Top Maths مجلة

في الدوال الأسية
Exponential Function

3As M TM

إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

تلمسان يوم 29 ديسمبر 2020

07.76.60.8058 facebook /Instagram : Top Maths Tlemcen

تجدون في هذا الملف

إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

07.76.60.8058 facebook /Instagram : Top Maths Tlemcen

Top Maths

اقدم لإخواني الأساتذة و أبنائي الطلبة هذا الملف و المتمثل في

مجلة Top Maths في الدوال الأسية

مجلة شاملة للمراجعة لطلاب البكالوريا جميع الشعب العلمية

علوم تجريبية . رياضيات . تقني رياضي للتحضير الجيد في البكالوريا

إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

شكر خاص للاستاذين المتألقين

- عبد الرزاق بلقاسم
- خالد بخاخشة

إهداء

إلى من أُفضّلها على نفسي، ولِمَ لا؛ فلقد ضحّت من أجلي ولم تدّخر جُهدًا في سبيل إسعادي على الدّوام (أُمّي الغالية).

والى (والدي العزيز).

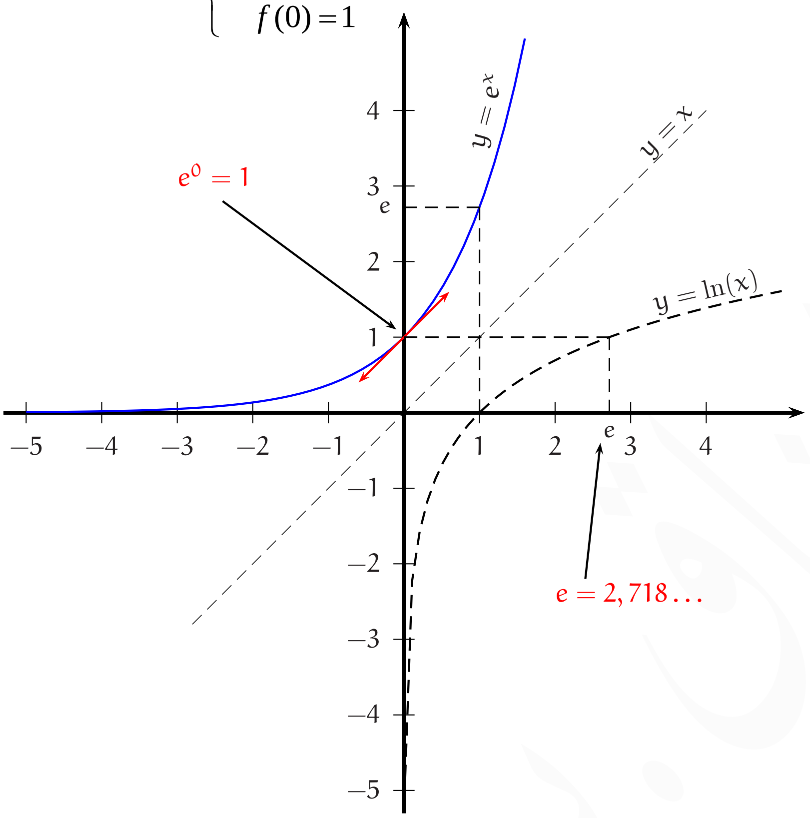
وعائلتي الصغيرة زوجتي و إبني عبد الله

وكل من أعرف

» رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِن تَأْوِيلِ الْأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ أَنتَ وَلِيِّي فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ «

الدالّة الاسية النيبيرية

توجد دالّة وحيدة f معرفة مستمرة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقق $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$



خواص الدالّة الاسية

من أجل كل عدد حقيقي x

$$(\exp)'(x) = \exp(x).$$

الدالّة الاسية مستمرة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$e^x > 0.$$

النهايات عند حدود مجموعة التعريف

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

التزايد المقارن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0.$$

العدد المشتق عند 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

الخواص الجبرية

من أجل كل عددين حقيقين x و y

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x}. \quad e^x \neq 0 \quad e^x \times e^y = e^{x+y}.$$

من أجل كل عدد طبيعي n

$$e^{nx} = (e^x)^n \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}.$$

العلاقة بين الاسة و اللوغاريتمية

من أجل كل عدد حقيقي x , $\ln(e^x) = x$

من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0,+\infty[$ $e^{\ln(x)} = x.$

من أجل $a > 0$ المعادلة $e^x = a$ تقبل حلا وحيدا

من أجل $a \leq 0$ المعادلة $e^x = a$ لا تقبل حلول

من أجل كل عدد حقيقي x من أجل $a > 0$

$$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$$

$$e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

من أجل كل عددين حقيقين x و y

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

الدوال الأسّية

نشاط:

مقدمة:

تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية و البيولوجية والاقتصادية و غيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f'. سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع و هي دالة تساوي دالتها المشتقة.

نقبل أنه توجد دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين التاليين: $\begin{cases} f'(x)=f(x) \\ f(0)=1 \end{cases}$

الجزء الاول

1) اثبت ان $f(x_0+h)\approx f(x_0)(1+h)$ و $f(x_0-h)\approx f(x_0)(1-h)$

2) باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0{,}5$ أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-2;2]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f .

الجزء الثاني

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x)\times f(-x)$

- بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)\times f(-x)=1$ (3)
- برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)\neq 0$ (4)

الجزء الثالث

ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

- بين أن g دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ (5)

حل النشاط :

الجزء الاول

نذكر أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن $f'=f$ فإن $f(x_0+h)\approx f(x_0)(1+h)$

لدينا كذلك $f(x_0-h)\approx f(x_0)-hf'(x_0)$ و بما أن $f'=f$ فإن $f(x_0-h)\approx f(x_0)(1-h)$

الجدول:

حساب الصور لدينا

$$\begin{cases} f(0,5)\approx f(0+0,5)\approx 1,5\times f(0)\approx 1,5 \\ f(1)\approx f(0,5+0,5)\approx 1,5\times f(0,5)\approx 2,25 \\ .. \\ .. \\ .. \\ f(-0,5)\approx f(0-0,5)\approx (1-0,5)\times f(0)\approx 0,5 \\ f(-1)\approx f(-0,5-0,5)\approx (1-0,5)\times f(-0,5)\approx 0,25 \\ .. \\ .. \end{cases}$$

الجدول

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$	$0,0625$	$0,125$	$0,25$	$0,5$	1	$1,5$	$2,25$	$3,37$	$5,06$

الجزء الثاني

h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x)\times f(-x)$

لدينا $\left[f(ax+b)\right]'=af'(ax+b)$ ومنه $\left[f(-x)\right]'=-f'(-x)$

ولدينا $f'(x)=f(x)$ ومنه $f'(-x)=f(-x)$ إذن $\left[f(-x)\right]'=-f'(-x)=-f(-x)$

$h'(x)=f'(x)f(-x)+f(x)\left[f(-x)\right]'=f(x)f(-x)-f(x)f(-x)=0$ ومنه h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل عددين حقيقيين x و x'، $h(x)=h(x')$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)=h(0)$

أي $f(x)f(-x)=1$

- لنفترض أن $f(x)=0$ وهذا معناه أن $f(x)f(-x)=0$ وهذا يناقض (3) إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0$

الجزء الثالث

ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

- لدينا $\dfrac{d\left[f(x+y)\right]}{dx}=f'(x+y)$ ومنه

$g'(x)=\dfrac{f'(x+y)f(x)-f(x+y)f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{f(x+y)f(x)-f(x+y)f(x)}{f^2(x)}=0$ إذن g دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

لدينا $f(y)=\dfrac{f(y)}{f(0)}=g(0)$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=g(0)$ (g دالة ثابتة) إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(y)$.

- لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(y)$ معناه $\frac{f(x+y)}{f(x)}=f(y)$ أي

$f(x+y)=f(x)\times f(y)$

2) تعريف:

توجد دالة وحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ تسمى **الدالة الأسية (النيبيرية)**

ونرمز إليها بالرمز " $\exp$ ". من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\exp(x)$

كتابة باستعمال الترميز السابق كل النتائج

من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$،

(1) $\exp'(x)=\exp(x)$ (2) $\exp 0=1$ (3) $\exp(x)\times\exp(-x)=1$ (4) $\exp(x)\neq 0$

(5) $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، (6) $\exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{Z}$ ، (7) $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$

نقبل أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، (8) $\exp(xy)=[\exp(x)]^y$.

ملاحظة : $\exp(x)=\exp\left(2\frac{x}{2}\right)=\left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp(x)\geq 0$

وبما أن $\exp(x)\neq 0$ فإن $\exp(x)>0$

الترميز e :

الرمز e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\exp(1)=e$ ، وقيمته التقريبية بالآلة الحاسبة هي $e\approx 2{,}718281828459$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\exp(1\times x)=[\exp(1)]^x=e^x$.

وبالتالي : الدالة الأسية $\exp$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\exp(x)=e^x$.

ملخص

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$،

$$e^x>0 \qquad \exp'(x)=e^x$$

$$e^0=1 \qquad e^{x+y}=e^xe^y \qquad e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

$$e^xe^{-x}=1 \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^n=e^{nx}$$

3) دراسة الدالة exp :

الدالة exp تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $\exp'(x)=e^x$ ومنه $\exp'(x)>0$

إذن exp دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نتائج:

- من أجل كل عددين حقيقيين a و b ، $a>b$ معناه $e^a>e^b$.
- من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $x>0$ معناه $e^x>1$ و $x<0$ معناه $e^x<1$.
- لدينا $\exp'(0)=e^0=1$ هذا من جهة ؛ ومن جهة أخرى $\exp'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$ إذن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

ملاحظة:

إذا كان $x=y$ فإن $e^{x-y}=1$ ومنه $e^x=e^y$ ؛ إذا كان $e^x=e^y$ فإن $e^{x-y}=1$ وبما أن الدالة exp مستمرة (تقبل الاشتقاق) ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، فإن $x-y=0$ ومنه $x=y$ ؛ خلاصة: $e^x=e^y$ معناه $x=y$

النهايات:

نعتبر الدالة $f:x\mapsto e^x-x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=e^x-1$ ، إذا كان $x>0$ فإن $e^x>1$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ، وبالتالي إذا كان $x>0$ فإن $f(x)>f(0)$ أي $e^x-x>1$ ؛ إذن من أجل كل $x>0$ ،

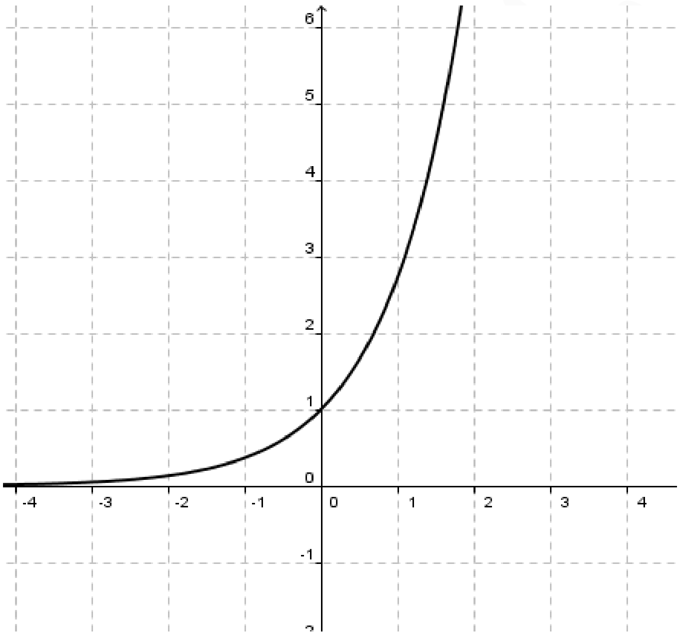
$e^x>x+1$ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}=0$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$\exp'(x)$	+ +
$\exp(x)$	0 ↗ 1 ↗ $+\infty$

التمثيل البياني:



مشتق الدوال $x \mapsto e^{u(x)}$:

ـ إذا كان الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f : x \mapsto e^{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل $x \in I$:

$f'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

الاثبات

نعتبر الدالة v المعرفة ب $v : x \mapsto e^x$ لدينا $f(x) = v \circ u(x) = e^{u(x)}$ نعلم أن $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$

ومنه لدينا من أجل كل $x \in I$: $f'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

مبرهنة:

k عدد حقيقي غير معدوم.

الدوال بحيث $f' = kf$ هي الدوال $f : x \mapsto Ce^{kx}$ مع C ثابت حقيقي.

مثال :

الدوال التي تحقق $f' = -3.f$ هي : $f : x \mapsto Ce^{-3x}$ مع C ثابت حقيقي.

نتيجة:

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقق $f' = kf$ و$f(0) = 1$ وهي $f : x \mapsto e^{kx}$.

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$

نرمز بـ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

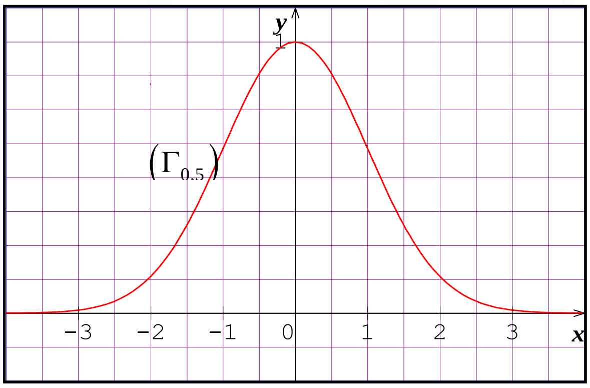
ملاحظة:

تسمى المنحنيات (Γ_λ) بمنحنيات غوص $(Gauss)$

ويتم استعمالها في الاحتمالات و الإحصاء

و لعل أكثرها استعمالا هو المنحنى $(\Gamma_{0,5})$ ذو المعادلة $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

والذي يأخذ شكلا ناقوسيا.



حل:

1. حساب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.

بما أن $\lambda > 0$ فإن $\lim_{x \to -\infty} -\lambda x^2 = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} -\lambda x^2 = -\infty$ إذن $\lim_{x \to -\infty} g_\lambda(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} g_\lambda(x) = 0$.

التفسير البياني: (Γ_λ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $(-\infty)$ و بجوار $(+\infty)$.

2. دراسة اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها. $g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$ ومنه $g_\lambda'(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$.

إذا كان $x<0$ فإن $g_\lambda'(x)>0$ ومنه الدالة g_λ متزايدة تماما على $]-\infty;0]$.

إذا كان $x>0$ فإن $g_\lambda'(x)<0$ ومنه الدالة g_λ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

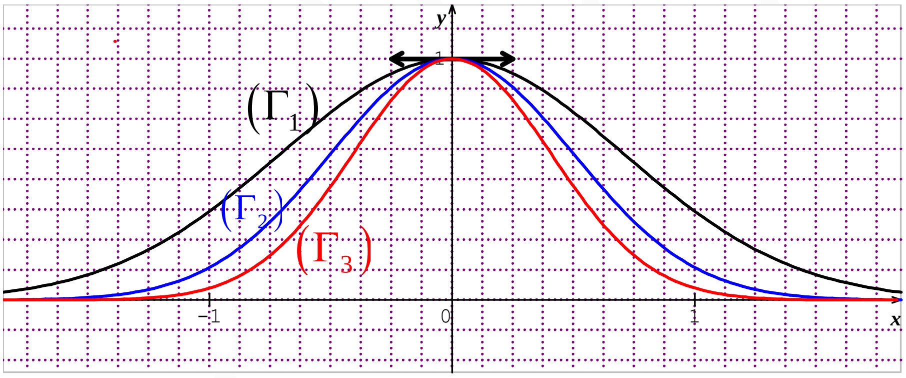
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_\lambda'(x)$		+	0	-	
$g_\lambda(x)$	0	↗	1	↘	0

3. تبيان أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

ليكن x_0 و y_0 عددين حقيقيين ثابتين حيث من أجل كل $\lambda>0$: $e^{-\lambda x_0^2}=y_0$ لدينا $\dfrac{de^{-\lambda x_0^2}}{d\lambda}=0$ هذا من جهة؛

ومن جهة أخرى $\dfrac{de^{-\lambda x_0^2}}{d\lambda}=-x_0^2e^{-\lambda x_0^2}$ إذن $x_0=0$ ومنه $y_0=e^{-\lambda\times 0^2}=1$.

4. رسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3) . **(تحرك المنحيات باستعمال Geoplan رقم الملف 24)**



5. دراسة الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0<\lambda<\lambda'$.

$0<\lambda<\lambda'$ معناه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-\lambda x^2>-\lambda' x^2$ ومعناه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $e^{-\lambda x^2}>e^{-\lambda' x^2}$.

ومنه إذا كان $0<\lambda<\lambda'$ فإنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، المنحني (Γ_λ) يقع فوق المنحني $(\Gamma_{\lambda'})$ ويتقاطعان في النقطة $A(0;1)$.

التزايد المقارن:

نشاط:

نعتبر الدالتين $f:x\mapsto e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}$ و $g:x\mapsto e^{x}-x$ المعرفة على $[0;+\infty[$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g . أحسب $g(0)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f . استنتج أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $\frac{e^{x}}{x}>\frac{1}{2}x$

3) عين $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}$ واستنتج $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}$.

حل النشاط:

1) لدينا $g'(x)=e^{x}-1$ ، من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $e^{x}>1$ أي $g'(x)>0$ ومنه g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

$g(0)=1$ ؛ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)>g(0)$ أي $g(x)>1$ ومنه g موجبة تماما على $[0;+\infty[$.

2) لدينا $f'(x)=e^{x}-x=g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f(x)>f(0)$ أي $f(x)>1$ ومنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $\frac{f(x)}{x}>0$

أي $\frac{e^{x}}{x}-\frac{1}{2}x>0$ ومعناه $\frac{e^{x}}{x}>\frac{1}{2}x$.

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$. نستنتج أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{-x}{e^{-x}}=0$.

خواص:

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty \quad \text{و} \quad (2)\quad \lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0$$

تمارين مقترحة من طرف الأستاذ عبد الرزاق بلقاسم

المسألة 01

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم بين أن المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، و أن المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

3) حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المقاربين .

4) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، و شكل جدول تغيّراتها .

5) أنشئ المنحني (C) و المستقيمات المقاربة .

6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(1-m)(e^x+1)-2e^x=0$.

حل مختصر للمسألة رقم 01

سلطان لدينا : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

1) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2e^x}{e^x+1})=0\end{cases}$.

سلطان بما أن : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ و ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2e^x}{e^x+1})=0$.

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) التحقق أن : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$.

لدينا : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، إذن يمكن كتابة : $f(x)=x-1+2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، أي :

$f(x)=x-1+\dfrac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}$ ، ومنه : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ ، و هو المطلوب .

ب) حساب النهاية عند $+\infty$ (نستعمل العبارة الثانية) .

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{2}{e^x+1})=0\end{cases}$.

لدينا بما أن : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{e^x+1}\right) = 0$.

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

3) تحديد الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة للمقاربين :

لدينا ندرس إشارة : $f(x) - (x+1) = -\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، نلاحظ أن : $-\dfrac{2e^x}{e^x+1} < 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : المنحني (C) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$.

لدينا ندرس إشارة : $f(x) - (x-1) = \dfrac{2}{e^x+1}$ ، نلاحظ أن : $\dfrac{2}{e^x+1} > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : المنحني (C) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$.

4) دراسة إتجاه تغير الدالة f : (نختار الشكل $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x+1}$) .

*) الدالة المشتقة : $f'(x) = 1 + \dfrac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$ ،

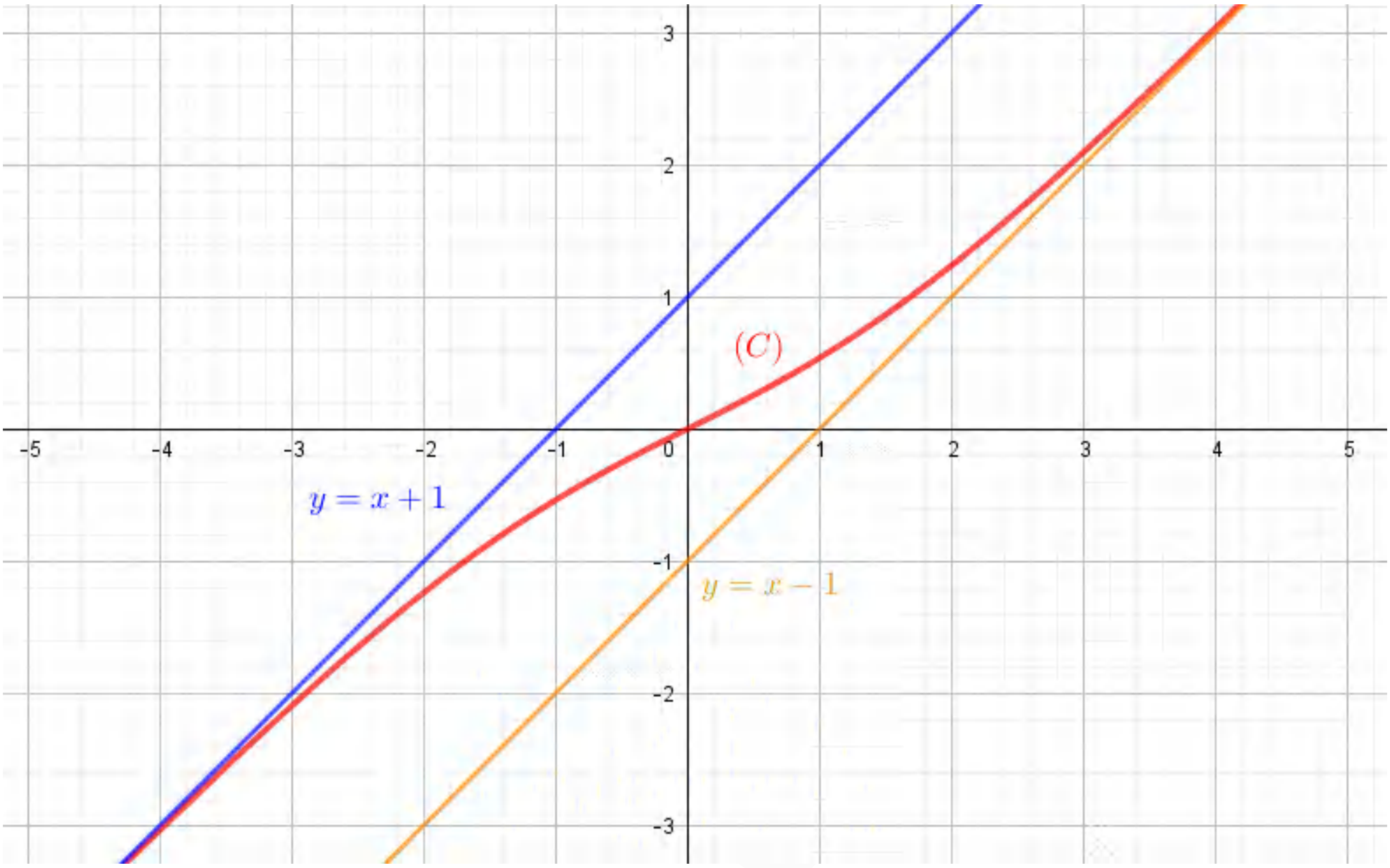
و منه : $f'(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ ، نلاحظ أن : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

*) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5) الإنشـــــــــاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا : $(1-m)(e^x+1)-2e^x=0$ ، أي : $(1-m)(e^x+1)=2e^x$ ، أي : $\dfrac{2e^x}{e^x+1}=1-m$ ، أي :

$-\dfrac{2e^x}{e^x+1}=m-1$ ، (بإضافة $x+1$) : $x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}=x+m$ ، ومنه : $f(x)=x+m$.

إذن : عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ و الذي يوازي المقاربين للمنحني (C) هما : $y=x+1$ و $y=x-1$.

أي أن المناقشة البيانية تكون كما يلي :

*) لما : $m\in\left]-\infty;-1\right]$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

*) لما : $m\in\left[1;+\infty\right[$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

*) لما : $m\in\left]-1;1\right[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

المسألة 02

نعتبر الدالتان f_0 و f_1 المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_0(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ و $f_1(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

و ليكن (C_0) و (C_1) منحناهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) 1) أحسب نهاية f_0 عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثمّ استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C_0) .

2) بيّن أن النقطة $K(0;\dfrac{1}{2})$ هي مركز التناظر للمنحني (C_0) .

3) أدرس تغيّرات الدالة f_0 .

4) عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C_0) عند النقطة K .

5) أ) بيّن أنه لدراسة وضعية (T) بالنسبة إلى (C_0) يكفي دراسة إشارة العبارة : $g(x)=2e^x-xe^x-2-x$

ب) أحسب كلا من $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثمّ عيّن مع التبرير إشارة $g''(x)$ ، $g'(x)$ ، $g(x)$ ، و ذلك حسب قيم x .

ج) إستنتج وضعية المنحني (C_0) بالنسبة إلى المماس (T) .

د) أنشئ المماس (T) و المنحني (C_0) .

II) 1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون النقطتان : $M(x;f_0(x))$ و $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}$.

3) شكّل جدول تغيّرات الدالة f_1 ، ثمّ أنشئ المنحني (C_1) في نفس المعلم السابق.

حل مختصر للمسألة رقم 02

I) 1) حساب نهايات الدالة f_0 :

*) $\begin{cases}0\\1\end{cases}$ .... $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=0$. المنحني (C_0) يقبل حامل محور الفواصل كمقارب بجوار $-\infty$

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=1$. المنحني (C_0) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=1$ ، بجوار $+\infty$.

2) لدينا النقطة $K(0;\dfrac{1}{2})$.

*) أولا : D_{f_0} متناظرة بالنسبة إلى 0 .

*) ثانيا : نبيّن أن : $f_0(2a-x)+f_0(x)=2b$ ، مع : $\begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=1$.

*) لنحسب : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{e^{-x}\times e^x}{(1+e^{-x})e^x}+\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ،

أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{1+e^x}{1+e^x}=1$.

إذن : النقطة K هي مركز التناظر للمنحني (C_0) .

3) دراسة تغيّرات الدالة f_0 :

*) حساب $f_0'(x)$: $f_0'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

نلاحظ أن : $f_0'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، إذن : الدالة f_0 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

*) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f_0'(x)$	$+$
$f_0(x)$	$0 \nearrow 1$

4) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة K :

$(T): y=f_0(0)(x-0)+f_0(0)$ ، ومنه : $(T): y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ ، لأن : $\begin{cases} f_0'(0)=\dfrac{1}{4} \\ f_0(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

5) أ) دراسة وضعية (C_0) بالنسبة إلى (T) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2})$

$f(x)-(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2})=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{4e^x-x-xe^x-2-2e^x}{4(e^x+1)}$ ، أي :

$f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x-2}{4}=\frac{2e^x-xe^x-x-2}{4(e^x+1)}$ ، ومنه :

$f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=\frac{g(x)}{4(1+e^x)}$.

*) لدينا : $4(1+e^x)>0$ ، إذن : لدراسة إشارة الفرق يكفي دراسة إشارة $g(x)$.

ب) حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

*) $g'(x)=2e^x-(e^x+xe^x)-1=2e^x-e^x-xe^x-1$ ، ومنه : $g'(x)=e^x-xe^x-1$.

*) $g''(x)=e^x-(e^x+xe^x)=e^x-e^x-xe^x$ ، ومنه : $g''(x)=-xe^x$.

- إذن إشارة $g''(x)$ من إشارة $-x$.

*) إشارة $g''(x)$:

$g''(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		↗	0	↘	
		$-$		$-$	

*) إشارة $g'(x)$:

$g'(0)=0$

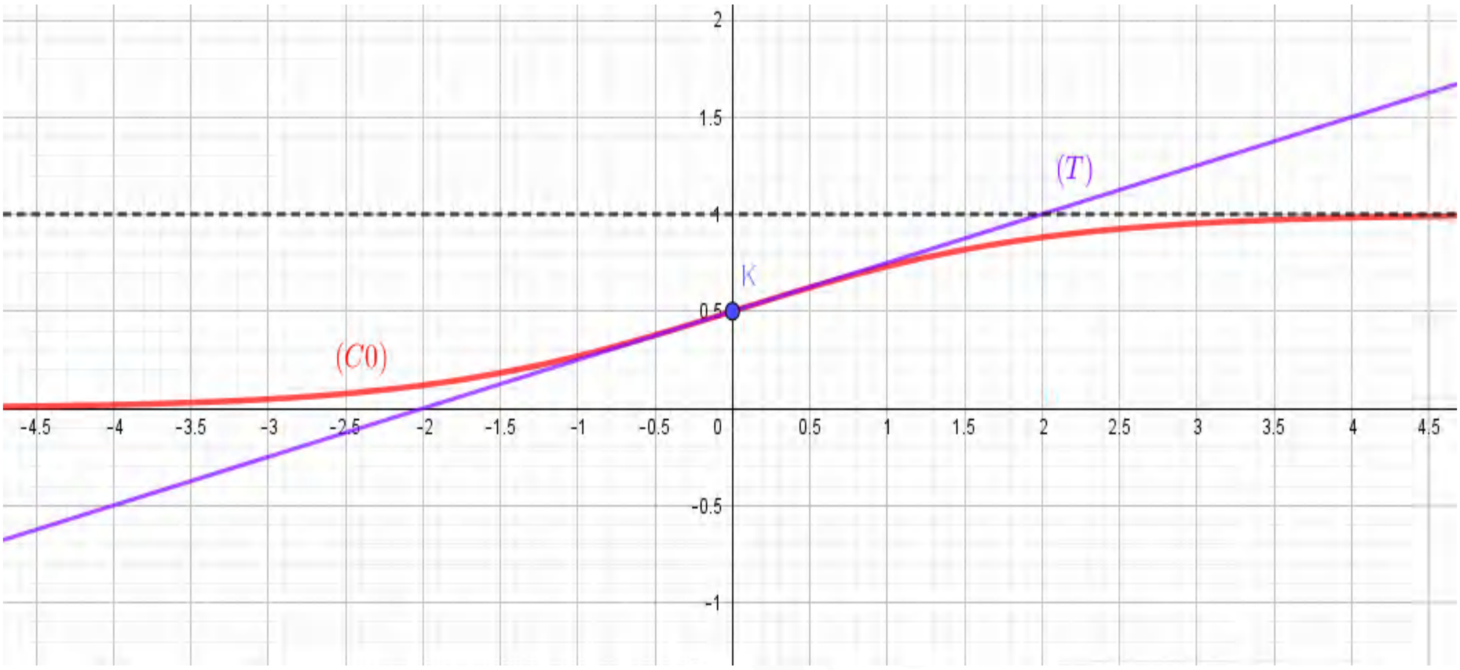
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+$	↘	0	↘	$-$

ج) إشارة : $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$-$	
الوضعية		(C_0) يقع فوق (T)	(C_0) يخترق (T) عند النقطة K	(C_0) يقع تحت (T)	

*) إستنتاج : النقطة K تعتبر نقطة إنعطاف للمنحني (C_0) .

د) الإنشـــــــــاء :



II) 1) تكون النقطتان : $M(x;f_0(x))$ و $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=\dfrac{1}{2}$ ،

إذا كان : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$.

*) نحسب : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{\dfrac{e^x+1}{e^x+1}}{2}=\dfrac{\dfrac{1}{e^x+1}+\dfrac{e^x}{1+e^x}}{2}=\dfrac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$.

ومنه : M و M' متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة : $y=\dfrac{1}{2}$.

أي أن : (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة لهذا المستقيم .

2) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f_1 :

بما أن (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y=\dfrac{1}{2}$ فإن : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ ،

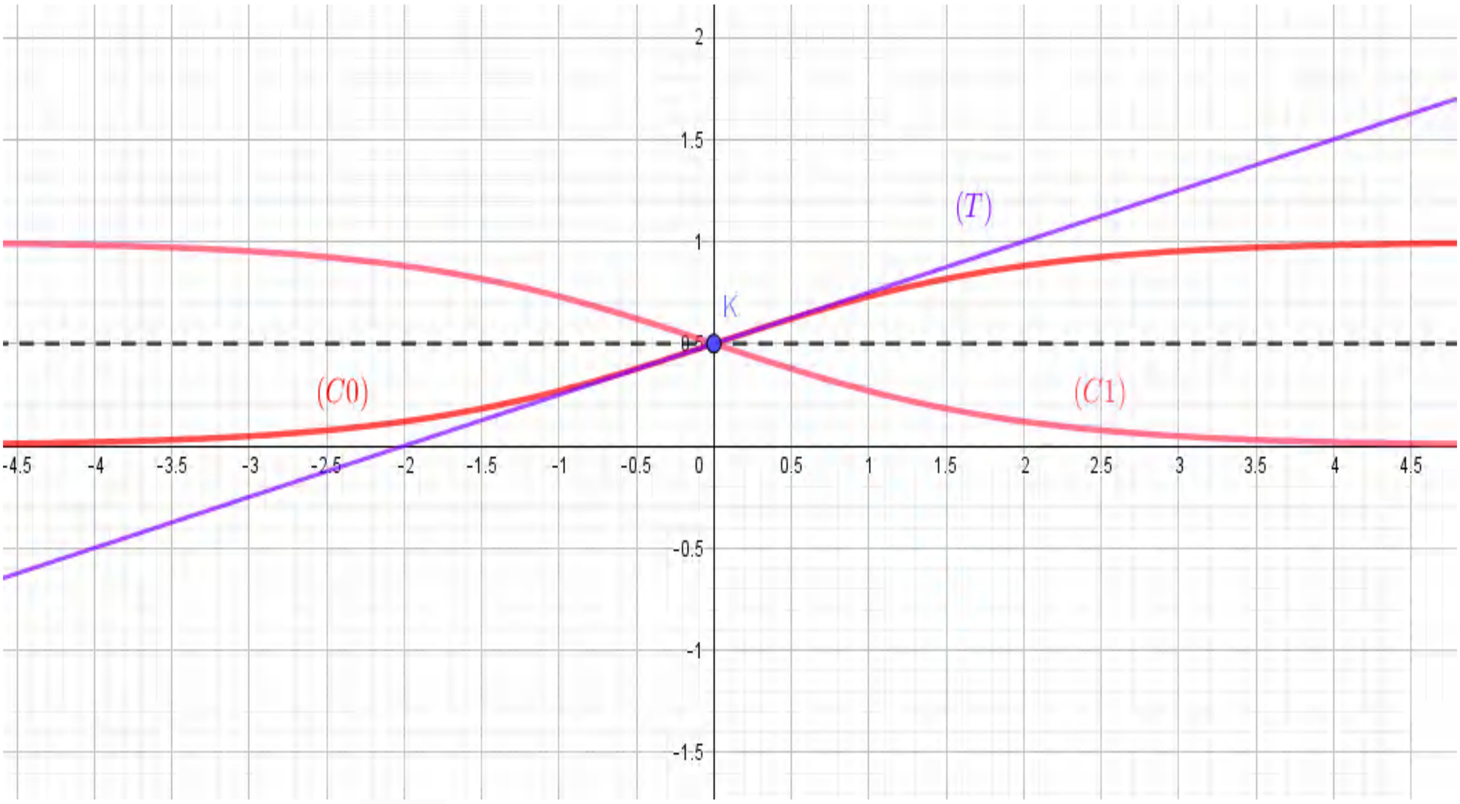
إذن : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{f_0+f_1}{2}$ ، أي : $f_0+f_1=1$ ، ومنه : $f_1=1-f_0$.

و عليه فإن : إتجاه تغيّر الدالة f_1 هو عكس إتجاه تغيّر الدالة f_0 .

*) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$-$
$f_1(x)$	$1 \searrow 0$

*) الإنشــــــاء :



المسألة 03

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x - 1$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أحسب $g(0)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$.

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسيا .

2) أحسب $f'(x)$ ، ثمّ أدرس إتجاه تغيّر الدالة الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى المماس (T) .

4) انشئ المماس (T)، و المستقيمات المقاربة، و المنحني (C) .

5) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا و حسب قيم m حلول المعادلة : $f(x) = mx$.

حل مختصر للمسألة رقم 03

I) لدينا : $g(x) = e^x - x - 1$.

1) حساب النهايات :

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \end{cases}$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}) = +\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{e^x}{x}) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1}{x}) = 0 \end{cases}$.

2) دراسة تغيرات الدالة g ، و تشكيل جدول تغيّراتها :

*) الدالة المشتقة : $g'(x) = e^x - 1$.

- تكون $g'(x) \geq 0$ ، أي : $(e^x - 1 \geq 0)$ ، أي : $e^x \geq 1$ ،(إذا كان : $x \geq 0$.

- تكون $g'(x) \leq 0$ ، أي : $(e^x - 1 \leq 0)$ ، أي : $e^x \leq 1$) ، أذا كان : $x \leq 0$.

إذن الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ ، و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

*) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) نحسب : $g(0)=0$ ، و عليه نستنتج و نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$:

1) حساب النهايات :

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=-1$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=0$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

*) التفسير الهندسي :

- بجوار $-\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=-1$.
- بجوار $+\infty$ المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) سلطان حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(e^x-x)-(e^x-1)\times x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-xe^x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}.$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$ ، أي :

تكون : $f'(x)\geq 0$ إذا كان : $x\leq 1$ وتكون : $f'(x)\leq 0$ ، إذا كان : $x\geq 1$.

*) و عليه : الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

*) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

$f(1) = \dfrac{1}{e-1} \approx 0,58$.

3) أ) معادلة المماس (T) :

$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ، ومنه : $(T) : y = x$ ، لأن : $\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

ب) الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (T) : أي ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$:

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{x(1 - e^x + x)}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-x \times g(x)}{e^x - x}$$.

*) لدينا من الجزء الأول : $g(x) \geq 0$ ، أي : $e^x - x - 1 \geq 0$ ، أي : $e^x - x \geq 1$ ، ومنه : $e^x - x \geq 0$.

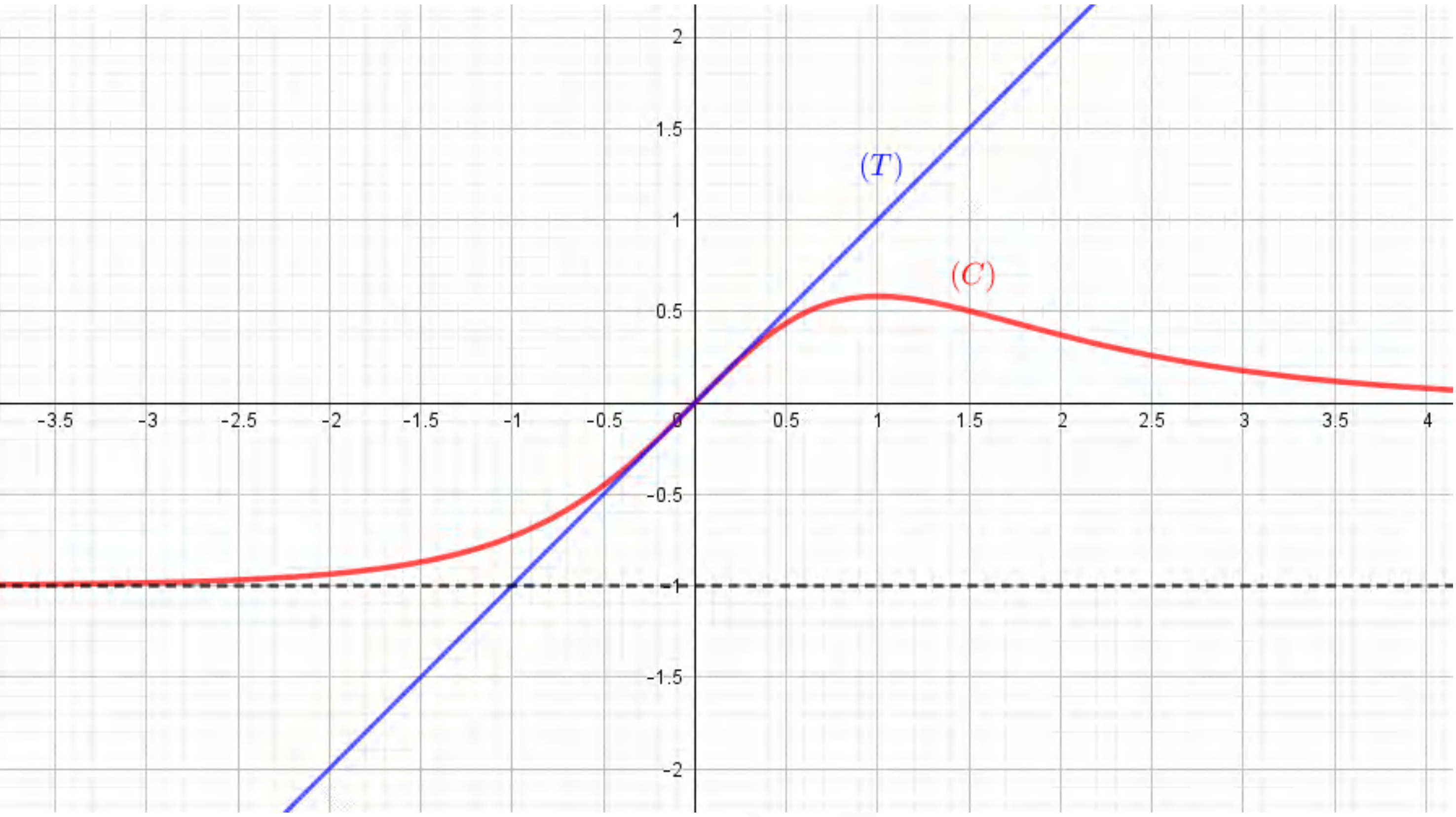
إذن : إشارة $(f(x) - x)$ من إشارة $(-x \times g(x))$ ، وبما أن : $g(x) \geq 0$ ، فالإشارة من إشارة $(-x)$.

*) نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C) يقع فوق (T)	(C) يخترق (T) في النقطة O	(C) يقع تحت (T)	

ملاحظة : المبدأ O يعتبر نقطة إنعطاف للمنحني (C) .

4) الإنشـــــــــــاء :



5) المناقشة البيانية :

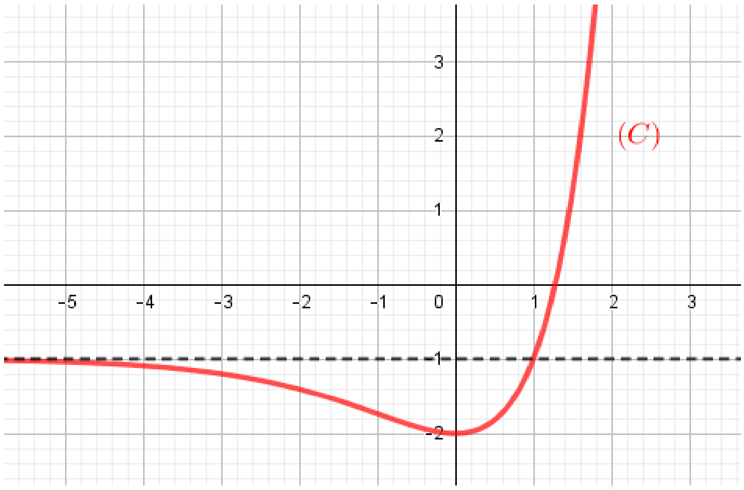
لدينا : $f(x) = mx$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير يمر بالمبدأ O ، (مناقشة دورانية) .

*) إذا كان : $0 < m < 1$ ، فإن : المعادلة تقبل ثلاث حلول .

*) إذا كان : $m \geq 1$ أو $m \leq 0$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

المسألة 04

I) في الشكل المقابل : (C) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax+b)e^x + c$.



1) بقراءة بيانية :

أ) عيّن $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ ، ثمّ استنتج قيمة c .

ب) عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ج) عيّن كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ، ثم استنتج قيمتي كل من a و b .

2) نفرض فيما يلي : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

أ) شكّل جدول تغيرات الدالة g .

ب) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور

بين : $1,2$ و $1,3$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{e^x+1}$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في م.م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم حدد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، و شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن : $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثمّ استنتج حصرا لـــ $f(\alpha)$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.

حل مختصر للمسألة رقم 04

I) 1) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$ ، ونعلم أن :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[(ax+b)e^x + c\right] = \lim_{x\to-\infty} (\underbrace{axe^x}_{0} + \underbrace{be^x}_{0} + c) = c .$$

إذن نستنتج أن : $c = -1$.

ب) لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

ج) لدينا : $g(0) = -2$ و $g'(0) = 0$.

ـ لدينا : $g(0) = -2$ ، أي : $(a\times 0 + b)e^0 - 1 = -2$ ، أي : $b - 1 = -2$ ، ومنه : $b = -1$.

ـ نحسب $g'(x)$: $g'(x) = a\times e^x + (ax+b)e^x = e^x(a+ax+b)$ ، لدينا : $g'(0) = 0$ ، أي :

$e^0(a + a\times 0 - 1) = 0$ ، أي : $a - 1 = 0$ ، ومنه : $a = 1$.

إذن : $g(x)=(x-1)e^x-1$.

2) أ) تشكيل جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $\left[1,2;1,3\right]$ ، و بما أن : $\begin{cases} g(1,2)=-... \\ g(1,3)=+... \end{cases}$ ، أي : $g(1,2)\times g(1,3)<0$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $1,2$ و $1,3$.

ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$.

1) حساب النهايات :

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=-\infty$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}=0$.

*) بجوار $+\infty$ المنحني (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لدينا : $(\Delta): y=x$ ، نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{e^x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-xe^x-x}{e^x+1}$ ،

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\dfrac{-xe^x}{e^x+1}=0$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1\end{cases}$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

*) الوضعية : أي ندرس إشارة $\dfrac{-xe^x}{e^x+1}$ ، إذن : الإشارة من إشارة $(-x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة O	(C_f) يقع تحت (Δ)	

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

*) نحسب : $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(-x+1)e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{-\left[(x-1)e^x-1\right]}{(e^x+1)^2}=\frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$$.

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$.

*) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4) إثبات أن : $f(\alpha)=\alpha-1$.

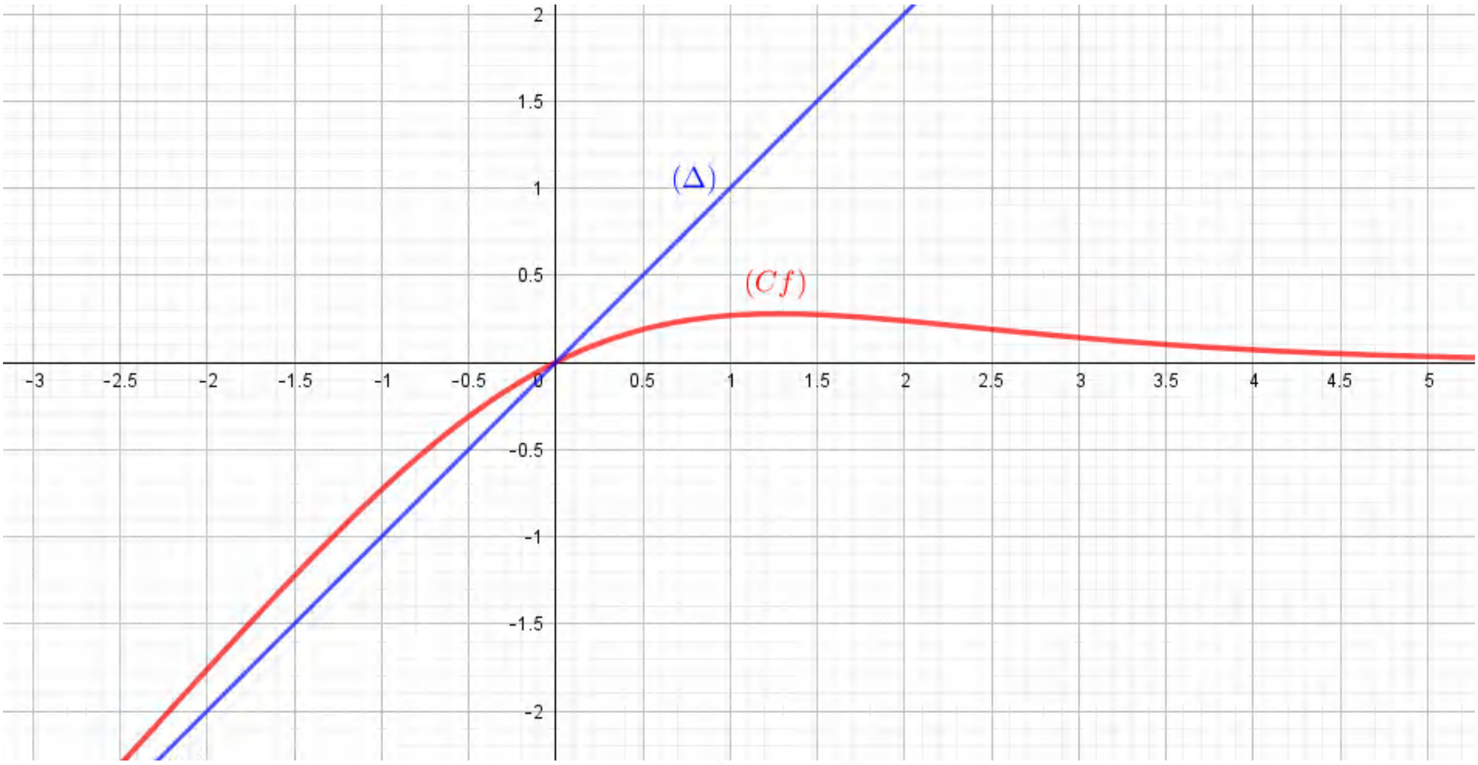
نعلم أن : $g(\alpha)=0$ ، أي : $(\alpha-1)e^\alpha-1=0$ ، أي : $(\alpha-1)e^\alpha=1$ ، ومنه : $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

*) لنحسب : $f(\alpha)$: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}$ ، أي : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=\alpha\times\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ ،

ومنه : $f(\alpha)=\alpha-1$ ، وهو المطلوب.

*) حصر $f(\alpha)$: لدينا : $1,2<\alpha<1,3$ ، أي : $0,2<\alpha-1<0,3$ ، ومنه : $0,2<f(\alpha)<0,3$.

5) الإنشــــــــــاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = f(m)$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و الذي معادلته : $y = f(m)$.

*) إذا كان : $m \in \left]-\infty;0\right]$ ، فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

*) إذا كان : $m \in \left]0;\alpha\right[\cup \left]\alpha;+\infty\right[$ ، فإن : المعادلة تقبل حلان متمايزان .

*) إذا كان : $m = \alpha$ ، فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

المسألة (05)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \ldots;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجزء الأول :

1) برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني (C) .

2) أ) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، و ذلك من أجل كل عدد حقيقي $x>0$.

ب) ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للدالة f ، و بالنسبة للمنحني (C) ؟ .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]0;+\infty\right[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4) أدرس تغيّرات الدالة f ، و شكل جدول تغيّراتها .

الجزء الثاني :

نعتبر g الدالة المعرّفة على $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1) بيّن أنه في المجال $\left]0;+\infty\right[$ المعادلتان : $g(x)=0$ و $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان .

2) برهن أن المعادلة $x^3+x^2+2x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $0,39<\alpha<0,40$.

3) نفرض (T_a) هو المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة a ، حيث : $a>0$.

أ) بيّن أن المماس (T_a) يشمل المبدأ O ، إذا وافقط إذا كان : $f(a)-xf'(a)=0$.

ب) إستنتج أن المماس (T_a) المـــــار بالمبدأ يمسّ المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

ج) أنشئ المماس (T_a) ، و المنحني (C) .

4) بقراءة بيانية ، أعط عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$ ، و ذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

❖ تعطى النتيـــــــجة : $f'(\alpha)\approx 2,029$.

حل مختصر للمسألة رقم (05)

لدينا : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \quad ....; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

الجزء الأول:

1) حساب النهاية عند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، لأن: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)=1 \end{cases}$.

و منه : عند $+\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $(\Delta): y=1$.

2) أ) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}......(*)$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

، أي :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\left(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right)+\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right)+\left(\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}\right)\right]$$ ، أي :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[-\left(-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right)+\left(-\frac{1}{x}\right)^2e^{-\frac{1}{x}}-\left(-\frac{1}{x}\right)^3e^{-\frac{1}{x}}\right]$$ ، بوضع $t=-\dfrac{1}{x}$ ، $\begin{cases} x\to 0 \\ t\to-\infty \end{cases}$ نجد :

$\lim\limits_{t\to-\infty}(*)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-te^t+t^2e^t-t^3e^t\right)=0$ ، لأن: $\lim\limits_{t\to-\infty}t^n\times e^t=0$. إذن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

ب) نستنتج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 ، و المنحني (C) يقبل عند المبدأ O مماسا هو حامل محور الفواصل .

3) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)x^2-2x(x^2+x+1)}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)$$ ، أي :

$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left[\dfrac{2x^3+x^2-2x^3-2x^2-2x}{x^4}+\dfrac{x^2+x+1}{x^4}\right]$ ، ومنه : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ ، و هو المطلوب .

4) دراسة تغيرات الدالة f :

*) لدينا : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة : $(1-x)$.

إذن : الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

*) جدول التغيّرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$	
$f(x)$	$\nearrow$ $3e^{-1}$ $\searrow$	1

الجزء الثاني:

$g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1) لدينا : $g(x)=0$ معناه :

$f(x)-xf'(x)=0$ ، أي :

$$\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}-x\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}=0$$

،

أي : $\left[\frac{x^2+x+1}{x^2}-\frac{1-x}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$ ، أي : $\left[\frac{x^3+x^2+x}{x^3}-\frac{1-x}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$ ، أي :

$$\left[\frac{x^3+x^2+2x-1}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$$

أي : $\frac{x^3+x^2+2x-1}{x^3}=0$ ، ومنه : $x^3+x^2+2x-1=0$.

إذن : المعادلتان $g(x)=0$ و $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$.

2) لنضع : $h(x)=x^3+x^2+2x-1$ ، أي : $h'(x)=3x^2+2x+2$ ، نلاحظ أن : $\Delta<0$ ، ومنه إشارة $h'(x)$ موجبة تماما ، إذن : الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

*) الدالة h مستمرة ورتيبة على المجال $\left]0,39;0,40\right[$ و $\begin{cases}h(0,39)=-\dots\\h(0,40)=+\dots\end{cases}$ ، أي : $h(0,39)\times h(0,40)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $0,39$ و $0,40$.

3) أ) معادلة المماس (T_a) هي : $(T_a): y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

لدينا : (T_a) يمر بالمبدأ O معناه أن : $O\in(T_a)$ ، أي : $0=f'(a)(0-a)+f(a)$ ، ومنه : $f(a)-af'(a)=0$

إذن هي محققة.

ب) لدينا : $f(a)=\frac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}$ و $f'(a)=\frac{1-a}{a^4}e^{-\frac{1}{a}}$ ، وعلما أن : $f(a)-af'(a)=0$.

إذن : $\frac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}-a\frac{1-a}{a^4}e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي : $\left[\frac{a^2+a+1}{a^2}-\frac{1-a}{a^3}\right]e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي :

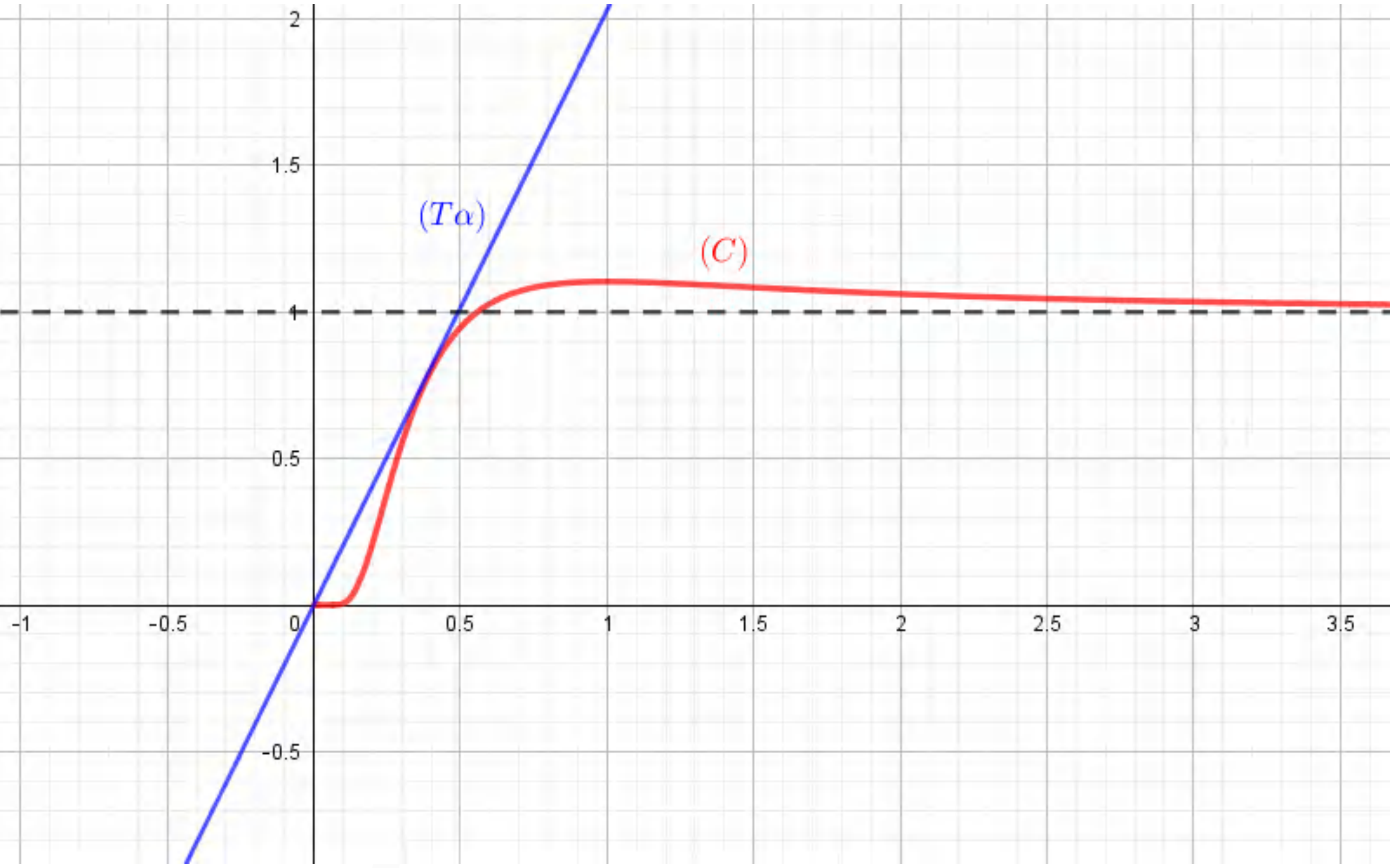
$\left[\frac{a^3+a^2+a}{a^3}-\frac{1-a}{a^3}\right]e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي: $\frac{a^3+a^2+2a-1}{a^3}=0$ ، ومنه: $a^3+a^2+2a-1=0$.

وهذه الأخيرة تقبل حلا وحيدا α ، إذن: $a=\alpha$.

وعليه: فإن المماس (T_a) المار بالمبدأ O يمس المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

*) معادلة المماس: $(T_\alpha): y=2,029x$.

ج) الإنشـــــــــاء:



4) المناقشة البيانية:

لدينا المعادلة: $f(x)=mx$.

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=mx$ هذا الأخير المار بالمبدأ O ، إذن:
هناك مناقشة بيانية دورانية.

*) إذا كان: $0<m<2,029$ فإن: المعادلة تقبل حلين متمايزين.

*) إذا كان: $m\geq 2,029$ أو $m\leq 0$ فإن: المعادلة تقبل حل واحد.

حلول تمارين الدوال الأسِّية الواردة في الباكالوريا

شعبة : علوم

التمرين (1) باك 2008 (م 1) (7,5 ن)

I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

2) أدرس تغيّرات الدالة g، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها.

4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

5) أرسم (C_g).

6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي: $k(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة، عيّن اتجاه تغيّر الدالة k ثم شكل جدول تغيّراتها.

حل مقترح للتمرين (1) باك 2008

I) f الدالة العددية المعرّفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$A\in(C_f)$ معناه: $f(-1)=1$ أي: $(-a+b)e+1=1$ و منه: $a=b$.

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه: $f'(-1)=-e$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-2;+\infty[$ و: $f'(x)=ae^{-x}+(-e^{-x})(ax+b)=(-ax-b+a)e^{-x}$.

و منه $f'(-1)=(2a-b)e$. و مما سبق $f'(-1)=-e$.

بالمطابقة لدينا $2a-b=-1$ و $a=b$ و منه نجد: $a=b=-1$.

II) الدالة g معرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)e^{-x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x}+1)=1$، لأن $\lim\limits_{u\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

2) دراسة تغيرات الدالة g:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$، و $g'(x)=-e^{-x}+(-e^{-x})(-x-1)=xe^{-x}$.

- إتجاه تغيّر الدالة g:

إشارة $g'(x)$ من إشارة x.

و منه : من أجل $x \in [-2;0]$ ، يكون $g'(x) \le 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-2;0]$.

من أجل $x \in [0;+\infty[$ ، يكون $g'(x) \ge 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	e^2+1 ↘	0	↗ 1

3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثييها .

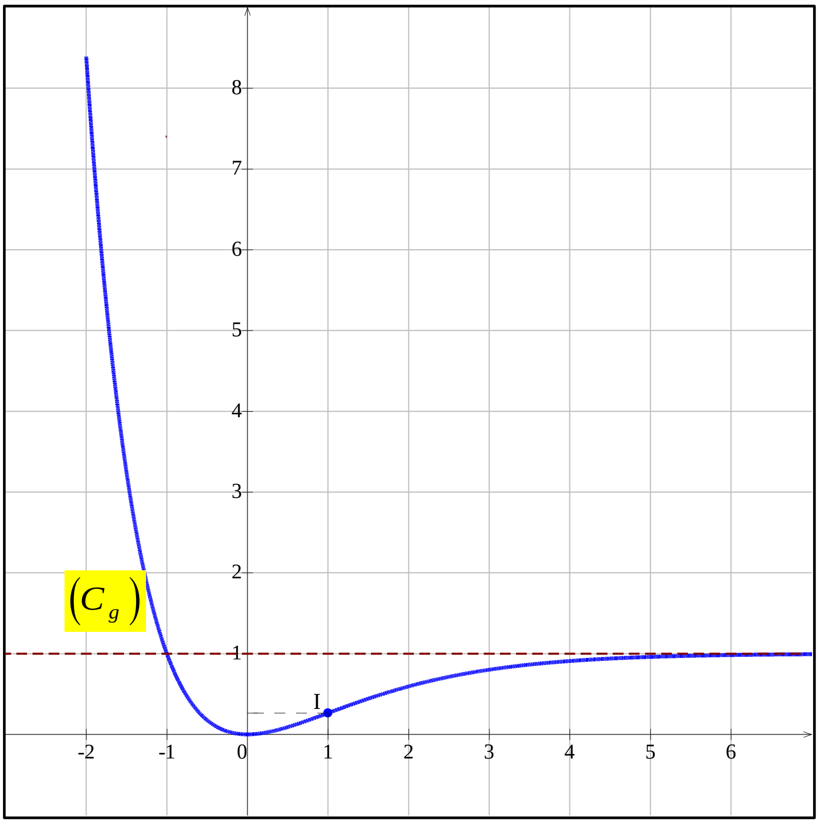
الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ ، و $g''(x) = (1-x)e^{-x}$.

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ و بالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرا إشارته ، و منه $I\left(1;1-\dfrac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g) .

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

لدينا : $(T): y = g'(1)(x-1)+g(1)$ و منه $(T): y = \dfrac{1}{e}x + 1 - \dfrac{3}{e}$.

5) الرسم :



6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x) = (\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

ـ تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x)-1$:

الدالة H قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ ، و $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x+\beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x)-1$ معناه : $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$ و منه نجد : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.

لدينا : $g(x) = g(x)+1-1 = H'(x)+1$ و منه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل : $G(x) = H(x)+x+c$

الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 هي : $G\left(x\right)=\left(x+2\right)e^{-x}+x+2$.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $\left]-2;+\infty\right[$ كما يأتي : $k\left(x\right)=g\left(x^2\right)$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-2;+\infty\right[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ،

و $k'(x)=2xg'\left(x^2\right)=2x\left(x^2e^{-x^2}\right)=2x^3e^{-x^2}$.

إتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x.

و منه : من أجل $x\in\left[-2;0\right]$ ، يكون $k'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة k متناقصة على المجال $\left[-2;0\right]$.

من أجل $x\in\left[0;+\infty\right[$ ، يكون $k'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة k متزايدة على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة k :

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$1-5e^{-4}$ ↘	0	↗ 1

التمرين (2) باك 2010 (م2) (7 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)$ و فسر هندسيا النتيجة.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ- بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.

بـ- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

بـ- هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ- أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

حل مقترح للتمرين (2) باك 2010

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

1) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

بـ- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=1-\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}=1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3) أ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{e^{x}-1}-1\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{1}{e^{x}-1}=\dfrac{1}{1-e^{x}}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1-e^{x}$.

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{1}{e^{x}-1}-1=\dfrac{e^{x}}{1-e^{x}}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1-e^{x}$.

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f):

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(-x)+f(x)=-\dfrac{1}{e^{x}-1}-\dfrac{1}{e^{-x}-1}=-\dfrac{1}{e^{x}-1}+\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=1=2\times\dfrac{1}{2}$

ومنه النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]\ln 2;1[\subset]0;+\infty[$ و $\begin{cases}f(1)\approx 0,41\\ f(\ln 2)\approx -0,31\end{cases}$ أي $f(1)\times f(\ln 2)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2<\alpha<1$.

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-1,4;-1,3[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases}f(-1.3)\approx 0,07\\ f(-1.4)\approx -0,07\end{cases}$

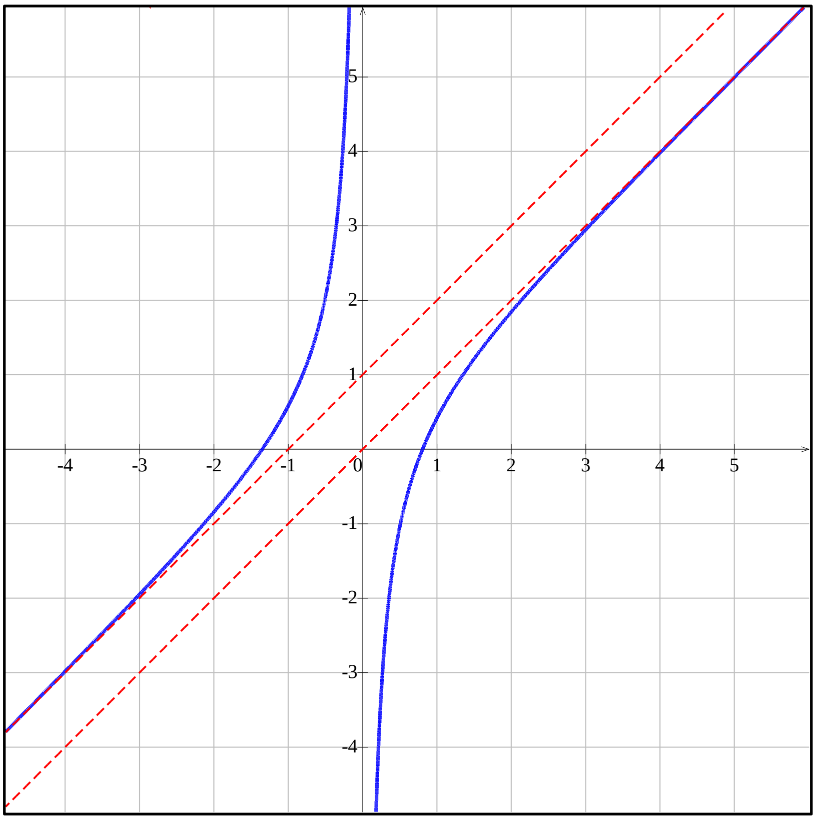
أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حلا وحيدا β ، حيث $-1.4<\beta<-1.3$.

بـ دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x)=1$.

لدينا : $f'(x)=1$ تكافئ $1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ تكافئ $\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ أي $e^x=0$ و هذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ- الرسم :



د- المناقشة البيانية :

لدينا : $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^x$ تكافئ $m=-\dfrac{1}{e^x-1}$ تكافئ $m+x=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

تكافئ $f(x)=x+m$ ، و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m\in]-\infty;0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m\in[0;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

التمرين 3 باك 2011 م2 7ن

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x}-ex-1$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

بـ أحسب $f'(x)$ ثمّ أدرس إشارتها.

جـ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

2) أـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(-\infty)$.

بـ أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$، تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

د ـ أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3) أـ أحسب بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$، $x=\alpha$.

بـ أثبت أن: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^{2}-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

حل مقترح للتمرين 3 باك 2011

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x}-ex-1$.

1) أـ حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}-ex-1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-ex-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x}}{x}-e-\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty$.

بـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{x}-e$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^{x}-e=0$ تكافئ $e^{x}=e$ تكافئ $x=1$.

من أجل $x\in]-\infty;1]$، يكون $e^{x}\le e$ أي $f'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$، يكون $e^{x}\ge e$ أي $f'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جـ جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2) أـ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{x}-ex-1-(-ex-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]$.

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

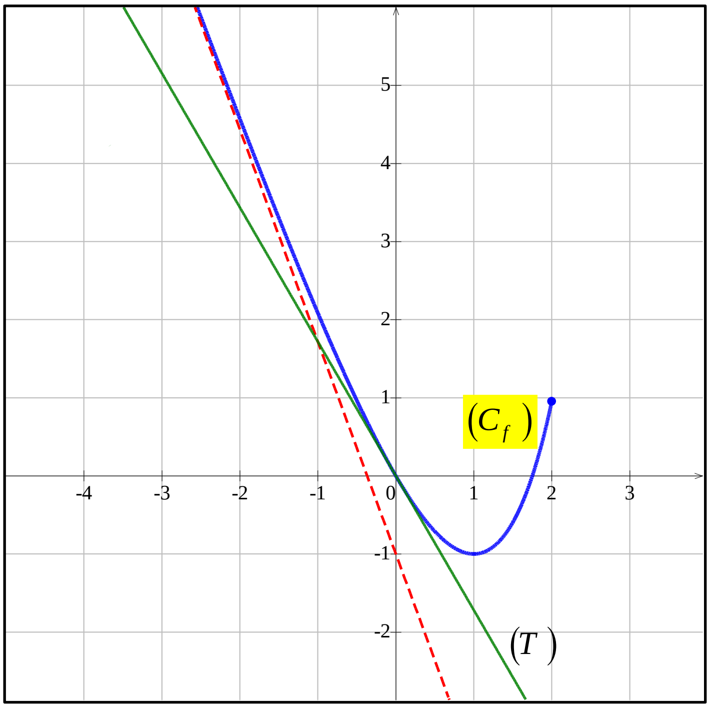
لدينا : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T):y=(1-e)x$.

جـ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset[1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1.75)\approx -0,002 \\ f(1.76)\approx 0,02 \end{cases}$

أي $f(1,75)\times f(1,76)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75<\alpha<1.76$.

د ـ الرسم :



3)أ ـ حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A(\alpha)=-\int_0^{\alpha} f(x)dx=-\int_0^{\alpha}(e^x-ex-1)dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^2-\alpha\right)$$

بـ- إثبات أن : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

لدينا : $f(\alpha)=0$ و منه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ و بالتالي :

$$A(\alpha)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

التمرين 4 باك 2012 م2 ن 7

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$

ب- تحقق أن $0.5<\alpha<0.6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$،

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3) بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2})

4) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

ب- إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

حل مقترح للتمرين 4 باك 2012

g **I)** الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

1) حساب النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-xe^{x}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^{x}\right)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x: $g'(x)=-1\times e^{x}+(-x)e^{x}=-(x+1)e^{x}$

بما أن $e^{x}>0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$، و منه:

x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$ $\;0\;$ $+$

و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-1;+\infty[$ ومتزايدة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1 ↗	$1+e^{-1}$	↘ $-\infty$

3) أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-1)=1+e^{-1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α فيالمجال $]-1;+\infty[$.

بالتحقق أن $0.5<\alpha<0.6$:

لدينا : $]0,5;0,6[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(0.5)\approx 0,18 \\ g(0.6)\approx -0,09 \end{cases}$ ومنه $0.5<\alpha<0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{x}-x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^{x}-e^{x}-x-1\right]=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x منالمجال $]-\infty;2]$:

$$f'(x)=1\times e^{x}+(x-1)e^{x}-1=e^{x}+xe^{x}-e^{x}-1=xe^{x}-1=-\left(1-xe^{x}\right)=-g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $e^{2}-3$

3) تبيان أن : $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$.

لدينا : $f(\alpha)=(\alpha-1)e^{\alpha}-\alpha-1$ ، ولدينا من جهة $g(\alpha)=0$ يكافئ $1-\alpha e^{\alpha}=0$ يكافئ $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$.

ومنه $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)}{\alpha}-\alpha-1=\frac{(\alpha-1)-\alpha^2-\alpha}{\alpha}=\frac{-\alpha^2-1}{\alpha}$ أي: $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

إيجاد حصرللعدد $f(\alpha)$:

$0,5<\alpha<0,6$ يكافئ $\begin{cases}\frac{1}{0,6}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{0,5}\\ 1,25<\alpha^2+1<1,36\end{cases}$ يكافئ $\frac{1,25}{0,6}<\frac{\alpha^2+1}{\alpha}<\frac{1,36}{0,5}$

يكافئ $-\frac{1,25}{0,6}<-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)<-\frac{1,36}{0,5}$ أي: $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

4) لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x-e^x\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بدراسة وضعية (C_f) بالنسبية إلى (Δ):

لدينا: $f(x)-y=(x-1)e^x$ و منه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty;2]$.

x	$-\infty$ 1 2
$f(x)-y$	$+$ 0 $-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) / (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-2)$ / (C_f) تحت (Δ)

5) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

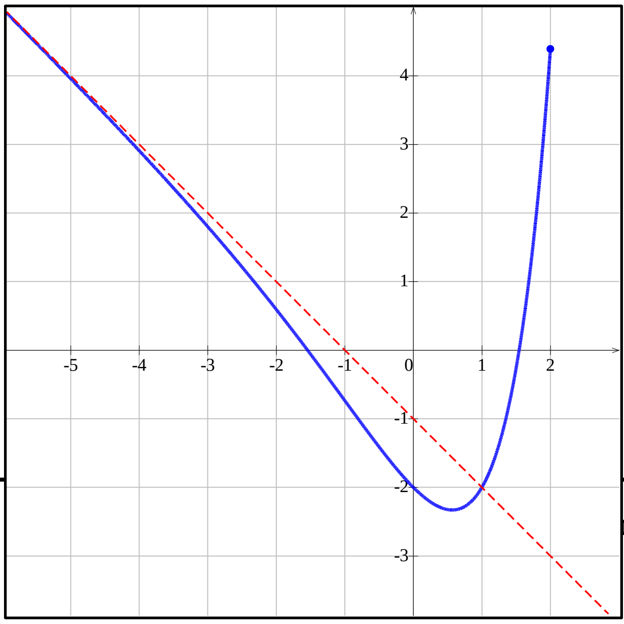
- الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $]-1,6;-1,5[\subset]-\infty;\alpha]$ و $\begin{cases}f(-1.5)\approx-0,05\\ f(-1.6)\approx0,07\end{cases}$

أي $f(-1,6)\times f(-1,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و يحقق $f(x_1)=0$.

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$ و $]1,5;1,6[\subset[\alpha;2]$ و $\begin{cases}f(1.5)\approx-0,26\\ f(1.6)\approx0,37\end{cases}$

أي $f(1,5)\times f(1,6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5<x_2<1.6$ و يحقق $f(x_2)=0$.

بالرسم:



(C_f)

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ-تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$.

الدالة h أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ يعني: $h'(x)=xe^x$ ، و منه بالمطابقة نجد: $a=1$ و $b=-1$. أي $h(x)=(x-1)e^x$.

بــإستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا: $g(x)=1-xe^x$ و منه دالة أصلية للدالة g من الشكل: $G(x)=x-(x-1)e^x$.

التمرين 5 باك 2013 م 1 (6,5 ن)

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) أحسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثمّ أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ- تحقق أنّ $g\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أن: $g'\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب- إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+1}{2}$.

جـ- تحقق من أن: $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x-\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

حل مقترح للتمرين (5) (باك 2013)

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

1) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=2$ ، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=1\end{cases}$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left[\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=-\infty$ ، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=0\end{cases}$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$:

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}+\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

بما أن $f'(x)<0$ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$

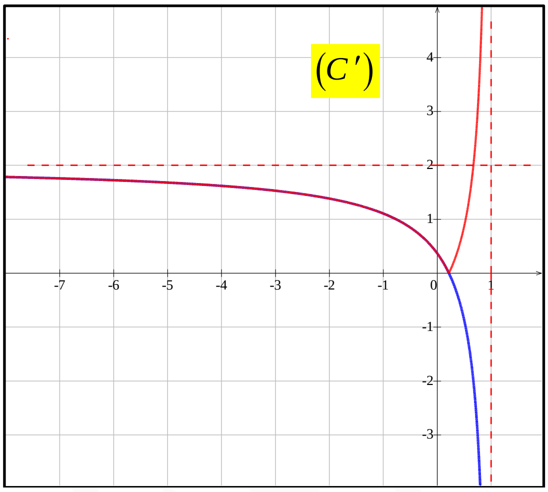
3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

حسب جدول القيم: $0,21<\alpha<0,22$.

4) الرسم :



5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)|=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

من أجل $m\in\left]\frac{1}{e};2\right[$ المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(2x-1)=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(2x-1)=-\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$: $g'(x)=2f'(2x-1)$

بما أنه من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، $(2x-1)\in]-\infty;1[$ فإن $f'(2x-1)<0$ ، و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

2) أ-التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$:

لدينا : $g(x)=f(2x-1)$ ومنه $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=f(\alpha)=0$.

تبيان أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

لدينا : $g'(x)=2f'(2x-1)$ ومنه $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=2f'(\alpha)$.

بـ- إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا : $(T):y=g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)+g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه $(T):y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$.

جـ- التحقق من أن : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

لدينا : $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ، لكن $f(\alpha)=0$ وهذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ومنه $f'(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن : $(T):y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$ أي $(T):y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

التمرين 6 باك 2015 م2 6 ن

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أـ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

بـ- إستنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$.

6) أـ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

بـ- إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

حل مقترح للتمرين 6 باك 2015

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+2e^{2x-2}\right)$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)<0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\dfrac{1-2x}{2x-2}-\dfrac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty\end{cases}$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$.

لدينا : $\begin{cases}g(0.36)\approx 0,002\\ g(0.37)\approx -0,02\end{cases}$ أي : $g(0.36)\times g(0.37)<0$ و منه $0,36<\alpha<0,37$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) أـ تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}\left(1-2(-x)-e^{2(-x)-2}\right)=e^{2x+2}g(-x)$$

بـ- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$ $\quad$ $-\alpha$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+ \; 0 \; -$

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة على $[-\alpha;+\infty[$.

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2\times 2xe^{2x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\alpha$ $\quad$ $+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	$+ \; 0 \; -$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ ↗ $+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2\times 2xe^{2x}\right)=0$

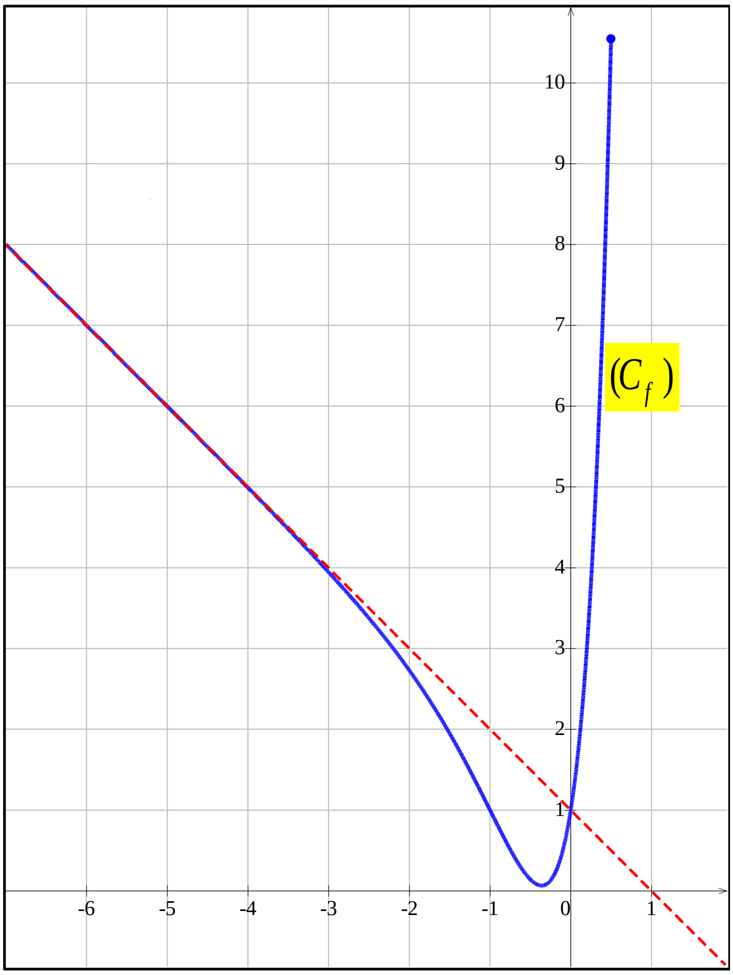
التفسير الهندسي : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x+1)=xe^{2x+2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)

5) الرسم :



6) أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

ب- إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ومنه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

وبالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل : $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي : $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1+c$.

التمرين (7) باك 2016 - الدورة الأولى - (م2) (7 ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث: $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=-g(x)$.

جـ- شكل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.38$)

د- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

جـ- بيّن أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما .

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

هـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ- أحسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

حل مقترح للتمرين (7) باك 2016 - الدورة الأولى -

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=1$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x-1)e^{-x}=(-x^2+x+2)e^{-x}=(2-x)(x+1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-x)(x+1)$:

x	-1	2	$+\infty$ $-\infty$
$g'(x)$	0	0	

الدالة g متزايدة على المجال $]-1;2[$ و متناقصة على كل من المجالين $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	$1+5e^{-2}$	$\searrow$	1

3) أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

لدينا : $g(0)=1+(0^2+0-1)e^0=1-1=0$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و $]-1,52;-1,51[\subset]-\infty;-1[$ و $\begin{cases} g(-1,52)\approx 0,041 \\ g(-1,51)\approx -0,040 \end{cases}$

أي $g(-1,52)\times g(-1,51)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;-1[$ حلا وحيدا α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=-\infty$

ب- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=-1+(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+2)e^{-x}=-1-(x^2+x-1)e^{-x}=-g(x).$$

جـ- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

د- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=-g(\alpha)=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم . (يوازي لحامل محور الفواصل).

2) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x)-(-x)=\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=(x+1)(x+2)e^{-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(-2;2)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

جـ ـ تبيان ان المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف:

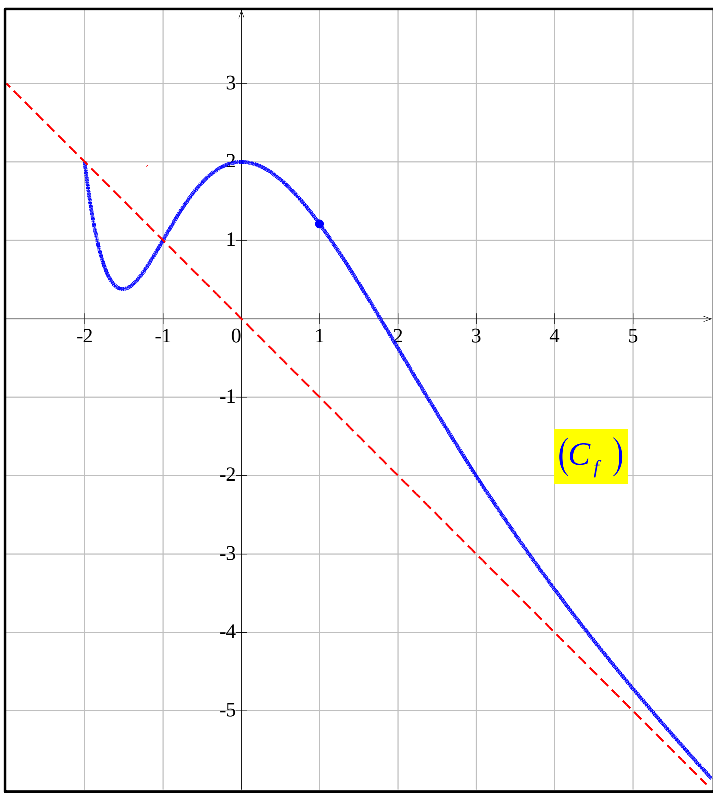
لدينا: الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=-g'(x)=(x-2)(x+1)e^{-x}$.

إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما: $A(-1;1)$ و $C\left(2;-2+12e^{-2}\right)$.

د ـ الرسم:



هـ ـ المناقشة البيانية:

المعادلة $(m-x)e^{x}+\left(x^2+3x+2\right)=0$ تكافئ $f(x)=-m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$.

لما $m\in\left]-f(\alpha);+\infty\right[$ يكون $-m\in\left]-\infty;f(\alpha)\right[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب و الآخر سالب .

لما $m\in\left]-2;-f(\alpha)\right[$ يكون $-m\in\left]f(\alpha);2\right[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان و الآخر موجب .

لما $m=-2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر معدوم .

III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

و منه بالمطابقة نجد : $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}$.

2) أ- حساب التكامل : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx=\left[H(x)\right]_0^{\lambda}=(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

ب- $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

التمرين 8 باك 2016 - الدورة الثانية - م2 - 6 ن

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^{x}-x^{2}-x$.

2) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، ثم أدرس إتجاه تغيّر الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب - بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

جـ- أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و عند $-\infty$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^{2}e^{x}}{e^{x}-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

بـ- بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{xe^{x}g(x)}{\left(e^{x}-x\right)^{2}}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f).

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ- بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha^{2}+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

بـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^{2}\right]$، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

جـ- أنشئ المنحنى (C_f). (تعطى $f(\alpha)\approx 0{,}29$)

حل مقترح للتمرين 8 باك 2016 - الدورة الثانية -

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^{x}-x^{2}-x$.

1) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=2e^{x}-2x-1$

دراسة إتجاه تغيّر الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g''(x)=2e^{x}-2=2\left(e^{x}-1\right)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

بـ- تبيان أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

جـ- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}-x^{2}-x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}\left(\dfrac{2e^{x}}{x^{2}}-1-\dfrac{1}{x^{2}}\right)=+\infty$

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38)\approx -0,02 \\ g(-1,37)\approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38)\times g(-1,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+\quad 0 \quad -$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

1) أـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=0$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty$.

بـ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{\left(2xe^x+x^2e^x\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)x^2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x\left[\left(2+x\right)\left(e^x-x\right)-x\left(e^x-1\right)\right]}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^xg(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

جـ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+\quad 0 \quad -\quad 0\quad +$

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) أـ تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}$ ومنه $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2e^{\alpha}}{e^{\alpha}-\alpha}=\dfrac{\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\dfrac{\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha\right)}{\alpha^2-\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$

أي : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$.

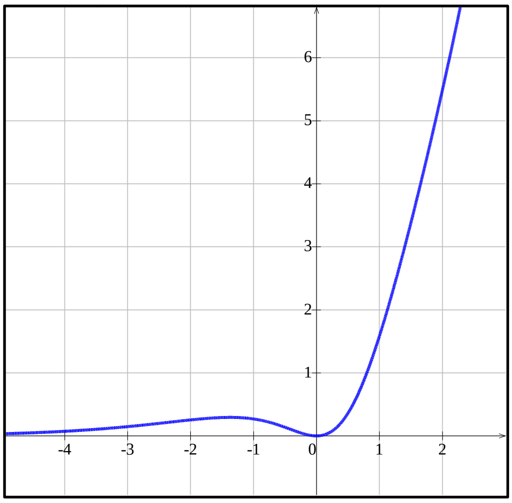
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا : $-1,38<\alpha<-1,37$ يكافئ $\begin{cases}-0,76<2\alpha+2<-0,74\\ (-1,37)^2<\alpha^2<(-1,38)^2\\ -2,38<\alpha-1<-2,37\\ -\dfrac{2}{2,37}<\dfrac{2}{\alpha-1}<-\dfrac{2}{2,38}\end{cases}$ ومنه $0,27<f(\alpha)<0,32$.

بـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}}\right)=0$

التفسير البياني :المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x\mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ الرسم :



التمرين 9 باك 2017 - الدورة العادية - م2 7 ن

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)\geq 0$، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T).

2) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

حل مقترح للتمرين 9 باك 2017 – الدورة العادية -

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=2$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e\times x^2e^{-x}\right)=0$ = $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x}$.

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=-\infty$.

2) أ- الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f'(x)=-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}=\left(x^2-2x\right)e^{1-x}=x(x-2)e^{1-x}$$

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[0;2]$ و متزايدة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2-4e^{-1}$	$\nearrow$	2

3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T): y = -x+2$.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-1)e^{1-x}$

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدّية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1)=0$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$

- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) :

لدينا : $f(x)-y = 2-x^2e^{1-x}+x-2 = x(1-x)e^{1-x} = xh(x)$.

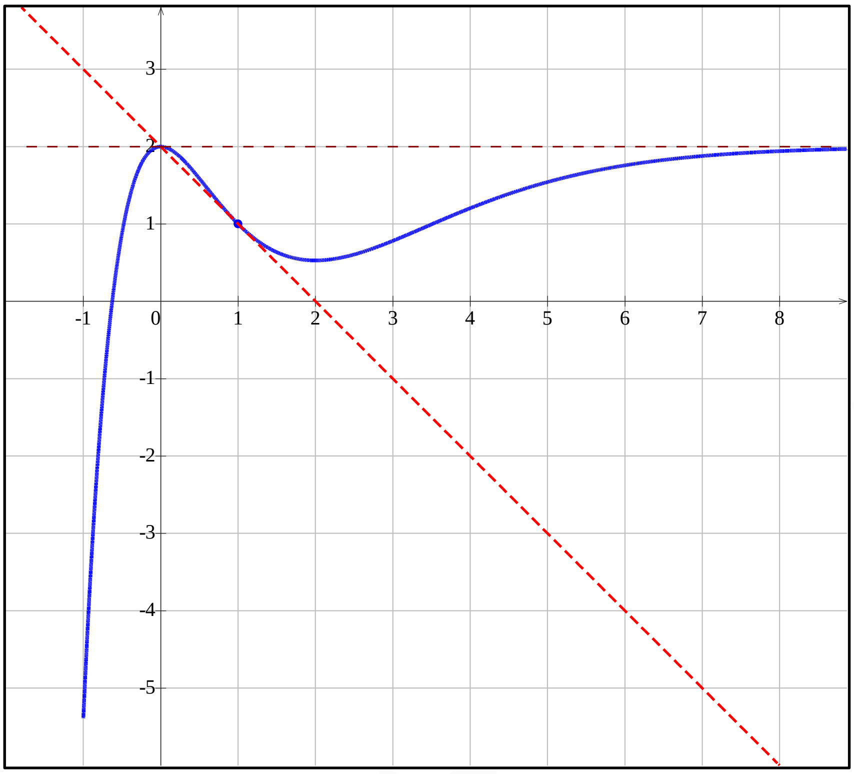
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

2) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و $]-0,7;-0,6[\subset]-\infty;0]$ و $\begin{cases} f(-0,7)\approx -0,7 \\ f(-0,6)\approx 0,2 \end{cases}$

أي $f(-0,7)\times f(-0,6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) الرسم :



4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$.

ـ التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

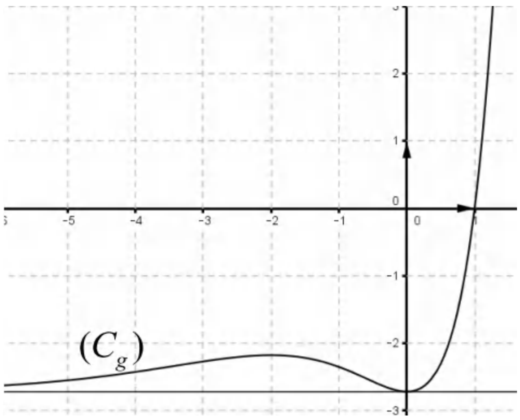
ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)u.a$$

التمرين 10 باك 2017 - الدورة الإستثنائية - م 1 - 7 ن

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل).



- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات الآتية: $\lim_{x\to-\infty}f(x)$، $\lim_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$، $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيّن أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y=e^{-x}-2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) .

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\frac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$، ثم شكل جدول تغيّراتها.

5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم .

6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي l حيث: $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

حل مقترح للتمرين 10 باك 2017 – الدورة الإستثنائية -

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$.

- $g(1)=e^1-e=0$.
- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$g(x)$	+ 0 −

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$g(-x)$	− 0 +

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \ ، \ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \ ، \ \lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-\infty$$

2) لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e}{x}\right)=0$ ومنه (C_f) و المنحنى (γ) ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$ متقاربان عند $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{e}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)	(C_f) تحت (γ)

3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x)=-e^{-x}+\frac{e}{x^2}=\frac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}=\frac{-\left(x^2e^{-x}-e\right)}{x^2}=\frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\ 0\ $ $-$	$+$

ومنه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty;-1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

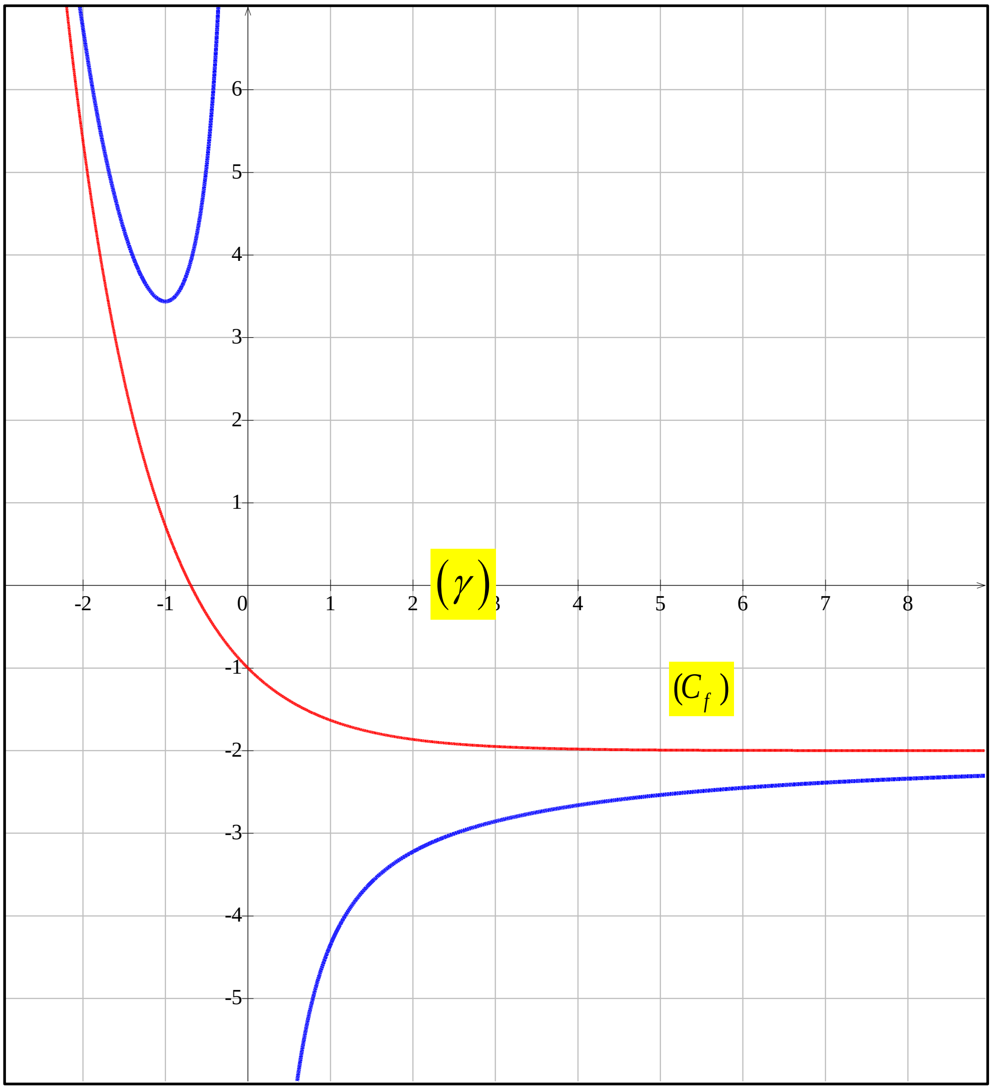
x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ $\ 0\ $ $-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $2e-2$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↗ $-\infty$

4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^{x}$:

لدينا : (γ) المنحنى ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$

ومنه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x\mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\,(0;-2)$ ، علما أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x\mapsto e^{x}$ بالنسبة لحامل محور التراتيب .

الرسم :



5) n عدد طبيعيو $A(n)$ مساحةالحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left[f(x)-e^{-x}+2\right]dx=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(-\frac{e}{x}\right)dx=-e\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(\frac{1}{x}\right)dx=-e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^n}=e$$

حساب العدد الحقيقي l : $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)=2017e$.

التمرين 11 باك 2018 م 1 ن 7

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث : $(\Delta): y=2x+1$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\approx 0,8$).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x=(1-m)e^{x}$

6) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

بـ- أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتهما: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

حل مقترح للتمرين 11 باك 2018

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+xe^{-x}-e^{-x}\right)=2$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(x-1)=(2-x)e^{-x}$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$g'(x)$	− 0 +

الدالة g متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;2]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

3)أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2[$ و $]-0,38;-0,37[\subset]-\infty;2[$ و $\begin{cases} g(-0.38)\approx -0,017 \\ g(-0.37)\approx 0,016 \end{cases}$

أي $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1)أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\right]=-\infty$.

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) بحيث : $(\Delta): y=2x+1$.

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

2)تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ،

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=2+(-1)e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(-x)=2+(x-1)e^{-x}=g(x)\ .$$

- إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، و منه نستنتج أن :

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$.

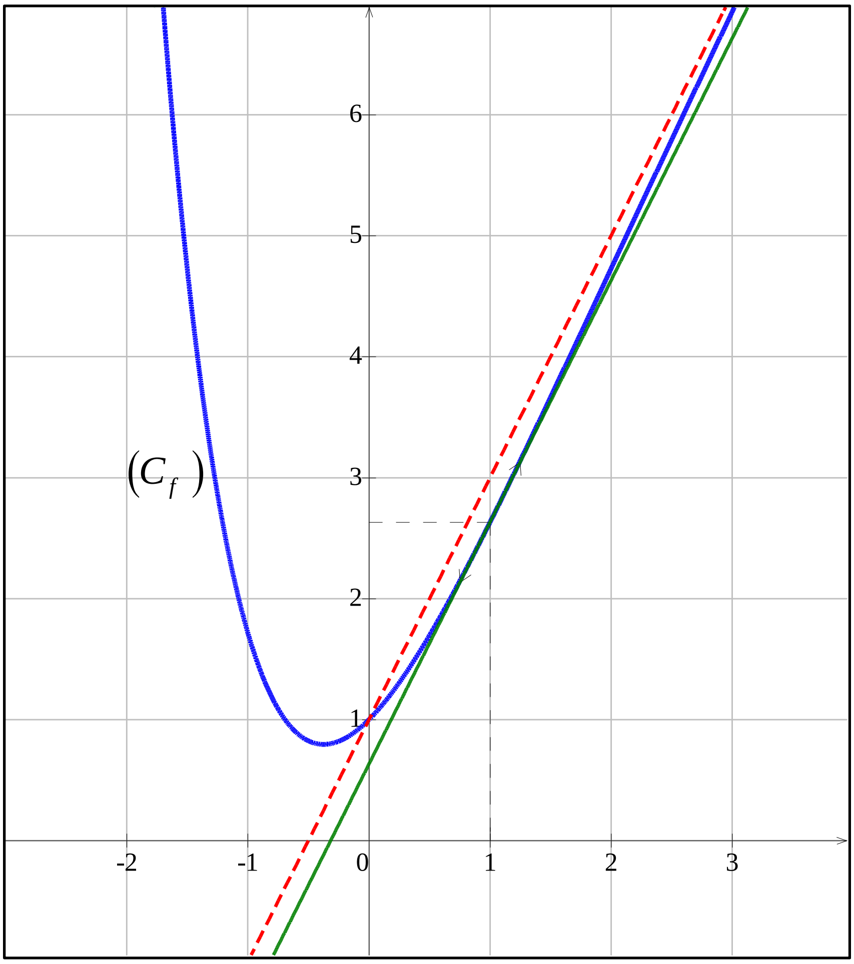
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$+\infty \searrow f(\alpha) \nearrow +\infty$

3)كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $y=2x+1-\frac{1}{e}$ هي معادلة لـ (T).

4)الرسم :



5)المناقشة البيانية :

$x=(1-m)e^{x}$ تكافئ $xe^{-x}=(1-m)$ تكافئ $-xe^{-x}=m-1$ تكافئ $2x+1-xe^{-x}=2x+1+m-1$

أي $2x+1-xe^{-x}=2x+m$ أي : $f(x)=2x+m$. ⟵ مناقشة مائلة .

إذا كان $m\in\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m=1-\frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m \in \left]1-\frac{1}{e};1\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم.

إذا كان $m \in \left]1;+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما.

6) تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

الدالة $x \mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=\int_1^x te^{-t}\,dt$.

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=e^{-t}$ ومنه $u'(t)=1$ ، $v(t)=-e^{-t}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x)=\left[-te^{-t}\right]_1^x-\int_1^x -e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$ هي: $F(x)=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$.

بـ- حساب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

$$A=\int_1^3\left((2x+1)-f(x)\right)dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3}\,(u.a)$$

التمرين (12) باك 2019 (م 1) (7 ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x)=e^x-ex \quad \text{و} \quad f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2 .$$

1) أ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

ب- إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3) أحسب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يعطى $e^2-2e\approx 2$)

6) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g).

7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- بيّن أن الدالة h زوجية.

ب- من أجل $x\in[0;2]$ أحسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه.

حل مقترح للتمرين (12) باك 2019

$$g(x)=e^x-ex \text{ و } f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2$$

1) أ- دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^x-e$

من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x\le e$ أي $g'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$ ، يكون $e^x\ge e$ أي $g'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ب- إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\ge 0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-ex=g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)\right]=+\infty$$

، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty}\left(-\frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty \end{cases}$

جدول تغيرات الدالة f :

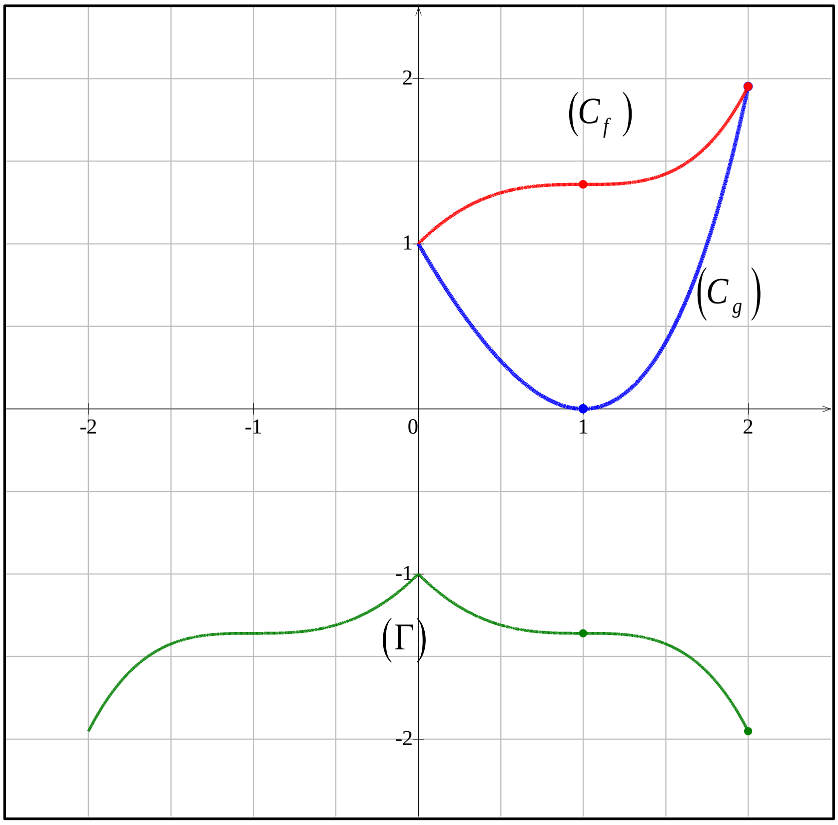
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↗ $+\infty$

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 - (e^x - ex) = -\frac{1}{2}ex^2 + ex = ex\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$

x	$+\infty$ 2 0 $-\infty$
$f(x)-g(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$
الوضع النسبي	(C_g) تحت (C_g) (C_f) فوق (C_g) (C_f) تحت (C_f) (C_g) يقطع (C_g) (C_f) يقطع (C_f) $A(0;1)$ في النقطة $B(2;e^2-2e)$ في النقطة

5) الرسم :



6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) :

$$A=\int_0^2[f(x)-g(x)]dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx=\left[-\frac{1}{6}ex^3+\frac{1}{2}ex^2\right]_0^2=-\frac{8}{6}e+2e=\frac{2e}{3}(u.a)$$

ومنه $A=\frac{2e}{3}\times 4=\frac{8e}{3}cm^2$.

7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$.

أ- تبيان أن الدالة h زوجية :

من أجل كل $x\in[-2;2]$ ، $-x\in[-2;2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$.

ومنه الدالة h زوجية.

ب- من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$.

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) :

من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)=-f(x)$ وبالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

ولرسم (Γ) على المجال $[-2;0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية.

الرسم : أنظر الشكل.

حلول تمارين الدوال الأسِّية الواردة في الباكالوريا شعبة: رياضيات

التمرين (1) (باك 2008) (م2) (7,5 ن)

الجزء I :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f .

2. بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف ω واكتب معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ω .

ـ اثبت أن ω مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

3. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]$.

ـ استنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

4. بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77;-2,76[$.

ـ احسب $f(1)$ ، $f(-1)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم $(\mathcal{C}_f)$ ومستقيميه المقاربين.

الجزء II :

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$.

$(\mathcal{C}_g)$ منحني الدالة g .

1. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=f(-x)$.

ـ استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $(\mathcal{C}_f)$ إلى $(\mathcal{C}_g)$.

2. أنشئ في نفس المعلم السابق، المنحني $(\mathcal{C}_g)$ (دون دراسة الدالة g).

حل مقترح للتمرين (1) (باك 2008)

الجزء I : f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. دراسة تغيّرات الدالة f .

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-1+\dfrac{4}{e^x+1}=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-1+\dfrac{4}{e^x+1}=+\infty$ ؛

$$f'(x)=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 1 ↗ $+\infty$

2. تبيين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف ω :

لدينا الدالة f متزايدة تماما والمشتقة f' تنعدم عند 0

إذا المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا موازيا لمحور التراتيب عند النقطة $\omega(0;1)$ الذي يخترقه فيها وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وهي ω

- كتابة معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ω :

معادلة المماس عند ω هي $y=1$.

- إثبات أن ω مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$:

لدينا $2\times 0-x=-x$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $(-x)\in\mathbb{R}$ لأن لكل عدد حقيقي له معاكس.

$$f(2\times 0-x)=f(-x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}=-x-1+\frac{4e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$=-x+\frac{3e^{x}-1}{1+e^{x}}$$

$$2\times 1-f(x)=2-x+1-\frac{4}{e^{x}+1}=-x+\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

إذا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(2\times 0-x)=2\times 1-f(x)$

وبالتالي $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

3. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{x}+1}=0$$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{e^{x}+1}-4=0$.

- استنتاج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x-1$ وهذا في $(+\infty)$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x+3$ وهذا في $(-\infty)$.

4. تبيين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77;-2,76[$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذا هي كذلك على المجال $[-2,77;-2,76]$ ولدينا $f(-2,76)\approx 0,0019$ و $f(-2,77)\approx -0,0586$ إذا $f(-2,76)\times f(-2,77)<0$ ؛

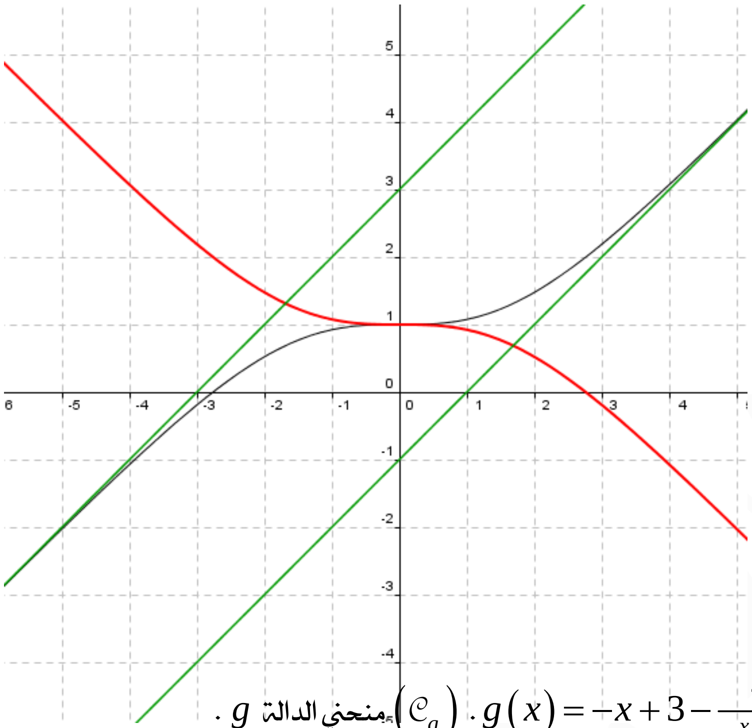
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال

$\left]-2,77;-2,76\right[$ حيث $f\left(x_0\right)=0$ أي $\left(\mathcal{C}_f\right)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $\left]-2,77;-2,76\right[$.

- حساب $f\left(1\right)$ ، $f\left(-1\right)$

$f\left(1\right)\approx 1,08$ ، $f\left(-1\right)\approx 0,92$.

- رسم $\left(\mathcal{C}_f\right)$ ومستقيميه المقاربين:



الجزء II :

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g\left(x\right)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$. $\left(\mathcal{C}_g\right)$ منحني الدالة g .

1. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g\left(x\right)=f\left(-x\right)$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f\left(-x\right)=-x+\dfrac{3e^x-1}{1+e^x}$

$$f\left(-x\right)=-x+\frac{3e^x+3-4}{1+e^x}=-x+\frac{3\left(e^x+1\right)}{1+e^x}-\frac{4}{1+e^x}=-x+3-\frac{4}{1+e^x}$$

إذا $f\left(-x\right)=g\left(x\right)$

- استنتاج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $\left(\mathcal{C}_f\right)$ إلى $\left(\mathcal{C}_g\right)$.

لدينا $g\left(x\right)=f\left(-x\right)=2-f\left(x\right)$

لتكن $M\left(x,y\right)$ نقطة من $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و $M'\left(x',y'\right)$ نقطة من $\left(\mathcal{C}_g\right)$ حيث $x'=-x$ لدينا $y=f\left(x\right)$ و $y'=g\left(x'\right)=f\left(-x'\right)=f\left(x\right)=y$ إذا يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $\left(\mathcal{C}_f\right)$ إلى $\left(\mathcal{C}_g\right)$ معرف بـ: $\begin{cases}x'=-x\\ y'=y\end{cases}$ وهو التناظر المحوري الذي محوره $\left(yy'\right)$.

2. إنشاء في نفس المعلم السابق، المنحني $\left(\mathcal{C}_g\right)$ (دون دراسة الدالة g).

التمرين 2 باك 2010 م 2 7 ن

الجزء I :

g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$.

1. ادرس تغيّرات الدالة g.

2. بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82<\alpha<2,83$.

3. استنتج أشارة $g(x)$ حسب قيم x.

الجزء II

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1};\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$، اكتب معادلة لـ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ عند المبدأ O.

2. أ ـ بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$ ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب ـ بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)}g(x)$.

جـ ـ تحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ثمّ عيّن حصرا له.

د ـ أنشئ جدول تغيّرات الدالة f.

ـ احسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C})$ منحني الدالة $x\mapsto -x^3$

ـ بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ وفسّر النتيجة هندسيا.

ـ أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_f)$.

حل مقترح للتمرين 2 باك 2010

الجزء I

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1};\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. دراسة تغيّرات الدالة g :

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

إذا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x-xe^x-3=-3$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)=-\infty$

إذا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)e^x=-\infty$

$g'(x)=-e^{x}+(3-x)e^{x}=(2-x)e^{x}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{x}>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(2-x)$

x	$-\infty$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$g(x)$	$-3 \nearrow e^{2}-3 \searrow -\infty$

2. تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82<\alpha<2,83$

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ومتزايدة تماما على $]-\infty;2]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-3;e^{2}-3]$ و $0\in]-3;e^{2}-3]$ إذا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;2]$ ولدينا أيضا الدالة g متناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[e^{2}-3;-\infty[$ و $0\in[e^{2}-3;-\infty[$ إذا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[2;+\infty[$ وعليه فالمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

لدينا $g(0)=(3-0)e^{0}-3=3-3=0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

ولدينا $g(2,82)\approx 0,0198$ و $g(2,83)\approx -0,119$ إذن $g(2,82)\times g(2,83)<0$ وعليه فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $2,82<\alpha<2,83$ و $g(\alpha)=0$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

الجزء II

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^{3}}{e^{x}-1}; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{(e^{x}-1)^{2}}(e^{x}-1)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{x}-1}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{e^{x}-1}\right)^{2}=1$

إذا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{(e^{x}-1)^{2}}(e^{x}-1)=0$ أي $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

- معادلة لـِ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O : $y=f'(0)x-f(0)$ ومنه $y=0$

2. أ- تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3}e^{-x}=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{3}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}x^{3}\left(e^{-\frac{1}{3}x}\right)^{3}=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{3}x}\right)^{3}=\lim_{x\to+\infty}\left(3\times\frac{1}{3}xe^{-\frac{1}{3}x}\right)^{3}$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-27\left(-\frac{1}{3}xe^{-\frac{1}{3}x}\right)^3$

نضع $t=-\frac{1}{3}x$ ولدينا $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty}-27\left(te^t\right)^3=0$

- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x\left(1-e^{-x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)}=0$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-1=-1$

ب- تبيين أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\frac{x^2}{\left(e^x-1\right)^2}g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم: $f'(x)=\frac{3x^2\left(e^x-1\right)-x^3e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$

أي $f'(x)=\frac{x^2\left[3e^x-3-xe^x\right]}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{x^2\left[(3-x)e^x-3\right]}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{x^2}{\left(e^x-1\right)^2}g(x)$

جـ- تحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$:

$f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{e^\alpha-1}$ ولدينا $g(\alpha)=0$ معناه $(3-\alpha)e^\alpha-3=0$ أي $e^\alpha=\frac{3}{(3-\alpha)}$

إذن $f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{3-3+\alpha}{3-\alpha}}=\frac{\alpha^3(3-\alpha)}{\alpha}=\alpha^2(3-\alpha)$.

- حصر العدد $f(\alpha)$: لدينا $2,82<\alpha<2,83$ معناه $(2,82)^2<\alpha^2<(2,83)^2$ أي $7,9524<\alpha^2<8,0089$

ولدينا $2,82<\alpha<2,83$ معناه $3-2,83<3-\alpha<3-2,82$ أي $0,17<3-\alpha<0,18$

إذا $7,9524\times 0,17<\alpha^2(3-\alpha)<0,18\times 8,0089$ أي $1,351908<f(\alpha)<1,441602$

د- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3. حساب $f(x)+x^3$:

$$f(x)+x^3=\frac{x^3}{e^x-1}+x^3=\frac{x^3+x^3e^x-x^3}{e^x-1}=\frac{x^3e^x}{e^x-1}$$

ـ الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C) حيث (C) منحني الدالة $x\mapsto -x^3$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$\frac{x^3}{e^x-1}$			‖ $+$		$+$
$f(x)+x^3$			$+$ 0		$+$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (C)		(C_f) يقطع (C) في المبدأ O		(C_f) يقع فوق (C)

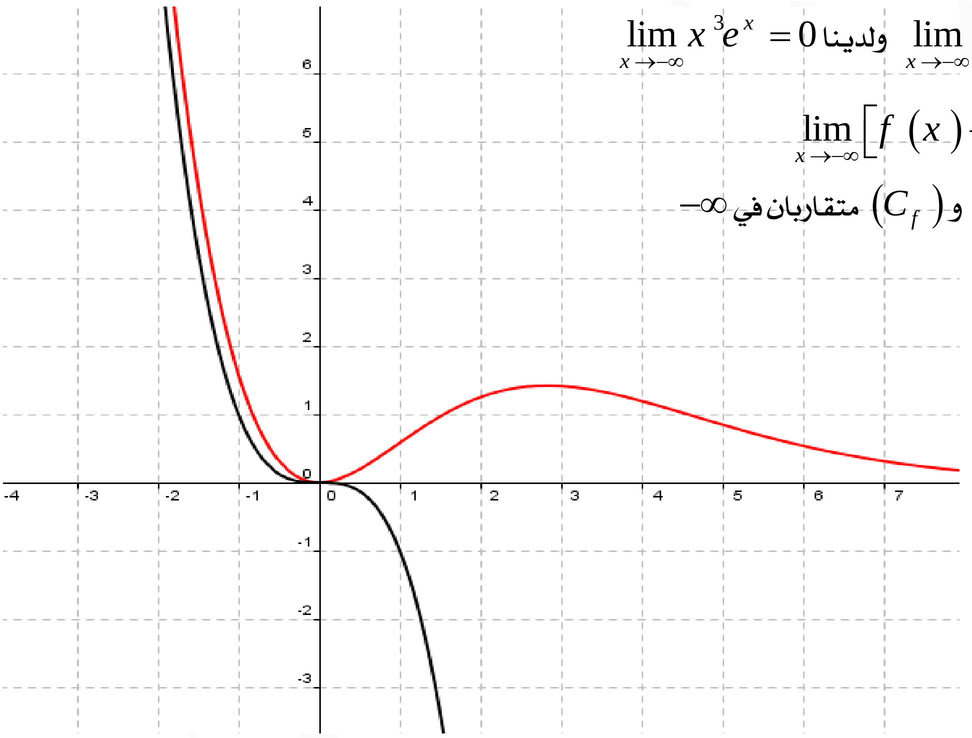
ـ تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-1=-1$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x=0$

إذا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3e^x}{e^x-1}=0$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$

ـ التفسير الهندسي للنهاية: المنحنيان (C) و (C_f) متقاربان في $-\infty$

4. إنشاء (T) والمنحنيين (C) و (C_f)



التمرين 3 باك 2011 م 1 7 ن

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(3x+4)e^x$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثمّ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
$$f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$$
حيث: f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

ب- استنتج حلا للمعادلة التفاضلية: $y''=(3x+16)e^x$.

2. أ- بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ω التي فاصلتها $\frac{-10}{3}$.

ب- بيّن أن ω هي نقطة انعطاف المنحني $(\mathcal{C}_f)$.

جـ- ارسم (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;0]$.

4. أ- x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t\,dt$ ثمّ استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

- احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيّز من المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$ ، ثمّ جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$.

حل مقترح للتمرين 3 باك 2011

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(3x+4)e^x$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- حساب $f'(x)$ و $f''(x)$:
$$f'(x)=3e^x+(3x+4)e^x=(3x+7)e^x$$
$$f''(x)=3e^x+(3x+7)e^x=(3x+10)e^x$$

- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$:

من أجل $n=1$ لدينا: $f'(x)=(3x+7)e^x$ و $(3x+3+4)e^x=(3x+7)e^x$ إذا $f'(x)=(3x+3+4)e^x$ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $f^{(p)}(x)=(3x+3p+4)e^{x}$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم p ولنبرهن أن $f^{(p+1)}(x)=\left[3x+3(p+1)+4\right]e^{x}$.

لدينا $f^{(p+1)}(x)=\left(f^{(p)}\right)'(x)=3e^{x}+(3x+3p+4)e^{x}$

أي $f^{(p+1)}(x)=(3x+3p+4+3)e^{x}=\left[3x+3(p+1)+4\right]e^{x}$ ،

إذا الخاصية $f^{(p+1)}(x)=\left[3x+3(p+1)+4\right]e^{x}$ صحيحة

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^{x}$.

ب-استنتاج حلا للمعادلة التفاضلية $y''=(3x+16)e^{x}$:

لدينا $f^{(4)}(x)=(3x+3\times4+4)e^{x}$ أي $f^{(4)}(x)=(3x+16)e^{x}$

ومنه $y=f''(x)+ax+b$ مع a و b عددين حقيقيين ،

أي $y=(3x+10)e^{x}+ax+b$ مع a و b عددين حقيقيين

2. أ-تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$: لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+4)e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}3xe^{x}=0$

- التفسير الهندسي: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ إذا المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ (حامل محور الفواصل).

ب-دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=(3x+7)e^{x}$ و $e^{x}>0$ ومنه:

من أجل $x=-\dfrac{7}{3}$ لدينا $3x+7=0$ أي $f'(x)=0$

من أجل $x\in\left]-\infty;-\dfrac{7}{3}\right[$ لدينا $3x+7<0$ أي $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;-\dfrac{7}{3}\right]$.

من أجل $x\in\left]-\dfrac{7}{3};+\infty\right[$ لدينا $3x+7>0$ أي $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\left[-\dfrac{7}{3};+\infty\right[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+4)=+\infty$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{7}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$-2,9$	↗ $+\infty$

3. أ-معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ω التي فاصلتها $\dfrac{-10}{3}$:

$f\left(-\dfrac{10}{3}\right)=(-10+4)e^{-\frac{10}{3}}=-6e^{-\frac{10}{3}}$ ؛ $f'\left(-\dfrac{10}{3}\right)=-3e^{-\frac{10}{3}}$

ومنه: $y=-3e^{-\frac{10}{3}}\left(x+\frac{10}{3}\right)-6e^{-\frac{10}{3}}=-3e^{-\frac{10}{3}}\left(x+\frac{16}{3}\right)$

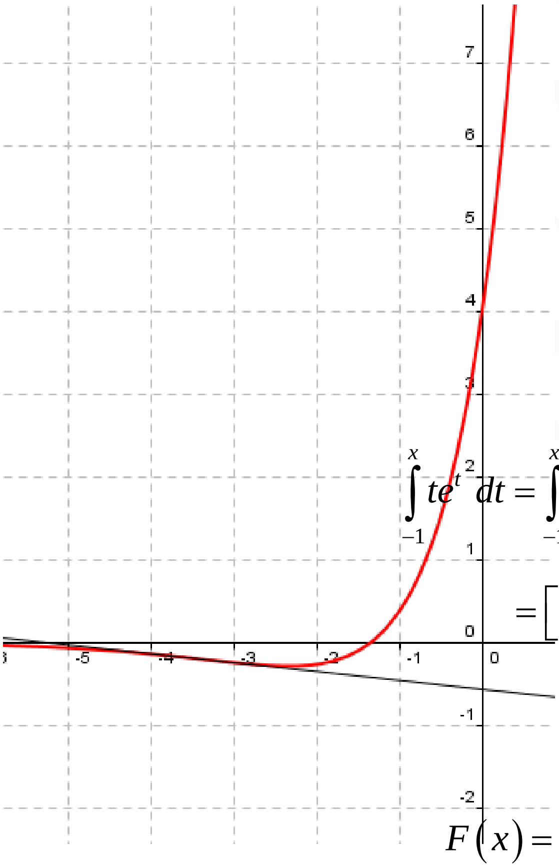
ب-تبيين أن ω هي نقطة انعطاف المنحني $\left(\mathcal{C}_f\right)$:

ليكن x عددا حقيقيا ، لدينا $f''(x)=(3x+10)e^{x}$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $3x+10$.

x	$-\infty$		$-\frac{10}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذا $f''(x)$ ينعدم ويغيّر من إشارته عند $-\frac{10}{3}$ وبالتالي المنحني $\left(\mathcal{C}_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف $\omega\left(-\frac{10}{3};-6e^{-\frac{10}{3}}\right)$.

جـ-رسم (Δ) و $\left(\mathcal{C}_f\right)$ على المجال $\left]-\infty;0\right]$:



4.أ- x عدد حقيقي من $\left]-\infty;0\right]$ ، باستعمال التكامل

بالتجزئة إيجاد $\int_{-1}^{x} te^{t}\,dt$:

نضع $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=e^{t}\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=e^{t}\end{cases}$

$$\int_{-1}^{x} te^{t}\,dt=\int_{-1}^{x} u(t)v'(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x} u'(t)v(t)\,dt$$

$$=\left[te^{t}\right]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x} e^{t}\,dt=\left[te^{t}-e^{t}\right]_{-1}^{x}=(x-1)e^{x}+2e^{-1}$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $\left]-\infty;0\right]$:

$f(x)=(3x+4)e^{x}$ ،

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=\int_{-1}^{x}(3t+4)e^{t}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{x} 3te^{t}+4e^{t}\,dt=3(x-1)e^{x}+6e^{-1}+4\left[e^{t}\right]_{-1}^{x}$$

$$=3(x-1)e^{x}+6e^{-1}+4e^{x}-4e^{-1}$$

$$=(3x+1)e^{x}+2e^{-1}$$

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

- حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$:

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}}-f(t)\,dt=\int_{-\frac{4}{3}}^{\lambda}f(t)\,dt=\left[(3t+1)e^{t}\right]_{-\frac{4}{3}}^{\lambda}$$

$$=(3\lambda+1)e^{\lambda}-(-3)e^{-\frac{4}{3}}$$

$$=\left[(3\lambda+1)e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}\right]ua$$

- إيجاد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$:

لدينا $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(3\lambda+1)e^{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}3\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}=0$ ومنه $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=3e^{-\frac{4}{3}}$.

التمرين 4 باك 2012 م2 7 ن

الجزء I

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1}; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,8<\alpha<0,9$.
3. عين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء II

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1}; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^x+2}$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $2\ cm$).

1. بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
2. أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   ب- بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.
3. ادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ) ، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.
4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

   ب- بين أن: $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
5. ارسم (Δ) ، (Δ') و $(\mathcal{C}_f)$.
6. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة:
   $f(x)=f(m)$.

الجزء III

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<\alpha$.
2. باستعمال (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$ ، مثل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 ، ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3. برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

حل مقترح للتمرين 4 باك 2012

الجزء I

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$.

1. دراسة تغيرات الدالة g :

الدالتان $x \mapsto -x$ و $x \mapsto e^{x}$ تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذا الدالة $x \mapsto -xe^{x}$ هي كذلك لكونها جداء دالتين ، ومنه الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن x عددا حقيقيا، $g'(x) = -e^{x} - xe^{x} = (-x-1)e^{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{x} > 0$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $-x-1$ ؛ وعليه: $g'(-1) = 0$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ، $g'(x) < 0$ إذا الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;-1[$ ، $g'(x) > 0$ إذا الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 - xe^{x} = 2$ ؛

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - xe^{x} = -\infty$.

- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$2+e^{-1}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2. تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-1;+\infty[$ ؛

من أجل $x \in]-\infty;-1]$ لدينا $g(x) \in]2;2+e^{-1}]$ إذا $g(x) \neq 0$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2+e^{-1}]$ إذن لكل عدد حقيقي من $]-\infty;2+e^{-1}]$ له سابقة وحيدة في المجال $[-1;+\infty[$ بواسطة الدالة g وبالأخص العدد 0 له سابقة وحيدة α في $[-1;+\infty[$ أي $g(\alpha) = 0$

خلاصة: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

- تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$:

لدينا $g(0,8) \approx 0,22$ و $g(0,9) \approx -0,21$ إذا $g(0,8) \times g(0,9) < 0$

ومنه $0,8 < \alpha < 0,9$.

3. تعيين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;\alpha[$ ، $g(x) > 0$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ ، $g(x) < 0$ و $g(\alpha) = 0$.

الجزء II

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = \dfrac{2x+2}{e^{x}+2}$. $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $2\ cm$).

1. تبيين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{2+\frac{2}{x}}{1+2e^{-x}}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ إذا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\times2=0$.

- التفسير الهندسي:

المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ (محور الفواصل) عند $+\infty$.

2.أ-حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$:

لدينا $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=-\infty$

ب-تبيين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)-(x+1)=\frac{2x+2}{e^x+2}-x-1$

أي $f(x)-(x+1)=\frac{2x+2-xe^x-2x-e^x-2}{e^x+2}=\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

إذا $\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}=0$ ؛ ومنه المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') معادلته $y=x+1$ عند $-\infty$.

3. دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ'):

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}=\frac{(-x-1)e^x}{e^x+2}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$	$+$	0	$-$
$f(x)-(x+1)$	$+$	0	$-$
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ')	$(\mathcal{C}_f)$ و (Δ') متقاطعان في النقطة $A(-1;0)$	$(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل (Δ')

- دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ)، ((Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$):

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(x)-x=\frac{2x+2}{e^x+2}-x=\frac{2x+2-xe^x-2x}{e^x+2}=\frac{2-xe^x}{e^x+2}=\frac{g(x)}{e^x+2}$$

إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $g(x)$ وحسب السؤال **3.** من الجزء الأول لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ و $g(\alpha)=0$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	$-$
$f(x)-x$	+	0	$-$
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) متقاطعان في النقطة $B(\alpha;\alpha)$	$(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل (Δ)

4.أـتبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$:

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x)=\frac{2(e^x+2)-(2x+2)e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{2e^x+4-2xe^x-2e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{4-2xe^x}{(e^x+2)^2}$$

$$=\frac{2(2-xe^x)}{(e^x+2)^2}=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ومنه: $f'(\alpha)=g(\alpha)=0$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

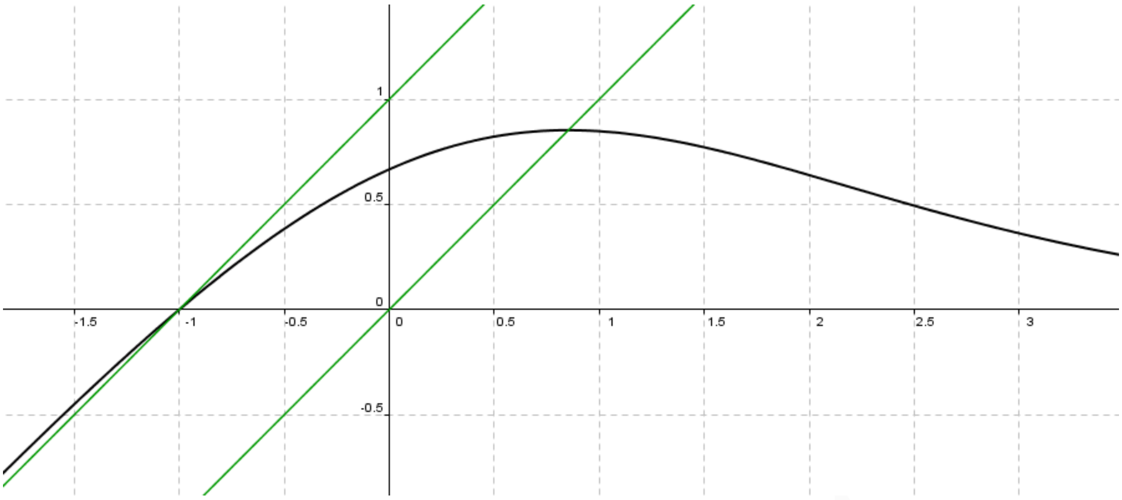
بـتبيين أن: $f(\alpha)=\alpha$:

لدينا $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{e^x+2}$ ومنه $f(\alpha)-\alpha=\dfrac{g(\alpha)}{e^\alpha+2}=0$ إذا $f(\alpha)=\alpha$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	0

5.رسم (Δ)، (Δ') و $(\mathcal{C}_f)$:



6. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x)=f(m)$:

إذا كان $m\le -1$ فإن $f(m)\le 0$

ومنه المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا واحدا.

إذا كان $m=\alpha$ فإن $f(m)=\alpha$ ومنه المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا واحدا.

إذا كان $m\in]-1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن $f(-1)<f(m)<f(\alpha)$ ومنه $0<f(m)<\alpha$ إذا المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين.

الجزء III (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. البرهان بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<\alpha$:

لدينا $u_0=0$ ومنه $0\le u_0<\alpha$ إذا الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $0\le u_n<\alpha$ ولنبرهن صحة الخاصية $0\le u_{n+1}<\alpha$

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ وعليه فإذا كان $0\le u_n<\alpha$ فإن $f(0)\le f(u_n)<f(\alpha)$

بما أن $f(0)=\frac{3}{2}$ ، $f(u_n)=u_{n+1}$ و $f(\alpha)=\alpha$ فإن $\frac{3}{2}\le u_{n+1}<\alpha$

ومنه $0\le u_{n+1}<\alpha$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<\alpha$.

2. تمثيل على محور الفواصل

الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 :

لدينا $u_0=0$ ،

$u_1=f(u_0)$

و $u_2=f(u_1)$

- تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا من الشكل $u_0<u_1<u_2$

إذا يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3. البرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة:

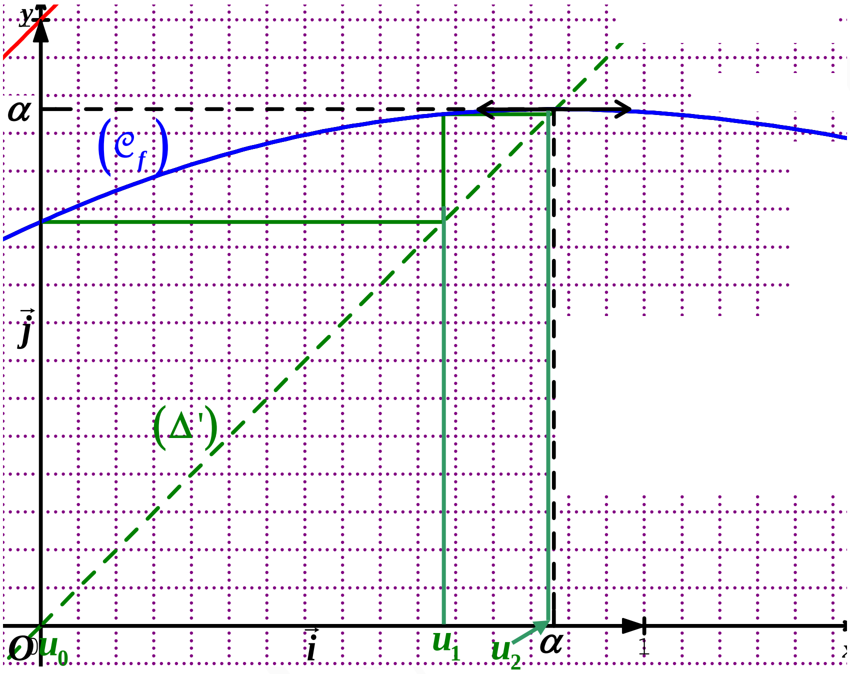
لدينا من أجل كل $x\in\left]-\infty;\alpha\right]$ ، $f(x)-x\geq 0$ ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<\alpha$ ومنه $f(u_n)-u_n\geq 0$ أي $u_{n+1}-u_n\geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة ، زيادة عن هذا هي محدودة من الأعلى بالعدد α إذا هي متقاربة.

- حساب نهاية المتتالية (u_n):

المتتالية (u_n) متقاربة إذن هي تقبل نهاية ℓ مع $\ell\in\mathbb{R}$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ ؛

لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ إذا $\ell=f(\ell)$

وبما أن $f(\alpha)=\alpha$ فإن $\ell=\alpha$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.



التمرين 5 باك 2013 م 1 6,5 ن

I– 1. الدالة u معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة u.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $e^x-e>3x-4$.

2. الدالة v معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$.

أ- بيّن أن: $v'(1)=0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $v(x)\leq 0$.

جـ- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4$.

3. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$.

II– الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\dfrac{\ln x}{x}$. $(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3. احسب $f(1)$ ثم مثل المنحني $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left]0;\dfrac{5}{2}\right]$. يعطى: $f(2)\approx 2,3$ $f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\approx 5,75$.

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب: $x=\dfrac{1}{2}$ و $x=2$.

حل مقترح للتمرين 5 باك 2013

I– 1. الدالة u معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة u:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $u'(x)=e^x-3$؛

$u'(x)=0$ معناه $e^x-3=0$ ومعناه $e^x=3$ يكافئ $x=\ln 3$.

$u'(x)>0$ معناه $e^x-3>0$ ومعناه $e^x>3$ يكافئ $x>\ln 3$.

x	0	$\ln 3$	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$\searrow$	$u(\ln 3)\approx 1$	$\nearrow$

ب- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$:

من خلال جدول التغيرات لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $u(x) \geq u(\ln 3)$ و $u(\ln 3) \approx 1$ إذن $u(x) > 0$ أي $e^x - 3x + 4 - e > 0$ وهذا يعني $e^x - e > 3x - 4$

2. الدالة v معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x .$$

أ- تبيين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v):

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v'(x) = -9x^2 + 8x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x}$

ومنه $v'(1) = \dfrac{-9 \times 1^3 + 8 \times 1^2 + 1}{1} = 0$.

ب- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x) \leq 0$:

$v'(x) = \dfrac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x}$ معناه $v'(x) = \dfrac{(x-1)(-9x^2 - x - 1)}{x}$

$\Delta = 1 - 36 = -35$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $-9x^2 - x - 1 < 0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$	$+$	0	$-$
$v(x)$	$\nearrow$	$v(1) = 0$	$\searrow$

إذا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

جـ- استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $v(x) \leq 0$ معناه $-3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x \leq 0$ ومعناه $-1 + \ln x \leq 3x^3 - 4x^2$ يكافئ $\dfrac{-1 + \ln x}{x^2} \leq \dfrac{3x^3 - 4x^2}{x^2}$ أي $\dfrac{\ln x - 1}{x^2} \leq 3x - 4$.

3. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x - e + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} > 0$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $3x - 4 < e^x - e$

و $\dfrac{\ln x - 1}{x^2} \leq 3x - 4$ إذا $\dfrac{\ln x - 1}{x^2} < e^x - e$ وهذا يعني أن $e^x - e - \dfrac{\ln x - 1}{x^2} > 0$ أي $e^x - e + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

II- الدالة f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \dfrac{\ln x}{x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

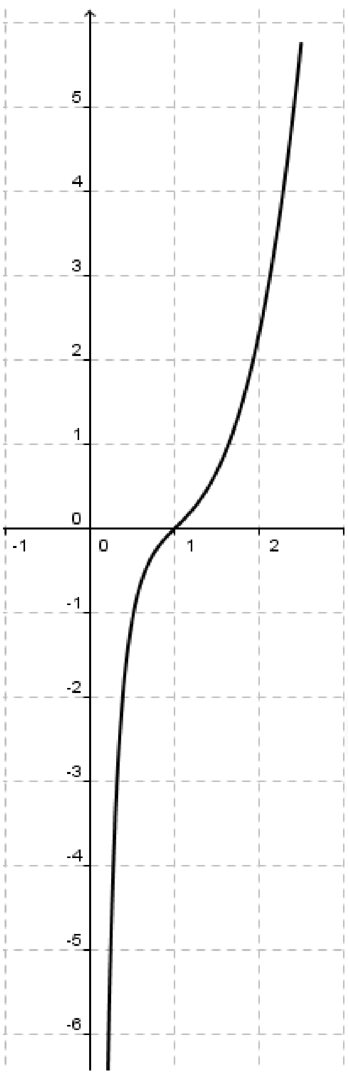
1. حساب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^x - ex = 1$ إذا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[e^x - ex + \frac{\ln x}{x} \right] = -\infty$ ؛

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - ex = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - e \right) = +\infty$ إذا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = +\infty$.

2. تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$:

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = e^x - e + \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ،



وحسب السؤال $\mathbf{I}-3$. لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	+
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ 0	↗ $+\infty$

3. حساب $f(1)$ ثمَّ تمثيل المنحني $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left]0;\frac{5}{2}\right]$: يعطى: $f(2) \approx 2{,}3$ ،

$f(1{,}64) \approx 1$ و $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx 5{,}75$.

$f(1) = e^1 - e + \frac{\ln 1}{1} = 0$.

4. حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما على الترتيب : $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$.

نرمز بـ S إلى المساحة المطلوبة.

$$S = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$$

لدينا: $\int_{1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{1}^{\frac{1}{2}} \left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{1}^{\frac{1}{2}}$

أي $\int_{1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \left[e^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{8} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} \right)^2 \right] - \left[e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}(\ln 1)^2 \right]$

$$\int_1^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = e^{\frac{1}{2}} - \frac{5e}{8} + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

ولدينا: $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x}\right)dx = \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2$

أي $\int_1^2 f(x)\,dx = \left[e^2 - 2e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2\right] - \left[e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right]$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = e^2 - \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

إذن $S = e^{\frac{1}{2}} - \frac{5e}{8} + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + e^2 - \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ أي $S = e^2 + e^{\frac{1}{2}} - \frac{25e}{8} + (\ln 2)^2 \approx 1,024\ ua$.

التمرين (6) (باك 2014) (م 1) (6 ن)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^x-1$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.

2. بيّن أن للمعادلة: $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1{,}2<\alpha<-1{,}1$ و $1{,}8<\beta<1{,}9$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا.

2. بيّن أنه من أجل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3. بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

4. احسب $f(1)$ ثمّ ارسم المنحنى (C_f).

5. λ عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1.

أـ احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]dx$.

بـ احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

حل مقترح للتمرين (6) (باك 2014)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^x-1$.

1. دراسة تغيّرات الدالة g : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x-1=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-xe^x-1=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x-1=-\infty$.

ليكن x عددا حقيقيا: $g'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x>0$ وعليه فإشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	$e-1$	↘	$-\infty$

2. تبيين أن للمعادلة: $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1{,}2<\alpha<-1{,}1$ و $1{,}8<\beta<1{,}9$.

الدالة g مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$ إذن صورة كل من هذين المجالين هو مجال ولدينا
$g\left(\left]-\infty;1\right]\right)=\left]-1;e-1\right]$ و $g\left(\left[1;+\infty\right[\right)=\left]-\infty;e-1\right]$ بما أن $0\in\left]-1;e-1\right]$ و $0\in\left]-\infty;e-1\right]$ فإن المعادلة:
$g(x)=0$ تقبل حلا α في $]-\infty;1]$ وحلا β في $[1;+\infty[$ وبما أن الدالة g رتيبة على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$ فإن α و β حلان وحيدان

$g(-1,2)\approx-0,036$ ؛ $g(-1,1)\approx0,032$ إذن $g(-1,2)\times g(-1,1)<0$ ومنه $-1,2<\alpha<-1,1$.
$g(1,8)\approx0,21$ ؛ $g(1,9)\approx-0,33$ إذن $g(1,8)\times g(1,9)<0$ ومنه $1,8<\beta<1,9$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=0$$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1-\frac{x}{e^x}}=1$$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

التفسير الهندسي للنهايتين:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ إذا (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ وهذا في $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ إذا (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ وهذا في $+\infty$.

2. تبيين أنه من أجل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$:

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

ـ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $g(\alpha)=g(\beta)=0$ وهذا يعني أن $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$.

لدينا من أجل كل x من $]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$ ، $g(x)<0$ ومعناه $f'(x)<0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;\alpha]$

و $]\beta;+\infty[$.

ولدينا من أجل x من $]\alpha;\beta[$ ، $g(x)>0$ ومعناه $f'(x)>0$ إذا الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$.

ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

3. تبيين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$:

$g(\alpha)=0$ معناه $(2-\alpha)e^{\alpha}-1=0$ ومعناه $e^{\alpha}=\dfrac{1}{2-\alpha}$

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha}=\frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}\times\frac{2-\alpha}{1-2\alpha+\alpha^{2}}=\frac{-1+\alpha}{(\alpha-1)^{2}}$$

أي $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$

ـ استنتاج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

$-1,2<\alpha<-1,1$ معناه $-2,2<\alpha-1<-2,1$ ومعناه $-\dfrac{1}{2,2}<\dfrac{1}{\alpha-1}<-\dfrac{1}{2,1}$ أي

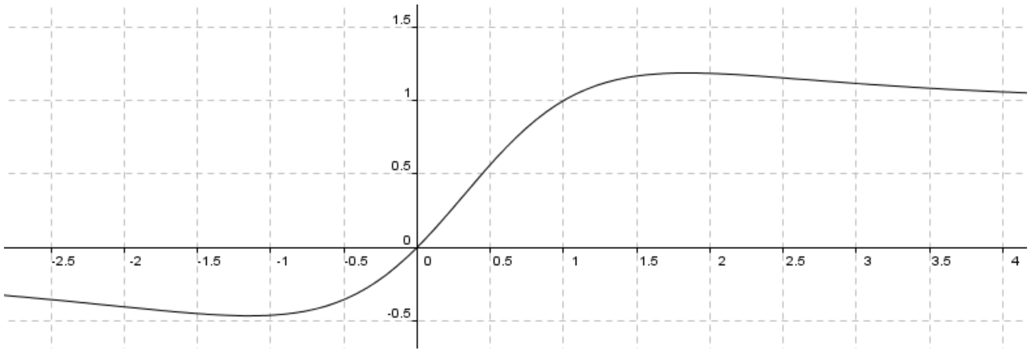
$$-0,476<f(\alpha)<-0,455$$

بنفس الطريقة نجد $f(\beta)=\dfrac{1}{\beta-1}$ ولدينا $1,8<\beta<1,9$ معناه

$0,8<\beta-1<0,9$ ومعناه $\dfrac{1}{0,8}>\dfrac{1}{\beta-1}>\dfrac{1}{0,9}$ يكافئ $1,11<f(\beta)<1,25$.

4. حساب $f(1)$: $f(1)=\dfrac{e-1}{e-1}=1$

ـ رسم المنحنى (C_f) :



5. λ عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1 .

أ- حساب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left[f(x)-1\right]dx$:

$$a(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left[f(x)-1\right]dx=\int_1^{\lambda}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}-1\right]dx=\left[\ln\left(e^x-x\right)-x\right]_1^{\lambda}$$

$$a(\lambda)=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\ln e^{\lambda}+1-\ln(e-1)$$

$$a(\lambda)=\ln\left(\frac{e^{\lambda}-\lambda}{e^{\lambda}}\right)+1-\ln(e-1)=\ln\left(1-\lambda e^{-\lambda}\right)+1-\ln(e-1)$$

ب- حساب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$:

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}a(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\left(1-\lambda e^{-\lambda}\right)+1-\ln(e-1)=1-\ln(e-1)$ لأن $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}-\lambda e^{-\lambda}=\lim\limits_{t\to-\infty}te^{t}=0$ و $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\left(1-\lambda e^{-\lambda}\right)=\ln 1=0$.

التمرين (7) (باك 2015) (م2) (7 ن)

f الدالة المعرفة بـ: $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.
2. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
3. أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
4. أ- بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.
   ب- استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلة له.
5. g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.
   أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
   ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.
6. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$.
   ب- استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).
   جـ- أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
7. (u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.
   أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.
   ب- حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).
   جـ- بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
8. m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$
   أ- احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m.
   ب- باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x)=0$.

حل مقترح للتمرين (7) (باك 2015)

f الدالة المعرفة بـ: $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. دراسة استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

إذا الدالة f مستمرة على يسار 0.

2. حساب $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} e^{\frac{1}{x}} - \lim_{t \to -\infty} te^{t}$$

أي $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

ـالتفسير الهندسي: الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار 0 وعددها المشتق من اليسار معدوم وعليه فالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس موازٍ لحامل محور الفواصل عند المبدأ O ، $y=0$ معادلة له.

3. أـحساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$

بـدراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]-\infty;0[$: $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

$\Delta = 1-4 = -3$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $x^2-x+1>0$ وبالتالي $f'(x)>0$ وعليه فالدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$.

ـجدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

4. أـتبيان أن $\lim_{x \to -\infty} [f(x)-x] = 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x)-x] = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} - x$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x)-x] = \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{e^t}{t} - e^t - \frac{1}{t} = \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{e^t-1}{t-0} - e^t = 1-1 = 0$$ حيث $t = \frac{1}{x}$

بـاستنتاج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) في $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له:

$\lim_{x \to -\infty} [f(x)-x] = 0$ إذا المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) في $-\infty$ ، $y=x$ معادلة له.

5. g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

أ-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=1$

ب-دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]-\infty;0[$: $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$$g'(x)=\frac{x\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{x^2-x+1}{x}-x+1\right)$$

$g'(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x-1+\frac{1}{x}-x+1\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\times\frac{1}{x}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$: $e^{\frac{1}{x}}>0$ ، $x^2>0$ و

$x<0$ إذا $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$.

-جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		0
$g'(x)$		$-$	||
$g(x)$	1	$\searrow$	0 ||

$$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=0$$

6. أ-تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$:

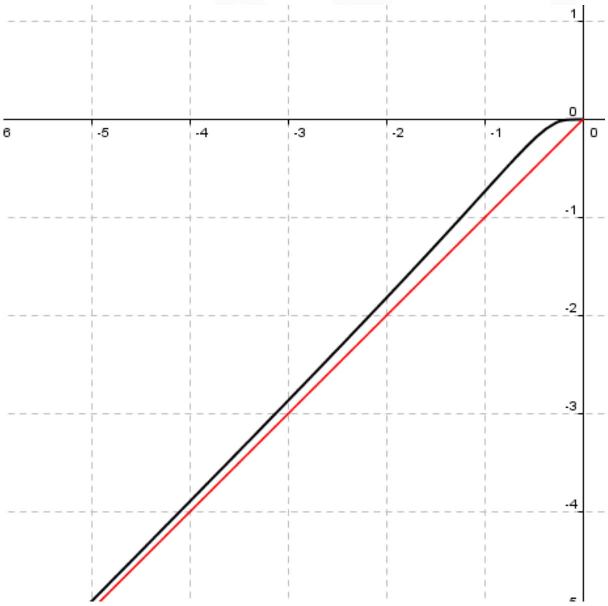
من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $0<g(x)<1$ معناه $0<\frac{f(x)}{x}<1$ ومعناه $x<f(x)<0$

ب-استنتاج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ):

من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ ، $x<f(x)$ ولدينا $f(0)=0$

إذا $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ) ويتقاطعان في المبدأ O.

جـ-إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.



7. (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ-تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$:

استعمال البرهان بالتراجع:

لدينا $u_0=-3$ ومنه $u_0<0$ الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $u_n<0$ من أجل عدد طبيعي n أي $u_n\in\left]-\infty;0\right[$ إذا حسب جدول تغيرات الدالة f ، $f\left(u_n\right)\in\left]-\infty;0\right[$ وهذا يعني أن $u_{n+1}\in\left]-\infty;0\right[$ أي $u_{n+1}<0$ إذا الخاصية وراثية ؛ وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.

ب-تحديد اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\infty;0\right[$ ، $x<f\left(x\right)$ وبما أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\in\left]-\infty;0\right[$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<u_{n+1}$ وعليه فالمتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة تماما.

جـ-تبيان أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة:

المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 إذا هي متقاربة.

-تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

بما أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ مع $\ell\in\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\infty;0\right[$ ، $x<f\left(x\right)$ إذن المعادلة $f\left(x\right)=x$ لا تقبل حلا في المجال $\left]-\infty;0\right[$ ولدينا $f\left(0\right)=0$ إذن المعادلة $f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا معدوما في المجال $\left]-\infty;0\right]$

وبما أن الدالة f مستمرة على $\left]-\infty;0\right]$ فإن $f\left(\ell\right)=\ell$ ومنه $\ell=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

8. m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير x المعرفة على المجال $\left]-\infty;0\right[$ بـ: $h_m\left(x\right)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$

أ-حساب $h'_m\left(x\right)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m:

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $\left]-\infty;0\right[$. $h'_m\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}+x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-m=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)-m$.

ب-المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m\left(x\right)=0$:

$h'_m\left(x\right)=0$ معناه $e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)-m=0$ ومعناه $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(x-1\right)}{x}=m$ أي $f\left(x\right)=mx$ و $x\neq0$.

نسمي $\left(\Delta\right)$ المستقيم ذا المعادلة $y=mx$

إذا كان $m\in\left]-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ فإن $\left(\Delta\right)$ يقطع $\left(\mathcal{C}_f\right)$ في نقطة وحيدة وهي المبدأ وبما أن $x\in\left]-\infty;0\right[$ فإن المعادلة $h'_m\left(x\right)=0$ لا تقبل حلا.

إذا كان $m\in\left]0;1\right[$ فإن $\left(\Delta\right)$ يقطع $\left(\mathcal{C}_f\right)$ في نقطتين إحداهما المبدأ وأخرى تختلف عنه وبما أن $x\in\left]-\infty;0\right[$ فإن المعادلة $h'_m\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left]-\infty;0\right[$.

التمرين 8 باك 2016 م2 6ن

I) φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1 .$$

1. أ-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 ثم تحقق أن $2{,}79<\alpha<2{,}80$.

3. استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على الترتيب تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أن للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ، ثم جد معادلة له.

3. ارسم المماس (T) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

4. أ-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب-ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.

جـ-باستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t)dt$.

د-احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

II) 1. احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا للعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. ($f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f .)

2. برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ-احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: u_k+u_{k+1} .

ب-استنتج بدلالة n ، المجموع: $u_1+u_2+\ldots+u_{2n}$.

حل مقترح للتمرين (8) (باك 2016)

I) φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$.

1.أ- حساب $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$:

$\lim_{x\to-\infty}(x^2-x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{-x+1}=\lim_{t\to+\infty}e^{t}=+\infty$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-x+1)e^{-x+1}-1=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1)e^{-x+1}-1=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x+1}-1$

أي $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}e\dfrac{x^2}{e^x}-1=-1$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة φ :

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\varphi'(x)=(2x-1)e^{-x+1}+(x^2-x+1)(-1)e^{-x+1}$

أي $\varphi'(x)=(-x^2+3x-2)e^{-x+1}$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-x+1}>0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ هي من إشارة $(-x^2+3x-2)$؛

$\Delta=9-8=1$ ومنه $x'=\dfrac{-3-1}{-2}=2$ و $x''=\dfrac{-3+1}{-2}=1$ ، وعليه فمن أجل كل عدد حقيقي x من

$]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ ، $-x^2+3x-2<0$ أي $\varphi'(x)<0$ ومنه الدالة φ متناقصة تماما على كل من المجالين

$]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$؛

ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]1;2[$ ، $-x^2+3x-2>0$ أي $\varphi'(x)>0$ ومنه الدالة φ متزايدة تماما على المجال

$[1;2]$.

- جدول تغيرات الدالة φ :

x	$-\infty$		1		2		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

2. تبيين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1:

من خلال جدول تغيرات الدالة φ لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;1[\cup]1;2]$ ، $\varphi(x)>0$ و $\varphi(1)=0$ إذا المعادلة

$\varphi(x)=0$ تقبل في $]-\infty;2]$ حلا وحيدا وهو 1 .

لدينا الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-1;\dfrac{3}{e}-1\right]$ إذا يوجد عدد حقيقي وحيد

α من المجال $[2;+\infty[$ حيث $\varphi(\alpha)=0$ أي α حل للمعادلة $\varphi(x)=0$.

- تحقق أن $2,79<\alpha<2,80$:

لدينا $\varphi(2,79)\approx 0,000776$ و $\varphi(2,80)\approx -0,00159$ إذا $\varphi(2,79)\times\varphi(2,80)<0$ ومنه $2,79<\alpha<2,80$.

3. استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $\varphi(1)=\varphi(\alpha)=0$ ؛ من أجل كل $x\in]-\infty;1[\cup]1;\alpha[$ ، $\varphi(x)>0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $\varphi(x)<0$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على الترتيب تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}=\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}=+\infty$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{-x+1}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)e=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=2e^{-x+1}+(2x-1)(-1)e^{-x+1}$

$$f'(x)=(2-2x+1)e^{-x+1}=(3-2x)e^{-x+1}$$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $e^{-x+1}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(3-2x)$ ؛

$f'(x)=0$ تكافئ $3-2x=0$ ومعناه $x=\dfrac{3}{2}$ ؛

$f'(x)>0$ تكافئ $3-2x>0$ ومعناه $x<\dfrac{3}{2}$.

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{\sqrt{e}}$	↘	0

2. تبيين أن للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 :

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $g'(x)=\dfrac{2\left(x^2-x+1\right)-(2x-1)(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

$$g'(x)=\frac{2x^2-2x+2-4x^2+4x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

أي $g'(x)=\dfrac{-2x^2+2x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

ومنه $g'(1)=\dfrac{-2+2+1}{(1-1+1)^2}=1$ و $f'(1)=(3-2)e^{-1+1}=1$

إذا للمنحيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسين لهما نفس معامل التوجيه 1 في النقطة ذات الفاصلة 1 ، ولدينا

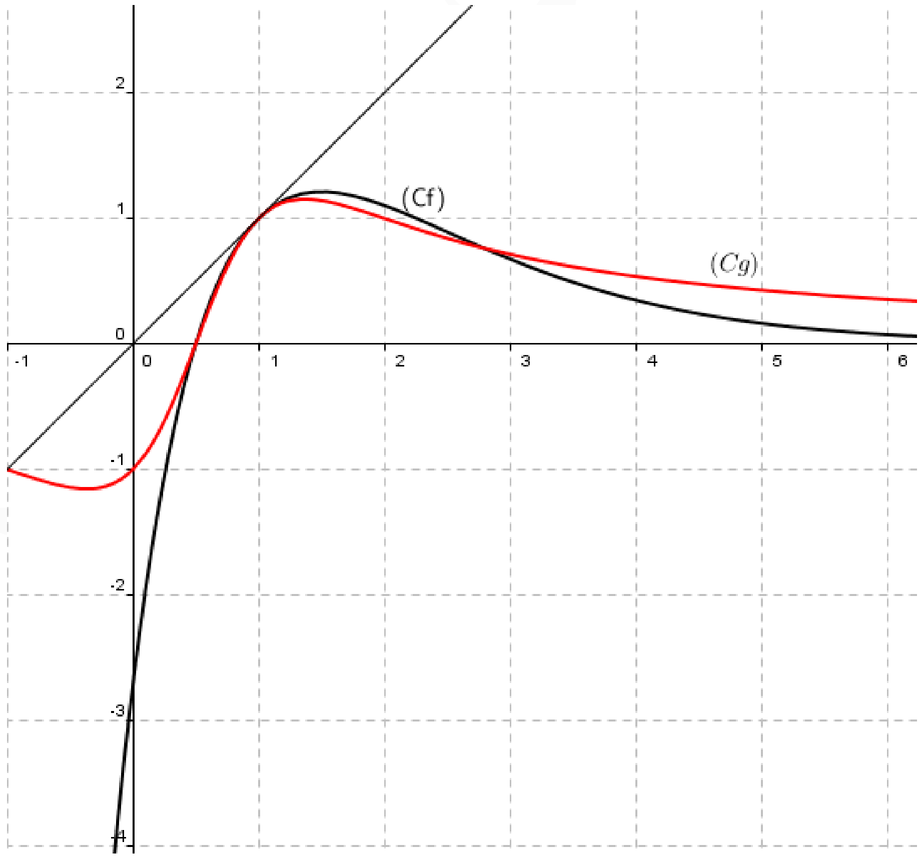
$f(1)=(2-1)e^{-1+1}=1$ و $g(1)=\dfrac{2-1}{1^2-1+1}=1$ إذا للمنحيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ نقطة مشتركة

$A(1;1)$ وهي نقطة التماس ومنه للمنحيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة $A(1;1)$.

ـ إيجاد معادلة للمستقيم (T):

$y=x-1+1$ أي $y=x$.

3. رسم المماس (T) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:



4.أـتبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}:$$

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-g(x)=(2x-1)e^{-x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$$f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\left[\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1\right]}{x^2-x+1}$$

أي $f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

بـدراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لندرس إشارة ثلاثي الحدود x^2-x+1 : $\Delta=1-4=-3$ ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $x^2-x+1>0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

ـاستنتاج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$:

يتقاطعان $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في النقط $A(1;1)$ ، $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ و $C(\alpha;f(\alpha))$.

في المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $]\alpha;+\infty[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل $(\mathcal{C}_g)$؛

وفي المجالين $\left]\frac{1}{2};1\right[$ و $]1;\alpha[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أعلى $(\mathcal{C}_g)$.

جــباستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t)dt$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\int_1^x f(t)dt=\int_1^x(2t-1)e^{-t+1}dt$.

نضع $u(t)=2t-1$ و $v'(t)=e^{-t+1}$ ومنه $u'(t)=2$ و $v(t)=-e^{-t+1}$.

$$\int_1^x f(t)dt=\int_1^x(2t-1)e^{-t+1}dt=\int_1^x u(t)v'(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt=u(t)v(t)-\int_1^x u'(t)v(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt=\left[-(2t-1)e^{-t+1}\right]_1^x-\int_1^x -2e^{-t+1}dt$$

$$\int_1^x f(t)dt=-(2x-1)e^{-x+1}+1-2\left[e^{-t+1}\right]_1^x$$

$$\int_1^x f(t)dt=-(2x-1)e^{-x+1}+1-2\left(e^{-x+1}-1\right)$$

$$.\int_1^x f(t)dt=-(2x+1)e^{-x+1}+3$$

د ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$:

$$\int_1^2\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_1^2 f(x)dx-\int_1^2 g(x)dx$$

$$\int_1^2\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left[-(2x+1)e^{-x+1}+3\right]_1^2-\int_1^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$\int_1^2\left[f(x)-g(x)\right]dx=-5e^{-1}+3-\left[\ln\left(x^2-x+1\right)\right]_1^2$$

$$\int_1^2\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left(-5e^{-1}+3-\ln3\right)ua$$

المساحة المطلوبة هي $\int_1^2\left[f(x)-g(x)\right]dx$ حيث:

$$.\int_1^2\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left(-5e^{-1}+3-\ln3\right)ua\approx0,0619905\,ua$$

II) 1. حساب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$ ومنه

$$f''(x)=-2e^{-x+1}-(3-2x)e^{-x+1}=(2x-5)e^{-x+1}\ ;$$

$$f^{(3)}(x)=2e^{-x+1}-(2x-5)e^{-x+1}=-(2x-7)e^{-x+1}\ ;$$

$$.f^{(4)}(x)=-2e^{-x+1}+(2x-7)e^{-x+1}=(2x-9)e^{-x+1}$$

ـ تخمين عبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. ($f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).:

يبدو أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

2. البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$:

$f'(x)=(-1)\left[2x-(2+1)\right]e^{1-x}=-(2x-3)e^{1-x}$ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أنه $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ولنبرهن أن

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\left[2x-(2n+3)\right]e^{1-x}$$

لدينا $f^{(n+1)}(x)=(-1)^n 2e^{1-x}+(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right](-1)e^{1-x}$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}e^{1-x}\left[2x-(2n+1)-2\right]$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}e^{1-x}\left[2x-(2n+3)\right]$$

ومنه الخاصية وراثية وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،
$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left[2x - (2n+1)\right] e^{1-x}$.

3. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

أ- حساب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$:

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = f^{(n)}(1) = (-1)^n \left[2 - (2n+1)\right] = (-1)^{n+1}(2n-1)$

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$ ، $u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1}(2k-1) + (-1)^{k+2}(2k+1)$

$$u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1}(2k - 1 - 2k - 1)$$

أي $u_k + u_{k+1} = 2(-1)^{k+2} = 2(-1)^k$

ب- استنتاج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = \frac{(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n})}{2}$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$$
$$= \frac{u_1 - u_{2n+1} + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_2 + \ldots + u_{2n} + u_{2n+1})}{2}$$
$$= \frac{u_1 - u_{2n+1}}{2} + \frac{1}{2}\left[(u_1 + u_2) + (u_2 + u_3) + \ldots + (u_{2n} + u_{2n+1})\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left((-1)^{2n+2}(4n+1)\right)\right] + \frac{1}{2} \times 2\left[(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2n}\right]$$
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = -2n + \left[(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2n}\right] = -2n$$

التمرين 11 باك 2018 م 1 7 ن

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1. بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$،
واستنتج اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2. بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}9<\alpha<1$، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.
و $(\mathscr{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$ (يمكن وضع $t=-\dfrac{1}{x}$)، ثمّ استنتج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في $+\infty$.

3. h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ثمّ ادرس اتجاه تغيّر الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب- تحقق أن $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثمّ استنتج الوضعية النسبية لـ $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ (نأخذ $f(\alpha)\approx1{,}73$).

5. (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=\dfrac{n}{n+1}f\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{n^2}{n+1}$.

أ- اكتب u_n بدلالة n ثمّ بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1.

ب- احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right).$$

حل مقترح للتمرين (11) باك 2018

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1. تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$:

ليكن $x\in]0;+\infty[$: $g'(x)=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2}(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}$

$g'(x)=\dfrac{1}{x^2}(x^2+2x^3+1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x^2}(2x^2+2x^3+1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x: $(x+1)(2x^2+1)=2x^3+2x^2+x+1$ إذا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$:

$g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $e^{-\frac{1}{x}}>0$ ، $(x+1)>0$ ، $(2x^2+1)>0$ و $x^2>0$ إذا $g'(x)>0$

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2. تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}9<\alpha<1$:

لدينا الدالة g مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا $g(0{,}9)\approx-0{,}108$ و $g(1)\approx0{,}104$ ومنه $g(0{,}9)\times g(1)<0$

إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]0{,}9;1[$ حيث $g(\alpha)=0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن α هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$: $g(x)<0$ ؛ من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$ و $g(\alpha)=0$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و $(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}-\dfrac{1}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(1+x)=1$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=0$ إذا

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

ب-تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$:

ليكن $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left[\left(1+x+x^2\right)e^{-\frac{1}{x}}-1\right]$ أي

$f'(x)=\frac{1}{x^2}\times g(x)$.

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f: $g(\alpha)=0$ معناه $f'(\alpha)=0$.

لدينا من أجل $x\in]0;\alpha[$: $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$ ؛

ولدينا من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

- جدول تغيّرات الدالة f:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$ (يمكن وضع $t=-\frac{1}{x}$):

$t=-\frac{1}{x}$ معناه $x=-\frac{1}{t}$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{-e^t+1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to0}-\left(\frac{e^t-e^0}{t-0}\right)=-1$.

- استنتاج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right]+\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xe^{-\frac{1}{x}}-x\right]$ أي

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=1-1=0$ ؛ ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في $+\infty$.

3. h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}=0-1+1=0$.

- دراسة اتجاه تغيّر الدالة h:

ليكن $x \in]0;+\infty[$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)$ ؛ لدينا من أجل كل $x \in]0;+\infty[$:

$h'(x) < 0$ ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

- استنتاج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$\searrow$ 0

من خلال جدول تغيرات الدالة h ينتج أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $h(x) > 0$.

ب- التحقق أن $f(x) - x = (1+x)h(x)$:

ليكن $x \in]0;+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x = \frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} + xe^{-\frac{1}{x}} - x = h(x) + 1 + xe^{-\frac{1}{x}} - x$$ أي

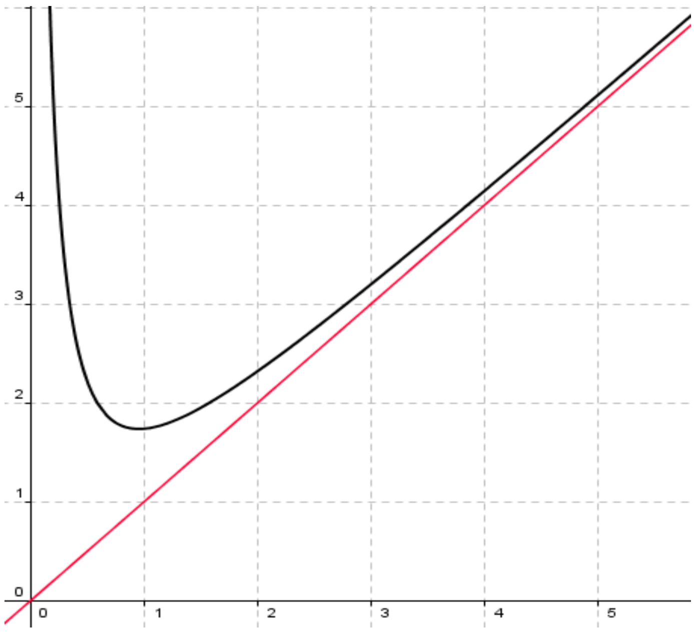
$$f(x) - x = h(x) + x\left(\frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = h(x) + xh(x) = (1+x)h(x)$$

- استنتاج الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

لدينا من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f(x) - x = (1+x)h(x)$ و $h(x) > 0$ و $x + 1 > 0$ إذا $f(x) - x > 0$

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق المستقيم (Δ).

4. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,73$).



5. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$.

أ- كتابة u_n بدلالة n :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$: $f\left(\frac{1}{n}\right)=n+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}=n+\left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}$ ومنه

$$u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{n+1}\left[n+\left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}\right]-\frac{n^2}{n+1}=\frac{n^2}{n+1}+e^{-n}-\frac{n^2}{n+1}=e^{-n}.$$

- تبيين أن المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1:

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=e^{-n-1}=e^{-n}\times e^{-1}=u_n\times e^{-1}$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها e^{-1} وحدها الأول u_1 حيث:

$$u_1=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

ب- حساب، بدلالة n، المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$$

التمرين 12 باك 2019 م 1 ن 7

I) f_k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي. ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يُطلب تعيينهما.

2. احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).

3. أ) احسب $f_k'(x)$، ثم حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغيّر الدالة f_k.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

4. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k، الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$.

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثم ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2. أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28<\alpha<-1,27$.

ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

3. g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

حل 9 باك 2017 – الدورة العادية –

I) f_k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يُطلب تعيينهما:

ليكن $k\in\mathbb{R}$، نضع $(x+1)^2e^{-kx}=y$ لدينا $y\geq 0$.

إذا كان $y=0$ فإن $(x+1)^2e^{-kx}=0$ وهذا يعني أن $(x+1)^2=0$ أي $x=-1$.

إذا كان $y>0$ فإن: $(x+1)^2e^{-kx}=y$ تكافئ $\ln y=\ln\left[(x+1)^2e^{-kx}\right]$ ومعناه

$\ln(x+1)^2+\ln e^{-kx}=\ln y$ أي $-kx+\ln(x+1)^2=\ln y$.

من أجل كل $k\in\mathbb{R}$: $(x+1)^2e^{-kx}=y$ تكافئ $-kx+\ln(x+1)^2=\ln y$ وتكافئ $\begin{cases}-x=0\\ \ln(x+1)^2=\ln y\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases} x=0 \\ y=(x+1)^2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ ؛ إذا كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين هما: $B(-1;0)$ و $C(0;1)$.

2. حساب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}$

ـ إذا كان $k=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$

ـ إذا كان $k<0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}$.

نضع $-kx=2t$ وهذا يعني أن $x=-\frac{2}{k}t$ لما $x\to-\infty$ فإن $t\to-\infty$ ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{2}{k}t+1\right)^2e^{2t}=\lim_{t\to-\infty}\left[\left(-\frac{2}{k}t+1\right)e^t\right]^2=\lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{2}{k}te^t+e^t\right]^2=0 .$$

ـ إذا كان $k>0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}-kx=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-kx}$

ـ إذا كان $k=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$

ـ إذا كان $k<0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}-kx=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$.

ـ إذا كان $k>0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$.

نضع $-kx=2t$ وهذا يعني أن $x=-\frac{2}{k}t$ ، لما $x\to+\infty$ فإن $t\to-\infty$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{2}{k}t+1\right)^2e^{2t}=\lim_{t\to-\infty}\left[\left(-\frac{2}{k}t+1\right)e^t\right]^2=\lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{2}{k}te^t+e^t\right]^2=0 .$$

الملخص:

	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$
$k<0$	0	$+\infty$
$k=0$	$+\infty$	$+\infty$
$k>0$	$+\infty$	0

3. أ) حساب $f_k'(x)$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$ وليكن $k\in\mathbb{R}$: $f_k'(x)=2(x+1)e^{-kx}-k(x+1)^2e^{-kx}$

أي $f_k'(x)=\left(-kx^2-2kx-k+2x+2\right)e^{-kx}=\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]e^{-kx}$.

- تحديد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k :

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-kx}>0$ ومنه إشارة $f_k'(x)$ هي من إشارة $\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]$.

ـ إذا كان $k=0$ فإن $\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]$ يصبح $2x+2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	

تكون الدالة f_k متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

ـ إذا كان $k\neq 0$ فإن المميز المختصر للعبارة $\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]$ هو Δ' حيث:

$\Delta'=(1-k)^2-(-k)(2-k)=1-2k+k^2+2k-k^2=1$ ومنه العبارة

$\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]$ تقبل جذرين متمايزة x' و x'' حيث: $x'=\dfrac{k-1-1}{-k}$ و $x''=\dfrac{k-1+1}{-k}$

أي $x'=-1+\dfrac{2}{k}$ و $x''=-1$ وبالتالي:

ـ إذا كان $k<0$ فإن $x'<x''$ ومنه:

x	$-\infty$		$-1+\dfrac{2}{k}$		-1		$+\infty$
$-kx^2+2(1-k)x-k+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذا تكون الدالة f_k متناقصة تماما على المجال $\left[-1+\dfrac{2}{k};-1\right]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty;-1+\dfrac{2}{k}\right]$ و $[-1;+\infty[$.

إذا كان $k>0$ فإن $x'>x''$ ومنه:

x	$-\infty$		-1		$-1+\dfrac{2}{k}$		$+\infty$
$-kx^2+2(1-k)x-k+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذا تكون الدالة f_k متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $\left[-1+\dfrac{2}{k};+\infty\right[$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-1;-1+\dfrac{2}{k}\right]$.

ب) جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما:

x	$-\infty$		-1		$-1+\dfrac{2}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4e^{k-2}}{k^2}$	$\searrow$	0

$f_k(-1)=(-1+1)^2e^k=0$ ؛ $f_k\left(-1+\dfrac{2}{k}\right)=\left(-1+\dfrac{2}{k}+1\right)^2e^{-k\left(-1+\frac{2}{k}\right)}=\dfrac{4e^{k-2}}{k^2}$

4. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي k ، الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_k)$ و $(\mathscr{C}_{k+1})$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$ وليكن $k\in\mathbb{R}$:

$f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ و $f_{k+1}(x)=(x+1)^2e^{-(k+1)x}=(x+1)^2e^{-kx}\times e^{-x}$ ومنه

$f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}\times\left(e^{-x}-1\right)$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ومن أجل كل $k\in\mathbb{R}$: $(x+1)^2\geq 0$ و $e^{-kx}>0$؛

$e^{-x}-1=0$ تكافئ $e^{-x}=1$ وتكافئ $-x=0$ أي $x=0$؛

$e^{-x}-1>0$ تكافئ $e^{-x}>1$ وتكافئ $-x>0$ أي $x<0$؛ $e^{-x}-1<0$ تكافئ $x>0$.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$\quad$ 0	$+\infty$
$f_{k+1}(x)-f_k(x)$	$+$	$+$	$-$
الوضعية	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقع فوق $(\mathcal{C}_k)$	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقع فوق $(\mathcal{C}_k)$	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقع تحت $(\mathcal{C}_k)$
	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقطع $(\mathcal{C}_k)$ في $B(-1;0)$	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقطع $(\mathcal{C}_k)$ في $C(0;1)$	

(II f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$.

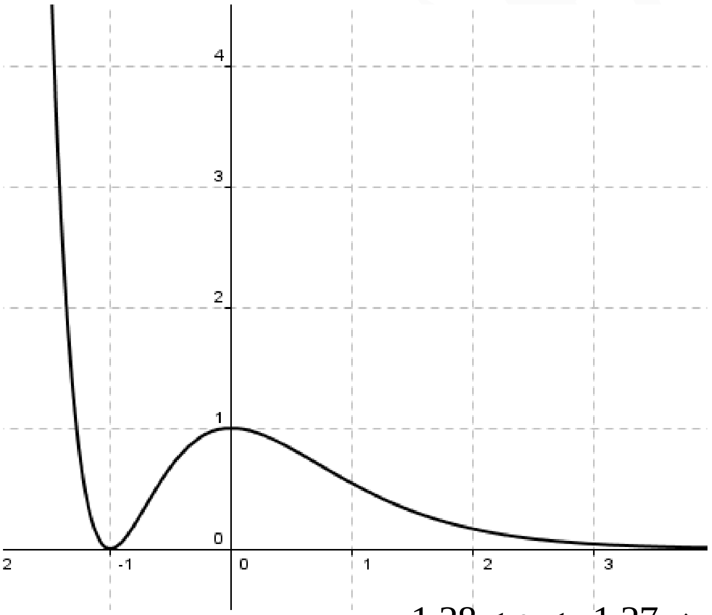
نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. جدول تغيرات الدالة f:

لدينا $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}=f_2(x)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

• رسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$:



2. أ) تبيين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28<\alpha<-1,27$:

لدينا $f(0)=1$ ومن أجل كل $x\in[-1;0[\cup]0;+\infty[$، $0\leq f(x)<1$ إذا المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1;+\infty[$ وهو 0.

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty;-1[$ إذا هي مستمرة على المجال $[-1,28\ ;\ -1,27]$ ولدينا $f\left(-1,27\right)\approx 0,92$ و $f\left(-1,28\right)\approx 1,014$ ومنه $f\left(-1,27\right)<1<f\left(-1,28\right)$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-1,28\ ;\ -1,27[$ يحقق $f\left(\alpha\right)=1$ وبما أن الدالة f متناقصة ماما على المجال $]-\infty;-1[$ فإن α هو الحل الوحيد للمعادلة $f\left(x\right)=1$ في المجال $]-\infty;-1[$ ؛ وعليه فالمعادلة $f\left(x\right)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ هما 0 و α حيث: $\alpha\in]-1,28\ ;\ -1,27[$.

ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

$\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ تكافئ $\frac{|x+1|}{e^x}=\frac{|m+1|}{e^m}$ وتكافئ $\left(\frac{|x+1|}{e^x}\right)^2=\left(\frac{|m+1|}{e^m}\right)^2$ ومعناه

$\frac{(x+1)^2}{e^{2x}}=\frac{(m+1)^2}{e^{2m}}$ معناه $(x+1)^2e^{-2x}=(m+1)^2e^{-2m}$ أي $f\left(x\right)=f\left(m\right)$.

تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا معناه تقبل المعادلة $f\left(x\right)=f\left(m\right)$ حلا وحيدا وهذا يعني بيانيا أن

$f\left(m\right)=0$ أو $f\left(m\right)>1$ أي $m=-1$ أو $m\in]-\infty;\alpha[$.

3. g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g\left(x\right)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'\left(x\right)+2g\left(x\right)-e^{-2x}=0$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $g'\left(x\right)=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}=(-2x-1)e^{-2x}$ ومنه

$g'\left(x\right)+2g\left(x\right)-e^{-2x}=(-2x-1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}-e^{-2x}=(-2x-1+2x+2-1)e^{-2x}$ أي

$g'\left(x\right)+2g\left(x\right)-e^{-2x}=0$.

- استنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا $g'\left(x\right)+2g\left(x\right)-e^{-2x}=0$ معناه $g\left(x\right)=-\frac{1}{2}g'\left(x\right)+\frac{1}{2}e^{-2x}=0$ ومنه دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي الدالة G حيث: $G\left(x\right)=-\frac{1}{2}g\left(x\right)-\frac{1}{4}e^{-2x}$ أي $G\left(x\right)=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، حساب A مساحة الحيّز المستوي المحدد المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

$$A=\int_{-1}^{0}f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-2x}\,dx.$$

نضع $\begin{cases}u\left(x\right)=(x+1)^2\\ v'\left(x\right)=e^{-2x}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'\left(x\right)=2(x+1)\\ v\left(x\right)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{cases}$ إذا

$$A=\int_{-1}^{0}u\left(x\right)\times v'\left(x\right)dx=\left[u\left(x\right)\times v\left(x\right)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u'\left(x\right)\times v\left(x\right)dx$$

$A=\left[-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}\,dx=\left[-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$ ،

$A=-\frac{1}{2}\left[\left(x^2+2x+1+x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{2}\left[\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$ ،

$A=-\frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}-\left(1^2-3+\frac{5}{2}\right)e^{2}\right]=\frac{e^2-5}{4}\,ua$ ، $A\approx 0,6\,ua$.

حلول تمارين الدوال الأسِّية الواردة في الباكالوريا شعبة :

تقني رياضي

التمرين (1) (باك 2009) (م2) (7,5 ن)

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$. وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثمّ استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C}_f)$.
2. ادرس تغيّرات الدالة f على $[0;+\infty[$ ثمّ استنتج جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}$.
3. بيّن أن المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$.
   - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$،
   - استنتج المستقيم المقارب للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$.
4. بيّن أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا واحدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$.
5. ارسم $(\mathscr{C}_f)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$.
6. بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.
7. احسب $\mathscr{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات: $y=x+2$، $x=0$ و $x=\alpha$.
   - بيّن أن $\mathscr{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $\mathscr{A}(\alpha)$.

حل مقترح للتمرين (1) (باك 2009)

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$.

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x :

ليكن x عددا حقيقيا:
$$f(x)+f(-x)=x+\frac{2}{e^x+1}-x+\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$f(x)+f(-x)=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{1+e^x}=\frac{2(e^x+1)}{1+e^x}=2$$

- استنتاج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C}_f)$:

النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ معناه أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $(2\times0-x)\in\mathbb{R}$ و $f(2\times0-x)=2\times1-f(x)$ ومعناه أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $(-x)\in\mathbb{R}$ و $f(-x)=2-f(x)$ أي

ليكن x عددا حقيقيا: لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$ لأن 0 يتوسط المجموعة $\mathbb{R}$ ولدينا من السؤال السابق $f(x)+f(-x)=2$ أي $f(-x)=2-f(x)$ إذن $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C}_f)$.

2. دراسة تغيّرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{2}{e^x+1}\right)=+\infty$.

$f(0)=0+\dfrac{2}{e^0+1}=1$.

$f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ ،

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x}>0$ و $(e^x+1)^2>0$ إذن $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

إذن هي متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

استنتاج جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[2-f(t)\right]=-\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$f(x)$	$+\infty$

3. تبيين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0$

إذا للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x$ وهذا عند $+\infty$.

- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{2}{e^x+1}-(x+2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x+1}-2$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$.

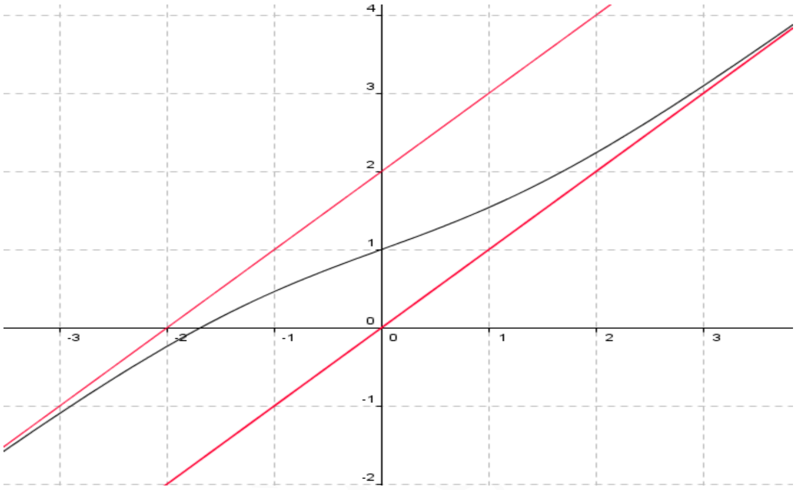
- استنتاج المستقيم المقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$ إذن للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ وهذا عند $-\infty$.

4. تبيين أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا واحدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على المجال $[-1,7;-1,6]$ ولدينا $f(-1,7)\approx-0,0089$ و $f(-1,6)\approx0,064$ إذن $f(-1,7)\times f(-1,6)<0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-1,7;-1,6[$ حيث $f(\alpha)=0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α يكون وحيد.

5. رسم $\left(\mathcal{C}_f\right)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$:



6. تبيين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^{x}+1}=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}\left(e^{x}+1\right)}=x+\dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

7. حساب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $\left(\mathcal{C}_f\right)$ والمستقيمات ذات المعادلات: $y=x+2$ ، $x=0$ و $x=\alpha$:

$$\mathcal{A}(\alpha)=\int_\alpha^0\left[x+2-f(x)\right]dx=\int_\alpha^0\left[x+2-x-\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right]dx$$

$$=\int_\alpha^0\left[2+2\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right]dx=2\left[x+\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_\alpha^0$$

$$\mathcal{A}(\alpha)=2\left[\ln 2-\alpha-\ln\left(1+e^{-\alpha}\right)\right]ua=2\left[\ln\frac{2}{1+e^{-\alpha}}-\alpha\right]ua\ .$$

- تبيين أن $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$:

لدينا $f(\alpha)=0$ معناه $\alpha+\dfrac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1}=0$ ومعناه $\dfrac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1}=-\alpha$

يكافئ $\ln\dfrac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1}=\ln(-\alpha)$ ويكافئ $\ln\dfrac{2}{e^{-\alpha}+1}+\ln e^{-\alpha}=\ln(-\alpha)$

معناه $\ln\dfrac{2}{e^{-\alpha}+1}-\alpha=\ln(-\alpha)$ ومعناه $2\left(\ln\dfrac{2}{e^{-\alpha}+1}-\alpha\right)=2\ln(-\alpha)$ أي $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$.

- استنتاج حصرا للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$:

$-1{,}7<\alpha<-1{,}6$ معناه $1{,}6<-\alpha<1{,}7$ ومعناه $\ln 1{,}6<\ln(-\alpha)<\ln 1{,}7$ يكافئ
$2\ln 1{,}6<2\ln(-\alpha)<2\ln 1{,}7$ أي $0{,}94<\mathcal{A}(\alpha)<1{,}06$

التمرين 2 باك 2010 م 2 7 ن

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$.

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحني الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$.
2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.
3. بيّن أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
4. أ- (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+\dfrac{4}{3}$.

- بيّن أن (D) و (D') مقاربان للمنحني $(\mathcal{C}_f)$، ثمّ حدّد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,9<x_0<0,91$ و $-1,66<x_1<-1,65$.

جـ- احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(x)+f(-x)$.

- فسّر النتيجة هندسيا.

د- ارسم (D) و (D') و $(\mathcal{C}_f)$.

هـ- m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرف بالمعادلة $y=x+m$.

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=[f(x)]^2$.

- ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x.

حل مقترح للتمرين 2 باك 2010

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

وليكن (C_f) منحني الدالة f الممثل في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1. تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}=\dfrac{3x(e^x-1)}{3(e^x-1)}+\dfrac{-4}{3(e^x-1)}$ إذا $a=1$ و $b=-4$ وعليه $f(x)=x+\dfrac{-4}{3(e^x-1)}$

$$f(x)=x-\frac{4}{3(e^x-1)}$$

2. حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-\dfrac{4}{3(e^{x}-1)}=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{3(e^{x}-1)}=0$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{-4}{3(e^{x}-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x+\dfrac{-4}{3(e^{x}-1)}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} x+\dfrac{-4}{3(e^{x}-1)}=+\infty$

3. تبيين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها:

$f(x)=x+\dfrac{-4}{3(e^{x}-1)}$ ومنه $f'(x)=1+\dfrac{4e^{x}}{3(e^{x}-1)^{2}}$

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}^{*}$ ، $f'(x)>0$ إذا f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

4.أ- (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y=x$ و $y=x+\dfrac{4}{3}$

-تبيان أن (D) و (D') مقاربان للمنحني (C_f)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\dfrac{-4}{3(e^{x}-1)}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{3(e^{x}-1)}=0$ وبالتالي (D) هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{4}{3}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{-4}{3(e^{x}-1)}-x-\frac{4}{3}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{4}{3}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{(e^{x}-1)}+1\right)=0$$

وبالتالي (D') هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ـوضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D):

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)-x=\dfrac{-4}{3(e^x-1)}$	$+$ ‖ $-$
الوضعية	(C_f) فوق (D) ‖ (C_f) أسفل (D)

ـوضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D'):

$$f(x)-\left(x+\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{e^x-1}+1\right)=-\frac{4}{3}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)-\left(x+\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{e^x}{e^x-1}\right)$	$+$ ‖ $-$
الوضعية	(C_f) فوق (D') ‖ (C_f) أسفل (D')

ب-تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,9<x_0<0,91$ و $-1,66<x_1<-1,65$:

لدينا الدالة f مستمرة على كل مجال من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ إذا هي مستمرة على كل مجال من المجالين $[0,9;0,91]$ و $[-1,66;-1,65]$ ؛

ولدينا: $f(0,9)\approx-0,01$ و $f(0,91)\approx 0,01$ ومنه $f(0,9)\times f(0,91)<0$

ولدينا: $f(-1,66)\approx-0,01$ و $f(-1,65)\approx 0,0002$ ومنه $f(-1,66)\times f(-1,65)<0$

إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x_0)=0$ و $f(x_1)=0$.

جـ-حساب $f(x)+f(-x)$:

$$f(x)+f(-x)=x+\frac{-4}{3(e^x-1)}-x+\frac{-4}{3(e^{-x}-1)}$$

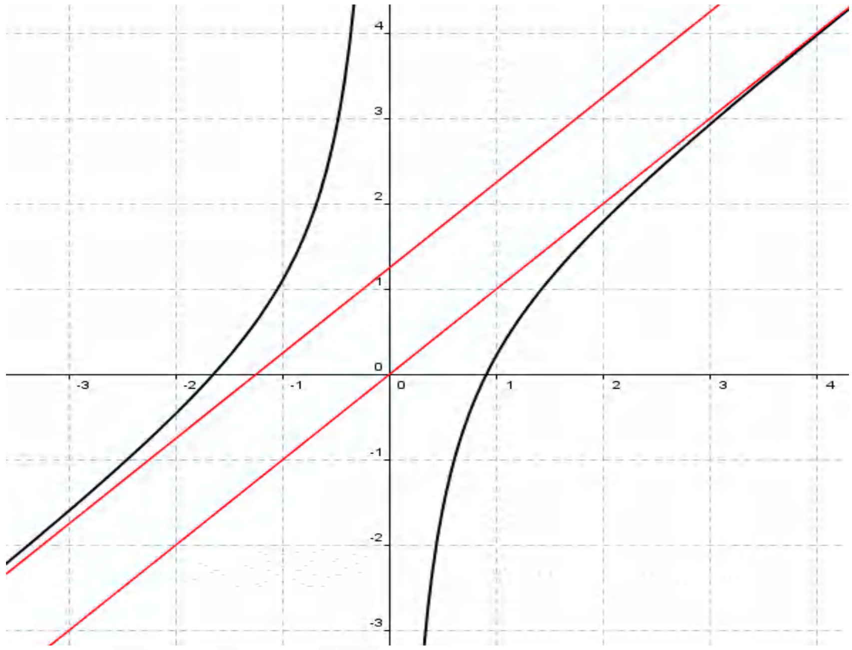
$$f(x)+f(-x)=\frac{-4}{3}\left[\frac{1}{(e^x-1)}+\frac{e^x}{(1-e^x)}\right]=\frac{-4}{3}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x-1}\right]=\frac{4}{3}$$

ـالتفسير الهندسي:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $(-x)\in\mathbb{R}^*$ ولدينا $f(2\times0-x)=2\times\dfrac{2}{3}-f(x)$

ومنه النقطة $\omega\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

د ـ رسم (D) و (D') و (C_f) :



هـ ـ m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرف بالمعادلة $y=x+m$

ـ المناقشة بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$

ـ إذا كان $m\in]-\infty;0[\cup\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

ـ إذا كان $m\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=[f(x)]^2$

دون حساب $g(x)$ بدلالة x، دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا: $g'(x)=2f'(x)\times f(x)$

ولدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ولدينا أيضا إذا كان $x\in]0;x_0[$ فإن $f(x)<0$

وإذا كان $x\in]x_0;+\infty[$ فإن $f(x)>0$ وعليه فمن أجل كل $x\in]0;x_0[$ ، $g'(x)<0$ ومن أجل كل $x\in]x_0;+\infty[$ ، $g'(x)>0$.

لدينا $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=-\infty$ ومنه $\lim_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}[f(x)]^2=+\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ إذا $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

التمرين (3) (باك 2011) (م2) (7 ن)

الجزء I:

f الدالة المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$. $(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة f.
2. عيّن المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.
3. بيّن أن للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عندها.
4. لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.
   أ- ادرس تغيرات الدالة g.
   ب- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7<\alpha<2,8$.
5. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.
   ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$ والمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

الجزء II:

(U_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1. باستخدام $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ)، مثل U_0، U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل.
2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1\leq U_n<\alpha$.
3. بيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.
4. استنتج أن (U_n) متقاربة وبيّن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\alpha$.

حل مقترح للتمرين (3) (باك 2011)

الجزء I:

f الدالة المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$.

$(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. دراسة تغيرات الدالة f:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3-\dfrac{4}{e^x+1}=-1$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{4}{e^x+1}=3$

$f(x)=3-\frac{4}{e^x+1}$ ومنه $f'(x)=\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ لدينا إذا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 3$

2. تعيين المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathcal{C}_f)$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذا المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ إذا المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=3$.

3. تبيين أن للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها:

لدينا $f'(x)=\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ ومنه

$$f''(x)=\frac{4e^x\left(e^x+1\right)^2-8e^{2x}\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{4e^x\left(e^x+1\right)\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$=\frac{4e^x\left(e^x+1\right)\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$f''(x)=0$ معناه $1-e^x=0$ ومعناه $x=0$ ؛ $f''(x)>0$ معناه $1-e^x>0$ ومعناه $x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

العبارة $f''(x)$ تنعدم من أجل 0 وتغيّر من إشارتها وعليه فللمنحني $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف $\omega\left(0;f(0)\right)$ أي $\omega(0;1)$

- معادلة المماس للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $\omega(0;1)$:

$y=f'(0)x+f(0)$ أي $y=x+1$.

4. لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

أ- دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$.

$g(x)=f(x)-x$ ومنه $g'(x)=f'(x)-1=\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-1=\frac{4e^x-e^{2x}-2e^x-1}{\left(e^x+1\right)^2}=-\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}$

لدينا $g'(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $g'(x)<0$ وعليه فالدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

ب-تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7<\alpha<2,8$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وكذلك الدالة $x\mapsto -x$ إذا الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه هي مستمرة على المجال $[2,7;2,8]$

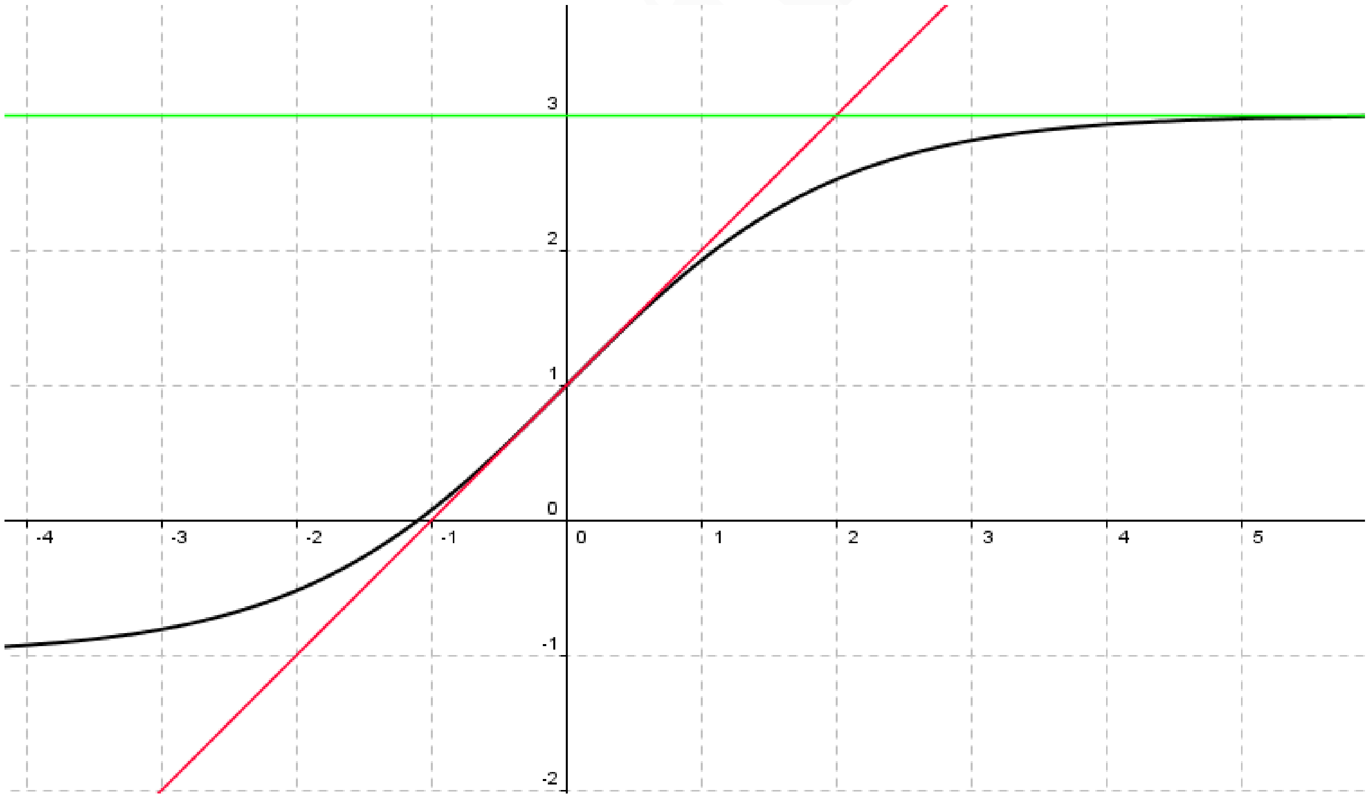
ولدينا: $g(2,7)\approx 0,048$ و $g(2,8)\approx -0,029$ إذن $g(2,7)\times g(2,8)<0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]2,7;2,8[$ يحقق $g(\alpha)=0$ وبما أن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α يكون وحيد.

5. أ-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ معناه $3-\frac{4}{e^x+1}=0$ ومعناه $3=\frac{4}{e^x+1}$ يكافئ $3e^x=1$

ويكافئ $e^x=\frac{1}{3}$ أي $x=-\ln 3$.

ب-رسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$ والمنحني $\left(\mathcal{C}_f\right)$:



الجزء II :

(U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$.

1. باستخدام $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و (Δ) تمثيل U_0 ، U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل:

لدينا $U_0=1$ ، $U_1=f(U_0)$ و $U_2=f(U_1)$

2. تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1\leq U_n<\alpha$:

لدينا $U_0=1$ إذا $1\leq U_0<\alpha$ ؛ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1;\alpha[$

وبالتالي صورة المجال $[1;\alpha]$ بواسطة الدالة f هو المجال $[f(1);f(\alpha)[$ أي $\left[3-\dfrac{4}{e+1};\alpha\right[$

نفرض أن $U_k\in[1;\alpha[$ من أجل عدد طبيعي k إذن $f(U_k)\in\left[3-\dfrac{4}{e+1};\alpha\right[$ ولدينا $3-\dfrac{4}{e+1}\approx 1,92$ إذن

$\left[3-\dfrac{4}{e+1};\alpha\right[\subset[1;\alpha[$ ومنه $f(U_k)\in[1;\alpha[$ أي $U_{k+1}\in[1;\alpha[$ وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n\in[1;\alpha[$.

3. تبيين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما: $U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n=g(U_n)$

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ وبما أن $U_n\in[1;\alpha[$ فإن $g(U_n)>0$ أي $U_{n+1}-U_n>0$ ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4. استنتاج أن (U_n) متقاربة:

المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد α وهي متزايدة تماما إذن هي متقاربة,

- تبيين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$:

بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}=\ell$

ولدينا $U_{n+1}=f(U_n)$ حيث f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن $\ell=f(\ell)$ وهذا يعني $f(\ell)-\ell=0$ أي $g(\ell)=0$

ولدينا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α إذن $\ell=\alpha$ وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$.

التمرين (4) (باك 2012) (م2) (7 ن)

الجزء I :

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^{x}$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .
2. بيَن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1{,}59<\alpha<1{,}60$.
3. استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء II :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\ cm$).

1. بيَن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب: $y=-1$ و $y=0$.
2. أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-2x)^{2}}$.
   ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرَات الدالة f .
   جـ- احسب $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيَم x ، إشارة $f(x)$.
3. أ- بيَن أن: $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرَف في السؤال 2 من الجزء الأول.
   ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).
   جـ- ارسم المنحني $(\mathcal{C}_f)$.
4. ناقش بيانيا، حسب قيَم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x-2=(e^{x}-2x)(m+1)$.
5. h هي الدالة المعرَفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=[f(x)]^{2}$.
   أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كلا من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.
   ب- شكل جدول تغيرَات الدالة h .

حل مقترح للتمرين (4) (باك 2012)

الجزء I :

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^{x}$.

1. دراسة تغيرَات الدالة g :

الدالة الأسيَة والدالة التآلفية تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن جداءهما كذلك وبالتالي الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x)=-2e^{x}+(4-2x)e^{x}=(2-2x)e^{x}=2(1-x)e^{x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $(1-x)$ إذا $g'(1)=0$ ؛

من أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $1-x<0$ ومنه $g'(x)<0$ إذا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ ؛

من أجل $x\in]-\infty;1[$ ، $1-x>0$ ومنه $g'(x)>0$ إذا الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

إذا $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-4+4e^{x}-2xe^{x}=-4$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-2x)=-\infty$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-4+(4-2x)e^{x}=-\infty$

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	-4	$\nearrow$		$\nearrow$	$2e-4$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

2. تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث:

$1,59<\alpha<1,60$:

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1]$

و $[1;+\infty[$ وهي رتيبة تماما على كل من هذين المجالين ؛

لدينا: $g(]-\infty;1])=]-4;2e-4]$ و $g([1;+\infty[)=]-\infty;2e-4]$ ولدينا $2e-4\approx1,44$ إذا $0\in]-4;2e-4]$

و $0\in]-\infty;2e-4]$ ومنه بواسطة الدالة g العدد 0 يقبل سابقة وحيدة α في المجال $[1;+\infty[$ ويقبل سابقة وحيدة β في المجال $]-\infty;1]$ بما أن $g(0)=-4+(4-2\times0)e^{0}=4-4=0$ فإن $\beta=0$ ومنه $g(\alpha)=g(0)=0$. لدينا

$g(1,59)\approx0,02$ و $g(1,60)\approx-0,04$ إذا $g(1,59)\times g(1,60)<0$ ومنه $1,59<\alpha<1,60$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

من أجل $x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ ؛

من أجل $x\in]0;\alpha[$ ، $g(x)>0$ و $g(\alpha)=g(0)=0$.

الجزء II :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}$. $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب: $y=-1$ و $y=0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}=\frac{2}{-2}=-1$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}=0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=0$.

2. أ- البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$:

$$f'(x)=\frac{2\left(e^x-2x\right)-(2x-2)\left(e^x-2\right)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

$$=\frac{2e^x-4x-2xe^x+4x+2e^x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{-4+4e^x-2xe^x}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

$$=\frac{-4+(4-2x)e^x}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ وعليه: $f'(\alpha)=f'(0)=0$ ؛

من أجل $x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ ومنه $f'(x)<0$ ،

ومن أجل $x\in]0;\alpha[$ ، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)>0$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗		↗	$f(\alpha)$	↘	0

جـ-حساب $f(1)$: $f(1)=\dfrac{2-2}{e-2}=0$

- استنتاج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$:

$f(1)=0$ ؛ من أجل $x\in]-\infty;1[$ ، $f(x)<0$

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $f(x)>0$.

3. أ-تبيين أن: $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرّف في السؤال 2 من الجزء الأوّل:

$g(\alpha)=0$ معناه $-4+(4-2\alpha)e^{\alpha}=0$ ومعناه $e^{\alpha}=\dfrac{4}{4-2\alpha}$ يكافئ $e^{\alpha}-2\alpha=\dfrac{4}{4-2\alpha}-2\alpha$ أي

$$e^{\alpha}-2\alpha=\frac{4-8\alpha+4\alpha^2}{4-2\alpha}$$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha}=\frac{(2\alpha-2)(4-2\alpha)}{4-8\alpha+4\alpha^2}=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{1-2\alpha+\alpha^2}$$
$$=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1-\alpha}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}-1$$

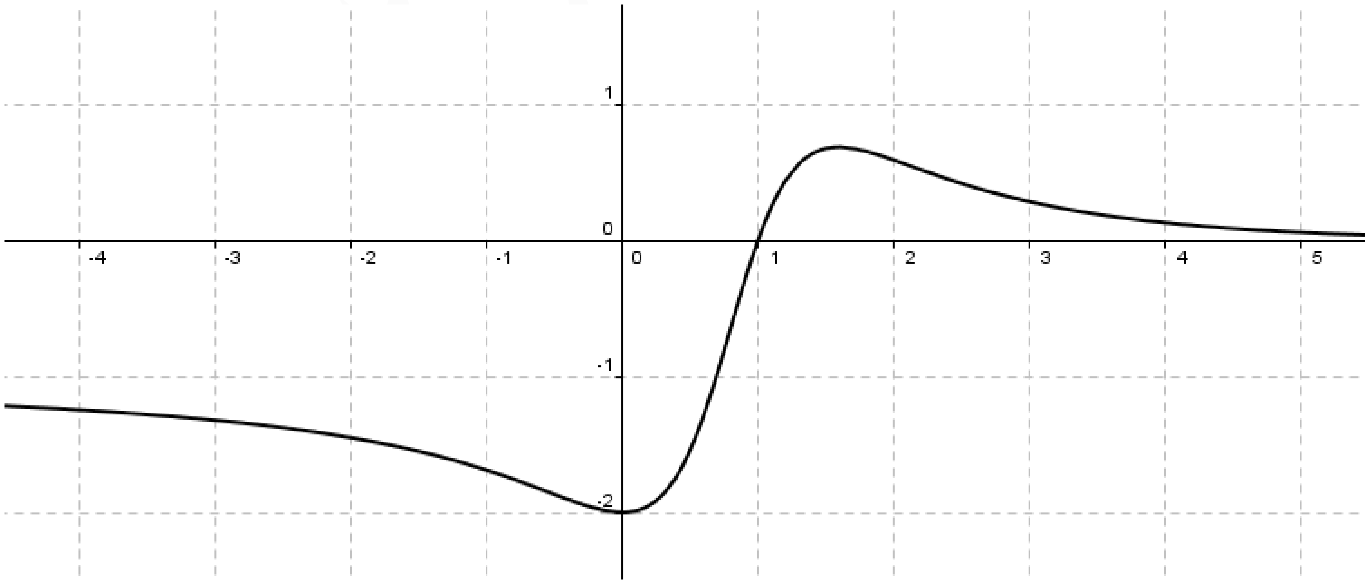
ب-استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$: (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

$1,59<\alpha<1,60$ معناه $1,59-1<\alpha-1<1,60-1$

ومعناه $0,59<\alpha-1<0,60$ يكافئ $\dfrac{1}{0,60}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0,59}$

ويكافئ $\dfrac{1}{0,60}-1<\dfrac{1}{\alpha-1}-1<\dfrac{1}{0,59}-1$ أي $0,67<f(\alpha)<0,69$.

جـ-رسم المنحني $(\mathcal{C}_f)$:



4. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة:

$2x-2=\left(e^x-2x\right)(m+1)$:

$2x-2=\left(e^x-2x\right)(m+1)$ معناه $\frac{2x-2}{e^x-2x}=m+1$ أي $f(x)=m+1$.

إذا كان $m\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]\frac{1}{\alpha-1}-2;+\infty\right[$ فإن $m+1<-2$ أو $m+1>\frac{1}{\alpha-1}-1$ ومنه المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m=-3$ فإن $m+1=-2$ ومنه المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

إذا كان $m=\frac{1}{\alpha-1}-2$ فإن $m+1=\frac{1}{\alpha-1}-1$ ومنه المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا وهو α .

إذا كان $m\in\left]-3;-2\right[$ فإن $-2<m+1<-1$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة (أحدهما سالب والآخر موجب).

إذا كان $m\in\left[-2;-1\right]$ فإن $-1\leq m+1\leq 0$ ومنه المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان $m\in\left]-1;\frac{1}{\alpha-1}-2\right[$ فإن $0<m+1<\frac{1}{\alpha-1}-1$ ومنه المعادلة تقبل حلين موجبين.

5. h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\left[f(x)\right]^2$.

أ- حساب $h'(x)$ بدلالة كلا من $f'(x)$ و $f(x)$:

نضع $u(x)=x^2$ الدالة المربع u تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $u'(x)=2x$؛

لدينا $h(x)=\left[f(x)\right]^2=u\left[f(x)\right]=\left[u\circ f\right](x)$ ومنه:

$$h'(x)=\left[u\circ f\right]'(x)=f'(x)\times u'\left[f(x)\right]=f'(x)\times 2f(x)$$
$$=2f'(x)\times f(x)$$

- استنتاج إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

ب- جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left[f(\alpha)\right]^2$	$\searrow$	0

التمرين (5) (باك 2013) (م2) (6,5 ن)

I– الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{x}$.

1. ادرس تغيّرات الدالة g.

2. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $1+(x-1)e^{x}\geq 0$.

II– الدالة f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1. أ-بيّن أن الدالة f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$.

ب-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ-تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1+(x-1)e^{x}}{x^{2}}.$$

ب-استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

III– n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$، f_n الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}+n\ln x$ و $(\mathcal{C}_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f_n على المجال $]0;+\infty[$.

2. احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

3. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$.

4. بيّن أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر بنقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها.

5. أ-بيّن أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب-بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1)<0$، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6. أ-بالاعتماد على الجزء **II–**؛ بيّن أنه، من أجل كل x من المجال $]0;1]$: $\dfrac{e^{x}-1}{x}\leq e-1$.

ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$:

$$\ln(\alpha_n)\geq\frac{1-e}{n}\text{، ثم } \alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}.$$

جـ-جد نهاية المتتالية (α_n).

حل مقترح للتمرين (5) (باك 2013)

I– الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$.

1. دراسة تغيّرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x-e^x\right)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$.

$g'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $g'(x)<0$

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)>0$

وعليه فجدول تغيّرات الدالة g يكون على النحو التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^x\geq 0$:

من خلال جدول تغيّرات الدالة g لدينا القيمة الحدية الصغرى للدالة g هي -1 وتبلغها عند القيمة 0

أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq -1$ وهذا يعني أن $(x-1)e^x\geq -1$ يكافئ $1+(x-1)e^x\geq 0$.

II– الدالة f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x};x>0 \\ f(0)=1\end{cases}$.

1. أ– تبيين أن الدالة f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$:

لدينا الدالتان $x\mapsto e^x-1$ و $x\mapsto x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$ فهما مستمرتان على المجال $]0;+\infty[$ وبما أن $x\neq 0$ فإن الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=e^0=1$

($\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}$ هو العدد المشتق للدالة الأسّية النيبرية من أجل القيمة 0) ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=f(0)$ وعليه فالدالة f مستمرة عند 1 من اليمين وبالتالي هي مستمرة على المجال $[0;+\infty[$.

ب– حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$.

2. أ– تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:

$f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$:

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{xe^x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

ب- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا من الجزء I- 2. ، من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^{x}\geq 0$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $1+(x-1)e^{x}>0$ وهذا يعني أن $0<\dfrac{e^{x}(x-1)+1}{x^{2}}$ أي $f'(x)>0$ وعليه فالدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$:

- جدول تغيرات الدالة f .

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad\qquad$ $+$
$f(x)$	1 $\nearrow$ $+\infty$

III- n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ ،

f_n الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f_n(x)=\frac{e^{x}-1}{x}+n\ln x$$

و $(\mathcal{C}_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f_n على المجال $]0;+\infty[$:

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0;+\infty[$: $f_n'(x)=f'(x)+\dfrac{n}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)>0$ و $\dfrac{n}{x}>0$ إذن $f'(x)+\dfrac{n}{x}>0$ أي $f_n'(x)>0$ وعليه فالدالة f_n متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2. حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} n\ln x=-\infty$ إذا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{e^{x}-1}{x}+n\ln x=-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}-\frac{1}{x}+n\ln x=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} n\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

3. دراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$:

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، وليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0;+\infty[$:

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\left(\frac{e^{x}-1}{x}+(n+1)\ln x\right)-\left(\frac{e^{x}-1}{x}+n\ln x\right)$$ أي

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}+n\ln x+\ln x-\dfrac{e^{x}-1}{x}-n\ln x$ وهذا يعني أن $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\ln x$

من أجل $x=1$ ، لدينا $\ln x=0$ ومنه $f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ وبالتالي المنحنيان $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(1;e-1)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ لدينا $\ln x<0$ ومنه $f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ وبالتالي المنحنى $(\mathcal{C}_{n+1})$ يقع أسفل المنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا $\ln x>0$ ومنه $f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ وبالتالي المنحنى $(\mathcal{C}_{n+1})$ يقع فوق المنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

4. تبيين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر بنقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها:

نضع $B(x_0;y_0)$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $f_n(x_0)=y_0$ معناه $\dfrac{e^{x_0}-1}{x_0}+n\ln x_0=y_0$ ومعناه $\ln x_0=0$ و

$\dfrac{e^{x_0}-1}{x_0}=y_0$ يكافئ $x_0=1$

و $y_0=e-1$ وعليه فجميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر بنقطة ثابتة $B(1;e-1)$.

5. أ- تبيين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f_1(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+\ln x$

الدالتان f و $x\mapsto \ln x$ مستمرتان على المجال $]0;+\infty[$ إذا الدالة f_1 هي مستمرة على $]0;+\infty[$ وبالتالي هي مستمرة على المجال $[0,3;0,4]$ ولدينا $f_1(0,3)\approx -0{,}038$ و $f_1(0,4)\approx 0{,}313$ إذا $f_1(0,3)\times f_1(0,4)<0$ وعليه فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$ وبما أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن α_1 وحيد في المجال $]0;+\infty[$.

ب- تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$ فإن: $f_n(\alpha_1)<0$:

$f_1(\alpha_1)=0$ معناه $\dfrac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+\ln\alpha_1=0$ ومعناه $\ln\alpha_1=-\dfrac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}$

$$f_n(\alpha_1)=\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}-n\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}=\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}(1-n)=(1-n)\,f(\alpha_1)$$

من خلال جدول تغيرات الدالة f لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)>1$ ومنه $f(\alpha_1)>0$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$، $1-n<0$ إذن $f_n(\alpha_1)<0$.

- البرهان أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$ وهذا من أجل $n>1$:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما على $[\alpha_1;1]$ ولدينا $f_n(\alpha_1)<0$ و $f_n(1)=e-1$ أي $f_n(1)>0$ ومنه $f_n(1)\times f_n(\alpha_1)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6. أ- بالاعتماد على الجزء **II-**؛ تبيين أنه، من أجل كل x من المجال $]0;1]$: $\dfrac{e^x-1}{x}\le e-1$:

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1]$: $1<f(x)\le f(1)$

أي $1<\dfrac{e^x-1}{x}\le\dfrac{e^1-1}{1}$ وهذا يعني أن $1<\dfrac{e^x-1}{x}\le e-1$.

ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\ge1$: $\ln(\alpha_n)\ge\dfrac{1-e}{n}$:

$f_n\left(\alpha_n\right)=0$ معناه $\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}+n\ln\alpha_n=0$ ومعناه $\ln\alpha_n=-\frac{e^{\alpha_n}-1}{n\alpha_n}$

لدينا من أجل كل x من المجال $]0;1]$: $\frac{e^x-1}{x}\le e-1$ معناه $1-e\le\frac{1-e^x}{x}$

ولدينا $\alpha_n\in]\alpha_1;1[$ إذن $\alpha_n\in]0;1]$ ومنه $1-e\le\frac{1-e^{\alpha_n}}{\alpha_n}$ وهذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\ge1$:

$\frac{1-e}{n}\le\frac{1-e^{\alpha_n}}{n\alpha_n}$ أي $\frac{1-e}{n}\le\ln\left(\alpha_n\right)$.

– استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\ge1$: $\alpha_n\ge e^{\frac{1-e}{n}}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\ge1$: $\ln\left(\alpha_n\right)\ge\frac{1-e}{n}$ معناه

$e^{\ln\left(\alpha_n\right)}\ge e^{\frac{1-e}{n}}$ ومعناه $\alpha_n\ge e^{\frac{1-e}{n}}$

جـ- إيجاد نهاية المتتالية $\left(\alpha_n\right)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\ge1$: $\alpha_n\in]\alpha_1;1[$ و $e^{\frac{1-e}{n}}\le\alpha_n$ إذا $e^{\frac{1-e}{n}}\le\alpha_n<1$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e}{n}=0$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1-e}{n}}=1$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1$.

التمرين 6 باك 2014 م 2 6 ن

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3. أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقق أن $1{,}27<\alpha<1{,}28$.

ب- اكتب معادلة لـِ (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدّد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T).

جـ- ارسم (T) و (C_f).

4. عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^{x}-(m-1)e^{m}=-1$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

5. h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أن الدالة h زوجية.

ب- ارسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

6. g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^{x}$ حيث: a و b عددان حقيقيان.

- عيّن a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=f(x)$.

حل مقترح للتمرين 6 باك 2015

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^{x}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. تعيين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ إذا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}-e^{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{x}=+\infty$.

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x}+(x-1)e^{x}=xe^{x}$ ؛ $f'(x)=0$ معناه $x=0$.

من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ ، $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$			$+\infty$

3. أـ تبيين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;0]$ ، $f(x)<0$ ومنه المعادلة $f(x)=1$ لا تقبل حلول في $]-\infty;0]$.

الدالة f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$ إذا صورة المجال $[0;+\infty[$ هي مجال من $\mathbb{R}$ ولدينا $f([0;+\infty[)=[-1;+\infty[$ بما أن $1\in[-1;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=1$ تقبل على الأقل حلا α في المجال $[0;+\infty[$ وبما أن الدالة f رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[0;+\infty[$ فإن الحل α وحيد في $[0;+\infty[$ وعليه فالمعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

ـ تحقق أن $1,27<\alpha<1,28$:

$f(1,27)\approx 0,96$ ؛ $f(1,28)\approx 1,01$ إذا $f(1,27)<1<f(1,28)$ ومنه $1,27<\alpha<1,28$.

بـ ـ كتابة معادلة لـ (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ معناه $y=e(x-1)$

ـ تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T):

$$f(x)-e(x-1)=(x-1)e^x-e(x-1)=(x-1)(e^x-e)$$

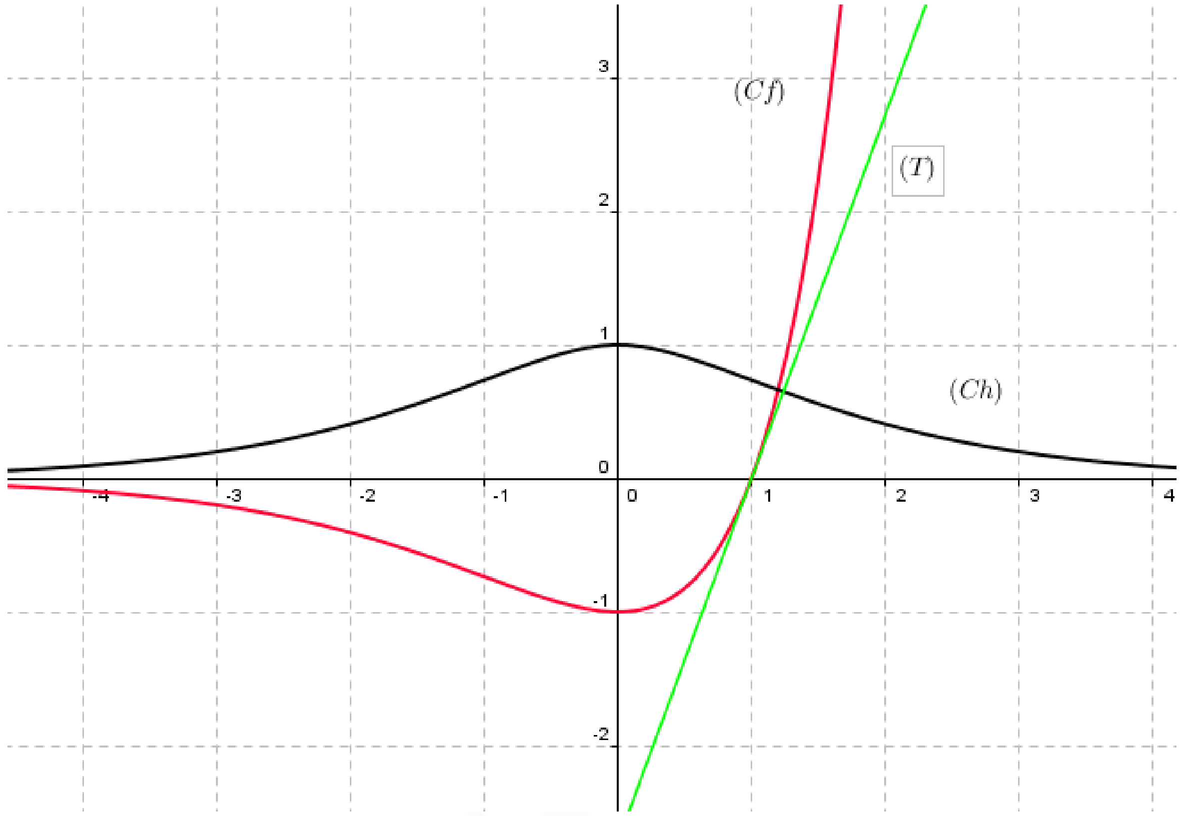
$f(x)-e(x-1)=0$ معناه $(x-1)(e^x-e)=0$ ومعناه $(x-1=0)$ أو $(e^x-e=0)$

يكافئ $(x=1)$ أو $(e^x=e)$ أي $(x=1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$+$	
(e^x-e)		$-$	0	$+$	
$f(x)-e(x-1)$		$+$	0	$+$	

إذا المنحنى (C_f) يقع فوق (T).

جـ-رسم (T) و(C_f):



4. تعيين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$:

$(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$

معناه $f(x)=f(m)-1$ ومعناه $f(m)-1=-1$ أو $f(m)-1\geq 0$

يكافئ $f(m)=0$ أو $f(m)\geq 1$

أي $m=1$ أو $m\geq\alpha$.

5. h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ-تبيين أن الدالة h زوجية:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $(-x)\in\mathbb{R}$؛

$h(-x)=(|-x|+1)e^{-|-x|}=(|x|+1)e^{-|x|}=h(x)$

لأن من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $|-x|=|x|$؛ إذن الدالة h زوجية.

ب-رسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f):

من أجل كل $x\in\mathbb{R}_-$ لدينا: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}=(-x+1)e^{-(-x)}$

أي $h(x)=-(x-1)e^x=-f(x)$

إذا في المجال $]-\infty;0]$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل ؛ وفي المجال $[0;+\infty[$ يرسم (C_h) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

6. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

ـ تعيين a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=f(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $g'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $g'(x)=f(x)$ معناه $(ax+a+b)e^{x}=(x-1)e^{x}$ يكافئ $(ax+a+b)=(x-1)$

ويكافئ $a=1$ و $a+b=-1$ أي $a=1$ و $b=-2$.

التمرين (7) (باك 2015 - (2م) (7 ن)

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=(x+2)e^{x}-2$.

1. احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3. احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II)
f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$.
(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.
ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
جـ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ؛ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).
3. أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $0{,}92<\alpha<0{,}93$ و $-1{,}56<\beta<-1{,}55$.
ب- ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$
4. أ- بيّن أن الدالة $x\mapsto xe^{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^{x}$ على $\mathbb{R}$.
ب- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$ (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال 3.أ-).
جـ- جد حصرا للعدد A.

حل مقترح للتمرين (7) (باك 2015 -)

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=(x+2)e^{x}-2$.

1. حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{x}-2=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{x}-2=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}+2e^{x}-2=-2$

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

ليكن x عددا حقيقيا: $g'(x)=e^{x}+(x+2)e^{x}=(x+3)e^{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}>0$

ومنه: $g'(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;-3[$ ؛ $g'(x)>0$ معناه $x\in]-3;+\infty[$ و $g'(-3)=0$

الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-3]$ ومتزايدة تماما على $[-3;+\infty[$.

ـ جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-e^{-3}-2$	$\nearrow$			$+\infty$

3. حساب $g(0)$ ، واستنتاج إشارة $g(x)$: $g(0)=(0+2)e^0-2=0$.

حسب جدول تغيرات الدالة g لدينا:

$g(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;0[$ ؛ $g(x)>0$ معناه $x\in]0;+\infty[$ و $g(0)=0$

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}2x+3-(x+1)e^x=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{2x+3}{x+1}-e^x\right)=-\infty$$

ـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}2x+3-(x+1)e^x=\lim_{x\to-\infty}2x+3-xe^x+e^x=-\infty$$

2. أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f'(x)=2-e^x-(x+1)e^x=2-(x+2)e^x=-g(x)$

ب ـ استنتاج إشارة $f'(x)$:

$f'(x)>0$ معناه $x\in]-\infty;0[$ ؛ $f'(x)<0$ معناه $x\in]0;+\infty[$ و $f'(0)=0$

ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

جـ ـ تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^x+e^x=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$:
- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)-(2x+3)=-(x+1)e^x$

على $]-\infty;-1[$ ، $f(x)-(2x+3)>0$ ومنه (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

على $]-1;+\infty[$ ، $f(x)-(2x+3)<0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) يقطع (C_f) في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;1)$.

3. أ- نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92<\alpha<0,93$ و $-1,56<\beta<-1,55$.

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه هي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;0]$

و $[0;+\infty[$ ولدينا $f(]-\infty;0[)=]-\infty;2[$ و $f(]0;+\infty[)=]-\infty;2[$ بما أن $0\in]-\infty;2[$ فإنه يوجد عدد حقيقي α ينتمي إلى $]0;+\infty[$ حيث $f(\alpha)=0$ ويوجد عدد حقيقي β ينتمي إلى $]-\infty;0[$ حيث $f(\beta)=0$

وبما أن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الحل α يكون وحيد وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$ فإن الحل β يكون وحيد.

لدينا: $f(0,92)\approx 0,02$ ؛ $f(0,93)\approx -0,03$ ومنه $f(0,93)<0<f(0,92)$

إذا $0,92<\alpha<0,93$

ولدينا: $f(-1,56)\approx -0,002$ ؛ $f(-1,55)\approx 0,01$ ومنه $f(-1,56)<0<f(-1,55)$

إذا $-1,56<\beta<-1,55$

ب- رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$:

الرسم في الشكل أدناه.

4. أ- نبين أن الدالة $x\mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$:

ليكن x عددا حقيقيا: نضع $h(x)=xe^x$ ومنه
$$h'(x)=e^x+xe^x$$
$$=(x+1)e^x$$

إذا الدالة: $x\mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

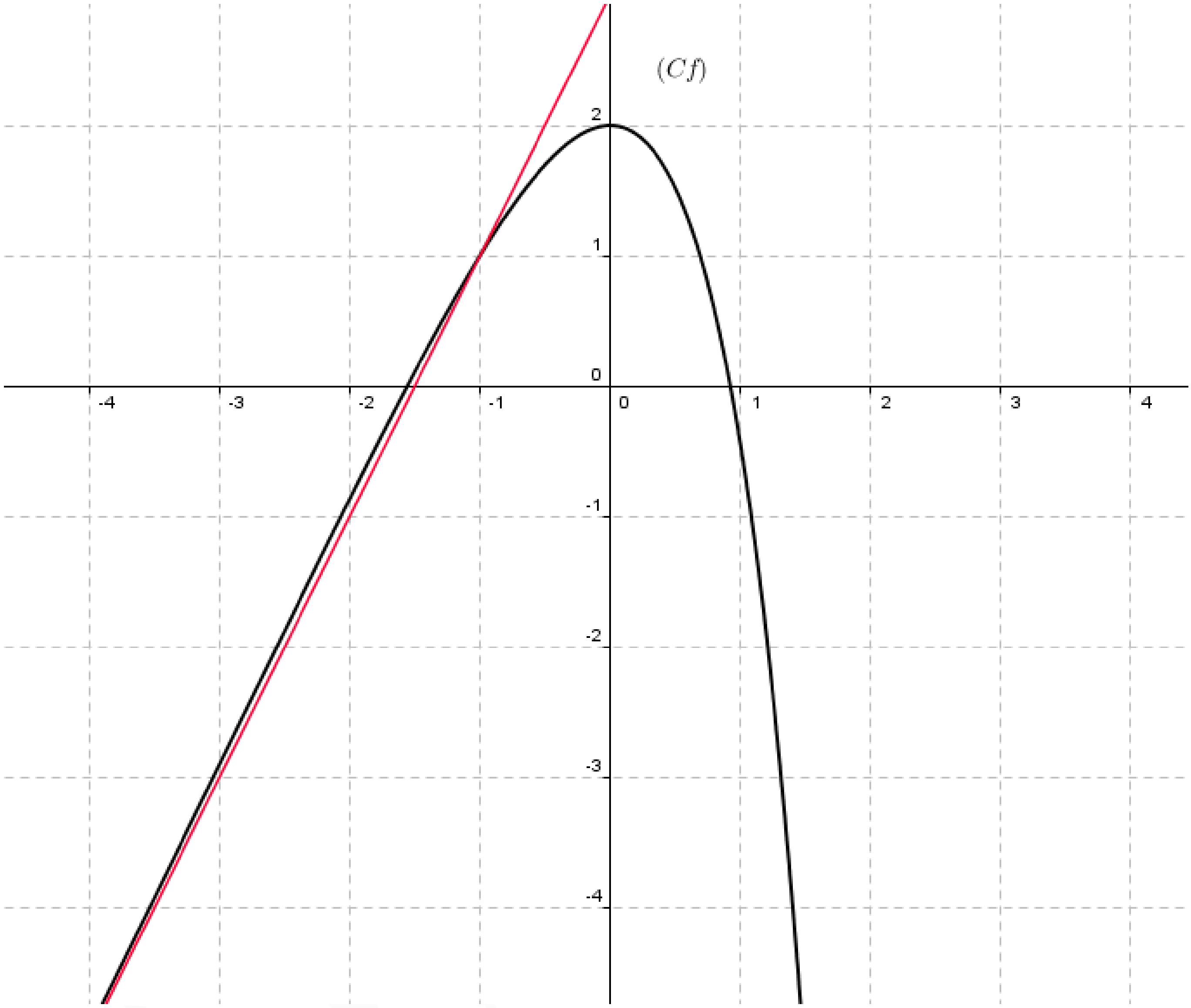
ب- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$

(حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال 3) أ)):

$$A=\int_0^{\alpha}\left[2x+3-f(x)\right]dx=\int_0^{\alpha}\left[(x+1)e^x\right]dx=\left[xe^x\right]_0^{\alpha}$$
$$A=\alpha e^{\alpha}-0e^0=\alpha e^{\alpha}\,ua$$

جـ- إيجاد حصرا للعدد A .

لدينا $0,92<\alpha<0,93$ ومنه $e^{0,92}<e^{\alpha}<e^{0,93}$ إذا $0,92e^{0,92}<\alpha e^{\alpha}<0,93e^{0,93}$ أي $2,30<A<2,36$.


(Cf)
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

التمرين 12 باك 2019 م 1 7 ن

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+3)e^{x}-1$ ؛ و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ؛ كما هو مبيَن في الشكل.

بقراءة بيانية

أ) حدد إشارة $g(-1)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$ ؛ ثم تحقق من أن $-0{,}8<\alpha<-0{,}7$.

جـ) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)\left(e^{x}-1\right)$ ؛ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم شكَل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$ ثمَ استنتج أنَ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ).

جـ) اكتب معادلة لـ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ الموازي للمستقيم (Δ).

4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;1]$. (يعطى $f(\alpha)\approx-0{,}7$).

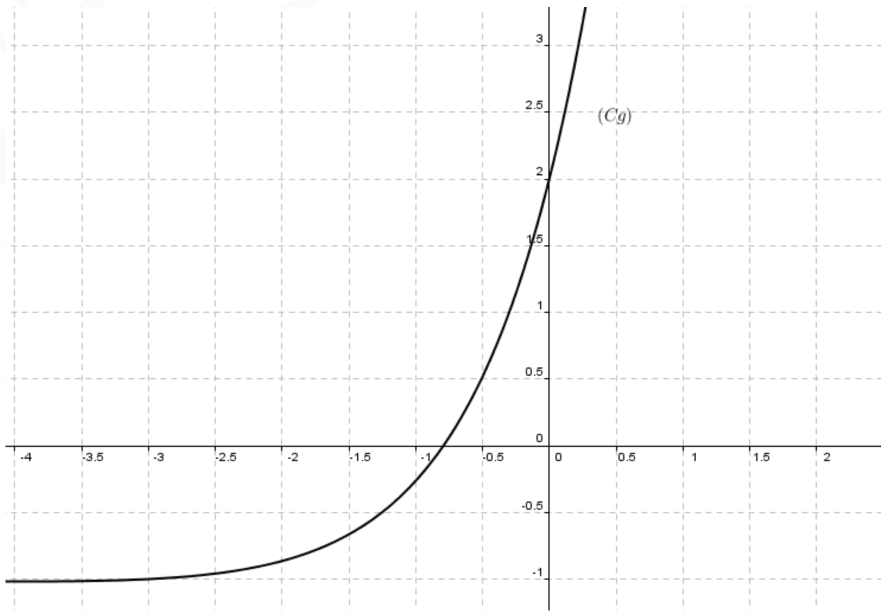
5. احسب $f(x)-g(x)$ ثمَ استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$ ، و $(\mathcal{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) بيَن أن الدالة h زوجية.

ب) تأكَد أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $h(x)=f(x-2)+1$.

جـ) اشرح كيف يمكن رسم $(\mathcal{C}_h)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسم $(\mathcal{C}_h)$ على المجال $[-3;3]$.



حل مقترح للتمرين (12) باك 2019

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+3)e^{x}-1$؛ و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$؛ كما هو مبيّن في الشكل.

بقراءة بيانية:

أ) تحديد إشارة $g(-1)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$: $g(-1)<0$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$

ب) استنتاج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ حيث $g(\alpha)=0$:

لدينا $(\mathcal{C}_g)$ مرسوم بدون تقطع ومنه الدالة g مستمرة على المجال $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$

ولدينا $g(-1)\times g\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α هو الحل الوحيد في $\mathbb{R}$ للمعادلة $g(x)=0$.

- التحقق من أن $-0{,}8<\alpha<-0{,}7$:

$g(-0{,}8)=(-0{,}8+3)e^{-0{,}8}-1$ و $g(-0{,}7)=(-0{,}7+3)e^{-0{,}7}-1$ أي $g(-0{,}8)\approx -0{,}0115$ و $g(-0{,}7)\approx 0{,}142$ إذا $g(-0{,}8)<g(\alpha)<g(-0{,}7)$ ومنه $-0{,}8<\alpha<-0{,}7$

جـ) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $g(\alpha)=0$؛ ومن أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$: $g(x)<0$، ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)(e^{x}-1)$؛ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

.1 حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)(e^{x}-1)=\lim_{x\to-\infty}xe^{x}+2e^{x}-x-2$ لدينا $\lim_{x\to-\infty}xe=0$، $\lim_{x\to-\infty}2e^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}-x-2=+\infty$ إذا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)(e^{x}-1)$ ولدينا $\lim_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(e^{x}-1)=+\infty$ إذا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

.2 تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f'(x)=(e^{x}-1)+(x+2)e^{x}=(x+3)e^{x}-1=g(x)$

• جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)=g(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3. أ) حساب $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)(e^x-1)+x=\lim_{x\to-\infty}xe^x+2e^x-x-2+x=-2$$

• استنتاج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له:

لدينا $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-2$ إذا $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-2))=0$ ومنه المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=-x-2$ وهذا في $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ):

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)-(-x-2)=(x+2)(e^x-1)+(x+2)=(x+2)(e^x-1+1)$ أي $f(x)-(-x-2)=(x+2)e^x$؛

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^x>0$

ومنه إشارة $f(x)-(-x-2)$ هي من إشارة العبارة $(x+2)$.

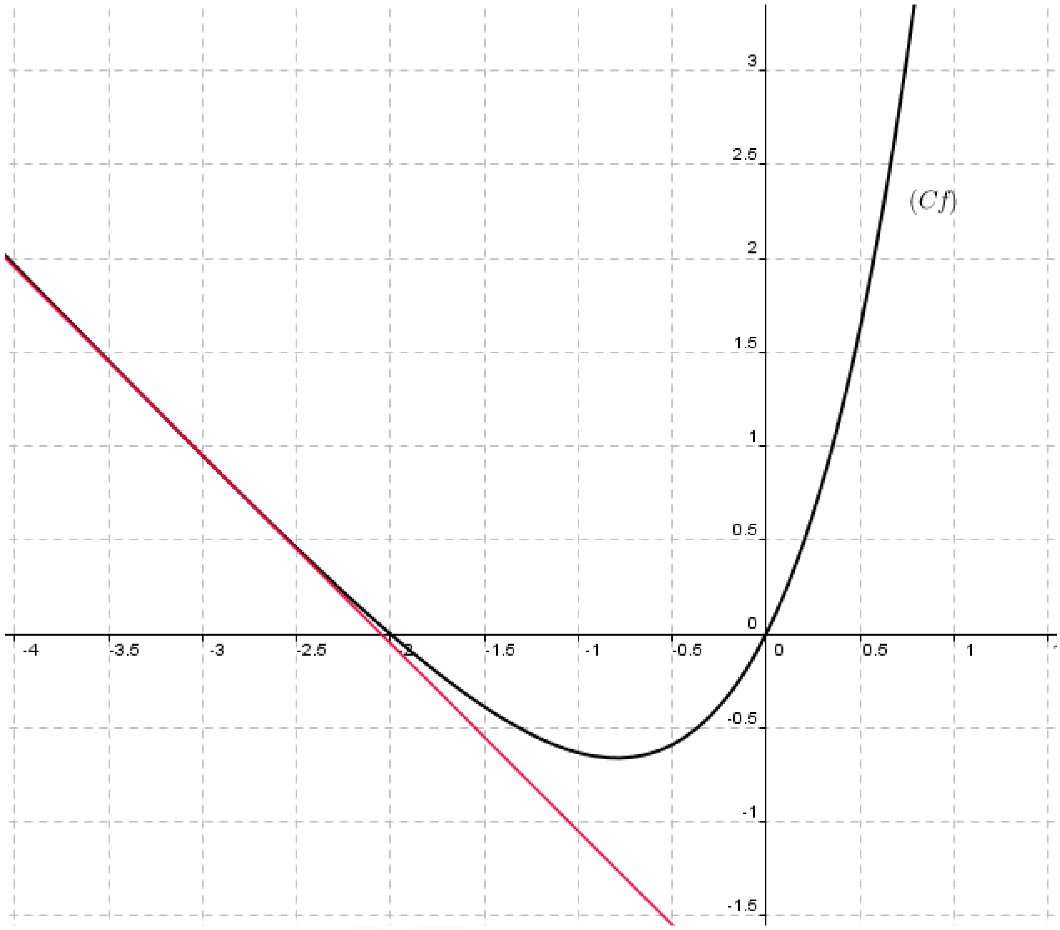
x	$-\infty$ ... -2	-2 ... $+\infty$
$f(x)-(-x-2)$	$-$	$+$
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ)

$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ) في $A(-2;0)$

جـ) كتابة معادلة لـ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ الموازي للمستقيم (Δ):

(T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 إذا له معادلة من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ولدينا (T) يوازي (Δ) إذا $f'(x_0)=-1$ أي $(x_0+3)e^{x_0}-1=-1$ وهذا يعني أن $(x_0+3)e^{x_0}=0$ ومعناه $(x_0+3=0)$ أي $x_0=-3$؛ ومنه معادلة (T) من الشكل $y=-(x+3)-(e^{-3}-1)$ أي $y=-x-2-e^{-3}$.

4. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;1]$. (يعطى $f(\alpha)\approx-0,7$):



5. حساب $f(x)-g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)-g(x)=(x+2)(e^{x}-1)-(x+3)e^{x}+1$ أي

$f(x)-g(x)=(x+2-x-3)e^{x}-x-2+1=-e^{x}-x-1$

• استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)-g(x)=-e^{x}-x-1$ معناه $f(x)=g(x)-e^{x}-x-1$ ومعناه

$f(x)=f'(x)-e^{x}-x-1$ ؛ نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=f(x)-e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-x$ لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $F'(x)=f(x)$ إذا F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$ ، و $(\mathcal{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) تبيين أن الدالة h زوجية:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $-x\in\mathbb{R}$ لأن 0 يتوسط المجموعة $\mathbb{R}$.

$h(-x)=|-x|\left(e^{|-x|-2}-1\right)+1=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1=h(x)$ لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $|-x|=|x|$ ؛ وعليه فالدالة h زوجية.

ب) التأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $h(x)=f(x-2)+1$:

لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $|x|=x$ ومنه $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1=x\left(e^{x-2}-1\right)+1$

ولدينا $f(x-2)+1=(x-2+2)\left(e^{x-2}-1\right)+1=x\left(e^{x-2}-1\right)+1$

إذا من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $h(x)=f(x-2)+1$.

جـ) شرح كيف يمكن رسم $(\mathcal{C}_h)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثمّ رسم $(\mathcal{C}_h)$ على المجال $[-3;3]$:

لدينا من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $h(x)=f(x-2)+1$

ولدينا من أجل $x \in [0;+\infty[$ ، $x-2 \in [-2;+\infty[$ ؛ إذا في المجال $[0;+\infty[$ ، يكون $(\mathcal{C}_h)$ صورة بالانسحاب، الذي شعاعه $\vec{u}(2;1)$، للجزء من $(\mathcal{C}_f)$ المرسوم على المجال $[-2;+\infty[$ ؛ وفي المجال $]-\infty;0]$ ، يُرسم $(\mathcal{C}_h)$ بالتناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.