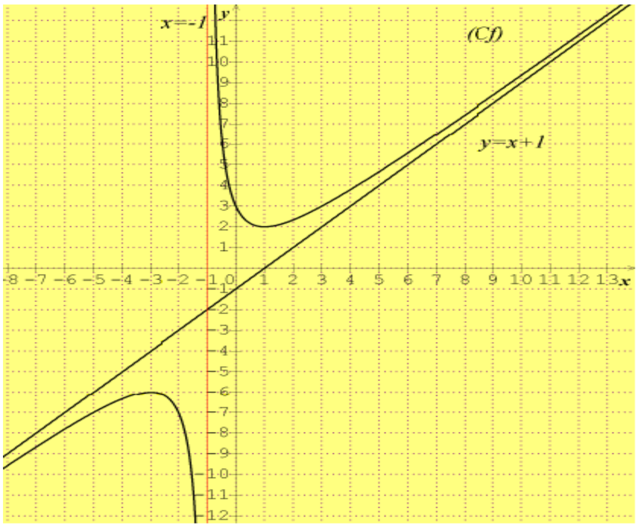
أي: $Y=f(X-1)+2=X+\dfrac{4}{X}$

بوضع: $g(X)=X+\dfrac{4}{X}$ نجد g دالة فردية

لأن : $g(-X)=-g(X)$

و بالتالي : النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2. رسم (D) ، (Δ) و (C_f) .



حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة: $y=m$ وعليه:

- للمعادلة حلين مختلفين من أجل : $m\in\left]-\infty;-6\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.
- للمعادلة حل مضاعف من أجل: $m=-6$ أو $m=2$.
- ليس للمعادلة حلول من اجل: $m\in\left]-6;2\right[$.

4. حساب المساحة:

$$S=\int_1^{e^2-1}\left[f(x)-(x-1)\right]dx=\int_1^{e^2-1}\frac{4}{x+1}dx=\left[4\ln(x+1)\right]_1^{e^2-1}ua.$$

و منه: $S=4\left(\ln e^2-\ln 2\right)ua=\left(8-4\ln 2\right)ua$

بكالوريا جوان 2010 /شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الأول

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فان : $f(x)=x-5+\frac{\alpha}{x^2}$ ، حيث α عدد حقيقي يطلب تعيينه

2.احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3.أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فان :

$f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$، استنتج تغير الدالة f.

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f.

4.أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل ، يطلب تعين معدلتهما..

5.أوجد معادلة ل (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

6.أرسم (Δ) و المنحنى (C_f).

7.أ-عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(2)=-10$.

ب-أحسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=2$.

حل مقترح

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$$

1. تعيين α:

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}=\frac{x^3(x-5)+4}{x^3}$$

أي: $f(x)=x-5\frac{4}{x^2}$ وبالتالي: $\alpha=5$.

2. النهايات:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(x-5\frac{4}{x^2}\right)=+\infty .$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(x-5\frac{4}{x^2}\right)=-\infty .$$

$$\lim_{x\mapsto 0}f(x)=\lim_{x\mapsto 0}\left(x-5\frac{4}{x^2}\right)=+\infty$$

3. أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:

لدينا: $f'(x)=1-\frac{8x}{x^4}=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$

و منه: $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2-2x+4)}{x^3}$ لأن:

$(x-2)(x^2-2x+4)=x^3-8$

لدينا: x^2+2x+4 مميزه: $\Delta=-12$ ومنه: $x^2+2x+4>0$ و بالتالي: اشارة $f'(x)$ من اشارة: $\frac{x-2}{x^3}$ و بالتالي:

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ ‖ -- 0 $+$

f متزايدة تماما على $]-\infty;0[\cup[2;+\infty[$

متناقصة تماما على $]0;2]$.

ب- جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

4. المستقيمين المقاربين:

بما أن : $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ فان: $x=0$ معادلة مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب.

و نلاحظ أن : $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)-(x-5)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)=0$ و

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)-(x-5)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)=0$$

و منه: $y=x-5$ معادلة مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

5. معادلة المماس (Δ):

المعادلة هي: $(\Delta): y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

حيث: $f(1)=0$ و $f'(1)=-7$

و بالتالي: معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y=-7x+7$.

6. رسم (Δ) و المنحنى (C_f). (أنظر أسفله)

7. أ-تعين الدالة الأصلية F للدالة f :

$F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-4\frac{1}{x}+c$ ، حيث c عدد حقيقي.

لدينا F تحقق : $F(2)=-10$ معناه: $c=0$

اذن: $F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-4\frac{1}{x}$.

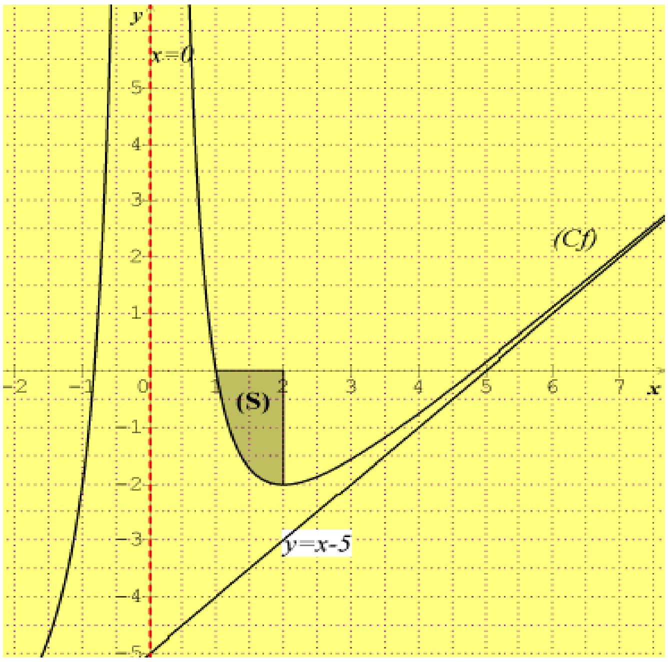
ب-المساحة:

تذكير: * اذا كانت f الدالة سالبة على المجال $[a;b]$ و S المساحة المحددة بالمنحنى $(C)_f$ و المستقيمان : $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ فان: $S=\int_a^b -f(x)dx$

* $\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$

$$S=\int_1^2 -f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx=\int_2^1 f(x)dx$$

و منه: $S=F(1)-F(2)$ و بالتالي: $S=\frac{3}{2}ua$.



بكالوريا جوان 2011/ شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الوحدة $1cm$ على محور الفواصل و $4cm$ على محور التراتيب.

1.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=1-\dfrac{x}{x^2+1}$.

2.احسب نهاية الدالة عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، و استنتج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعين معادلة له.

3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

4.احسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(-x)=2-f(x)$ و استنتج أن (C) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

6. أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C).

7.أ-احسب التكامل: $\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+1}dx$.

ب-احسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز من المستوى المحدد بالمنحنى و محور الفاصل و المستقيمين اللذين معادلتهما: $x=0$ و $x=1$.

حل مقترح

الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

1. التبيان :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}$$

$$=1-\frac{x}{x^2+1}$$

النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1 .$$

و بالتالي: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$.

اذن: $y=1$ معادلة مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ و $-\infty$ ، يوازي محور الفواصل.

3. الوضعية:

لدينا: $f(x)-y=\dfrac{-x}{x^2+1}$ اشارة الفرق $f(x)-y$ هي من اشارة: $-x$ معناه:

لما $x<0$ المنحنى (C) فوق (Δ).

ولما $x>0$ المنحنى (C) تحت (Δ).

في النقطة $A(0,1)$ المنحنى (C) يقطع (Δ).

4. حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

لدينا: $f'(x)=\dfrac{-1(x^2+1)+x(2x)}{(x^2+1)^2}$

و منه: $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

*اشارة $f'(x)$ من اشارة : x^2-1.

و منه: $x^2-1=0$ أي: $(x-1)(x+1)=0$ اذن : $x=1$ أو $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	--	0	$+$	

و عليه : f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

و متناقصة تماما على المجال : $[-1;1]$.

*جدول تغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	--	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

5. لدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

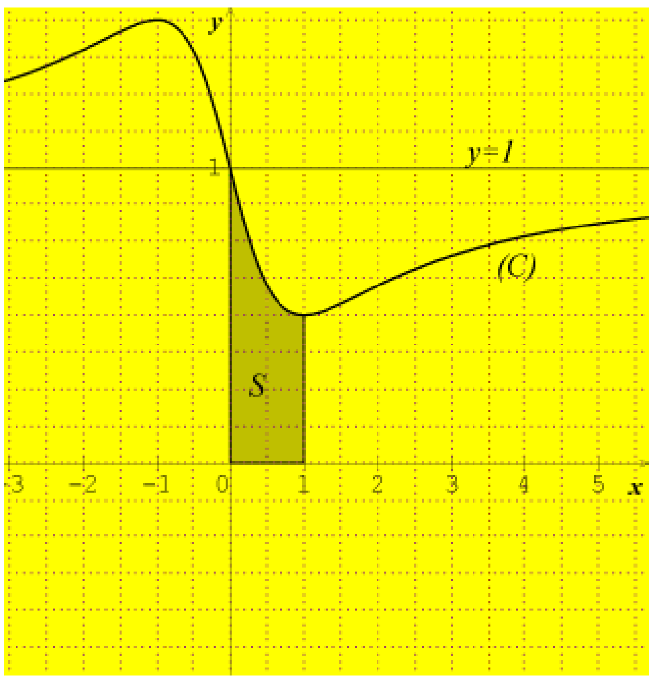
$$2-f(x)=2-1+\frac{x}{x^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}$$

$$=f(-x)$$

نستنتج أن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر (C).

ملاحظة: بما أن $\Omega(0;1)\in(C)$ فان Ω نقطة انعطاف أيضا.

6. رسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C).



7.أ- حساب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

ب-المساحة:

$$S=4.\int_0^1 f(x)dx=4cm^2\times\left(\int_0^1 1-\frac{x}{x^2+1}dx\right)cm^2$$

و منه: $S=4\times\left(1-\frac{1}{2}\ln 2\right)cm^2$

أي: $S=(4-2\ln 2)cm^2$.

بكالوريا جوان 2012/ شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الثاني

f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}$$

1.احسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2.أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$$

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج-جد الدالة الأصلية H للدالة $h:x\mapsto\frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل $x=0$.

3.تنتج احدى شركات تركيب آلات الغسيل آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و 200 آلة على الأكثر. تنمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة اضافية للشركة على المجال $[5;200]$ بالدالة f أي : من أجل كل x من المجال $[5;200]$، $C_m(x)=f(x)$.

أ- ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون التكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟.

ب- نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج آلة و نذكر أن : $C'(x)=C_m(x)$

جد عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

حل مقترح

f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي :

1. النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=+\infty \; .$$

2. أ- المشتقة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=x^2-\frac{57600}{(x+1)^2}=\frac{x^2(x^2+1)^2-57600}{(x+1)^2}$$

و منه : $f'(x)=\dfrac{(x^2+x)^2-57600}{(x+1)^2}$

ب- اتجاه التغير:

نلاحظ أن:
$(x^2+x)^2-57600=(x^2+x-240)(x^2+x+240)$

لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ $x^2+x+240>0$، و منه : اشارة $f'(x)$ من اشارة: $x^2+x-240$.

نجد: $\Delta=961$ و بالتالي: يوجد حلان هما: 15 و -16

-16) حل مرفوض لأنه لا ينتمي الى مجموعة تعريف الدالة f).

x	-1	15	$+\infty$
$x^2+x-240$	--	0	+

و منه: متزايدة تماما على $[15;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-1;15]$.

***جدول تغيرات:**

x	-1	15	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	4825	↗ $+\infty$

ج- الدالة الأصلية H للدالة $h : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$:

لدينا: $H(x)=\int h(x)dx=\int \frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)+c$

حيث c عدد حقيقي.

نعلم أن H تنعدم من أجل $x=0$ أي: $H(0)=0$

و بالتالي: $c=0$.

3. أ- عدد الآلات

الكلفة الهامشية أقل ما يمكن أي نبحث عن القيمة الحدية الصغرى للدالة f .

من جدول التغيرات نجد أن f لها قيمة الحدية الصغرى تبلغها من أجل: $x=15$.

و بالتالي عدد الآلات هو 15.

ب-الكلفة الإجمالية

نعلم أن: $C'(x)=C_m(x)$ ومنه : C هي الدالة الأصلية للدالة f لأن: $C_m(x)=f(x)$.

أذن: $C(x)=\int f(x)dx=\int f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}dx$

أي: $C(x)=\frac{1}{12}x^4+100x+57600\ln(x+1)+k$.

حيث: k عدد حقيقي.

علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000 يعني: $C(5)=4000$ و منه : $k=\frac{473375}{12}-57600\ln 6$

و بالتالي:

عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$ هي:

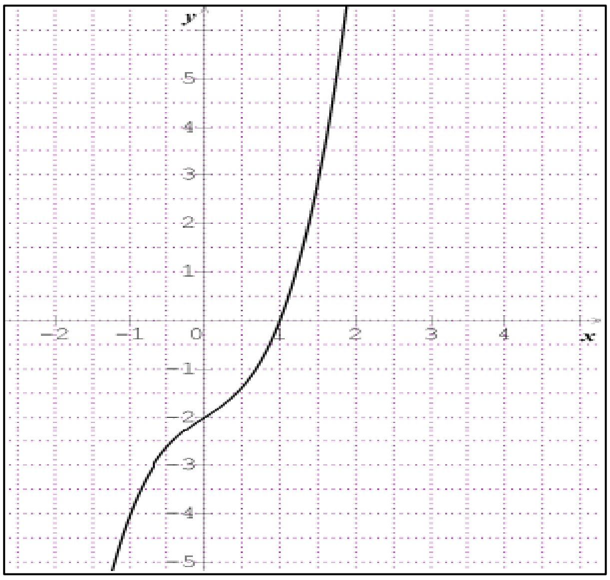
$C(x)=\frac{1}{12}x^4+100x+57600\ln\left(\frac{x+1}{6}\right)+\frac{473375}{12}$.

استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى:

$C(15)=101662,43DA$.

بكالوريا جوان 2019/ شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الأول

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=x^3+x-2$ و تمثيلها البياني كما هومبيّن في الشكل .



بقراءة بيانية عيّن $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ ب : $f(x)=x-\frac{1-x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أ - أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - أحسب $\lim_{x\to0} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا .

2) بيّن أنه من أجل كل x غير معدوم: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

- استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أ - بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(\alpha)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4;-1,3[$.

5) أرسم (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

6) أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x$ ، $x=1$ و $x=3$.

حل مقترح

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+x-2$

• $g(1)=0$.

• إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

انطلاقا من التمثيل البياني المعطى نلخص جدول اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	-		+

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{x-1}{x^2}$

1) أ -

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

ب -

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(x-\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^3-x+1}{x^2}\right)=+\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

2) تبيان أنه من أجل كل x غير معدوم: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل x غير معدوم :

$$f'(x)=1-\frac{1\times x^2-2x(x-1)}{\left(x^2\right)^2}.$$

$$=1-\frac{x^2-2x^2+2x}{x^4}=1-\frac{-x^2+2x}{x^4}$$

$$=\frac{x^4+x^2-2x}{x^4}=\frac{x\left(x^3+x-2\right)}{x^4}$$

$$=\frac{g(x)}{x^3}$$

- إتجاه تغيّر الدالة f :

لندرس إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3. أ - تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=-\frac{x-1}{x^2}=\frac{-x+1}{x^2}$

و

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\left(\frac{-x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

و $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

$f(x)-x=-\frac{x-1}{x^2}=\frac{-x+1}{x^2}$ و بالتالي إشارة $f(x)-x$ من إشارة $-x+1$:

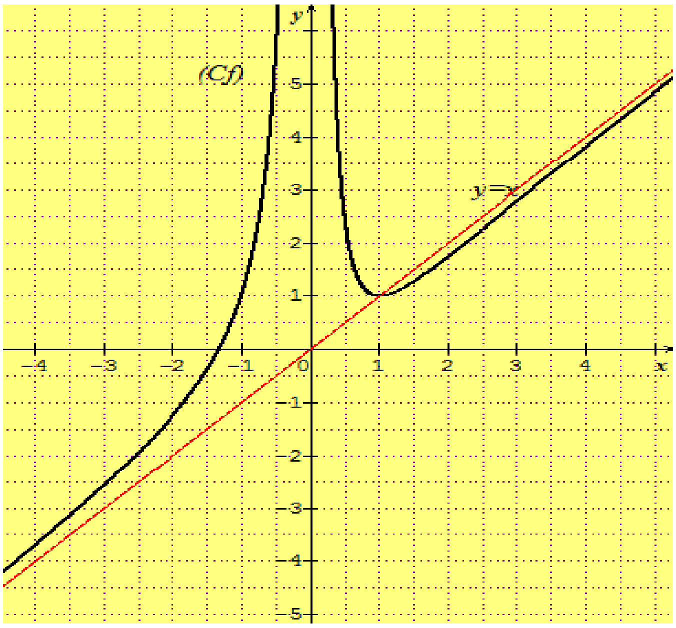
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-x$	+	0	−
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

4. تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4;-1,3[$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-1,4;-1,3[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases}f(-1.4)=-0,17\\ f(-1.3)=0,06\end{cases}$

أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، بحيث $-1.4<\alpha<-1.3$

5. الرسم :



1) حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=1$ ، $x=3$ و $y=x$.

$$A=\int_1^3 (x-f(x))dx$$

$$=\int_1^3\left(\frac{x-1}{x^2}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^3$$

$$=\ln 3+\frac{1}{3}-1=\ln 3-\frac{2}{3}$$

3. تمارين مقترحة

.1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-x^2-x+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1.أحسب النهايات للدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2.أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3.تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f(x)=(x+1)(x-1)^2$

4.عين نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات

5.أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ، يطلب تعيين إحداثيها

6.عين معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

7.أنشئ (C_f) و (T) في نفس المعلم .

.2

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x)=2x^3+x^2-1$

1.أ-أدرس تغيرات g على $\mathbb{R}$.

2.أ- برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

ب-احسب $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(1)$ ثم أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

3.عين حسب قيم x، اشارة $g(x)$.

II. f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$

1.برهن أنه من أجل كل x عدد حقيقي غير معدوم اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

2. أدرس تغيرات دالة f .

3.برهن أن : $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ و استنتج حصرا ل $f(\alpha)$.

4.نسمي (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $3cm$)

لتكن I نقطة من (C) فاصلتها -1 و J نقطة من (C) فاصلتها 1

أ-تحقق أن المستقيم مماس ل (C) عند J .

ب-عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند I ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة لهذا المماس.

ج-أرسم (C) (نأخذ $\frac{2}{3}$ كقيمة تقريبية للعدد α).

3.

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالعبارة $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

1.أدرس تغيرات الدالة f.

2. عين الأعداد الحقيقية a، b، c و d بحيث من أجل كل x من D_f: $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$.

3.استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نسميه (Δ).

4. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

5.بين أن المنحنى (C_f) يقطع (xx') في نقطة فاصلتها α يطلب تعيين حصرا ل α سعته 10^{-1}.

6.أنشئ (C_f).

7.نضع: $g(x)=\frac{|x|^3+3|x|^2+6|x|+3}{(|x|+1)^2}$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

أ-أثبت أن g دالة زوجية ، فسر هذه النتيجة بيانيا.

ب-اشرح كيف نستطيع أن ننشئ (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f) ثم انشئ (C_g) في نفس المعلم السابق.

4.

الدالة f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2-3x-14}{(x+3)^2}$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين الأعداد الحقيقية a، b وc بحيث من أجل كل x من D_f: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+3)^2}$، $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$.

2. احسب النهايات ل f على D_f. ماذا تستنتج بيانيا؟.

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على D_f ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

4. احسب $f(-3,9)$ و $f(-3,8)$ ، ماذا تستنتج ؟.

5. عين نقط من (C) يكون المماس عندها موازي للمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=\dfrac{7}{8}x+2$.

6. أرسم (C).

7. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x)=\dfrac{|x|^3+4|x|^2-3|x|-14}{(|x|+3)^2}$ ، و (C') تمثيلها البياني.

أ- أثبت أن g دالة زوجية، ماذا تستنتج بيانيا؟.

ب- أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ج- أرسم (C').

5.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ ب $f(x)=\dfrac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $1cm$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$: $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C).

4) D مستقيم معادلته $y=3$. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى D.

4) احسب $f'(x)$ و استنتج تغيرات الدالة f .

- شكل جدول تغيرات f .

5) بين أنه من أجل كل $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$: $f(-3-x)=f(x)$. ماذا يمكن أن تستنتج؟

6) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل.

7)أنشئ المنحني (C) و المستقيمات المقاربة.

8) U متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$ بـ :

أ- احسب المجموع $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$.

ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

6.

تكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول التغيرات.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$

ب) استنتج أن C_f يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x-2$ كمستقيم مقارب.

ج) حدد وضعية C_f بالنسبة إلى D .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-\infty;1[$.استنتج حصرا لـ α بتقريب 10^{-2} .

4) أنشئ D و C_f في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور التراتيب)

5) استنتج بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة. $f(x)=m$

7.

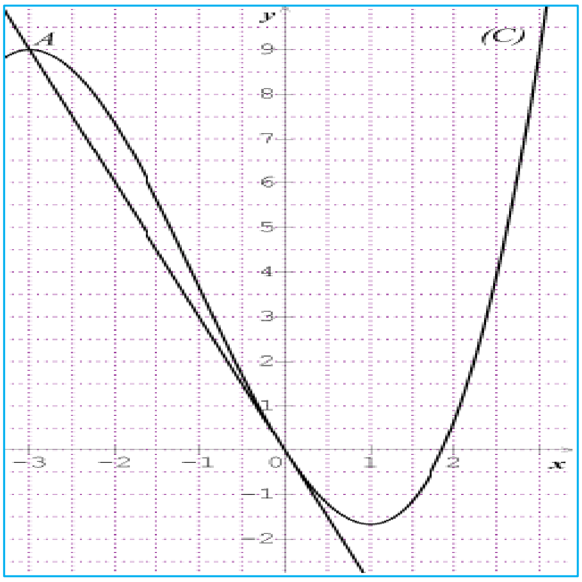
الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة و قابلة

للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث:

*يمر (C) بمبدأ المعلم O و يشمل النقطة $A(-3;9)$.

*يمر (C) في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا. و يقبل المستقيم (OA)

كمماس عند النقطة O .



1.ماهو معامل توجيه المستقيم (OA).

2.عين اتجاه تغير الدالة f .

3.حل بيانيا في المجال $[-3;3]$ المتراجحة: $f(x)\geq -2$.

4.نفرض أن : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث : a ، b ، c و d أعداد حقيقية.

بين أن: $a=\frac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$.

.8

I. ليكن P كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x)=2x^3-3x^2-1$

1. أدرس تغيرات الدالة P ثم شكل جدول تغيراتها .

2.بين ان المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1;+\infty[$.عين حصرا ل α سعته 10^{-1} .

3.استنتج حسب قيم اشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ ب: $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.عين النهايات للدالة f. ماذا تستنتج بيانيا؟

2.بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x^3+1)^2}$

3.استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4.بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5. عين معادلة (T) المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6.تحقق انه من أجل كل x من $]-1;1[$: $f(x)-(-x+1)=\dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

7.أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T).

8.أرسم (T) و (C_f).

9.

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ ب: $f(x)=\dfrac{6}{x}-\dfrac{9}{2x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

C هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ الوحدة $3cm$.

1.درس تغيرات f ، شكل جدول التغيرات .

2. أ- حل المعادلة $f(x)=0$ ، استنتج أن للمنحني C لا يقطع محور الفواصل.

ب- حسب جدول التغيرات ناقش حسب قيم اعدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

ج- عين معادلة لكل من المماسين T_1 و T_2 للمنحنى C عند النقطتين اللتين فاصلتاهما $\dfrac{1}{2}$ و 1 .

3. أنشئ المماسين T_1 ، T_2 و المنحني C.

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ

و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths