5min Maths

مجلة

اصدار جديد

CHABANE Oussama

BAC 2021

الدالة اللوغاريتمية

Fonction Logarithme

مقدمة للشعب: علوم تجريبية/ تقني رياضي / رياضيات

اصدار 25ديسمبر 2020

اعداد الأستاذ شعبان أسامة

Google / Facebook/ Telegram/ Instagram : 5min maths

تلمسان-0775737163

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها الطالب " مجلة 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي الشعب العلمية لمحور الدالة اللوغاريتمية

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

"

الأستاذ شعبان أسامة

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر

5 min Maths
CHABANE Oussama

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة،تم اصدار أول نسخة
بتاريخ :2019/09/13

تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس
2. تطبيقات
3. تمارين محلولة
4. تمارين مقترحة

ملخص الدرس

تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^{b}=a$.

يسمى هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز" $\ln a$ ".

مثال: * **العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^{b}=2$ هو إذن $\ln 2$.**

تعريف الدالة " ln " نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز" ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1. **من أجل كل** x **من** $]0;+\infty[$ **و من أجل كل** y **من** $\mathbb{R}$، $x=e^{y}$ **يعني** $y=\ln x$.
2. **من أجل كل** x **من** $]0;+\infty[$، $e^{\ln x}=x$.
3. **من أجل كل** x **من** $\mathbb{R}$، $\ln\left(e^{x}\right)=x$.
4. **بما أن** $e^{0}=1$ **فإن** $\ln 1=0$ **و بما أن** $e^{1}=e$ **فإن** $\ln e=1$.

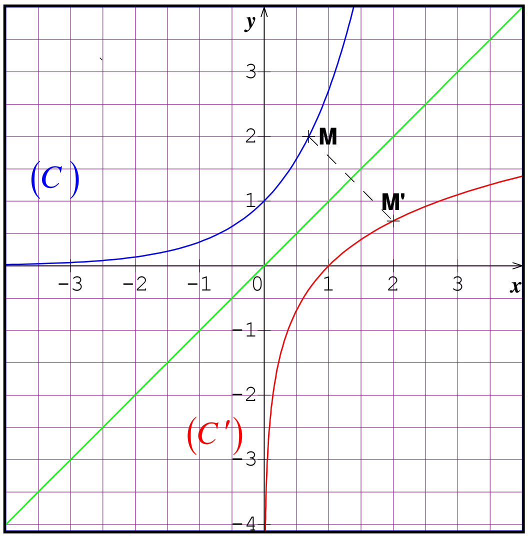
ملاحظة: نعبر عن النتيجة "1" بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " ln " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " exp ".

خاصية: في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأول).

البرهان: نرمز بِ (C) إلى منحنى الدالة $x\mapsto e^{x}$ و بِ (C') إلى منحنى الدالة $x\mapsto \ln x$.

بما أن $y=e^{x}$ يعني $x=\ln y$ فإن القول أن النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى (C) يعني أن النقطة $M'(y;x)$ تنتمي إلى (C').

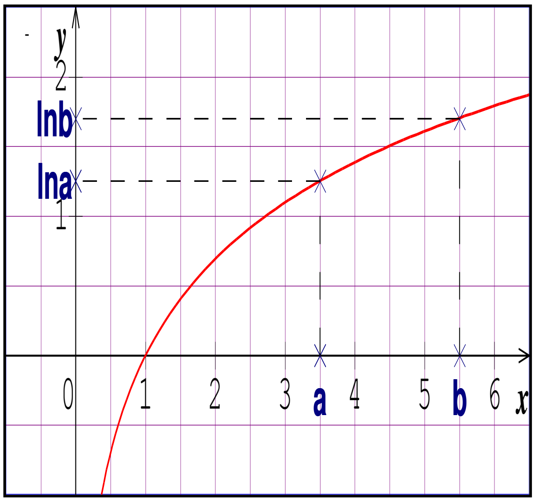
و بما أن $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ فإن المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى هذا المستقيم.



اتجاه تغير الدالة اللوغارتمية النيبيرية

خاصية: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان كيفيان من $]0;+\infty[$ حيث $a<b$. $a<b$ يعني $e^{\ln a}<e^{\ln b}$ و بما أن الدالة



الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $\ln a < \ln b$.

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1. $\ln a = \ln b$ يعني $a = b$.
2. $\ln a < \ln b$ يعني $a < b$.
3. $\ln a > 0$ يعني $a > 1$ و $\ln a < 0$ يعني $0 < a < 1$ كما أن $\ln 1 = 0$.

الخواص الجبرية

خاصية : من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ،....، a_n من $]0;+\infty[$ ، $\ln(a_1 a_2 .. a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n$.

خاصية : من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(a^n) = n \ln a$.

خاصية : من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

النهايات

خاصية : نهاية الدالة " $\ln$ " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

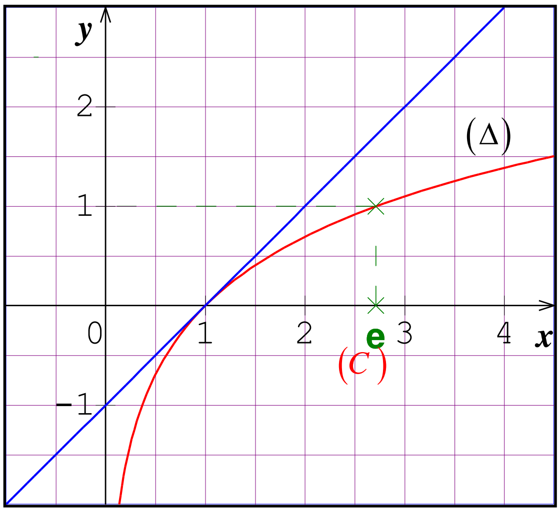
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad (1) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \quad (2)$$

الاستمرارية و الاشتقاقية

خاصية: الدالة " $\ln$ " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

جدول تغيرات الدالة " ln "

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	‖ $+$
$\ln x$	‖ $-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$



المنحني (C) الممثل للدالة " $\ln$ " يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.

- لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta): y=x-1$.

- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\ln'(1)=1$ إذن $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ أو $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

نتيجة: الدالة $h\mapsto h$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $h\mapsto \ln(1+h)$ بجوار 0.

أي من أجل h قريب من 0 لدينا: $\ln(1+h)\approx h$.

دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز" $\log$ " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$

ملاحظة $\log 1=0$ و $\log 10=1$.

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log(ab)=\log a+\log b$.

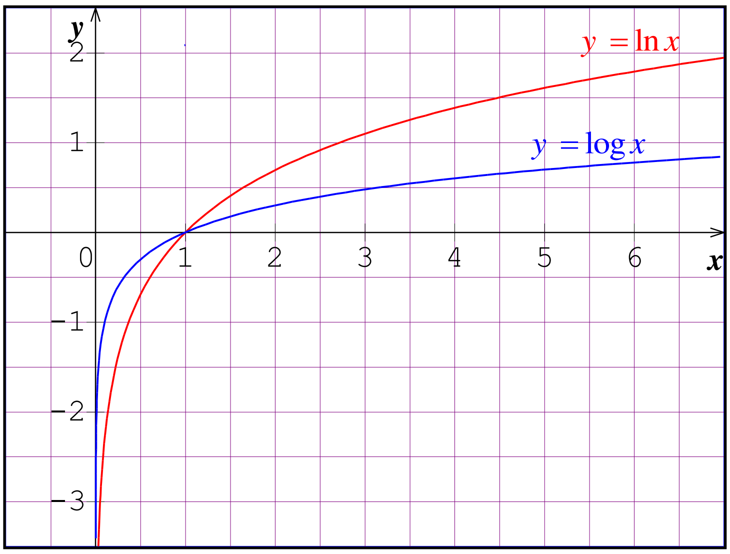
نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة " $\ln$ " تبقى محققة من قبل الدالة " $\log$ " ومنه:

1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b$.

2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(a^n)=n\log a$.

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(10^n)=n$ لأن $\log 10=1$.

خاصية: الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.



البرهان: من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\log x=\frac{1}{\ln 10}\times\ln x$

و بما أن $\ln 10>0$ فإن للدالتين" $\log$ "و " $\ln$ " نفس اتجاه التغيرات.و بما أن الدالة" $\ln$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الدالة" $\log$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

يستنتج التمثيل البياني للدالة " $\log$ " انطلاقا من التمثيل البياني للدالة " $\ln$ ".

نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n\le x\le 10^{n+1}$ فإن $n\le\log x\le n+1$

مثال:

نعتبر العدد الحقيقي x بحيث $x = 3,87\times10^{7}$.

لدينا $10^{7} < x < 10^{8}$ **و منه** $\log10^{7} < \log x < \log10^{8}$

نجد هكذا أن $7 < \log x < 8$

ملاحظة: لدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة و هامة في مختلف المواد و بصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء و الجغرافيا.

دراسة الدالة $\ln\circ u$

النهايات لدراسة نهاية دالة $\ln\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: **نعتبر الدالة f المعرفة على** $]2;+\infty[$ **بـ** $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to2}\ln(x-2)=-\infty$ أي $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-\infty$
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(\dfrac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $u(x)=\dfrac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

مثال: * **مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ** $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ **هي** $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

* **مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ** $g(x)=\ln(e^x+1)$ **هي** $g'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

تطبيقات

تطبيق ❶: عين مجموعتي تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي: $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\ln(x^2)$

طريقة: يكون لِـ $\ln a$ معنى إذا و فقط إذا كان العدد الحقيقي a موجب تماما.

الحل:

- تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+1>0$ أي $x>-1$ و منه مجموعة تعريف f هي $]-1;+\infty[$.
- تكون g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ أي $x\neq 0$ و منه مجموعة تعريف g هي $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
-

تطبيق ❷: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$$\ln(2x-1)=2 \quad (1) \qquad \ln(x-1)\geq -3 \quad (2) \qquad \ln(x+2)\leq 5 \quad (3)$$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $\ln[u(x)]=p$ (على التوالي متراجحة من الشكل $\ln[u(x)]<p$):

عين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).

نحل في D المعادلة $u(x)=e^p$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<e^p$).

الحل:

1. لدينا $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. (1) تعني $2x-1=e^2$ أي $x=\frac{1+e^2}{2}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+e^2}{2}\right\}$
2. لدينا $D=]1;+\infty[$. (2) تعني $x-1>e^{-3}$ أي $x>1+e^{-3}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=]1+e^{-3};+\infty[$
3. لدينا $D=]-2;+\infty[$. (3) تعني $x+2\leq e^5$ أي $x\leq e^5-2$ و منه مجموعة الحلول هي $S=]-2;e^5-2]$

تطبيق ❸: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين: $\ln(x^2-1)=\ln(x) \quad (1)$ $\qquad \ln(x^2-1)\leq\ln(x) \quad (2)$

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)]=\ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)]<\ln[v(x)]$):

نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).

نحل في D المعادلة $u(x)=v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<v(x)$).

الحل:

1. تكون المعادلة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2-1>0$ و $x>0$ و منه $D=]1;+\infty[$.

(1) تعني $x^2-1=x$ أي $x^2-x-1=0$. حلول المعادلة $x^2-x-1=0$ هما $x'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ، $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D. و هكذا مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=]1;+\infty[$. لدينا (2) تعني $x^2-x-1\le 0$. مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x-1\le 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ و بالتالي فمجموعة حلول المتراجحة (2) هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $\left]1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

تطبيق ❹: حل المعادلتين التاليتين:

$$\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2 \quad (1) \qquad \text{و} \qquad \ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2 \quad (2)$$

طريقة: الكتابة $\ln a+\ln b$ تفرض أن يكون $a>0$ و $b>0$ بينما الكتابة $\ln(a\times b)$ تفرض أن يكون $ab>0$

و يعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبين معا.

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$. -3 و 2 حلول هذه المعادلة تنتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{-3;2\}$.

2. تكون المعادلة (2) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)>0$ و $(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]1;+\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$. من بين -3 و 2 حلول هذه المعادلة، الحل 2 هو الوحيد الذي ينتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{2\}$.

تطبيق ❺: حل المتراجحتين التاليتين:

$$\ln(x-1)(x+2)\le 2\ln 2 \quad (1) \qquad \text{و} \qquad \ln(x-1)+\ln(x+2)\le 2\ln 2 \quad (2)$$

الحل:

1. مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)\le\ln 4$ أي $x^2+x-6\le 0$.

مجموع الحلول هي $[-3;2]\cap D=[-3;-2[\cup]1;2]$

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]1;+\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)\le\ln 4$ أي $x^2+x-6\le 0$.

مجموع الحلول هي $[-3;2]\cap D=]1;2]$

تطبيق ❻: حل المعادلة التالية: $2[\ln(x)]^2+\ln(x)-6=0$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $a[\ln(x)]^2+b\ln(x)+c=0$ مع $a\neq 0$ نضع $X=\ln x$.

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

➤ **الحل:** مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0;+\infty[$.

بوضع $X=\ln x$ نحصل على المعادلة $2X^2+X-6=0$ ذات الحلين -2 و $\frac{3}{2}$.

$\ln x=-2$ تعني $x=e^{-2}$ و $\ln x=\frac{3}{2}$ تعني $x=e^{\frac{3}{2}}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{e^{-2};e^{\frac{3}{2}}\right\}$.

تطبيق ❼: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$

1. **أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.**
2. **عين الدالة f'.أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.**
3. **شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.**

➤ **الحل:**

1. نعلم أن $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x)=+\infty$.

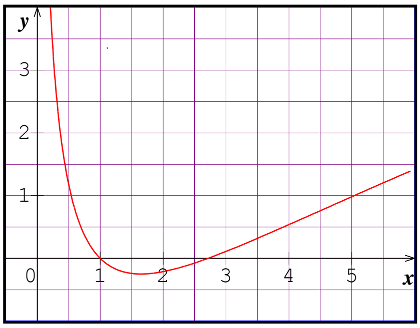
لدينا $f(x)=\ln x\left[(\ln x)-1\right]$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. بما أن الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(2\ln x-1)$. بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(2\ln x-1)$.

لدينا $2\ln x-1\ge 0$ تعني $\ln x\ge\frac{1}{2}$ أي $x\ge e^{\frac{1}{2}}$ ومنه:

- من أجل كل x من $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$، $f'(x)\le 0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$.
- من أجل كل x من $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$، $f'(x)\ge 0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

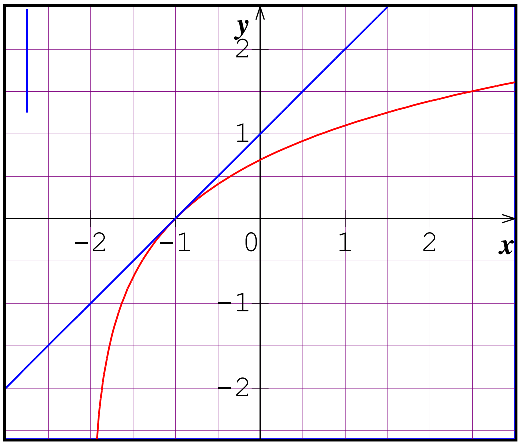
3. باستعمال قيم مساعدة نحصل على التمثيل البياني للدالة f.



x	$f(x)$
$-0,5$	
1	
e	
3	
4	
5	

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

تطبيق ❽: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بِ $f(x)=\ln(x+2)$ و ليكن (C_f) تمثيلهاالبياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. عين نقطة من (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$. أرسم (C_f) وهذا المماس.



➢ **الحل:** الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x موازيا لِ $(\Delta): y=x$ لما

يكون $f'(x)=1$ أي $\dfrac{1}{x+2}=1$ و منه $x=-1$ مع $f(-1)=0$.

معادلة المماس عند النقطة $A(-1;0)$ هي: $y=x+1$.

(C_f) هو صورة منحنى الدالة "$\ln$" بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.

تطبيق ❾: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$$\log x=2 \quad (1) \qquad\qquad \log x\le -4 \quad (2) \qquad\qquad \log x>3 \quad (3)$$

➢**الحل:**

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x=2$ تعني $\log x=\log(10^2)$ أي $x=10^2$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\{10^2\}$.

2. تكون المتراجحة (2) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x\le -4$ تعني $\log x\le\log(10^{-4})$ و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $x\le 10^{-4}$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=]0;10^{-4}]$.

3. تكون المتراجحة (3) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x>3$ تعني $\log x>\log(10^3)$ و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $x>10^3$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=]10^3;+\infty[$.

تطبيق ⑩: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بِ $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)$

أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا من جهة: $\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$ و بما أن $\lim_{X\to 2}\ln X=\ln 2$ فإن $\lim_{x\to 1}\ln(x^2+1)=\ln 2$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$ و بما أن $\lim_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim_{x\to 1}\ln(x^2-1)=-\infty$

نستنتج مما سبق أن $\lim_{x\to 1}\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\right]=+\infty$ أي $\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty$.

- $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$. لدينا إذن حالة عدم التعيين.

من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$. بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)=1$ و علما أن $\lim_{X\to 1}\ln X=0$

نستنتج أن $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)=0$ أي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

تطبيق ⓫: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بِ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أحسب $f'(x)$

2. عين معادلة لِ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

الحل:

1.من أجل كل x من $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=1+3\times\frac{2}{2x-1}=\frac{2x+5}{2x-1}$.

2.لدينا: $f(1)=1$ و $f'(1)=7$. لدينا $(\Delta): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(\Delta): y=7x-6$.

تطبيق ⓬: جدول التغيرات المقابل هو دالة u

استنتج جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-3;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln[u(x)]$$

x	-3	1	$+\infty$
$u(x)$	3 ↘	e	↗ $+\infty$

➢**الحل:** نلاحظ من جدول تغيرات الدالة u أنه من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $u(x) \geq 0$ و منه فالدالة u موجبة تماما على المجال $]-3;+\infty[$. إذن للدالتين u و $f = \ln \circ u$ نفس مجموعة التعريف. نعلم بالإضافة إلى ذلك أن لهما نفس اتجاه التغير. لدينا $f(-3) = \ln[u(-3)] = \ln 3$ و $f(1) = \ln[u(1)] = \ln e = 1$.

بما أن $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} \ln[u(x)] = +\infty$$

x	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	$\ln 3$ ↘	1	↗ $+\infty$

تمارين مقترحة

.1

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ؛ $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- ادرس إشارة $g(x)$. (لاحظ أن g(1)=0)

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق

1- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x})=f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أنشئ المنحنى (C) .

الحل:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$:

$$g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln(x) \quad \text{و} \quad g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2+1-2x}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x)\geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$ تتلخص الاشارة في الجدول الموالي

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	-	0	+

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ نضع $t=\sqrt{x}$ و منه $\lim_{x\to+\infty}(t)=+\infty$ و منه

$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(x)]^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{2\ln(t)}{t}\right]^2=0$ لان $\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t}\right]=0$ (التزايد المقارن).

حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right]=+\infty$ لان $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$.

لدينا : $f(\frac{1}{x})=f(x)$ ؛ من التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x-\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2-2=x+\frac{1}{x}-(-\ln x)^2-2=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2=f(x)$$

حساب $\lim_{x\to0^+}f(x)$: $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x=0$.

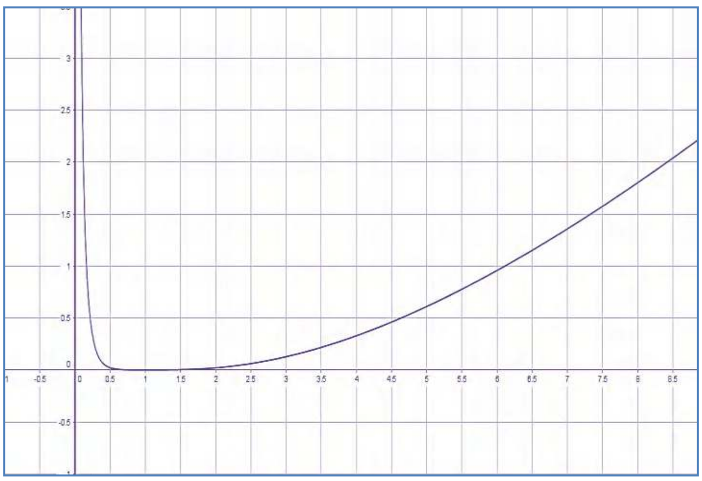
2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ و منه

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}(\ln x)=\frac{x^2-1-2x\ln x}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3- رسم المنحنى (C) :



1) g دالة معرفة $]-1,+\infty[$ ب: $g(x)=2x-\ln(x+1)$

أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

ب) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8 \prec \alpha \prec -0,7$

ج) أحسب $g(0)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $]-1,+\infty[$

2) f دالة معرفة $[-1,+\infty[$ كمايلي : $\begin{cases} f(x)=x^2+x-(x+1)\ln(x+1) \\ f(-1)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(o,\vec{i},\vec{j})$

أ) بين ان : $f(\alpha)=-(\alpha^2+\alpha)$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب $0,01$

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=-1$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ت) بين انه من اجل $x\in]-1,+\infty[$: $f'(x)=g(x)$.

ث) بين انه من اجل $x\in]-1,+\infty[$: $f(x)=(x+1)^2\left(\frac{x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

4) أرسم المماس (T) و المنحني (C_f)

الحل:

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{2x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$

ب- لدينا : $g'(x)=2-\frac{1}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1}$ اشارة $g'(x)$ من اشارة $(2x+1)$

x	-1 α -0.5 0 $+\infty$
$g'(x)$	- - 0 + + 0 -
$g(x)$	$+\infty$ 0 $-1+\ln 2$ 0 $+\infty$

ب- بمان g مستمرة ومتناقصة تماما على $[-0,8\ ;-0,7]$ $g(-0,8)\times g(-0,7)=0,009\times(-0,196)\prec 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $-0,8\prec\alpha\prec-0,7$

ج- $g(0)=0$ و استنتاج اشارة $g(x)$

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		+	**0**	-	**0**	+	

.2 $g(\alpha)=0$ **معناه** $\ln(\alpha+1)=2\alpha$ **ومنه**

$$f(x)=\alpha^2+\alpha-(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$$

$$f(\alpha)=\alpha^2+\alpha-(\alpha+1)\times(2\alpha)=\alpha^2+\alpha-2\alpha^2-2\alpha=-(\alpha^2+\alpha)$$

$-0,8\prec\alpha\prec-0,7$ **و** $0,49\prec\alpha^2\prec0,64$ **ومنه** $0,06\prec f(\alpha)\prec0,31$

ب- $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{f(h-1)-\mathrm{f}(-1)}{h}=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{(h-1)^2+(h-1)-\mathrm{h}\ln(\mathrm{h})}{h}=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{h^2-h-\mathrm{h}\ln(\mathrm{h})}{h}=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}(h-1-\ln h)=+\infty$

و منه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 1- على اليمين ، (C_f) يقبل نصف مماسا يوازي محور التراتيب معادلته $x=-1$

ت-

$$f'(x)=2x+1-\ln(x+1)-(x+1)\times\frac{1}{x+1}=2x-\ln(x+1)=g(x)$$

اشارة $f'(x)$ **من اشارة** $g(x)$

ث- $(x+1)^2\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=\dfrac{(x+1)^2x}{x+1}-\dfrac{(x+1)^2\ln(x+1)}{x+1}=x^2+x-(x+1)\ln(x+1)=g(x)$

<u>الجزء الثاني :</u>

1) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-(-x)^2e^{-x}+4(-x)e^{-x}-4e^{-x}\right)=0$

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\mathrm{y}]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(x^2+2\right)^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(x^2e^{-x}-4xe^{-x}-4e^{-x}\right)=0$

ومنه $y=x+4$ **مقارب مائل للمنحني بجوار** $+\infty$

ج- درلسة الوضع النسبي : $[f(x)-\mathrm{y}]=-(x+2)^2e^{-x}$.

x	$-\infty$		**-2**		$+\infty$
$f(x)-\mathrm{y}$		-	**0**	-	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

2) أ- لدينا:

ومنه : $f'(x)=1+(x^2+4x+4-2x-4)\mathrm{e}^{-x}$

اي : $f'(x)=1+(x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}=g(x)$ ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $\mathrm{g}(x)$

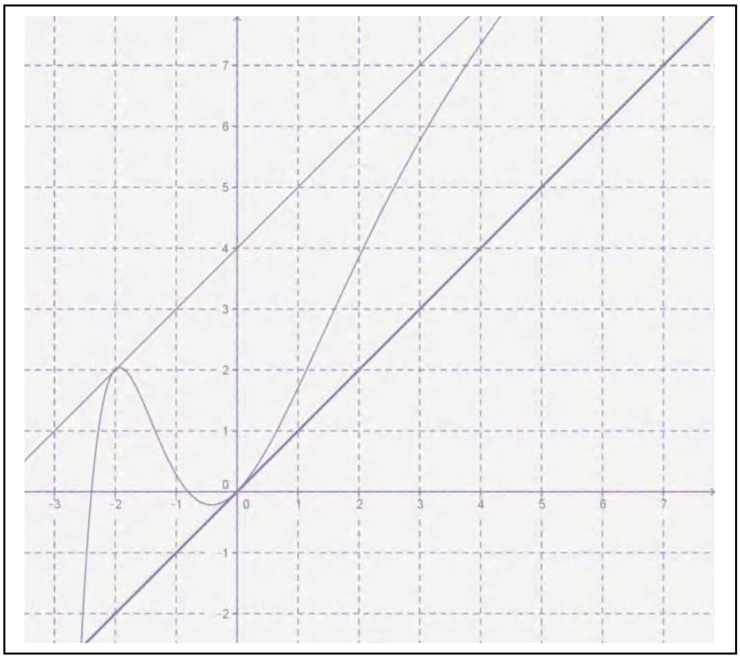
x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		+	**0**	-	**0**	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2,05$	↘	$-0,25$	↗	$+\infty$

3) اثبات ان المستقيم (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيينها

$f'(x)=1$ معناه $g(x)=1$ اي $x^2+2x=0$ اذن : $x=0$ او $x=-2$

معادلة المماس عند $x=-2$ هي: $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ أي $y=x+4$ وهي معادلة (Δ)

معادلة المماس عند $x=0$ هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ اي $(T): y=x$



المناقشة البيانية :

1) $m\prec 0$ للمعادلة حلا سالبا

2) $m=0$ للمعادلة حلين احدهما سالب والأخر معدوم

3) $0\prec m\prec 4$ للمعادلة ثلاثة حلول احدهم موجب

4) $m=4$ للمعادلة حل سالب

5) $m\succ 4$ المعادلة لاتقبل حلول

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ*/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ج*/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ*/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب*/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج*/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ*/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب*/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

الحل:

1)أ*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

$$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$$
$$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

ب */ حساب النهايات $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$.

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $\left[e+\ln\sqrt{2};+\infty\right[$

الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;e+\ln\sqrt{2}\right]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		$\ln 2/2+e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$3\ln 2/2+e$	↗	$+\infty$

2) أ*/ نبين أن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين $\left(D\right)$ و $\left(D'\right)$ معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب: بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-e)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+e+\ln 2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln 2\right]=0$$

فإن: $\left(D\right)$ مستقيم مقارب لـ $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$ و $\left(D'\right)$ مستقيم مقارب لـ $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$

ب*/ دراسة وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة لـ $\left(D\right)$ و $\left(D'\right)$

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ 1$ معناه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln 1=0$ ومنه: $f(x)-(x-e)\succ 0$ إذن $\left(C_f\right)$ يقع فوق م.م $\left(D\right)$

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln 2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln 2$

$2+e^{2(x-e)}\succ 2$ معناه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ\ln 2$ ومنه:

$f(x)-(-x+e+\ln 2)\succ 0$ إذن $\left(C_f\right)$ يقع فوق م.م $\left(D'\right)$ من أجل كل عدد حقيقي x

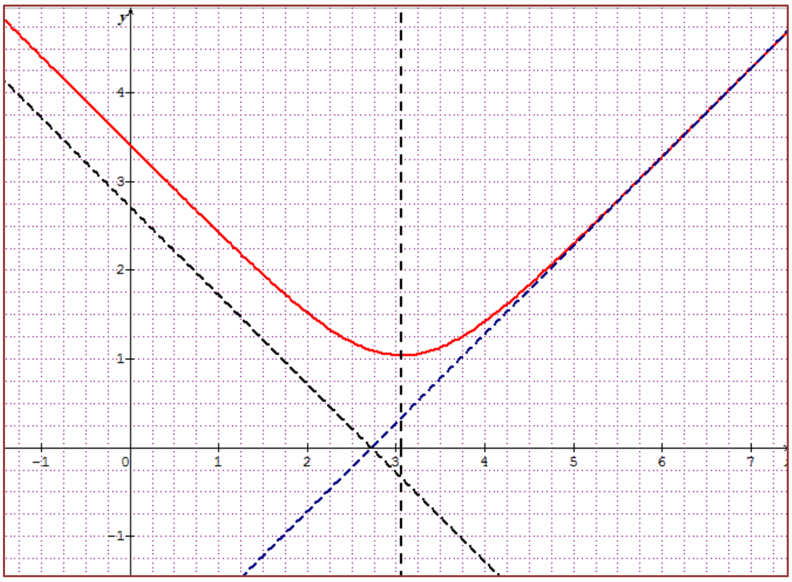
ج*/ نبين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(2\left(\frac{\ln 2}{2}+e\right)-x\right)$ من $\mathbb{R}$ ، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln 2}{2}+e\right)-x\right)=f\left(\ln 2+2e-x\right)$$
$$=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})=f(x)$$

ومنه: $\left(\Delta\right):x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ محور تناظرللمنحنى $\left(C_f\right)$

3) رسم $\left(\Delta\right)$، $\left(D\right)$، $\left(D'\right)$ و $\left(C_f\right)$.



4) أ*/ نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$: $(D_m): y = mx - m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$

حيث m وسيط حقيقي.

$y = mx - m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ معناه

$m\left(x - e - \frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2} - y = 0$ معناه

$x - e - \frac{\ln 2}{2} = 0$ و $\frac{\ln 2}{2} - y = 0$ ومنه: جميع المستقيمات

(D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$

ب*/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) :

المستقيم (D_m) يدور حول النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$

إذا كان $m = 1$ فإن (D_m) هو (D) لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m = -1$ فإن (D_m) هو (D') لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m = 0$ فإن (D_m) هو $(D_0): y = \ln\sqrt{2}$ لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-1;1[$ فإنه لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-\infty;-1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m \in]1;+\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ ، (الوحدة $2\,cm$) .

$I)$ 1 / احسب نهايتي الدالة f عند e وعند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسيا .

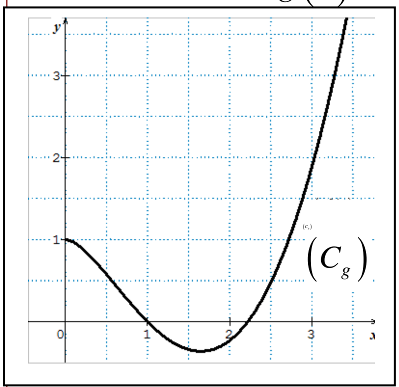
2 / بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ ثمّ فسّر النتائج هندسيا . (لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$) .

3 / بين انه من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

4 / ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

$II)$ لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (انظر الشكل)



1 / أ . بقراءة بيانية حدّد عدد حلول المعادلة (E) التالية $g(x)=0$ في المجال $]0;+\infty[$

ب . باستعمال جدول القيم التالي :

x	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	$0,12$	$0,28$

بين أن المعادلة (E) تقبل حلاّ α بحيث $2,2<\alpha<2,3$

2 / أ . تحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

ب . بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و α .

جـ . حدد انطلاقا من (C_g) إشارة $g(x)$ على المجال $[1;\alpha]$ وبين أن $f(x)-x\le 0$ لكلّ x من المجال $[1;\alpha]$.

3 / أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

الحل:

$f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ ، $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$.

$I)$ 1 / حساب نهايتي f عند e و $+\infty$ و تفسير النتائج :

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} f(x)=+\infty$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=e$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لمحور التراتيب .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ومنه محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

2 / تبيان أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ و تفسير النتيجة هندسيا :

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x(1-\ln x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-x\ln x)=0^+$ و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

ومنه محور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

3 / تبيان انه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f و دالتها المشتقة f' حيث : $f'(x)=\dfrac{-\left((1-\ln x)-\frac{1}{x}x\right)}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

4 / دراسة اتجاه تغير الدالة f :من أجل كل x من D_f لدينا : $x^2(1-\ln x)^2>0$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $\ln x$ وهي :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

II) لدينا $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$ ، $D_g=]0;+\infty[$.

1 / أ. تحديد عدد حلول المعادلة (E) في المجال $]0;+\infty[$: المنحنى (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطتين و منه المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين .

ب .تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلاّ α حيث $2,2<\alpha<2,3$

الدالة g مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]2.2;2.3[$ و $g(2.2)\simeq-0.02$ و $g(2.3)\simeq0.12$ إذن $g(2.2)\times g(2.3)<0$ ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا α حيث $2,2<\alpha<2,3$

2/ أ.التحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

$$f(x)-x=\frac{1}{x(1-\ln x)}-x=\frac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)}=\frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

ب .تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و α .

لدينا $f(x)-x=0$ تكافئ $\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}=0$ أي أن $g(x)=0$ ومنه $x=1$ أو $x=\alpha$.

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و α .

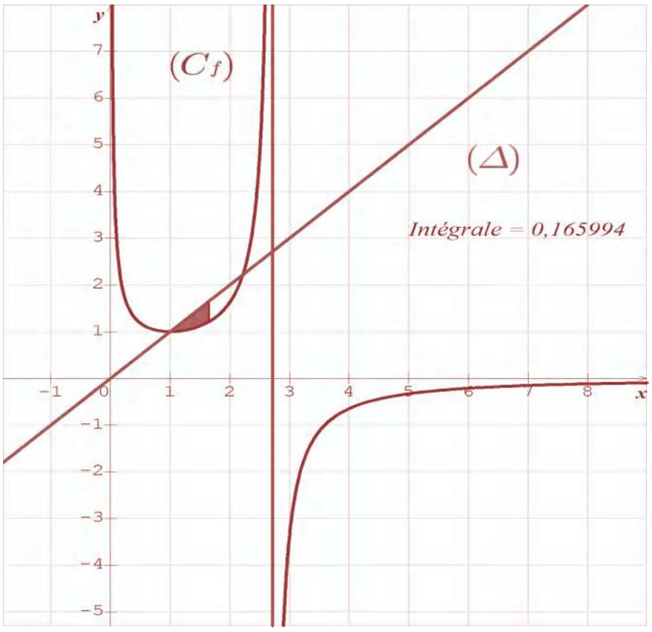
جـ تحديد انطلاقا من (C_g) إشارة $g(x)$ على المجال $[1;\alpha]$

المنحنى (C_g) يقع تحت محور الفواصل على المجال $]1;\alpha[$ومنه الدالة g سالبة تماما على المجال $]1;\alpha[$ وتنعدم من أجل القيمتين 1 و α للمتغير x .

* تبيان أن $f(x)-x\leq0$ لكلّ x من المجال $[1;\alpha]$:

لدينا $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ و من أجل كل x من $[1;\alpha]$ ، $x(1-\ln x)>0$ و $g(x)\leq0$ ومنه $f(x)-x\leq0$ لكلّ x من المجال $[1;\alpha]$.

3/ إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f):



5.

I. الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$.

1.أ-أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب-احسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاه تغيرها.2.أ-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ ثم أعط حصر ل α سعته 10^{-2} .

ب-عين اشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. الدالة g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:
$$\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=\frac{-7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x \end{cases}$$

1أ-أدرس استمرارية و اشتقاقية الدالة g عند**0**.

ب-عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

2.لتكن g' الدالة المشتقة للدالة g. من أجل كل x من $]0;+\infty[$.أحسب $g'(x)$ ثم تحقق أن: $g'(x)=x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3.أ-استنتج اشارة $g'(x)$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$

ب-شكل جدول التغيرات للدالة g .

الحل:

الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$.

1.أ-أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

لدينا:

$$\lim_{x\to0} f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}(x-2)=-2\\ \lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{1}{2}\ln(x)=-\infty\end{cases}$$ و بالتالي: $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}\ln(x)=+\infty\end{cases}$$ و بالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب-احسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاه تغيرها.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{2x}$$

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $2x>0$ و $2x+1>0$ و بالتالي: $f'(x)>0$. اذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

زمنه يكون جدول التغيرات كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2.أ-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ ثم أعط حصر ل α سعته 10^{-2} .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α

حيث: $1.72<\alpha<1.73$.   لا حظ أن $f(1)<0$ و $f(2)>0$ اذن

ب-عين اشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

x	0 $\quad\alpha\quad$ $+\infty$
$f(x)$	- $\quad$ 0 $\quad$ +

الدالة g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=\dfrac{-7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x \end{cases}$$

1 .أ-دراسة استمرارية الدالة g عند0.

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-7}{8}x^2+x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}x^2\ln x\right)=0 \end{cases}$$ و بالتالي: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x=0=g(0)$

اذن الدالة مستمرة عند0. (لا تنسى: $\lim\limits_{x\to 0} x^n\ln x=0$ نهاية شهيرة).

دراسة اشتقاقية الدالة g عند0.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-7}{8}x+1-\dfrac{1}{4}x\ln x\right)=1$ و بالتالي الدالة قابلة للاشتقاق عند0 و $f'(0)=1$.

ب-عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-7}{8}x^2+x\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}x^2\ln x\right)=0 \end{cases}$$ و بالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2.لتكن g' الدالة المشتقة للدالة g .من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

أحسب $g'(x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x)=\frac{-7}{4}x+1-\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}=-2x-\frac{1}{2}x\ln x+1$$

$$g'(x)=x\left(-2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-2-\frac{1}{2}\ln x$

$g'(x)=x.f\left(\frac{1}{x}\right)$

ثم تحقق أن: $g'(x)=x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3.أ-استنتج اشارة $g'(x)$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$

لدينا: $g'(x)=x.f\left(\frac{1}{x}\right)$

نعلم أن: $x>0$ فان: $g'(x)$ من اشارة $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

من جدول اشارة الدالة f نجد:

اذا كان $\frac{1}{x}<\alpha$ يعني: $x>\frac{1}{\alpha}$ يصبح لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right)<0$ و بالتالي: $g'(x)<0$

اذا كان $\frac{1}{x}=\alpha$ يعني: $x=\frac{1}{\alpha}$ يصبح لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ و بالتالي: $g'(x)=0$.

اذا كان $\frac{1}{x}>\alpha$ يعني: $x<\frac{1}{\alpha}$ يصبح لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right)>0$ و بالتالي: $g'(x)>0$.

ب-شكل جدول التغيرات للدالة g .

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	↗	$g(\alpha)$	↘	$-\infty$

6.

لتكن الدالة f_k المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f_k(\text{x})=\ln\left(e^x+kx\right)-x$ ، حيث k عدد حقيقي موجب تماما.

و $\left(C_k\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. وحدة الرسم: $\|\vec{i}\|=5cm,\|\vec{j}\|=10cm$

الجزء (أ):

1.الدالة f_1 معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي. $f_1(x)=\ln\left(e^x+x\right)-x$

احسب $f_1'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f_1 و استنتج اتجاه تغيرها.

2.بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f_1(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$. ثم استنتج نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.

3.شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .

الجزء (ب):

احسب $f_k'(x)$ من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f_k .

2. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$ ثم استنتج نهاية الدالة f_k عند $+\infty$.

3.أ-شكل جدول تغيرات الدالة f_k ..

ب-بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f_k(x)\leq\frac{k}{e}$.

4.عين معادلة المماس $\left(T_k\right)$ للمنحنى $\left(C_k\right)$ عند النقطة O.

5.ليكن p و m عددان حقيقيان موجبان تماما حيث $p<m$.أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $\left(C_p\right)$ و $\left(C_m\right)$.

6. ارسم المماسين $\left(T_1\right)$، $\left(T_2\right)$ و المنحنيين $\left(C_1\right)$ و $\left(C_2\right)$ على الترتيب.

الحل:

الجزء (أ):

الدالة f_k المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f_k(\text{x})=\ln\left(e^x+kx\right)-x$ ، حيث k عدد حقيقي موجب تماما.

الجزء (أ):

1.الدالة f_1 معرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي. $f_1(x)=\ln\left(e^x+x\right)-x$

حساب $f_1'(x)$: الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ،

$$f'_1(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x}-1=\frac{e^x+1-e^x+x}{e^x+x}=\frac{1-x}{e^x+x}$$

واستنج اتجاه تغيرها:

لدينا: $f'_1(x)=\frac{1-x}{e^x+x}$ ، بما أن: $x\geq 0$ فان اشارة $f'_1(x)$ من اشارة البسط أي: $1-x$

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$1-x$	+ $\quad$ 0 $\quad$ -

و بالتالي: f_1 متزايدة على المجال $]0;1[$ و متناقصة على المجال $]1;+\infty[$

2.بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f_1(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$:

$$f_1(x)=\ln\left(e^x+x\right)-x=\ln\left(e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)-x$$
$$=x+\ln\left(\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)-x=\ln\left(\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)$$

استنتاج نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{e^x}\right)=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f_1(x)=0$$

3.شكل جدول تغيرات الدالة f_1 :

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f'_1(x)$	+ $\quad$ 0 $\quad$ -
$f_1(x)$	$0 \nearrow f_1(1) \searrow 0$

حيث: $f_1(0)=0, f_1(1)=\ln\left(e+1\right)-1$

الجزء (ب):

حساب $f_k'(x)$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

الدالة f_k قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ،

$$f'_k(x)=\frac{e^x+k}{e^x+kx}-1=\frac{e^x+k-e^x+kx}{e^x+kx}=\frac{k(1-x)}{e^x+kx}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f_k :

لدينا: $x\ge 0$ و $k>0$ و بالتالي $f_k'(x)$ من نفس اشارة . $1-x$:

مما سبق نجد أن : f_k متزايدة على المجال $]0;1[$ و متناقصة على المجال $]1;+\infty[$

2. بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$

$$f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x=\ln\left(e^x\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\right)=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\right)-x$$
$$=x+\ln\left(\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\right)-x=\ln\left(\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\right)$$

استنتاج نهاية الدالة f_k عند $+\infty$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(k\frac{x}{e^x}\right)=0, k>0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f_k(x)=0$$

3.أ-شكل جدول تغيرات الدالة f_k .

x	0		1		$+\infty$
$f'_k(x)$		+	0	-	
$f_k(x)$	0	↗	$f_k(1)$	↘	0

حيث: $f_k(0)=0, f_k(1)=\ln\left(e+k\right)-1$

ب-اثبات أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f_k(x)\le\frac{k}{e}$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن: $f_k(x)\le f_k(1)$

$$f_k(1)=\ln\left(e+k\right)-1=\ln\left(e+k\right)-\ln e=\ln\left(\frac{e+k}{e}\right)$$

اذن: $f_k(x)\le\ln\left(\frac{e+k}{e}\right)$ ، نعلم أنه من أجل $x>0$ لدينا: $\ln(x)\le x$ و بالتالي:

أي: $f_k(x)\le\ln\left(\frac{e+k}{e}\right)\le\frac{k}{e}$

$f_k(x)\le\frac{k}{e}$

4.تعين معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة O.

معادلة المماس (T_k):

$$(T_k): y = f_k'(0)\,x + f_k(0)$$
$$(T_k): y = kx$$

5.ليكن $0 < p < m$.دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_p) و (C_m).

ندرس اشارة الفرق: $f_p(x) - f_m(x)$ ، نجد:

$$f_p(x) - f_m(x) = \ln\left(e^x + px\right) - x - \ln\left(e^x + mx\right) + x$$
$$= \ln\left(e^x + px\right) - \ln\left(e^x + mx\right) = \ln\left(\frac{e^x + px}{e^x + mx}\right)$$

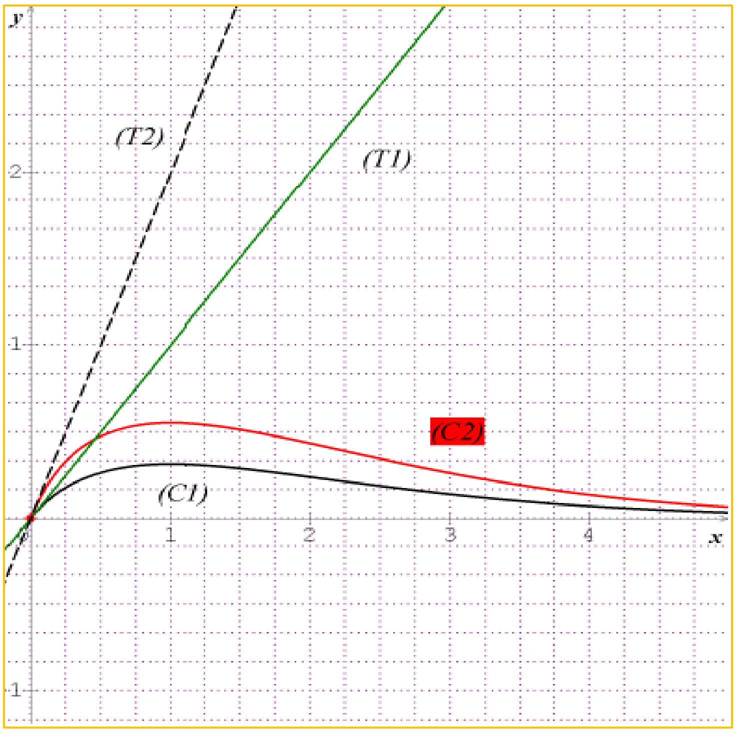
بما أن: $0 < p < m$ فان: $e^x + px > 0$ ، $e^x + mx > 0$ نستنتج أن: $e^x + px < e^x + mx$

$$\frac{e^x + px}{e^x + mx} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{e^x + px}{e^x + mx}\right) < 0$$

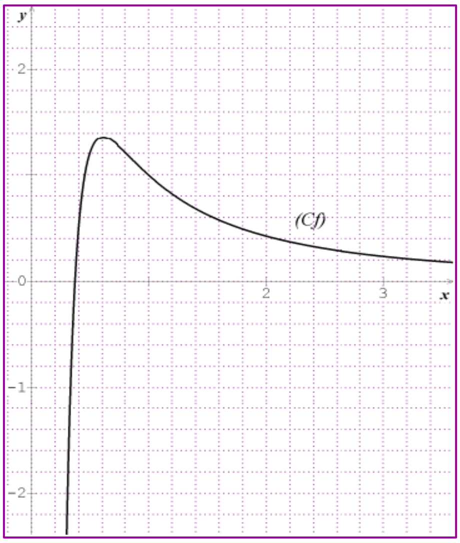
و بالتالي: $f_p(x) - f_m(x) < 0$ اذن المنحنى (C_p) يقع تحت (C_m) من أجل $0 < p < m$.

6. رسم المماسين (T_1)، (T_2) و المنحنيين (C_1) و (C_2) على الترتيب.

$$(T_1): y = x$$
$$(T_2): y = 2x$$



I. لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$، و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (أنظر الشكل المقابل)



1.أ-أحسب نهاية الدالة f عند 0 على اليمين، فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا..

2.أ-بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

ب-حل في $]0;+\infty[$ المتراجحة: $1-2\ln x>0$ ثم استنتج اشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

ج-شكل جدول تغيرات الدالة f .

3.أ-بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعين احداثياها.

ب- استنتج اشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بالعدد I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتهما: $x=\dfrac{1}{e}$ و $x=n$.

1.-بين أن: $0\le I_2\le e-\dfrac{1}{2}$

2.-بين أن $F: x\mapsto \dfrac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3.-أحسب I_n بدلالة n.

4.-أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

الحل:

I.لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$.

1.أ-حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1+\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x^2}(1+\ln x)=-\infty$

التفسير: $x=0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

التفسير: $y=0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

2.أ-اثبات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}.x^2-2x(1+\ln x)}{x^4}=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$

اذن: $f'(x)=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$.

ب-حل في $]0;+\infty[$ المتراجحة: $1-2\ln x>0$

$$-1-2\ln x>0\Leftrightarrow -2\ln x>1$$

أي: $\Leftrightarrow 2\ln x<-1\Leftrightarrow \ln x<-\frac{1}{2}$ و بالتالي: $S=\left]0;e^{\frac{-1}{2}}\right[$.

$$\Leftrightarrow x<e^{\frac{-1}{2}}$$

استنتج اشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا $x>0\Rightarrow x^3>0$ و منه اشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ من اشارة البسط أي: $1-2\ln x$ أي:

x	0 $\quad\quad$ $e^{\frac{-1}{2}}$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ -

ج-جدول تغيرات الدالة f :

x	0 $\quad\quad$ $e^{\frac{-1}{2}}$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$ $\nearrow$ $\frac{e}{2}$ $\searrow$ 0

3.أ-اثبات أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة .

نقوم بحل المعادلة: $f(x)=0$ أي:

$$\frac{1+\ln x}{x^2}=$$

$$1+\ln x=0,\left[x^2\neq 0, x\in\left]0;+\infty\right[\right]$$ لأن:

$$\ln x=-1$$

$$x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

و بالتالي احداثيا النقطة هي: $\left(\frac{1}{e};0\right)$.

استنتاج اشارة $f(x)$ على المجال $\left]0;+\infty\right[$ ، نلخصها في الجدول التالي:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بالعدد I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتهما: $x=\frac{1}{e}$ و $x=n$.

1.-اثبات أن: $0\leq I_2\leq e-\frac{1}{2}$.على المجال $\left[\frac{1}{e};2\right]$ لدينا: $0\leq f(x)\leq\frac{e}{2}$ و بالتالي

$$0\leq\int_{\frac{1}{e}}^{2}f(x)dx\leq\int_{\frac{1}{e}}^{2}\frac{e}{2}dx$$

$$0\leq I_2\leq\frac{e}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{2}1dx$$

أي: $$0\leq I_2\leq\frac{e}{2}[x]_{\frac{1}{e}}^{2}$$ لأن: $I_2=\int_{\frac{1}{e}}^{2}f(x)dx$

$$0\leq I_2\leq\frac{e}{2}\left[2-\frac{1}{e}\right]$$

$$0\leq I_2\leq e-\frac{1}{2}$$

2.-تبيان أن $F:x\mapsto\frac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

لدينا الدالة $F:x\mapsto\frac{-2-\ln x}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$ ،حيث:

$$F'(x)=\frac{-\frac{1}{x}.x-(-2-\ln x)}{x^2}=\frac{-1+2+\ln x}{x^2}=\frac{1+\ln x}{x^2}=f(x).$$
$$\Rightarrow F'(x)=f(x).$$

3.-حساب I_n بدلالة n.

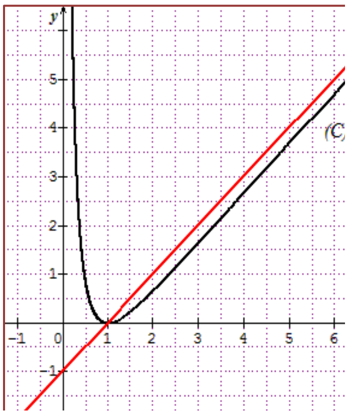
على المجال $\left[\frac{1}{e};n\right]$ لدينا:

$$I_n=\int_{\frac{1}{e}}^{n}f(x)dx=\left[\frac{-2-\ln x}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{n}=\left(\frac{-2-\ln(n)}{n}\right)-\left(\frac{-2-\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}\right)$$
$$=\left(\frac{-2-\ln(n)}{n}\right)-(-e)$$
$$I_n=e-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}$$

4.-حساب نهاية (I_n) عند $+\infty$:

لدينا :
$$\lim_{n\to+\infty}I_n=\lim_{n\to+\infty}\left[e-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}\right],\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}I_n=e$$

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=ax-1-\frac{b\ln x}{x}$ ، حيث b,a عددان حقيقيان و ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (أنظر الشكل).



الجزء الأول:

بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1.عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2.عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم على يمين العدد 0.

3.عين حسب قيم x اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

الجزء الثاني:

1.أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$.

2.أثبت أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم أدرس وضعيته بالنسبة الى (C) .

3.أ-ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda\geq 1$.

احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=\lambda$.

ب-عين قيم العدد الحقيقي λ حتى تكون $A(\lambda)>\frac{1}{2}$.

الجزء الثالث: نعتبر F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-\frac{1}{2}$. وليكن $\left(C_F\right)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

بدون حساب عبارة $F(x)$ أجب عما يلي:

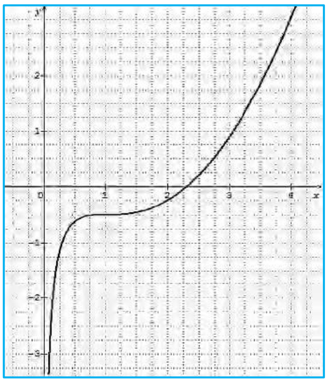
1.حدد اتجاه تغير الدالة F .

2.يبين أن $\left(C_F\right)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

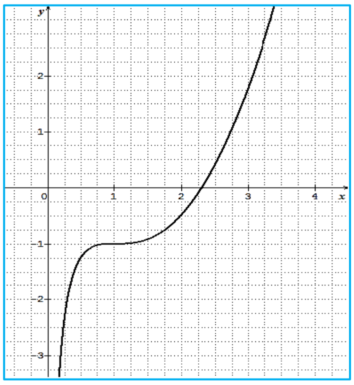
3.أ-بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى $\left(C_F\right)$ في النقطة ذات الفاصلة1 هي: $y=\frac{-1}{2}$.

ب-استنتج وضعية $\left(C_F\right)$ بالنسبة الى المماس (T).

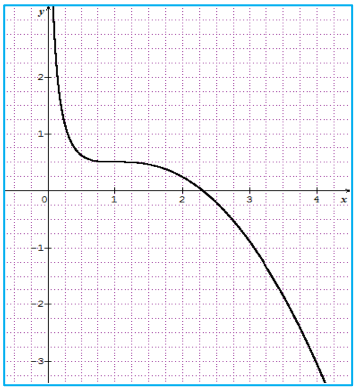
4.من بين المنحنيات الثلاثة التالية عين المنحنى $\left(C_F\right)$ مع التبرير.



(1)



(2)



(3)

الحل:

I بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1.تعين $f(1)$ و $f'(1)$:

لدينا: $f(1)=0$ و $f'(1)=0$ (لأن المماس عند النقة ذات الفاصلة 1 موازي لمحور الفواصل)

2. نهاية الدالة f :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=+\infty$

3.تعين حسب قيم x اشارة $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

II. 1..أثبات أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$.

لدينا: $f(1)=0$ و $f'(1)=0$

$$f(1)=0 \Rightarrow a-1-\frac{b\ln 1}{1}=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow a-\frac{b-b\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow b=1$$

و بالتالي: $a=b=1$ اذن: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$.

2.أثبات أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{\ln x}{x}-(x-1)=\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x}=0$$

اذن: $y=x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C).

دراسة الوضعية بالنسبة الى (C):

ندرس اشار الفرق: $f(x)-y$ نجد: $f(x)-y=\frac{-\ln x}{x}$

نعلم أن: $x>0$ و بالتالي حسب اشارة $-\ln x$ أي:

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	--

اذن:

من أجل $0<x<1$ المنحنى (C) فوق المستقيم (Δ).

من اجل $x>1$ المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ).

لما $x=1$ المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $A(1;0)$.

3.أ-ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda\geq 1$.

احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=\lambda$.

على المجال $[1;\lambda]$ المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ) و بالتالي:

$$A(\lambda)=\int_1^\lambda y-f(x)dx=\int_1^\lambda x-1-x+1+\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^\lambda=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2\, u.a$$

نذكر أن: $(u^2)'=2.u'.u \Rightarrow \int u'.u=\frac{u}{2}+c$

ب-تعين قيم العدد الحقيقي λ حتى تكون $A(\lambda)>\frac{1}{2}$.

معناه: $\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2 > \frac{1}{2}$ و بالتالي: $(\ln\lambda)^2 > 1 \Rightarrow (\ln\lambda)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (\ln\lambda - 1)(\ln\lambda + 1) > 0$ ومنه: $\lambda \in]e;+\infty[$

III. 1.تحدد اتجاه تغير الدالة F .

لدينا: $F'(x) = f(x)$ من جدول التغيرات لدينا : $f(x) \geq 0$ أي: $F'(x) \geq 0$ و منه الدالة F متزايدة على $]0;+\infty[$.

2. تبيان أن (C_F) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

نعلم أن: $F''(x) = f'(x)$ أي: اشارة $F''(x)$ من اشارة $f'(x)$ التي تنعدم عند 1 و تغير اشارتها.

اذن (C_F) يقبل نقطة انعطاف $B(1;F(1))$ أي: $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$

3.أ-معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) في النقطة ذات الفاصلة1.

$$(T): y = F'(1)(x-1) + F(1)$$
$$(T): y = f(1)(x-1) + F(1)$$
$$(T): y = -\frac{1}{2}$$

ب-استنتاج وضعية (C_F) بالنسبة الى المماس (T).

على المجال $]0;1[$ المنحنى (C_F) يقع تحت المماس (T)

على المجال $]1;+\infty[$ المنحنى (C_F) يقع تحت المماس (T)

المنحنى (C_F) يقطع المماس (T) في النقطة $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$

4. المنحنى الممثل للدالة F هو الشكل الأول (1) لأنه يحقق : $F(1) = -\frac{1}{2}$ و الدالة متزايدة و المنحى (C_F) يقبل نقطة انعطاف $B(1;F(1))$.

.9

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$

و ليكن (C_f) منحناها في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ ، ثم حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2.أ-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3.تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=x+\ln\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\right)$ ثم بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ يطلب ايجاد معادلته.

5.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$ ثم استنتج اشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

6.شكل جدول تغيرات الدالة f .

7.بين أن: $f''(x)=\dfrac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$ ،ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين احداثياتها.

8.ارسم (C_f).

9.ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x-e^m=2\left(-1+\sqrt{e^x}\right)$.

الحل:

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$

1.التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$

لدينا: $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}\right)^2-2\sqrt{e^x}+1+1=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$

$$\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0$$

و عليه: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0\right\}$ ، دائما محقق من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$D_f=\mathbb{R}$$

2.احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=\ln 2$$

نستنتج أن: $y=\ln 2$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ موازي لمحور الفواصل.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1=+\infty$$

3.التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=x+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$:

$$f(x)=\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=\ln\left[e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{\sqrt{e^x}}\right)\right]$$

$$=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{\sqrt{e^x}}\right)$$

$$=x+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{\sqrt{e^x}}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=x+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{\sqrt{e^x}}\right)$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{\sqrt{e^x}}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{\sqrt{e^x}}\right)=\ln(1)=0$

و بالتالي: المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

5. الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x)=\left[\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\right]'$$

أي: $$=\frac{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)'}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}=\frac{e^x-2\left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}=\frac{e^x-\frac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$$

$$=\frac{e^x-\sqrt{e^x}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}=\frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$$

اشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$: من اشارة: $\sqrt{e^x}-1$ و منه: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}-1=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

6.جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

7.اثبات أن: $f''(x)=\dfrac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$.

لدينا: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ الدالة f' قابلة للاشتقاق:

و عليه:

$$f''(x)=\left[\frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}\right]'=\frac{\left(e^x-\frac{\sqrt{e^x}}{2}\right)\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)-\left(e^x-\sqrt{e^x}\right).\left(e^x-\sqrt{e^x}\right)}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

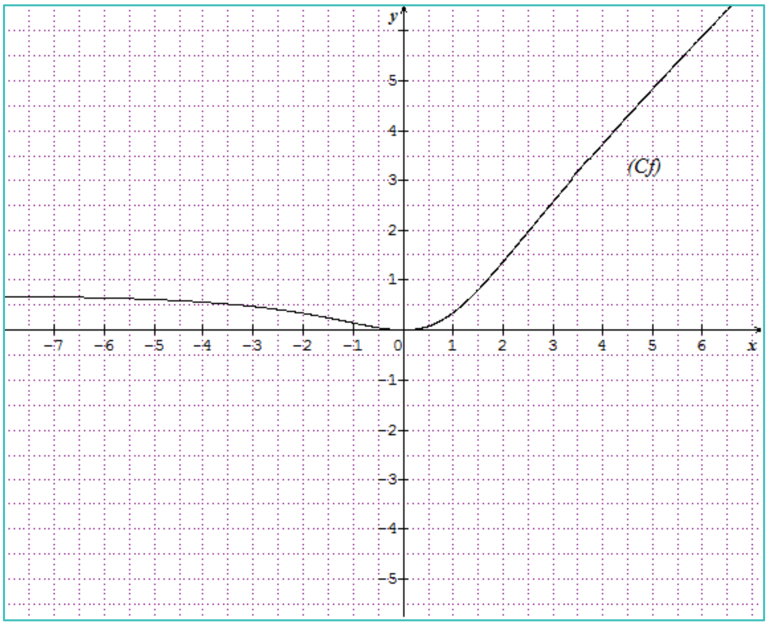
$$=\frac{2e^x-\frac{e^x\sqrt{e^x}}{2}-\sqrt{e^x}}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}=\frac{\frac{-\sqrt{e^x}}{2}\left(-4\sqrt{e^x}+e^x+2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}=\frac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

اشارة $f''(x)$ من اشارة $-\left(\left(\sqrt{e^x}-2\right)^2-2\right)$ أي:

x	$-\infty$		$2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$		$2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	

نلاحظ أن: f'' (المشتقة الثانية الدالة f) تنعدم و تغير من اشارتها فان النقطة $\omega\left(2\left(\ln 2-\sqrt{2}\right), f\left(2\left(\ln 2-\sqrt{2}\right)\right)\right)$ هي نقطة انعطاف.

8.ارسم (C_f).



9.المناقشة:

لدينا:

$$e^{x}-2\left(-1+\sqrt{e^{x}}\right)=e^{m}$$

$$e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2=e^{m}\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)=\ln e^{m}$$

$$f(x)=m$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذا المعادلة: $y=m$.

اذا كان: $m<0$ المعادلة لا تقبل حلول

اذا كان $m=0$ المعادلة لها حل وحيد

اذا كان $0<m<\ln 2$ المعادلة تقبل حلين.

اذا كان $m\geq \ln 2$ المعادلة لها حل و حيد.

انعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\ln(1+x)$ و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (D) المستقيم ذا المعادلة: $y=x$.

1.أ-احسب نهايتي الدالة f.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة f.

II.نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1-f(x)$.

1.أ-احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. نذكر أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

ج- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2.بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha\le 0$ و $2\le\beta\le 3$.

3.عين حسب قيم x اشارة $g(x)$.

4.أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D).

5.أرسم (D) و (C_f).

III.نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

1.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n\le\beta$.

2.هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل جوابك.

الحل:

I.الدالة f معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\ln(1+x)$

1.أ-حساب نهايتي الدالة f:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1} 1+\ln(1+x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\ln(1+x)=+\infty$$

ب- اتجاه تغير الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ حيث

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ بما أن $x>-1$ فان $\dfrac{1}{x+1}>0$ و بالتالي $f'(x)>0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

II.1.أ-حساب

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)-x=1+\ln(x+1)-x=-\infty$.

ب-
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x)&=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty} 1+\ln(x+1)-x\\&=\lim_{x\to+\infty} 1+(x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right]\\&=-\infty\end{aligned}$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ حيث

$$\begin{aligned}g'(x)=f'(x)-1&=\frac{1}{x+1}-1\\&=\frac{-x}{x+1}\end{aligned}$$

بما أن $x>-1$ فان $\dfrac{1}{x+1}>0$ و بالتالي اشارة $g'(x)$ من اشارة $(-x)$

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		+	0	-	

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2.اثبات أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha\leq 0$ و $2\leq\beta\leq 3$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1;0]$ ولدينا $g(0)=1>0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=-\infty$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حل α حيث $\alpha\leq 0$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا $g(0)=1>0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

و عليه لدينا $g(2)\times g(3)<0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حل β حيث $2\le\beta\le3$.

3. اشارة $g(x)$.

x	-1 α β $+\infty$
$g(x)$	- 0 + 0 -

4. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D):

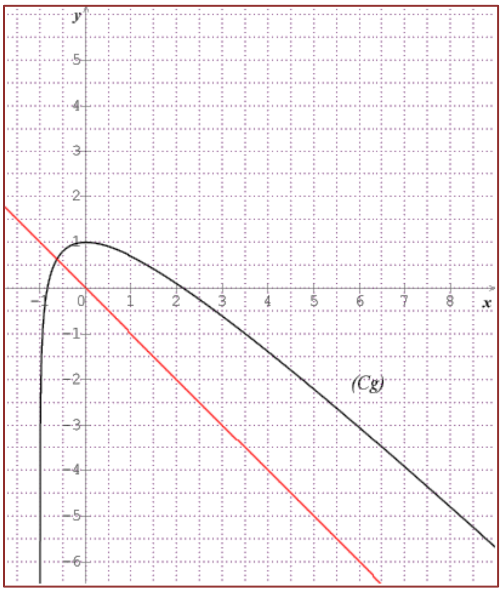
يعني ندرس اشارة الفرق: $f(x)-y$

و عليه : $$\begin{aligned} f(x)-y &= 1+\ln(x+1)-x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

و بالتالي اشارة الفرق من اشارة $g(x)$ أي:

x	-1 α β $+\infty$
$f(x)-y$	- 0 + 0 -
الوضعية	(C_f) تحت (D) (C_f) فوق (D) (C_f) تحت (D)

5. الرسم:



III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n\le\beta$.

نضع $P(n).....2 \le u_n \le \beta$

من اجل $n=0$ لدينا $2 \le 2 \le \beta$ أي $2 \le u_0 \le \beta$ و بالتالي: $P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2 \le u_{n+1} \le \beta$.

لدينا: $$\begin{aligned} &2 \le u_n \le \beta \\ &f(2) \le f(u_n) \le f(\beta) \\ &1+\ln 3 \le u_{n+1} \le \beta \\ &2 \le u_{n+1} \le \beta \end{aligned}$$ لأن: $$\begin{aligned} g(\beta)=0 &\Leftrightarrow f(\beta)-\beta=0 \\ &\Leftrightarrow f(\beta)=\beta \end{aligned}$$ و $2 \le 1+\ln 3$

و بالتالي: $P(n+1)$ محققة.

و عليه حسب مبدأ البرهان بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \le u_n \le \beta$.

2. المتتالية (u_n) متقاربة:

على المجال $[\alpha;\beta]$، $g(x) \ge 0$ أي: $f(x)-x \ge 0$ و بما أن $2 \le u_n \le \beta$

اذن $f(u_n)-u_n \ge 0$ يعني $u_{n+1}-u_n \ge 0$ ينتج عليه أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد β فان (u_n) متتالية متقاربة .

التكن الدالة f المعرفة كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}, x\neq 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1.-عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2.أ-أدرس استمرارية الدالة f على يمين العدد 0.

ب- احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ، هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند0 ؟

3.أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4.بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعين احداثياها.

5.أرسم المنحنى (C_f).

II.لتكن الدالة h المعرفة من أجل المتغير الحقيقي x كما يلي : $\begin{cases} h(x)=\dfrac{1}{1-\ln x}, x\neq 0 \\ h(0)=0 \end{cases}$

1.بين أن $D_f=D_h$ و من أجل كل x من D_h ، $h(x)=f(x)+1$.

2.استنتج جدول تغيرات الدالة h .

3.أرسم (C_h) منحنى الدالة h في المعلم السابق.

4.أحسب بالسنتيمتر المربع (cm^2) و بدلالة λ مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=0$ ، $x=\lambda$ حيث: $0\leq\lambda\leq e$

5.أحسب $\lim\limits_{\lambda\to e} A(\lambda)$.

الحل:

I.لتكن الدالة f المعرفة كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}, x\neq 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$

1.-تعين D_f:

لدينا: $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$ الدالة f معرفة من أجل $x>0$ و $1-\ln x\neq 0$ أي: $x\neq e$

اذن: $D_f=[0;e[\cup]e;+\infty[$

2.أ-دراسة استمرارية الدالة f على يمين العدد 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$$
$$=f(0)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-1$$

و منه الدالة f مستمرة على يمين 0.

ب- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{\ln x}{1-\ln x}+1}{x}$$
$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x-x\ln x}$$
$$=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$

و عليه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند0

3. اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $D_f=[0;e[\cup]e;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)-\ln x.\left(\frac{1}{x}\right)}{(1-\ln x)^2}=\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

من أجل كل x من $D_f=[0;e[\cup]e;+\infty[$ لدينا: $f'(x)>0$ لأن $x\geq 0$ و $(1-\ln x)^2>0$

اذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;e[\cup]e;+\infty[$.

نحسب النهايات:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} e} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} e} \frac{\ln x}{1-\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} e} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} e} \frac{\ln x}{1-\ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = -1$$

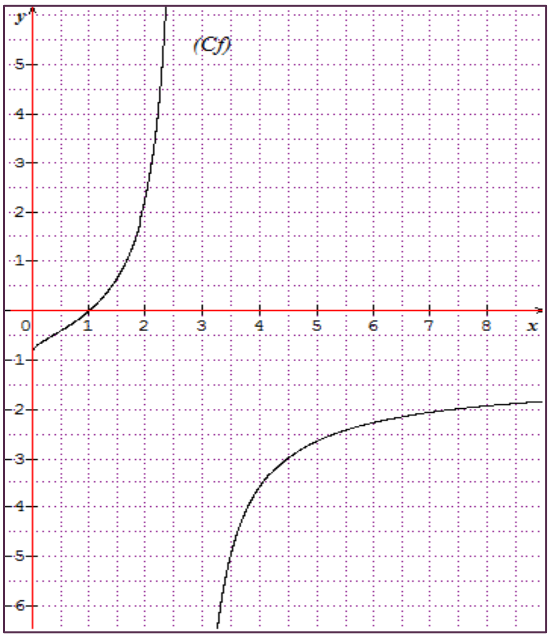
جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

4.لدينا: الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ حيث: $f''(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$.

نلاحظ أن الدالة f'' تنعدم عند $\dfrac{1}{e}$ و تغير من اشارتها اذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف $I\left(\dfrac{1}{e};f\left(\dfrac{1}{e}\right)\right)$ أي $I\left(\dfrac{1}{e};\dfrac{-1}{2}\right)$

5.رسم المنحنى (C_f):



II.لتكن الدالة h المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{1}{1-\ln x}, x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

1.الدالة h معرفة من أجل $1-\ln x \neq 0$ أي: $x \neq e$ و بالتالي: $D_f = D_h = [0;e[\cup]e;+\infty[$:

و من أجل كل x من D_h دينا:

$$f(x)+1 = \frac{\ln x}{1-\ln x}+1 = \frac{1}{1-\ln x}$$
$$= h(x)$$

و لدينا: $f(0)+1 = -1+1 = 0 = h(0)$

اذن من أجل كل x من $[0;e[\cup]e;+\infty[$، $h(x) = f(x)+1$

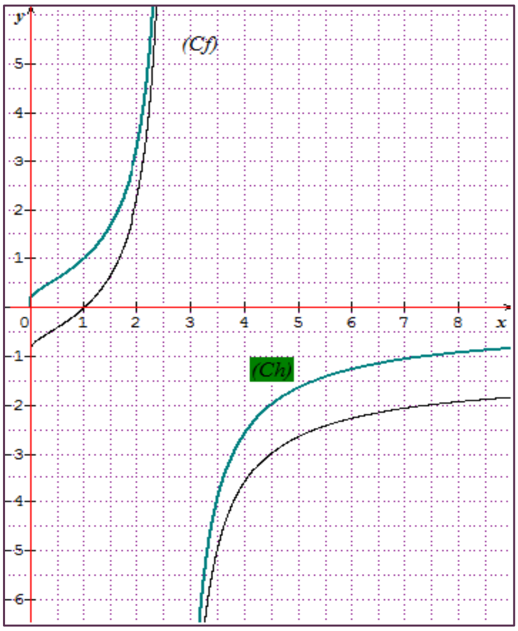
2. جدول تغيرات الدالة h:

من أجل كل x من $[0;e[\cup]e;+\infty[$، $h'(x) = f'(x)$:

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$h(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+1 = -1+1 = 0$

3.رسم (C_h):



4.أحسب بالسنتيمتر المربع (cm^2) و بدلالة λ مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=0$ ، $x=\lambda$ حيث: $0 \leq \lambda \leq e$.

لدينا: على المجال $[0;\lambda]$، (C_h) يقع فوق المنحنى (C_f) و بالتالي:

$$A(\lambda)=\left(\int_0^{\lambda} h(x)-f(x)dx\right)\times 4cm^2=\left(\int_0^{\lambda} 1dx\right)\times 4cm^2$$
$$=\left([x]_0^{\lambda}\right)\times 4cm^2=4\lambda cm^2$$

5.حساب

$\lim\limits_{\lambda\to e} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to e} 4\lambda=4e.cm^2$.

1. g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{\ln x}{x}+e$.

أ-أدرس تغيرات الدالة g .

ب-احسب $g\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

2. f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ: $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$)

أ-بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب-عين نهايتي الدالة f عند **0** و $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3.أ-أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة**1**.

ب-أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

4.أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

5.لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x\left[(\ln x)^2+a\ln x+b\right]$ حيث a و b عددان حقيقيان.

أ-عين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$.

ب-احسب بالسنتيمتر المربع $(cm)^2$ المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=\frac{1}{e}$ ، $x=1$ و $y=ex-e$.

6.لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $k(x)=-\frac{1}{2}(\ln|x|)^2-e|x|+e$

أ-أثبت أن k دالة زوجية

ب- اشرح كيف يمكن استنتاج منحنى الدالة k انطلاقا من منحنى الدالة f ثم ارسمه في نفس المعلم .

7.ليكن m وسيطا حقيقيا.

أ-بين أن كل المستقيمات (Δ_m) حيث : $(\Delta_m): y=mx-m$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx-m$.

الحل:

1. g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{\ln x}{x}+e$.

أ-دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln x}{x}+e\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln x}{x}=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln x}{x}=-\infty \end{cases}$$

و

نهاية شهيرة:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+e=e \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \end{cases}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

من اجل أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، اشارة $g'(x)$ من اشارة : $1-\ln x$ أي:

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$		+	0	-	

و بالتالي جدول تغيراتها كالآتي:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}+e$	$\searrow$	e

ب-لدينا:

$$g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)}+e=\frac{-\ln e}{\left(\frac{1}{e}\right)}+e=0$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right)=0$$

و عليه اشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

2. f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e$

أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ الدالة f قابلة للاشتقاق:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\ln x+e$$
$$=g(x)$$

تذكر أن: $\left(f^n\right)'=nf'f^{n-1}$

و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ أي:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

ب-نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e=+\infty$$

لأن: $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(\ln x)^2=+\infty$ و لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e=+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{3}{2}-e$

3.أ-معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة1:

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

و منه: $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=e \end{cases} \Rightarrow (T): y=ex-e$

ب-دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) :

نقوم بحساب اشارة الفرق: $f(x)-y$:

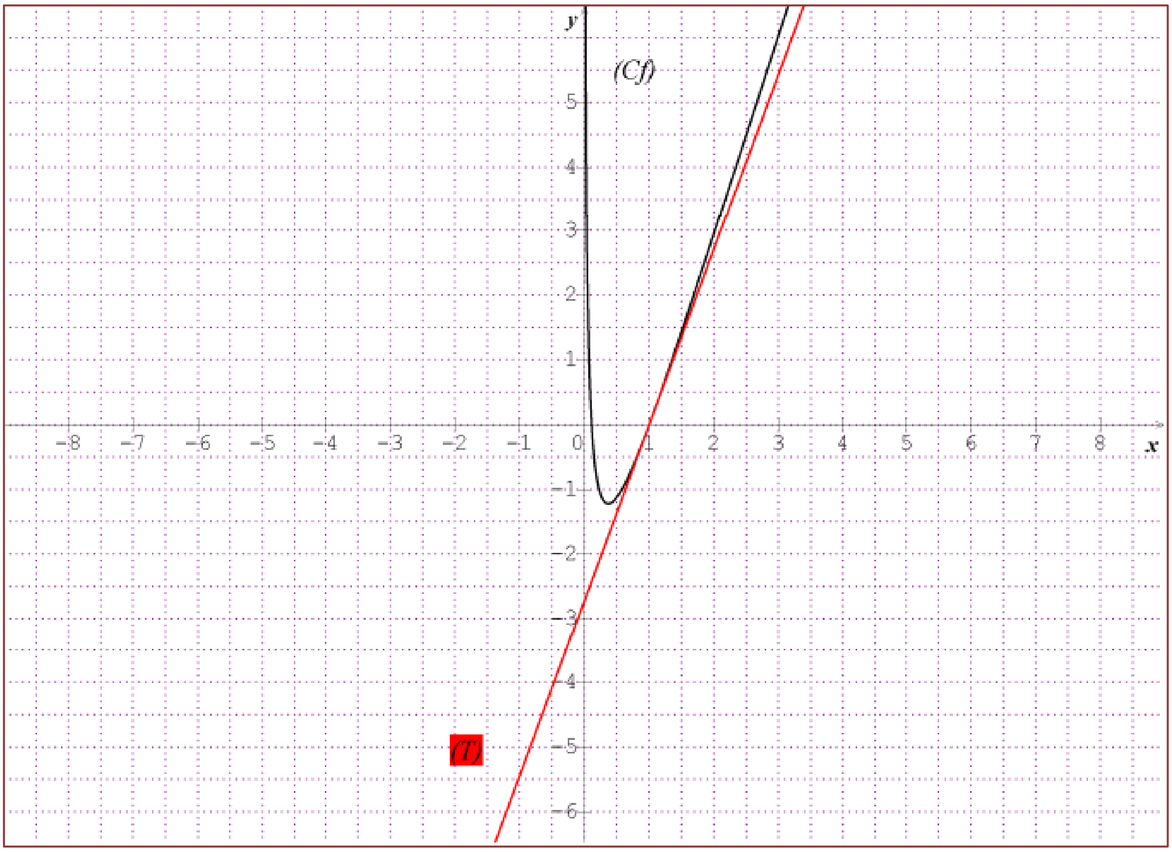
$$f(x)-y=\frac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e-(ex-e)$$
$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\frac{1}{2}(\ln x)^2\geq 0$.

و بالتالي: لما $x=1$ المنحنى (C_f) يقطع المماس (T) في النقطة $w(1;0)$.

من أجل $x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T).

4.رسم المماس (T) و المنحنى (C_f) :



5.لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x\left[(\ln x)^2+a\ln x+b\right]$ حيث a و b عددان حقيقيان.

أ-تعين a و b:

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$: $h'(x)=(\ln x)^2+(a+2)\ln x+b+a$

h دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$ تكافئ $h'(x)=(\ln x)^2$ بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+2=0\\b+a=0\end{cases}$

أي: $h(x)=x\left[(\ln x)^2-2\ln x+2\right]$.

ب-حساب المساحة A:

$$A=\left(\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)-y\,dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

$$A=\left(\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx\right)\times 1\times 2$$

أي نجد:

$$A=\left(\int_{\frac{1}{e}}^{1}(\ln x)^2\,dx\right)$$

$$A=[h(x)]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$=h(1)-h\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$=\left(2-\frac{5}{e}\right)cm^2$$

6.لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $k(x)=-\frac{1}{2}(\ln|x|)^2-e|x|+e$

أ- لدينا من أجل كل x و $-x$ من $\mathbb{R}^*$،

و بالتالي:

$$k(-x)=-\frac{1}{2}(\ln|-x|)^2-e|-x|+e$$

$$=-\frac{1}{2}(\ln|x|)^2-e|x|+e$$

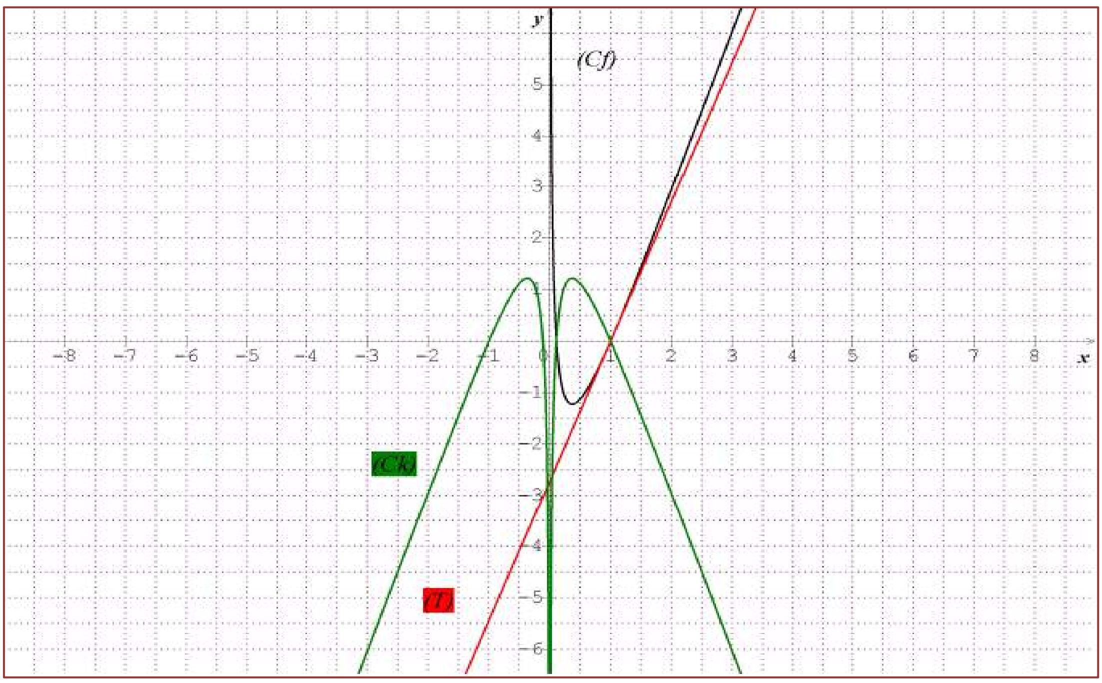
$$=k(x)$$

اذن: k دالة زوجية.

ب- الشرح:

لما $x>0$ فان المنحنى (C_k) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

و لما $x<0$ نقوم برسم نظير (C_k) المرسوم على المجال $]0;+\infty[$ بالنسبة لمحور التراتيب لأن: k دالة زوجية.



7.أ-بين أن كل المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها:

$y=mx-m$ تكافئ $mx-m-y=0$ أي $m(x-1)-y=0$...(1) و عليه من أجل كل الوسيط الحقيقي m

المعادلة (1) محققة من أجل $\begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ أي: $x=1$ و $y=0$.

و بالتالي: النقطة $B(1;0)$ هي النقطة التي تنتمي لكل المنحنيات (Δ_m).

ب- المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x)=mx-m$ بيانيا هي تعين مجموعة نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y=mx-m$

لما $m\in[e;+\infty[$ للمعادلة حلا وحيدا.

و لما $m\in]-\infty;e[$ للمعادلة حلين متمايزين.

I.نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-x-\ln x$.

1.ادرس تغيرات الدالة g .

2.بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ثمّ تحقق أنّ: $0.56<\alpha<0.57$.

3.إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]0;+\infty[$.

II.نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$.

II.نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2.بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f

3.أ) بيّن أنّ : $f(\alpha)=1-\alpha-\frac{1}{\alpha}$ ثمّ إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

I. لدينا: $g(x)=-x-\ln x$ و $D_g=]0;+\infty[$

ب) (γ) هو المنحني الممثل للدالة $\ln$ في المعلم السابق . أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ ، فسّر النتيجة بيانيا ثمّ أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ).

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

د) أحسب $f(2)$ و $f(e)$ ثمّ أنشئ (T) ، (γ) و $(\mathcal{C}_f)$.

4. A هي مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x=\alpha$ و $x=e$.

أحسب بـ cm^2 المساحة A وبدلالة α ثمّ تحقق أنّ : $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ ثمّ عيّن حصراً للمساحة A.

الحل:

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (-x - \ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(-1 - \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$

- حساب المشتقة :

$$g'(x) = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x} = -\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

- دراسة إشارة المشتقة :

من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $-\left(\frac{x+1}{x}\right) < 0$

ومنه $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

-

$x \in$	0	$+\infty$
$g'(x)$	||	-
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وصورة المجال $]0;+\infty[$ بالدالة g هو المجال $]-\infty;+\infty[$ و 0 موجود في المجال $]-\infty;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

التحقق أنّ $0.56 < \alpha < 0.57$:

لدينا : $g(0.56) = -0.56 - \ln 0.56 = 0.02$

$g(0.57) = -0.57 - \ln 0.57 = -0.01$

أي $g(0.56) \times g(0.57) < 0$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.56 < \alpha < 0.57$

3) إستنتاج إشارة $g(x)$:

$x \in$	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	+	0	-	

II. لدينا : $f\left(x\right)=\dfrac{-1+\left(x-1\right)\ln x}{x}$ معرفة على $D_f=\left]0;+\infty\right[$

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f\left(x\right)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{-1+\left(x-1\right)\ln x}{x}=+\infty$$ لأنّ $$\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[-1+\left(x-1\right)\ln x\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\left(x-1\right)\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\ln x\right]=+\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\ln x=+\infty$$

2) تبيان أنّ $f'\left(x\right)=-\dfrac{g\left(x\right)}{x^2}$:

لدينا :

$$f'\left(x\right)=\frac{\left[\ln x+\left(x-1\right)\times\frac{1}{x}\right]\times x-\left(-1+\left(x-1\right)\ln x\right)}{x^2}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{x\ln x+x-1+1-x\ln x+\ln x}{x^2}$$

ومنه $f'\left(x\right)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ أي $f'\left(x\right)=-\dfrac{g\left(x\right)}{x^2}$

جدول تغيرات الدالة f :

$x\in$	0		α		$+\infty$
$f'\left(x\right)$	‖	-	0	+	
$f\left(x\right)$	‖	$+\infty$ ↘	$f\left(\alpha\right)$	↗	$+\infty$

3) أ) تبيان أنّ $f\left(\alpha\right)=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$:

لدينا : $f\left(\alpha\right)=\dfrac{-1+\left(\alpha-1\right)\ln\alpha}{\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{\left(\alpha-1\right)\ln\alpha}{\alpha}$

ولدينا : $g\left(\alpha\right)=0$ ومنه $-\alpha-\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha$

وبالتالي : $f\left(\alpha\right)==-\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{\left(\alpha-1\right)\left(-\alpha\right)}{\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}+\left(\alpha-1\right)\left(-1\right)=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$

أي $f(\alpha)=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $0.56<\alpha<0.57$ ومنه $\dfrac{1}{0.57}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0.56}$ أي $1.75<\dfrac{1}{\alpha}<1.78$

ومنه $-1.78<-\dfrac{1}{\alpha}<-1.75$ و $-0.57<-\alpha<-0.56$

إذن $1-0.57-1.78<1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}<1-0.56-1.75$ ومنه

$1-0.57-1.78<1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}<1-0.56-1.75$ وبالتالي $-1.35<f(\alpha)<-1.31$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$:

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+x\ln x-\ln x-x\ln x}{x}$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$

التفسير الهندسي :

المنحني (γ) منحني مقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-\ln x=\dfrac{-1-\ln x}{x}$

<table>
<tr><td>$x\in$</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)-\ln x$</td><td>‖ +</td><td>0</td><td>-</td></tr>
<tr><td>الوضع النسبي</td><td>$(\mathcal{C}_f)$ فوق (γ)</td><td>$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (γ)</td><td>$(\mathcal{C}_f)$ تحت (γ)</td></tr>
</table>

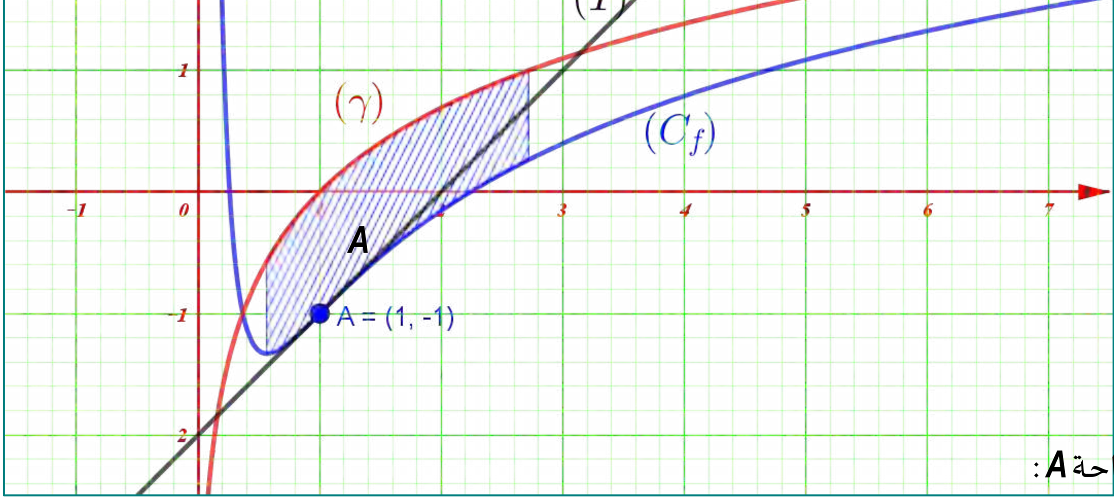
ج) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ $\qquad$ $(T): y=1\times(x-1)-1=x-2$

إذن $(T): y=x-2$

د) حساب $f(2)$ ، $f(e)$ والرسم :

$f(2)=-0.15$ ، $f(e)=0.26$



5) حساب المساحة A:

$$A=\int_{\alpha}^{e}\left[\ln x-f\left(x\right)\right]dx=\int_{\alpha}^{e}\left[\ln x-\frac{-1+x\ln x-\ln x}{x}\right]dx=\int_{\alpha}^{e}\left[\frac{x\ln x+1-x\ln x+\ln x}{x}\right]dx$$

أي $A=\int_{\alpha}^{e}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\ln x+\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^{2}\right]_{\alpha}^{e}$

ومنه :

$$A=\int_{\alpha}^{e}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\ln e+\frac{1}{2}\left(\ln e\right)^{2}\right]-\left[\ln\alpha+\frac{1}{2}\left(\ln\alpha\right)^{2}\right]=\left(\frac{3}{2}-\ln\alpha-\frac{1}{2}\left(\ln\alpha\right)^{2}\right)us$$

وبالتالي $A=\frac{1}{2}\left(3-2\ln\alpha-\left(\ln\alpha\right)^{2}\right)cm^{2}$

التحقق أنّ : $A=\frac{\left(1+\alpha\right)\left(3-\alpha\right)}{2}$

لدينا : $A=\frac{3-2\ln\alpha-\left(\ln\alpha\right)^{2}}{2}$ و $\ln\alpha=-\alpha$

ومنه $A=\frac{3-2\left(-\alpha\right)-\left(-\alpha\right)^{2}}{2}=\frac{3+2\alpha-\alpha^{2}}{2}=\frac{\left(1+\alpha\right)\left(3-\alpha\right)}{2}$

وبالتالي $A=\frac{\left(1+\alpha\right)\left(3-\alpha\right)}{2}$

تعيين حصرا لـ A:

لدينا: $0.56<\alpha<0.57$ ومنه $1.56<1+\alpha<1.57$

و $-0.57<-\alpha<-0.56$ ومنه $2.43<3-\alpha<2.44$

إذن $\frac{1.56\times2.43}{2}<\frac{\left(1+\alpha\right)\left(3-\alpha\right)}{2}<\frac{1.57\times2.44}{2}$

وبالتالي $1.90<A<1.92$

I.لتكن u الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $u(x)=x^2-2+\ln x$

1.أ-احسب نهايتي الدالة عند 0 و $+\infty$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة u.

2.بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ يطلب تعيين حصر له سعته 10^{-2}.

3.عين حسب قيم x اشارة $u(x)$.

4.بين أن: $\ln\alpha=2-\alpha^2$

II.نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

1.احسب من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$.

2.استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$.

III. ليكن في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

Γ المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية و M نقطة من Γ.

1.نعتبر النقطة $A(0;2)$ ، بين ان المسافة AM تعطي بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

2.لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ-بين أن الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P التي يطلب تعيين احداثياها.

ج-بين أن: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. هل المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان؟

الحل:

I. u الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ، $u(x)=x^2-2+\ln x$

1.أ- النهايات

$$\lim_{x\to 0}u(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2-2+\ln x\right)=-\infty$$

و كذلك

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2+\ln x\right)=+\infty$$

ب-اتجاه تغير الدالة u على $]0;+\infty[$:

الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، $u'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ و عليه على المجال $]0;+\infty[$ ، $u'(x)>0$

اذن الدالة u متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2. الدالة u مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

و لدينا $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$

لدينا $u(1)=-1$ اذن نأخذ قيم حقيقية أكبر تماما من 1. بالآلة الحاسبة نتحصل :

$u(1,31)=-0,01<0$ و $u(1,32)\approx 0,02>0$ و منه $u(1,31)<u(\alpha)<u(1,32)$ أي $1,31<\alpha<1,32$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ حيث $1,31<\alpha<1,32$

3.اشارة $u(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		-	0	+	

4. لدينا:

$$u(\alpha)=0$$
$$\alpha^2-2+\ln\alpha=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=2-\alpha^2$$

اذن: $\ln\alpha=2-\alpha^2$

II.نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

1.احسب من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=2x+2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)$$
$$=\frac{2(x^2-2\ln x)}{x}$$
$$=\frac{2u(x)}{x}$$

2.استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ اشارة $f'(x)$ من اشارة $u(x)$ أي:

x	0	α	$+\infty$

$f'(x)$	- 0 +

اذن الدالة f متناقصة على المجال $]0;\alpha[$ و متزايدة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

III. 1.نعتبر النقطة $A(0;2)$ ، بين ان المسافة AM تعطي بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $AM=\sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{x^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{f(x)}$

2.لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

و عليه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}>0$ اذن اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)$

و هكذا الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P .

من السؤال.(II. 2.) الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ تبلغها عند α و بما ان الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$. المسافة AM أصغرية من أجل $x=\alpha$ و عليه $P(\alpha;\ln\alpha)$.

ج-لدينا

$$AP=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha^2+(2-\ln\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+(2-2-\alpha^2)^2}$$

أي:

$$=\sqrt{\alpha^2+(\alpha^2)^2}=\sqrt{\alpha^2\left(1+(\alpha^2)\right)}$$
$$=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$$

و عليه : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. معامل توجيه المستقيم (AP)هو: $a=\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{\ln\alpha-2}{\alpha}$

و معامل توجيه مماس المنحنى Γ عند النقطة P هو: $a'=\dfrac{1}{\alpha}$

لدينا:

$$a\times a'=\frac{\ln\alpha-2}{\alpha}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\ln\alpha-2}{\alpha^2}=-1$$
$$\ln\alpha=2-\alpha^2$$

اذن المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $f\left(x\right)=x+2-\ln(x+2)$

1.احسب نهاية الدالة f عند 2- .

2. بملاحظة أن $f\left(x\right)=(x+2)\left(1-\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right)$ ، وباستعمال النتيجة $\lim\limits_{X\to\infty}\frac{\ln X}{X}=0$ ، عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3.احسب مشتقة الدالة f ، ثم شكل جدول تغيرات f .

4. أ- بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا واحدا α محصوراً بين 2 وَ 3 .

ب- باستعمال الحاسبة ، عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد α.

5. نرمز بـ $(\mathcal{C})$ إلى منحني الدالة f في معلم متعامد و متجانس. وحدة الأطوال $1cm$.

أ- عين معامل توجيه المماس T للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها2.

ب- ارسم T ، ثم المنحني $(\mathcal{C})$.

الحل:

1. $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}f(x)=+\infty$ .2 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3.من اجل كل x من $]-2;+\infty[$ $f'(x)=1-\frac{1}{x+2}$

جدول التغيرات:

x	-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

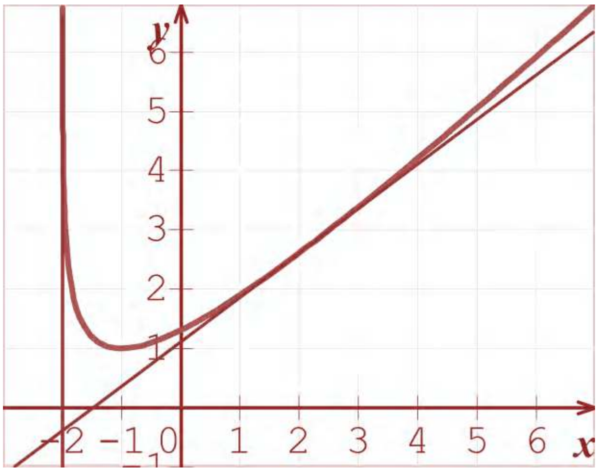
4. أ- حسب جدول التغيرات ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[2;3]$.بما أن $f(2)\approx 2,6$ و $f(3)\approx 3,4$ و $f(x)$ تأخذ القيمة 3 في المجال $[2;3]$ فإن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا واحدا α محصوراً بين 2 وَ 3 .

ب- باستعمال الحاسبة نلاحظ أن $f(2,50)\approx 2,99<3$

و $f(2,51) \approx 3,003 > 3$

5.أ- معامل توجيه المماس T للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها2

هو $f'(2) = \frac{3}{4}$



تمارين مقترحة

.1

عين مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$f(x)=\ln(x+1) \quad \text{و} \quad g(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

.2

اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

1) $\ln 14-\ln 7$ 2) $\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{3}$ ؛

.3

اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

- $A=\ln a-\ln b+2\ln c$
- $B=\frac{1}{2}\ln a-\frac{3}{2}\ln b+\ln\frac{a}{b}$
- $C=\ln(a+1)-\frac{1}{2}\ln b+\frac{3}{2}\ln(a+b)$

.4

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=\ln(2x-3)$

2) $\ln(x^2-1)=\ln(x+5)$

3) $\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=0$

4) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

5) $\ln x+\ln(4-x)=\ln(2x-1)+\ln 3$

6) $\ln(x+1)=-1+\ln(x-1)$

.5

حل المتراجحات التالية:

1) $\ln(3x)<\ln(4x+8)$

2) $\ln(x^2)<\ln(3x-2)$

3) $\ln(2x^2)>\ln(6-4x)$

4) $\ln(x^2+x-2)>0$

5) $\ln(x-1)+\ln(x-2)>2\ln(5-x)$

.6

نعتبر كثير الحدود p للمتغير الحقيقي x حيث:

$$p(x)=x^4-25x^2+144$$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=0$

2) استنتج حل المعادلة:

$$(\ln x)^4-25(\ln x)^2+144=0$$

.7

1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} x^2+2y=16 \\ \ln\frac{x}{y}=-\ln 3 \end{cases}$$

2) أ- حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية: $\begin{cases} 4x+y=5 \\ 8x-4y=4 \end{cases}$

ب- استنتج حل الجملة التالية في $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \ln x^4y^7-2\ln y^3=5 \\ \ln\frac{x^6}{y^4}+\ln x^2=4 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \ln(x+1)^4+\ln y=0 \\ \ln x^2+\ln\frac{1}{y}=\ln x \end{cases}$$

.7

ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0;+\infty[$

1) $\ln x-\ln 3$ 2) $(\ln x+1)(\ln x-1)$

3) $\ln x(\ln x-1)$ 4) $2x\ln(1-x)$

5) $-x^2\ln(x+1)$

.8

احسب النهايات في كل حالة من الحالات المقترحة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\ln x$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln x$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-2\ln x$ ؛

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x+5-\ln x$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3+\ln x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(x^2)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)\ln x$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)\ln(-x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\ln x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x-4+\ln x$

، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x-4+\ln x$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(3(\ln x)^2-\ln x)$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-(\ln x)^2)$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1+2\ln x}{x}$ ،

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2+\ln x-1$

.9

تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال المعطى ثم احسب دالتها المشتقة

1) $f(x)=(\ln x)^2+\ln x$ ، $D=]0;+\infty[$

2) $f(x)=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}$ ، $D=]0;+\infty[$

3) $f(x)=x\ln|x|-2x+3$ ، $D=]-\infty;0[$

.10

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;2]$ بـ:

$$f(x)=2x^2-3-\ln x$$

$(\mathscr{C})$ هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=5cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$

1. ادرس نهاية الدالة f عند 0 ، فسر النتيجة هندسيا.
2. شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. عين معادلة المماس T للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 1.
4. ارسم T و $(\mathscr{C})$.

.11

لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x+1+2[\ln x-\ln(x-1)]$$

نسمي $(\mathscr{C})$ إلى التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس الوحدة $1cm$

1.بين أنه من أجل كل $x\in]1;+\infty[$:

$$f(x)=x+1+2\ln\frac{x}{x-1}$$

2.عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3.ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4.احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ يطلب تعيين معادلة له .

ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم Δ.

5. ارسم بعناية المنحني $(\mathscr{C})$.

.12

I). الدالة g معرفة على المجال $]1;+\infty[$ كمايلي :

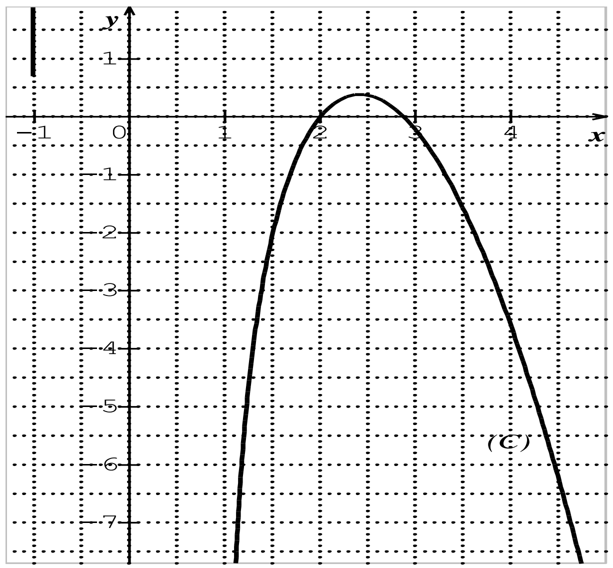
$$g(x)=-x^2+2x+4\ln(x-1)$$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . (الشكل المقابل)

1. بقراءة بيانية حدد عدد حلول المعادلة $g(x)=0$.
2. احسب $g(2)$.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2,87;2,88[$. ($2,87\prec\alpha\prec2,88$) .
4. استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

II).

نعتبر f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:



$$f(x)=x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج) احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]$ واستنتج أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$.

د) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (Γ) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ) بين أنه من اجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

(f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (Γ). (نأخذ $f(\alpha)=3.9$) .

.13

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$.

2) بين أن $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

4) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2}<\alpha<0$.

7) أرسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ) ؟

8) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}x+m$

14. جزء من بكالوريا 2015- الموضوع 2- شعبة: تسيير و اقتصاد

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f دالة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=ax+b+3\ln(x+1)$ حيث a و b عددان حقيقيان .

(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل المقابل ، يقبل في النقطة $A(2;-1+3\ln 3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

1) بقراءة بيانية :

أ - ضع تخمينا حول $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2) باستعمال المعطيات المتوفرة ، جد قيمة كل من a و b.

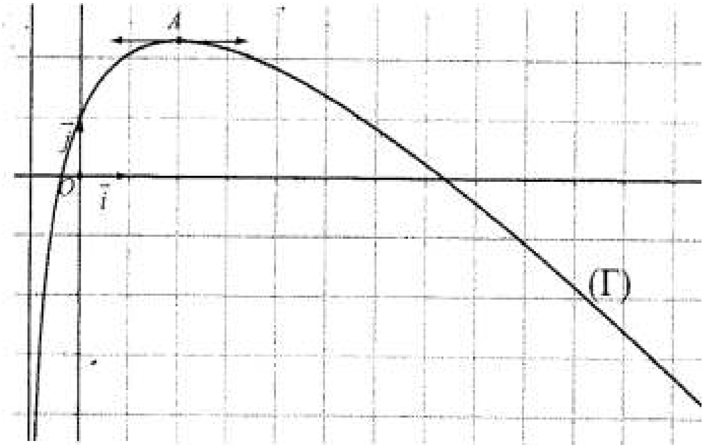
II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x)=-x+1+3\ln(x+1)$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر .

2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يعطى :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=0\ )$$

3) أ - عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس للمنحنى (T) موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x$ ، ثم



أكتب معادلة للمماس (T) .

ب - استنتج بيانيا ، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين موجبين تماما .

4) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$$

أ - أحسب $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

ب - لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل ،

بيّن أن : $\alpha\in]7,37;7,38[$ و

$\beta\in]-0,37;-0,36[$.

15. جزء من بكالوريا 2018- الموضوع 1- شعبة: تسيير و اقتصاد

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-2;8[$ بـ :

$$f(x)=\ln(x+2)+\ln(-x+8)-\ln 16$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نأخذ الوحدة البيانية : $2cm$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2;8[$ و فسّر النتيجتين بيانيا .

2) تحقق أنه من أجل كل x من $]-2;8[$:

$f'(x)=\frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$. (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

3) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2;8[$ و شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

5) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-2;8[$: $(6-x)$ ينتمي إلى $]-2;8[$ و $f(6-x)=f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

6) أرسم المنحنى (C_f) .

16.

I)- لتكن u دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $u(x)=\ln x-2$ ، (C_u) المنحنى الممثل

للدالة u في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. استنتج طريقة لانشاء (C_u) انطلاقا من منحنى دالة مرجعية يطلب تعينها.
2. أنشئ (C_u).

II)- لتكن g دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=\ln x+x-3$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعين حصرا له سعته 10^{-1}.
3. استنتج اشارة $g(x)$.

III)- لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$. ، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم السابق.

1. أدرس تغيرات الدالة f.
2. برهن أن $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ثم استنج حصرا ل $f(\alpha)$.
3. أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_u) و (C_f).
4. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-u(x)]$ ثم فسرهذه النتيجة بيانيا.
5. عين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.
6. أنشئ (C_f) في المعلم السابق.

17.

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي :

$f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) التمثيل البياني في المستوي المنسوب الى معلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ،

$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل المنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4. بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.
5. أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).
6. أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بين ان $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بين ان المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين احداثيتها.

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ

و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths