



# Maths

# بكالوريا

# Bac<sup>2021</sup>

## الدالة الأسية Fonction Exponentielle

ملخص

تطبيقات

تمارين محلولة

تمارين البكالوريا

علوم تجريبية / تقني رياضي / رياضيات

من اعداد الأستاذ شعبان أسامة



شكر خاص للأستاذ بخاخشة خالد

”



Google / Facebook/ Telegram/ Instagram : 5min maths

تلهفان-0775737163

اصدار 04 ديسمبر 2020

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اليك أيها الطالب " مجلة 5min Maths " للسنة الثالثة ثانوي الشعب العلمية لمحور الدالة الأسية

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد وربما يكون حلك أحسن وأقصر لكن النتائج والأهداف واحدة، في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك ويهديك الى سبيل الخير

الأستاذ شعبةان أسامة



أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا



وثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر

”

شكر خاص للأستاذ بخاخشة خالد على تعاونه معي في انجاز هذا العمل المتواضع

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف  
مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة  
بتاريخ: 2019/09/13



## تجدون في هذا العهل

---

1. ملخص الدرس

2. تطبيقات

3. تمارين محلولة

4. تمارين البكالوريا 2008-2019

---

# ملخص الدرس ①

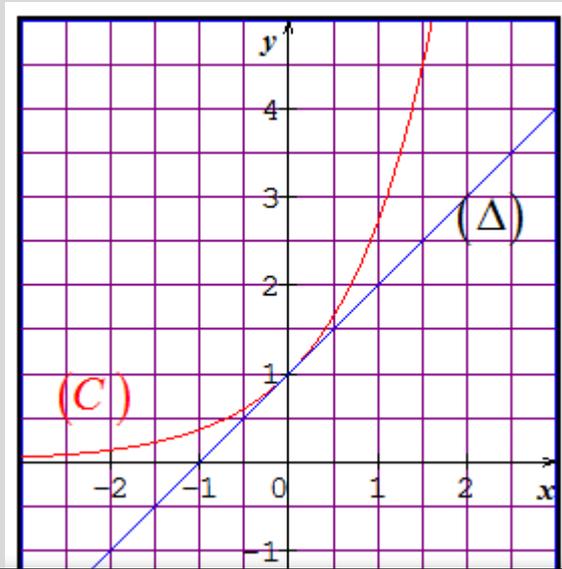
<p><b>مبرهنة وتعريف:</b> توجد دالة وحيدة <math>f</math> قابلة للاشتقاق على <math>\mathbb{R}</math> بحيث <math>f' = f</math> و <math>f(0) = 1</math>. نرسم إلى هذه الدالة بالرمز "exp" و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).</p>	
<p><b>ملاحظة:</b> الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية <math>y' = y</math> التي تحقق <math>y(0) = 1</math>.</p> <p><b>نتائج:</b> * <math>\exp(0) = 1</math>.</p>	
<p><b>خواص:</b> من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math>، من أجل كل عددين حقيقيين <math>x, y</math> ومن أجل كل عدد صحيح نسبي <math>n</math> لدينا:</p> <p>(1) <math>\exp(x) \neq 0</math> (2) <math>\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}</math> (3) <math>\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)</math></p> <p>(4) <math>\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}</math> (5) <math>\exp(nx) = [\exp(x)]^n</math></p>	
<p><b>العدد <math>e</math> و الترميز <math>e^x</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>العدد <math>e</math> هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي <math>e = \exp(1)</math>. تعطينا الحاسبة <math>e \approx 2,718281828</math>.</li> <li>من أجل كل عدد صحيح نسبي <math>n</math>، <math>\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n</math>.</li> <li>لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي <math>n</math>، <math>\exp(n) = e^n</math>.</li> <li>اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math>، إلى <math>\exp(x)</math> بـ <math>e^x</math>.</li> <li>من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math>، <math>\exp(x) = e^x</math>، نقرأ <math>e^x</math>: "أسية <math>x</math>".</li> </ul>	
<p><b>قواعد الحساب:</b> من أجل كل عددين حقيقيين <math>x, y</math> ومن أجل كل عدد صحيح نسبي <math>n</math> لدينا:</p> <p><math>e^0 = 1</math> • <math>\exp'(x) = e^x</math> • <math>e^{-x} = \frac{1}{e^x}</math> •</p> <p><math>e^{x+y} = e^x e^y</math> • <math>e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}</math> • <math>e^{nx} = (e^x)^n</math> •</p>	
<p><b>خواص</b> الدالة الأسية متزايدة تماما على <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math>، <math>e^x &gt; 0</math>.</p>	
<p><b>نتائج:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>من أجل كل عددين حقيقيين <math>a</math> و <math>b</math> لدينا: <math>e^a &lt; e^b</math> يعني <math>a &lt; b</math> و <math>e^a = e^b</math> يعني <math>a = b</math>.</li> <li>من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math> لدينا: <math>0 &lt; e^x &lt; 1</math> يعني <math>x &lt; 0</math> و <math>e^x &gt; 1</math> يعني <math>x &gt; 0</math>.</li> </ul>	
<p><b>النهايات</b></p> <p>(1) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty</math> (2) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0</math></p> <p><b>مثال:</b></p> <p>نعتبر الدالة <math>f</math> المعرفة على <math>\mathbb{R}</math> بـ <math>f(x) = e^{-x+2}</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>لدينا <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+2) = +\infty</math> وبما أن <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty</math> فإن <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty</math> أي <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty</math>.</li> <li>لدينا <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+2) = -\infty</math> وبما أن <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0</math> فإن <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+2} = 0</math> أي <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0</math>.</li> </ul>	
<p><b>النهايات الشهيرة</b></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1</math>      <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty</math> ..... <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0</math> ..... <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0</math></p>	

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$e^x$			$+\infty$

- المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$ .
- لدينا  $\exp'(0)=1$  و  $e^0=1$ . إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا  $(\Delta): y = x + 1$ .

• من تعريف العدد المشتق لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x} = \exp'(0) = 1$  إذن:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

**نتيجة:** الدالة  $x \mapsto 1+x$  هي أحسن تقريب تآلفي للدالة  $e^x$  بجوار 0. أي من أجل  $x$  قريب من 0 لدينا:  $e^x \approx 1+x$ .



إذا كانت  $u$  دالة معرفة على مجال  $I$  فإن للدالتين  $u$  و  $\exp \circ u$  نفس اتجاه التغيرات على المجال  $I$ .

**مثال:**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{x^2-1}$ .

نلاحظ أن  $f = \exp \circ u$  حيث  $u$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $u(x) = x^2 - 1$ .

بما أن الدالة  $u$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0]$  فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0]$ .

وبما أن الدالة  $u$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$ .

**خاصية:** إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن الدالة  $\exp \circ u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا من أجل

أجل

$$(\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}, \quad x \text{ من } I$$

**مثال:**

• مشتقة الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{x^2+x+1}$  هي  $f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$

• مشتقة الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$  هي  $g'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

# تطبيقات 2

حل المعادلة والمراجعة التاليتين: $e^{5x+3} > e^{3x-1}$ (2) و $e^{x^2+3x-3} = e^{2x-1}$ (1)	01
حل المعادلة والمراجحتين التاليتين: $e^{x+2} \geq 3$ (3) ، $e^{x+2} \geq -5$ (2) ، $e^{2x-1} = 3$ (1)	02
حل المعادلة والمراجعة التاليتين: $\ln(2x-1) \leq 2$ (2) و $\ln(2x-1) = 2$ (1)	03
حل المعادلة والمراجعة التاليتين: $e^{-2x+1} > \frac{1}{2}e^{-x+1}$ (2) و $e^{x+2}e^{2x-3} = 5$ (1)	04
حل المعادلة والمراجعة التاليتين: $e^{2x} - e^x - 6 > 0$ (2) و $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ (1)	05
نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2 + e^{-2x+3}$ 1. عين نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها. 2. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ .	06
نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ وليكن $(C)$ منحنيا البياني. 1. عين نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني $(C)$ . 2. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحني $(C)$ في معلم متعامد ومتجانس.	07
نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = e^{2+\ln x}$ أدرس نهايتي الدالة $f$ عند 0 وعند $+\infty$ .	08
نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \ln(e^{2x} + 1)$ وليكن $(C)$ منحنيا البياني. 1. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ . 2. عين نقط المنحني $(C)$ التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = \frac{x}{3}$	09
نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \frac{4}{1+e^x}$ 1. أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ . 2. أ- أحسب $f'(x)$ حيث $f'$ هي الدالة المشتقة للدالة $f$ . ب- ادرس إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة $f$ .	10

<p>3. نرمزب (C) إلى التمثيل البياني للدالة <math>f</math> في المستوي المنسوب إلى معلم <math>(O; \vec{i}, \vec{j})</math></p> <p>أ- بين أن المنحني (C) يقبل المستقيم <math>D</math> الذي معادلته <math>y = x</math> كمقارب مائل عند <math>+\infty</math> ، ويقبل المستقيم <math>D'</math> الذي معادلته <math>y = x + 4</math> كمقارب مائل عند <math>-\infty</math>.</p> <p>ب- ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى كل من <math>D</math> و <math>D'</math></p> <p>4. بين أن المنحني (C) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها <math>\alpha</math> حيث <math>\alpha \in ]-4; -3[</math>.</p> <p>5. ارسم (C).</p>	
<p>نعتبر الدالة <math>f</math> المعرفة على <math>\mathbb{R}</math> بـ <math>f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}</math></p> <p>1. بين أن الدالة <math>f</math> فردية.</p> <p>2. بين أنه من أجل كل <math>x</math> من <math>\mathbb{R}</math> ، <math>f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}</math></p>	<h1>11</h1>
<p>نعتبر الدالة <math>f</math> المعرفة على <math>\mathbb{R}</math> بـ <math>f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}</math></p> <p>1. بين أنه من أجل كل <math>x</math> من <math>\mathbb{R}</math> ، <math>f(-x) + f(x) = 2</math> ، فسر بيانها النتيجة.</p> <p>2. بين أنه من أجل كل <math>x</math> من <math>\mathbb{R}</math> ، <math>f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1</math>.</p>	<h1>12</h1>
<p><u>مبرهنة</u>: ليكن <math>k</math> عددا حقيقيا.</p> <p>الدوال <math>f</math> القابلة للاشتقاق على <math>\mathbb{R}</math> بحيث <math>f' = kf</math> هي الدوال: <math>x \mapsto Ce^{kx}</math> حيث <math>C</math> عدد حقيقي ثابت.</p> <p>1. أنجز برهاننا لهذه المبرهنة.</p> <p>2. عين كل الدوال <math>f</math> القابلة للاشتقاق على <math>\mathbb{R}</math> بحيث <math>f'(x) - 2f(x) = 0</math>.</p> <p>3. من بين الدوال <math>f</math> حيث <math>f'(x) - 2f(x) = 0</math> عين تلك التي منحناها البياني يمر من النقطة <math>A\left(\frac{1}{2}; e^2\right)</math>.</p>	<h1>13</h1>

01

المعادلة  $e^{u(x)} = e^{v(x)}$  تعني  $u(x) = v(x)$   
 المتراجحة  $e^{u(x)} > e^{v(x)}$  تعني  $u(x) > v(x)$

(1) تعني  $x^2 + 3x - 3 = 2x - 1$  أي  $x^2 + x - 2 = 0$  وهذه المعادلة الأخيرة حلان هما 1 و -2.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن  $S = \{-2; 1\}$ .

(2) تعني  $5x + 3 > 3x - 1$  أي  $x > -2$ .

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن  $S = ]-2; +\infty[$ .

02

• لحل المعادلة  $e^{u(x)} = \lambda$  حيث  $\lambda > 0$  يكفي حل المعادلة  $u(x) = \ln(\lambda)$

• لحل المتراجحة  $e^{u(x)} \geq \lambda$  حيث  $\lambda > 0$  يكفي حل المتراجحة  $u(x) \geq \ln(\lambda)$

(1) تعني  $2x - 1 = \ln 3$  أي  $x = \frac{1 + \ln 3}{2}$ . مجموعة الحلول هي إذن  $S = \left\{ \frac{1 + \ln 3}{2} \right\}$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $e^{x+2} > 0$  و منه  $e^{x+2} > -5$ . مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن  $S = \mathbb{R}$ .

(3) تعني  $x + 2 \geq \ln 3$  أي  $x \geq \ln(3) - 2$ . مجموعة الحلول هي إذن  $S = [\ln(3) - 2; +\infty[$ .

03

لحل المعادلة  $\ln[u(x)] = \lambda$  على التوالي المتراجحة  $\ln[u(x)] \leq \lambda$  نقوم أولاً بتعيين  $D$  مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون الدالة  $u$  معرفة من أجلها مع  $u(x) > 0$  ثم نحل في المجموعة  $D$  المعادلة  $u(x) = e^\lambda$  على التوالي  $u(x) \leq e^\lambda$ .

$D$  هي مجموعة الأعداد الحقيقية  $x$  بحيث  $2x - 1 > 0$  أي  $x > \frac{1}{2}$  و منه  $D = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

من أجل كل  $x$  من  $D$ ، (1) تعني  $2x - 1 = e^2$  أي  $x = \frac{e^2 + 1}{2}$ . مجموعة الحلول هي إذن  $S = \left\{ \frac{e^2 + 1}{2} \right\}$

من أجل كل  $x$  من  $D$ ، (2) تعني  $2x - 1 \leq e^2$  أي  $x \leq \frac{e^2 + 1}{2}$ . مجموعة الحلول هي إذن  $S = \left] \frac{1}{2}; \frac{e^2 + 1}{2} \right]$

04

1. (1) تعني  $e^{(x+2)+(2x-3)} = 5$  أي  $e^{3x-1} = 5$  وهذا يعني  $3x - 1 = \ln 5$  أي  $x = \frac{1 + \ln 5}{3}$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن:  $S = \left\{ \frac{1 + \ln 5}{3} \right\}$

2. (2) تعني  $\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}} > \frac{1}{2}$  لأن  $e^{-x+1} > 0$  لدينا:  $e^{-2x+1+x-1} = e^{-x} = e^{(-2x+1)-(-x+1)}$

و منه  $\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}} > \frac{1}{2}$  تعني  $e^{-x} > \frac{1}{2}$  أي  $-x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$  وهذا يعني  $-x > -\ln 2$  أي  $x < \ln 2$ .

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن:  $S = ]-\infty; \ln 2[$

- لحل معادلة من الشكل  $ae^{2x} + be^x + c = 0$  أو متراجحة من الشكل  $ae^{2x} + be^x + c > 0$ :
- نضع  $X = e^x$  ثم نحل المعادلة  $aX^2 + bX + c = 0$  أو المتراجحة  $aX^2 + bX + c > 0$ .
  - نعين قيم  $x$  انطلاقاً من العلاقة  $X = e^x$ .

1. بوضع  $X = e^x$  نحصل على المعادلة ذات المجهول  $X$  التالية:  $X^2 - X - 6 = 0$ .  
لدينا  $\Delta = 25$  و منه حلول المعادلة  $X^2 - X - 6 = 0$  هما:  $X' = -2$  و  $X'' = 3$ .  
•  $e^x = -2$  لا تقبل حلولاً لأن  $e^x > 0$ .  
•  $e^x = 3$  تعني  $x = \ln 3$ .

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن:  $S = \{\ln 3\}$

2. بوضع  $X = e^x$  نحصل على المتراجحة ذات المجهول  $X$  التالية:  $X^2 - X - 6 > 0$ .  
المعادلة  $X^2 - X - 6 = 0$  جذران هما  $-2$  و  $3$ . و بالتالي فإشارة  $X^2 - X - 6$  هي كالآتي:

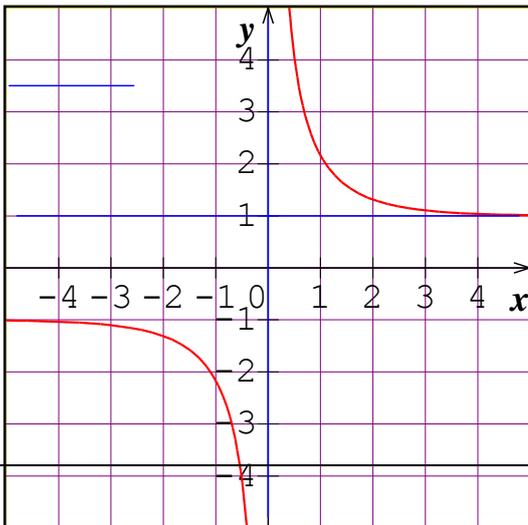
$X$	$-\infty$	$-2$	$3$	$+\infty$		
$X^2 - X - 6$		+	0	-	0	+

- حلول المتراجحة  $X^2 - X - 6 > 0$  هي إذن الأعداد الحقيقية  $X$  بحيث:  $X < -2$  أو  $X > 3$ .  
•  $e^x < -2$  لا تقبل حلولاً لأن  $e^x > 0$ .  
•  $e^x > 3$  تعني  $x > \ln 3$ .

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن:  $S = ]\ln 3; +\infty[$

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) = +\infty$  و بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x+3} = +\infty$  و منه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 3) = -\infty$  و بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+3} = 0$  و منه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .  
2. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) = -2e^{-2x+3}$ .  
بما أن  $e^{-2x+3} > 0$  فإن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) < 0$ .  
إذن الدالة  $f$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{R}$ .

- لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و منه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ .  
• نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  و منه لدينا حالة عدم التعيين.  
• لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) = 2$ .  
• نعلم أن  $e^x > 1$  يعني  $x > 0$  و  $e^x < 1$  يعني  $x < 0$ .  
و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ .  
يقبل المنحني (C) ثلاث مستقيمات مقارنة معادلاتها:  
•  $y = 1$  و  $y = -1$ ،  $x = 0$



- (2)  $f$  قابلة للاشتقاق على المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$ .  
و لدينا  $f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$  و بالتالي فالدالة  $f$  متناقصة تماماً على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$ .

08

• لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 + \ln x) = -\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) = -\infty$  و بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{2+\ln x} = 0$

و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

• لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \ln x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$  و بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2+\ln x} = +\infty$

و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

يمكن ملاحظة أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $f(x) = e^{2+\ln x} = e^2 e^{\ln x} = e^2 x$

09

1. من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

بما أن  $e^{2x} > 0$  فإن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) > 0$  و منه الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

2. يكون المماس عند نقطة من  $(C)$  فاصلتها  $x$  موازيا للمستقيم  $(\Delta)$  يعني  $f'(x) = \frac{1}{3}$

يكون لدينا إذن  $\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{3}$  أي  $6e^{2x} = e^{2x} + 1$  وهذا يعني  $e^{2x} = \frac{1}{5}$  أي  $2x = -\ln 5$  و منه  $x = -\frac{\ln 5}{2}$

و بالتالي توجد نقطة وحيدة من  $(C)$  فاصلتها  $x = -\frac{\ln 5}{2}$  يكون المماس عندها موازيا للمستقيم  $(\Delta)$ .

10

• بوضع  $u(x) = 2x + 3$  يكون لدينا  $u'(x) = 2$

و منه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f(x) = \frac{1}{2} \times u'(x) e^{u(x)}$

و بالتالي تقبل الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  دوالا أصلية  $F$  معرفة كما يلي:  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+3} + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي ثابت.

• لدينا  $g(x) = \frac{1}{2} e^{2x+3} + c$  و  $g(-1) = 0$  و منه  $\frac{1}{2} e^{2(-1)+3} + c = 0$  أي  $\frac{1}{2} e + c = 0$  و بالتالي  $c = -\frac{1}{2} e$

نجد هكذا:  $g(x) = \frac{1}{2} e^{2x+3} - \frac{e}{2}$

11

1. من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $(-x)$  ينتمي إلى  $\mathbb{R}$  و لدينا:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$$

$$\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\frac{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\frac{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}} = \frac{2(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^{2x} + 1)}$$

$$\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^{2x} + 1)} = \frac{(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)} = f(2x)$$

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}, \text{ و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي } x,$$

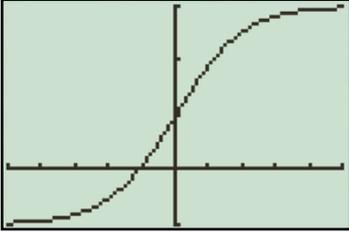
ليكن  $x$  عددا حقيقيا كيفيا.

$$f(-x) + f(x) = \frac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)} + \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \frac{3-e^x}{1+e^x} + \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = 2. \quad 1.$$

$$f(-x) + f(x) = 2 \text{ ومنه}$$

المنحني الممثل للدالة  $f$  متناظر بالنسبة على النقطة  $A(0;1)$ .

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1} - 1 = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x+1} = \frac{3e^x-1}{e^x+1} \quad 2.$$



12

1. إذا كانت  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = Ce^{kx}$  فإنها قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،

$$f'(x) = C \times ke^{kx} = k(Ce^{kx}) = kf(x) \text{ ومنه } f' = kf.$$

عكسيا إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث  $f' = kf$  نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}}$

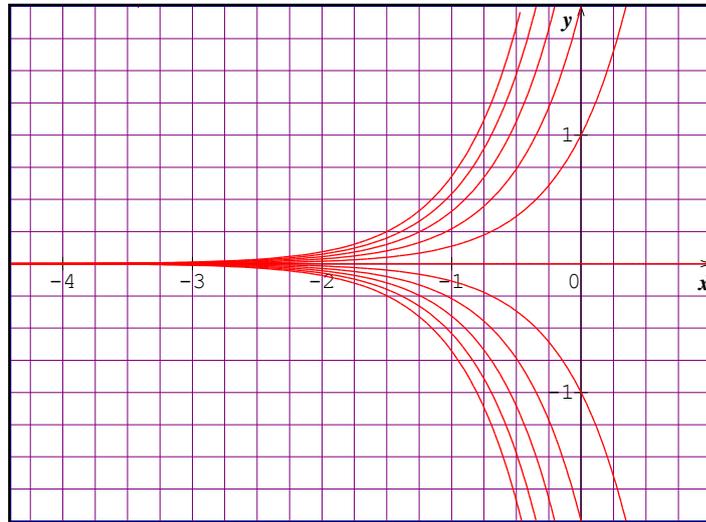
$$g'(x) = \frac{f'(x)e^{kx} - kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}} = 0, \text{ ولدينا من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R},$$

ومن الدالة  $g$  ثابتة على  $\mathbb{R}$ . بوضع  $g(x) = C$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  وبما أن  $f(x) = g(x)e^{kx}$  يكون لدينا:

$$f(x) = Ce^{kx}, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}.$$

$$2. \text{ } f'(x) - 2f(x) = 0 \text{ تعني } f'(x) = 2f(x) \text{ ومنه } f' = kf \text{ مع } k = 2.$$

الدوال  $f$  هي إذن الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = Ce^{2x}$  حيث  $C$  عدد حقيقي ثابت.



التمثيلات المقابلة هي لدوال

كما معرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = Ce^{2x} \text{ يلي:}$$

$$3. \text{ نبحث إذن عن الدالة } f \text{ حيث } f(x) = Ce^{2x} \text{ مع } f\left(\frac{1}{2}\right) = e^2 \text{ وبما أن } f\left(\frac{1}{2}\right) = Ce^{2 \cdot \frac{1}{2}} = C \times e$$

$$\text{يكون لدينا } C \times e = e^2 \text{ أي } C = e \text{ ومنه } f(x) = e \times e^{2x} = e^{2x+1}$$

إذن الدالة الوحيدة  $f$  حيث  $f'(x) - 2f(x) = 0$  والتي يمر منحناها البياني من النقطة  $A\left(\frac{1}{2}; e^2\right)$  هي الدالة:

$$x \mapsto e^{2x+1}$$

13

# 3 تمارين وحلولها

## التدريب الأول

(I) لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالشكل:  $g(x) = 1 + x + e^x$

1 / ادرس تغيرات الدالة  $g$

2 / برهن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في  $\mathbb{R}$  حلا وحيدا  $\alpha$ . تحقق أن  $\alpha$  من المجال  $]-1.3; -1.2[$ .

3 / حدد تبعا لقيم  $x$  إشارة  $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة  $g(-x)$ .

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$  نسي  $(\Gamma)$  المنحنى البياني لها .

1 / أ. أكتب  $f'(x)$  بدلالة  $g(x)$  ثم ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

ب. برهن أن  $f(\alpha) = 1 + \alpha$ .

ج. برهن أن المنحنى  $(\Gamma)$  يقبل مستقيما مقاربا  $(\Delta)$  معادلته:  $y = x$ .

د. اكتب معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(\Gamma)$  عند النقطة  $O$  مبدأ المعلم، ثم ادرس وضعية المنحنى  $(\Gamma)$  بالنسبة للمماس  $(T)$ .

هـ. ارسم في معلم متعامد ومتجانس  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  المنحنى  $(\Gamma)$  و  $(\Delta)$  (تؤخذ  $2cm$  كوحدة).

2 /  $H$  نقطة فاصلتها  $x$  (حيث  $x > 0$ ) وترتيبها معدوم، المستقيم الموازي للمحور  $(yy')$  والمار من  $H$  يقطع  $(\Gamma)$  في

النقطة  $M$  ويقطع المقارب  $(\Delta)$  في النقطة  $N$ ، نضع  $\varphi(x) = MN$ .

أ. بين أن  $\varphi(x) = \frac{x}{1+e^x}$ .

ب. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $\varphi'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cdot g(-x)$ .

واستنتج أن  $MN$  يكون أكبر ما يمكن عندما  $x = -\alpha$ .

ج. برهن أن  $f(-\alpha) = 1$ .

د. برهن أن المماس للمنحنى  $(\Gamma)$  عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $(-\alpha)$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$ . اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

3 / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة التالية:  $me^x + m + x = 0$ .

4 / برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x \geq 1$  لدينا:  $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$ .

I. نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $g(x) = 2 + (x-2)e^{-x+2}$ .

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$ .

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.14 < \alpha < 1.15$ .

(3) استنتج إشارة  $g(x)$  عندما يتغير  $x$  في  $\mathbb{R}$ .

II. نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$ .

نسي  $(\mathcal{C}_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(2) بين أن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

## التدريب الثاني

(3) أ) بين أن:  $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$  ثم إستنتج حصرا لـ  $f(\alpha)$ .

ب) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = 2x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

ج) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$  يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

د) أحسب  $f(0)$  و  $f(2)$  ثم أنشئ  $(\Delta)$ ،  $(T)$  و  $(C_f)$ .

(4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  التالية:  
 $(E): 2m - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 0$ .

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ .

حيث  $a$ ؛  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1- عين الأعداد الحقيقية  $a$ ؛  $b$  و  $c$  بحيث يقبل  $(C_f)$  عند النقطة  $A(0; -3)$  مماسا معامل توجيهه 3 و

العدد  $\sqrt{3}$  حل للمعادلة  $f(x) = 0$ .

2- نضع  $a = 1$ ،  $b = 0$ ،  $c = -3$ .

أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x = 0$  ثم عين إحداثيات نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل.

4- أرسم  $(T)$  و  $(C_f)$ .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ .

6-  $m$  وسيط حقيقي؛ ناقش بيانيا وحسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $x^2 - 3 + me^x = 0$ .

I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  ب:  $g(x) = x + 2 - e^x$ .

(1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  على  $[0; +\infty[$ ، و عين نهاية  $g$  عند  $+\infty$ .

(2) أ) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  على  $[0; +\infty[$ .

ب) تحقق أن:  $1,14 < \alpha < 1,15$ .

ج) إستنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$ .

II) نعرّف على المجال  $[0; +\infty[$  الدالة  $f$  كما يلي:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، وليكن  $(C_f)$  منحناها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(1) أ) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ :  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$ .

ب) إستنتج نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ .

(2) أ) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ .

ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $[0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

### التمرين الثالث

### التمرين الرابع

ج) بين أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$  ، ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$  .

3) أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحني  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $f(x) - x = \frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1}$  ، حيث :

$$u(x) = e^x - xe^x - 1$$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة  $u$  على  $[0; +\infty[$  ، ثم استنتج إشارة  $u(x)$  .

ج) استنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(T)$  .

د) أنشئ كلا من  $(T)$  و المنحني  $(C_f)$  ،

1)  $g(x) = x^2 e^x$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :

أ\* / أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

ب\* / استنتج أنه : إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$  و إذا كان  $x > 1$  فإن  $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$h$  دالة عددية معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ  $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$  .  $(C_h)$  تمثيلها البياني (أنظر في الأسفل)

أ\* / أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

ب\* / بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$  ، ثم احسب  $f'(1)$  .

ج\* / شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

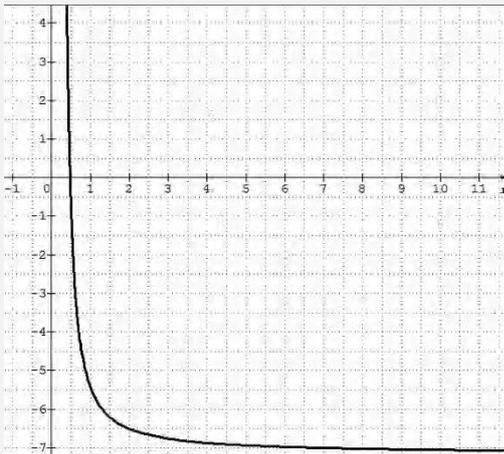
3) أ\* / بين أن المعادلة:  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $1.5 < \beta < 1.6$

و  $0.5 < \alpha < 0.6$  ، ثم استنتج أن المنحني  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب\* / أدرس وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة للمنحني  $(C_h)$  .

ج\* / بين ان المنحني  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

4) أ\* / أرسم  $(T)$  و  $(C_f)$  .



1. لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = (1-x)e^x - 1$ .

أ- أدرس تغيرات الدالة  $g$  واستنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

ب- بين ان الدالة  $k$  حيث:  $k(x) = (2-x)e^x - x$  دالة أصلية للدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

ج- استنتج حساب  $\int_0^1 g(x)dx$ .

2.  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :

$f(0) = 1$  ومن أجل كل يختلف عن الصفر:  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوى منسوب الى معلم

المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . أ- أثبت أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ب- عين نهاية الدالة  $f$  عند 0، ثم استنتج أن  $f$  مستمرة عند الصفر من اليمين .

ج- عين نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  . فسر النتيجة هندسيا.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$  .

ب- استنتج تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

ج- أرسم المنحنى  $(C_f)$  .

4. لتكن المتتالية  $(u_n)$  معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ب:  $u_n = \frac{1}{n} \left[ 1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right]$

أ- برهن أن:  $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$  ثم استنتج أن:  $u_n = (e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$

ب- استنتج باستعمال الجزء الأول من التمرين أيضا، أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو  $e-1$

1.  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $f(x) = a + bxe^{-x}$ .

الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

بقراءة بيانية عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$ .

2. نعتبر  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 1 - xe^{-x}$  .

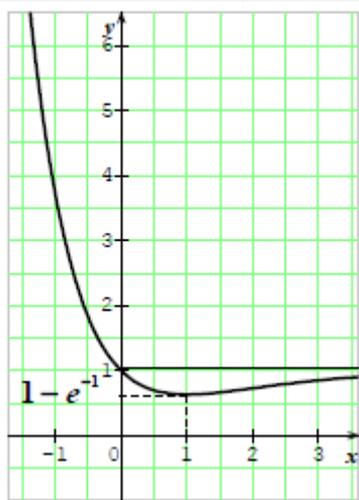
1. احسب نهايات الدالة  $g$  عند حدود مجموعة تعريفها.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .

3. شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  .

4. أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_g)$  عند النقطة التي ترتيبها 1.

5. بين أن المنحنى  $(C_g)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.



1. نذكر أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  ، أثبت أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

2. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (x+1)e^{-x}$  .

$(C)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

1. أ- احسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  .

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.

2.أرسم  $(C)$ .

III.  $k$  عدد صحيح،  $f_k$  نسي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$ .

و  $(C_k)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1.أ-ماتبيعة الدالة  $f_0$ .

ب-عين نقط تقاطع المنحنين  $(C_0)$  و  $(C_1)$ . تحقق أن هذه النقطة تنتهي الى  $(C_k)$ .

2.أدرس، حسب قيم  $x$  اشارة العبارة:  $(x+1)(e^x - 1)$  استنتج، من أجل عدد  $k$  معطى، الوضعية النسبية للمنحنين

$(C_k)$  و  $(C_{k+1})$ .

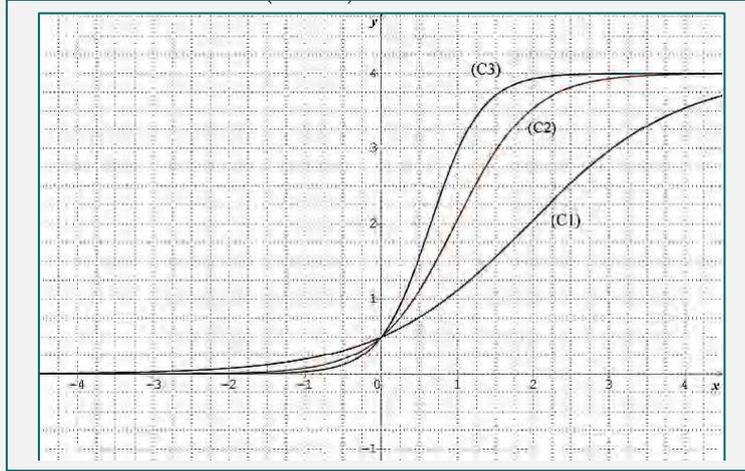
3.احسب  $f'_k(x)$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد صحيح  $k$  غير معدوم.

استنتج حسب قيم  $k$  اتجاه تغير الدالة  $f_k$  (ميز الحالتين  $k > 0$  و  $k < 0$ )

في نفس المعلم السابق.  $(C_1)$ .4.أرسم

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم، نعرف الدالة  $f_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$  نرمز للمنحنى  $(C_n)$

الممثل للدالة  $f_n$  في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، اليك  $(C_1)$ ،  $(C_2)$  و  $(C_3)$ :



**الجزء الأول:** لتكن الدالة  $f_1$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعبارة:  $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

1.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$

2.أبين أن للمنحنى  $(C_1)$  مستقيمين مقارين يطلب ايجاد معادلتيهما

ب-بين أن الدالة  $f_1$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

ج-أثبت أنه من أجل كل  $x$  عدد حقيقي،  $0 < f_1(x) < 4$ .

3.أبين أن النقطة  $I_1(\ln 7; 2)$  مركز تناظر للمنحنى  $(C_1)$ .

ب-أوجد معادلة المماس  $(T_1)$  للمنحنى  $(C_1)$  عند النقطة  $I_1$ .

ج-أرسم المماس  $(T_1)$ .

4.أعين دالة أصلية للدالة  $f_1$  على  $\mathbb{R}$ .

ب-احسب القيمة المتوسطة للدالة  $f_1$  على المجال  $[0; \ln 7]$ .

**الجزء الثاني:** 1.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم النقطة  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  تنتهي للمنحنى  $(C_n)$ .

2.أبين أنه مهما تغيرت قيمة  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  فإن المستقيم ذا المعادلة  $y = 2$  يقطع  $(C_n)$  في نقطة وحيدة  $I_n$  يطلب تعيين

فاصلتها.

ب- حدد معادلة المماس ( $T_n$ ) للمنحنى ( $C_n$ ) عند النقطة  $I_n$  .  
ج- أرسم ( $T_2$ ) و ( $T_3$ ) .

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$  و ( $C$ ) المنحنى الممثل للدالة في معلم

متعامد و متجانس ( $O; \vec{i}, \vec{j}$ ) . (الوحدة 2cm)

1. بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  و أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  .

2. أبرهن أن المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته  $y = -x + \frac{5}{2}$  مقارب للمنحنى ( $C$ ) بجوار  $-\infty$  .

ب- حل المعادلة  $e^{x-2} - 4 = 0$  ثم بين أن المنحنى ( $C$ ) يوجد فوق ( $\Delta$ ) على المجال  $]-\infty; 2 + \ln 4]$  و تحت ( $\Delta$ ) على المجال  $[2 + \ln 4; +\infty[$  .

3. بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  .

4. أـبين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$  .

ب- شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

5. أحسب من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f''(x)$  ثم بين أن  $A(2; 2)$  نقطة انعطاف للمنحنى ( $C$ ) .

6. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث ،  $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$  .

7. أنشئ ( $\Delta$ ) و ( $C$ ) في نفس المعلم (تأخذ القيمتين المقربتين التاليتين  $\ln 2 \approx 0,7$  ،  $\ln 3 \approx 1,1$ ) .

**الجزء الأول:** لتكن الدالة  $\varphi$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$  .

1. أـ عين نهايتي الدالة  $\varphi$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  .

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة  $\varphi$  ثم شكل جدول تغيراتها على  $\mathbb{R}$  .

2. بين أن المعادلة  $\varphi(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $\alpha \in [1; +\infty[$  يطلب تعيين حصر له سعته  $10^{-2}$  .

3. استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $\varphi(x)$  .

**الجزء الثاني:** التمثيلين البيانيين المقابلين ( $C_f$ ) و ( $C_g$ ) هما للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = (2x+1)e^{-x} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

1. بين أن المنحنيين ( $C_f$ ) و ( $C_g$ ) يمران بالنقطة  $A(0; 1)$

ولهما نفس معادلة المماس عند النقطة  $A$

2. أـبين ان من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$  .

ب- حسب قيم  $x$  عين إشارة  $f(x) - g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين ( $C_f$ ) و ( $C_g$ ) .

1. لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$$

الجدول المقابل يمثل جدول تغيرات الدالة  $g$  .

1. تحقق من أن  $g(0) = 0$  .

2. حدد إشارة  $g(x)$  على كل من المجالين  $]-\infty; 0]$  و  $[0; +\infty[$  .

11. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$  .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

وليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة 1cm).

1.أ-تحقق من أن  $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم بين أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

ب-احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$  ثم استنتج أن المنحنى  $(C)$  يقبل مستقيم مقارب  $(D)$  بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = x$ .

ج-تحقق من أن:  $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2.أ-تحقق من أن  $f(x) - x$  و  $x^2 - x$  لهما نفس الإشارة من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ب-استنتج أن  $(C)$  يوجد فوق  $(D)$  على المجالين  $]-\infty; 0]$  و  $[1; +\infty[$  وتحت  $(D)$  على المجال  $[0; 1]$ .

3.أ-بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $f'(x) = g(x)e^{-x}$ .

ب-استنتج أن الدالة  $f$  متناقصة على  $]-\infty; 0]$  و متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$ .

ج-شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

4.أ-تحقق من أن  $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ب-استنتج أن المنحنى  $(C)$  يقبل نقطتي انعطاف فواصلهما 1 و 4 على الترتيب.

5.أنشئ  $(D)$  و  $(C)$  في نفس المعلم (تأخذ  $f(4) \approx 4,2$ ).

التكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$  ( $C_f$ ) و تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x - 1)]$  ، فسر النتيجة هندسيا.

2.أدرس تغيرات الدالة  $f$  ، ثم شكل جدو تغيراتها.

3.بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث  $-1,3 < \alpha < -1,2$  و  $0,2 < \beta < 0,3$ .

4.أرسم المنحنى  $(C_f)$ .

II. نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي:  $u_n = e^{-2n-1}$  و  $v_n = 3n - 1$ .

1.بين أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية و أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية.

2.أدرس اتجاه تغير المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$ .

3.المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان ؟ علل اجابتك.

4. احسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  بحيث:  $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ .

ب-احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$ .

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = xe^{1-x}$ .

1.بين أنه من أجل كل  $x$  عدد حقيقي،  $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$ .

2. عين نهاية الدالة عند  $-\infty$  و  $+\infty$  عند ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

II. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم و نعتبر الدالتان  $g_n$  و  $h_n$  المعرفتان على:

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad \text{و} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}$$

1.بين انه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$ .

$$h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, \text{ 2. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن } 1,$$

$$3. \text{ نضع } S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

أ- احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  ب- احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

### الجزء الأول :

لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1. أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$ .

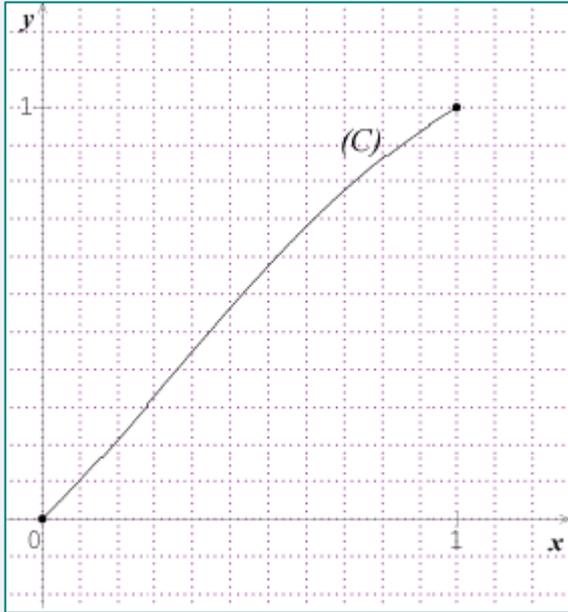
2. عين حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

3. استنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  ،  $e^x - x > 0$ .

### الجزء الثاني:

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; 1]$  كما يلي:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  كما هو موضح في الشكل المقابل :



1. بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$  ،  $f(x) \in [0; 1]$ .

2. ليكن (D) المستقيم ذا المعادلة  $y = x$ .

أبين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$  ،

$$f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$$

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D).

3. عين دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; 1]$ .

ب- احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم (D)

و المستقيمت التي معادلاتها:  $x=0$  و  $x=1$ .

**الجزء الثالث:** نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بالعلاقة:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

1. باستعمال الشكل السابق مثل الحدود الأربعة الأولى دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل.

2. بين أنه من أجل عدد طبيعي  $n$  ،  $\frac{1}{2} < u_n < u_{n+1} < 1$ .

3. استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ثم عين نهايتها.

$g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = 1 + x + e^x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$g'(x) = 1 + e^x > 0$  : قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$

\* جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2/ نبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حل وحيد في  $\mathbb{R}$ :

\*  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حل

وحيد  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ .

\* لدينا:  $g(-1.2)g(-1.3) = (-0.03)(0.10) < 0$

ومنه  $-1.3 < \alpha < -1.2$

3/ إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

\* استنتاج إشارة  $g(-x)$ :

$g(-x) = 0$  معناه  $-x = \alpha$  ومنه  $x = -\alpha$ .

$g(-x) < 0$  معناه  $-x < \alpha$  ومنه  $x > -\alpha$ .

ومنه:

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-

11)  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$

أ.  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(1+e^x) - e^x(xe^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x \cdot g(x)}{(1+e^x)^2}$$

ومنه إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  لأن:  $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

إذن: الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha]$

ومتزايدة تماما على المجال  $[\alpha; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{1+e^x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^*$$

جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

ب) نبرهن أن  $f(\alpha) = 1 + \alpha$  : لدينا  $g(\alpha) = 0$  معناه:  $1 + \alpha + e^\alpha = 0$  أي:  $e^\alpha = -(1 + \alpha)$  نعوض نجد:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{1 + e^\alpha} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{1 - \alpha - 1} = 1 + \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-x}{1 + e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{e^x} \left( \frac{-1}{e^{-x} + 1} \right) \right] = 0$$

ج) نبرهن أن  $(\Gamma)$  يقبل مستقيماً مقارباً  $(\Delta)$  معادلته  $y = x$  :

د) كتابة معادلة المماس  $(T)$  لـ  $(\Gamma)$  عند مبدأ المعلم:  $(T): y = \frac{1}{2}x$

$$* \text{الوضعية: ندرس إشارة الفرق } f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$$

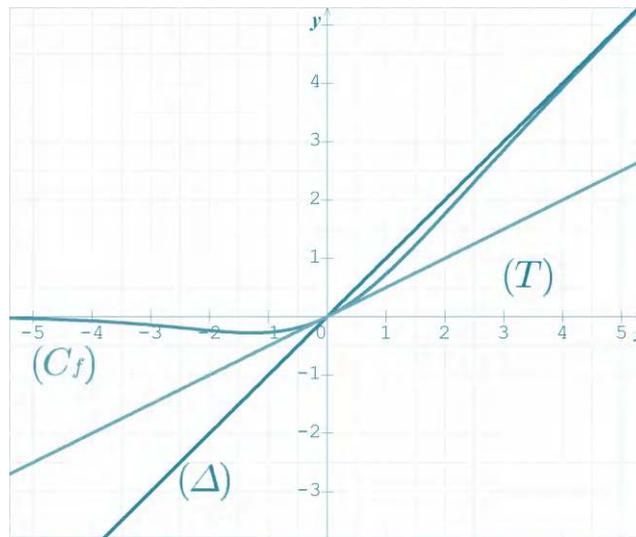
من إشارة الجداء  $x(e^x - 1)$  نجد :

من أجل  $x < 0$  المنحنى  $(\Gamma)$  فوق المستقيم  $(T)$ .

من أجل  $x > 0$  المنحنى  $(\Gamma)$  فوق المستقيم  $(T)$ .

من أجل  $x = 0$  يتقاطعان في النقطة  $(0; 0)$

هـ. الرسم



$$\cdot \varphi(x) = MN = |x - f(x)| = \frac{x}{1 + e^x} \quad (1/2)$$

$$\varphi'(x) = \frac{(1+e^x) - xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(e^{-x} + 1 - x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x \cdot g(-x)}{(1+e^x)^2}$$

(ب) من أجل  $x > 0$  الدالة  $\varphi$  قابلة للإشتقاق :

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$\psi'(x)$	+	-	

إشارة  $\varphi'(x)$  من إشارة  $g(-x)$  ومنه

نستنتج أن  $\varphi(x)$  تقبل قيمة حدية عظمى من أجل  $x = -\alpha$  .  
ومنه

$$MN = \varphi(-\alpha) = \frac{-\alpha}{1+e^{-\alpha}}$$

(ج) نبرهن أن  $f(-\alpha) = 1$  :

$$f(-\alpha) = \frac{-\alpha e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}} = \frac{-\alpha}{e^{\alpha} + 1} = \frac{-\alpha}{-1 - \alpha + 1} = 1$$

$$f'(-\alpha) = \frac{e^{-\alpha} \cdot g(-\alpha)}{(1+e^{-\alpha})^2} = \frac{e^{-\alpha}(1-\alpha+e^{-\alpha})}{e^{-2\alpha} + 2e^{-\alpha} + 1} : (\Delta)$$

ولدينا  $e^{\alpha} = -1 - \alpha$  نعوض نجد:

$$f'(-\alpha) = \frac{e^{-2\alpha}(e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} + 1)}{e^{-2\alpha}(1 + 2e^{\alpha} + e^{2\alpha})} = \frac{-1 - \alpha - \alpha(-1 - \alpha) + 1}{1 + 2(-1 - \alpha) + (-1 - \alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$$

معادلته:  $y = x + \alpha + 1$  :  $(\Delta')$

3/ مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة حسب قيم الوسيط  $m$  :

$$m = \frac{-x}{(e^x + 1)} \quad \text{يكافئ} \quad me^x + m + x = 0$$

$$f(x) = x + m \quad \text{معناه} \quad m + x = \frac{-x}{1+e^x} + x$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = x + m$  الموازي لـ  $(\Delta')$  و  $(\Delta)$  :

$$* ]-\infty; \alpha + 1[ : m \in \text{المعادلة لا تقبل حلول}$$

$$* m = \alpha + 1 : \text{المعادلة تقبل حل مضاعف موجب}$$

$$* ]\alpha + 1; 0[ : m \in \text{المعادلة تقبل حلين متميزين موجبين تماما .}$$

$$* m = 0 : \text{المعادلة تقبل حل وحيد معدوم}$$

$$* ]0; +\infty[ : m \in \text{المعادلة تقبل حل وحيد سالب تماما .}$$

4/ البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x \geq 1$  لدينا  $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$  : ندرس إشارة الفرق نجد:

$$(1) \dots f(x) \leq x : \text{معناه} \quad f(x) - x = \frac{xe^x}{1+e^x} - x = \frac{-x}{1+e^x} \leq 0$$

$$\text{من جهة أخرى ندرس إشارة الفرق: } f(x) - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{xe^x - e^x}{1+e^x} = \frac{e^x(x-1)}{1+e^x} \geq 0$$

$$(2) \dots f(x) \geq \frac{e^x}{1+e^x} : x \geq 1$$

من (1) و (2) نجد: من أجل  $x \geq 1$   $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$

I. لدينا  $g(x) = 2 + (x-2)e^{-x+2}$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

(1) دراسة تغيرات الدالة  $g$ :

- حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^{-x+2} = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + (x-2)e^{-x+2}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{e^{x-2}} = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + (x-2)e^{-x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{x-2}{e^{x-2}} \right) = 2$$

حساب المشتقة:

$$g'(x) = (3-x)e^{-x+2} \quad \text{أي} \quad g'(x) = e^{-x+2} + (x-2)(-e^{-x+2}) = (1-x+2)e^{-x+2} = (3-x)e^{-x+2}$$

دراسة إشارة المشتقة:

$$g'(x) = 0 \quad \text{يعني} \quad (3-x)e^{-x+2} = 0 \quad \text{ومنه} \quad 3-x=0 \quad \text{لأن} \quad e^{-x+2} \neq 0$$

$$\text{أي} \quad x=3$$

جدول إشارة المشتقة: إشارة المشتقة من إشارة  $3-x$  لأن  $e^{-x+2} > 0$

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$3-x$		+	-
$g'(x)$		+	-

جدول تغيرات الدالة  $g$ :

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	$2-e^{-1}$	2

(2) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.14 < \alpha < 1.15$ :

الدالة  $g$  مستمرة ورتبية تماما على المجال  $[1.14; 1.15]$

$$\text{ولدينا:} \quad \begin{cases} g(1.14) = 2 + (1.14-2)e^{-1.14+2} = -0.03 \\ g(1.15) = 2 + (1.15-2)e^{-1.15+2} = 0.01 \end{cases} \quad \text{أي} \quad g(1.14) \times g(1.15) < 0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.14 < \alpha < 1.15$ .

(3) إستنتاج إشارة  $g(x)$  عندما يتغير  $x$  في  $\mathbb{R}$ :

$x \in$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		-	+

$$x \in ]-\infty; \alpha[ \text{ إذا كان } g(x) < 0$$

$$. x = \alpha \text{ إذا كان } g(x) = 0$$

$$. x \in ]\alpha; +\infty[ \text{ إذا كان } g(x) > 0$$

**II** لدينا الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 2x \left( 1 - \frac{1}{2x} - \left( \frac{x-1}{2x} \right) e^{-x+2} \right) \right] = +\infty \text{ لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2x - 1 - \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{e^{x-2}} \right] = +\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{e^{x-2}} = 0 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x-2} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{e^{x-2}} = 0$$

(2) تبيان أن : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = g(x)$  :

$$f'(x) = 2 - [e^{-x+2} - (x-1)e^{-x+2}] = 2 - (2-x)e^{-x+2} = 2 + (x-2)e^{-x+2} = g(x) \text{ لدينا :}$$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x \in$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) أ) تبيان أن :  $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha-2}$  ثم إستنتاج حصر  $f(\alpha)$  :

$$\text{لدينا : } f(\alpha) = 2\alpha - 1 - (\alpha-1)e^{-\alpha+2}$$

$$\text{لدينا : } g(\alpha) = 0 \text{ ومنه } 2 + (\alpha-2)e^{-\alpha+2} = 0 \text{ أي } e^{-\alpha+2} = -\frac{2}{\alpha-2}$$

$$\text{إذن : } f(\alpha) = 2\alpha - 1 - (\alpha-1) \left( \frac{-2}{\alpha-2} \right) = 2\alpha - 1 + \frac{2\alpha-2}{\alpha-2} = 2\alpha - 1 + 2 + \frac{2}{\alpha-2}$$

$$\text{إذن } f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha-2}$$

حصر  $f(\alpha)$  :

$$1.14 - 2 < \alpha - 2 < 1.15 - 2$$

$$-0.86 < \alpha - 2 < -0.85$$

$$2 \times 1.14 + 1 < 2\alpha + 1 < 2 \times 1.15 + 1$$

$$3.28 < 2\alpha + 1 < 3.30$$

و

$$\frac{2}{-0.85} < \frac{2}{\alpha-2} < \frac{2}{-0.86}$$

لدينا :  $1.14 < \alpha < 1.15$  ومنه

$$-2.35 < \frac{2}{\alpha-2} < -2.32$$

وبالتالي  $3.28 - 2.35 < 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2} < 3.30 - 2.32$  أي  $0.93 < f(\alpha) < 0.98$

(ب) تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = 2x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ :

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2} - (2x - 1)]$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(x - 1)e^{-x+2}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{e^{x-2}} \right] = 0$

أي المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = 2x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

دراسة الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ :

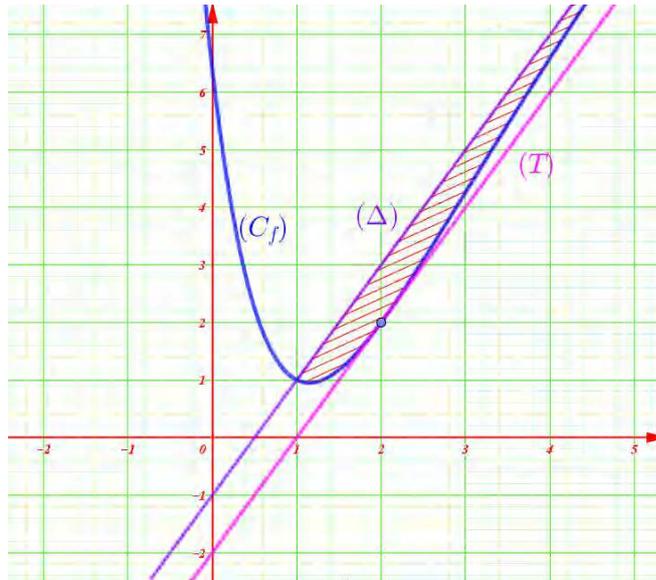
ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y = -(x - 1)e^{-x+2}$

$x \in$	$-\infty$	$1$	$+\infty$	
$x - 1$		-	0	+
$f(x) - y$		+	0	-
الوضع النسبي		(C <sub>f</sub> ) يقطع (Δ)		(C <sub>f</sub> ) تحت (Δ)

(د) حساب  $f(0)$  و  $f(2)$  ثم أنشاء  $(\Delta)$ ،  $(T)$  و  $(C_f)$ :

$f(0) = 2 \times 0 - 1 - (0 - 1)e^{2-0} = -1 + e^2 \approx 6.39$

$f(2) = 2 \times 2 - 1 + (2 - 1)e^{2-2} = 2$



(4) مناقشة حلول المعادلة :  $(E): 2m - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 0$

$$(E) \quad \text{تكافئ} \quad -1 - (x - 1)e^{-x+2} = -2m$$

$$\text{تكافئ} \quad 2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 2x - 2m$$

$$\text{ومنه} \quad f(x) = 2x - 2m$$

حلول المعادلة هي فواصل النقاط المشتركة بين  $(C_f)$  والمستقيم ذي المعادلة  $y = 2x - 2m$  الموازي لكل من  $(\Delta)$  و  $(T)$ .

- إذا كان  $[-\infty; -2]$  أي  $-2m \in [-\infty; -2]$  فإن المعادلة ليس لها حل .  
- إذا كان  $-2m = -2$  أي  $m = 1$  فإن المعادلة لها حل وحيد موجب .

- إذا كان  $[-2; -1]$  أي  $-2m \in [-2; -1]$  فإن المعادلة تقبل حلين موجبين .

- إذا كان  $[-1; -1 + e^2]$  أي  $-2m \in [-1; -1 + e^2]$  فإن المعادلة لها حل موجب .

إذا كان  $-2m = -1 + e^2$  أي  $m = \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}$  فإن المعادلة لها حل معدوم .

- إذا كان  $[-1 + e^2; +\infty]$  أي  $-2m \in [-1 + e^2; +\infty]$  فإن المعادلة لها حل وحيد سالب .

### 3

1- تعيين الأعداد الحقيقية  $a$  :  $b$  و  $c$  :  $a = 1$  و  $b = 0$  و  $a = -3$

$$2- \dots f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  : المشتقة :  $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$  إشارتها من إشارة  $(-x^2 + 2x + 3)$  تنعدم عند العددين 3 و -1 ومنه  $f$  متناقصة على المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $[3; +\infty[$  متزايدة على المجال  $[-1; 3]$  وشكل جدول تغيراتها :

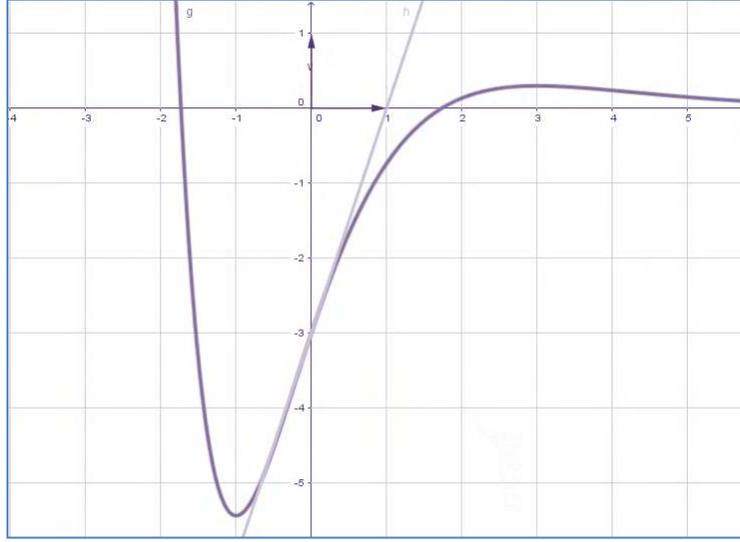
$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	$0$

3- كتابة معادلة  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x = 0$  معادلة المماس هي  $y = 3x - 3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل

$$f(x) = 0 \text{ يكافئ } x^2 - 3 = 0 \text{ اي ان } x = \sqrt{3} \text{ او } x = -\sqrt{3} \text{ نقطتي التقاطع هما } B(\sqrt{3}; 0) \text{ و } C(-\sqrt{3}; 0)$$

4- رسم  $(T)$  و  $(C_f)$



كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن

5- تبين أنه من أجل

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ و } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي ان } f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x} \text{ ومنه}$$

6-  $m$  وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $x^2 - 3 + me^x = 0$

$$\text{المعادلة تكافئ } me^x = -(x^2 - 3) \text{ أي ان } -m = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ يكافئ } -m = f(x)$$

$$\text{حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى } (C_f) \text{ المستقيم } (\Delta_m) \text{ ذو المعادلة } y = -m$$

المناقشة

لما  $-m < -2e$  أي ان  $m > 2e$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول .

لما  $-m = -2e$  أي ان  $m = 2e$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما  $-m > -2e$  أي ان  $3 < m < 2e$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما  $-m = -3$  أي ان  $m = 3$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة والأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم والأخر سالب .

لما  $-m > -3$  أي ان  $0 \leq m < 3$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

لما  $-m > 0$  أي ان  $-\frac{6}{e^3} < m < 0$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما  $-m = \frac{6}{e^3}$  أي أن  $m = -\frac{6}{e^3}$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما  $-m > \frac{6}{e^3}$  أي ان  $m < -\frac{6}{e^3}$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

# 4

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  :

جدول التغيرات الدالة  $g$  :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	1	$-\infty$

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $[0; +\infty[$  ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = 1 - e^x$$

نلاحظ أنه من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  :  $g'(x) \leq 0$  .

الخلاصة: الدالة  $g$  متناقصة على  $[0; +\infty[$  .

- حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$$

(3) تبيان أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على  $[0; +\infty[$  :

الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة تماما على  $[0; +\infty[$  ولدينا،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) < 0$  وبالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد

عدد حقيقي  $\alpha$  من  $[0; +\infty[$  حيث  $g(\alpha) = 0$  .

(ب) التحقق أن  $1,14 < \alpha < 1,15$  : بما أن  $\left\{ \begin{array}{l} g(1,14) = 0,01 \\ g(1,15) = -0,008 \end{array} \right.$  أي  $g(1,14) \times g(1,15) < 0$  ، فإن  $g(x) = 0$  تقبل حل وحيد

$\alpha$  على  $]1,14; 1,15[$  ، إذن  $1,14 < \alpha < 1,15$  .

(4) إشارة  $g(x)$  :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		+	-

لدينا  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$  :

(1) أ) بيان أنه من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

لدينا:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$  ، إذن  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$  ، وهو المطلوب .

(ب) إستنتاج نهاية  $f$  عند  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \right)$$

نضع  $\begin{cases} -x = t \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{cases}$  ، أي  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \left( \frac{1 - e^t}{-t + e^t} \right) = 0$  ، لأن  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-t} = 0 \end{cases}$  .

(2) أ) بيان أنه من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $[0; +\infty[$  ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x (xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{xe^x + 2e^x - e^{2x}}{(xe^x + 1)^2}$$

أي :  $f'(x) = \frac{e^x \times (x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2}$  ، ومنه :  $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x+1)^2}$  ، وهو المطلوب .

(ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة  $f$  ، وتشكيل جدول تغيّراتها :

نلاحظ أنّ إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  .

- الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $[0; \alpha[$

- الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]\alpha; +\infty[$

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-

جدول التغيرات

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

(ج) بيان أنّ :  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$  ، واستنتاج حصر ل  $f(\alpha)$  :

لدينا :  $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$  ، ولدينا أيضا :  $g(\alpha) = 0$  ، أي :  $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$  ، أي :  $e^\alpha = \alpha + 2$  ، الآن نعوض قيمة  $e^\alpha$  في  $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \text{ ، ومنه : } f(\alpha) = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}$$

- إستنتاج حصر ل  $f(\alpha)$  : لدينا  $1,14 < \alpha < 1,15$  ، أي :  $2,14 < \alpha+1 < 2,15$  ، أي :  $\frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2,14}$

ومنه :  $0,465 < f(\alpha) < 0,467$  .

(3) كتابة معادلة المماس  $(T)$  ل  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ لأن } \boxed{\phantom{0000}} \quad (T): y = x \text{ ، أي : } (T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

(4) أ) التحقق أنّه من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  :  $f(x) - x = \frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x+1}$

$$\text{لدينا : } u(x) = e^x - xe^x - 1 \text{ ، } f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x(xe^x + 1)}{xe^x + 1} = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$$

$$\text{ومنّه : } f(x) - x = \frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1}$$

(ب) دراسة إتجاه تغيّر الدالة  $u$  ، واستنتاج إشارة  $u(x)$  :

الدالة  $u$  قابلة للإشتقاق على  $[0; +\infty[$  :  $u'(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x$  ، ومنه :  $u'(x) \leq 0$

إذن  $u$  متناقصة تماما على  $[0; +\infty[$  ، ولدينا أيضا :  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \\ u(0) = 0 \end{cases}$  ، من هذا وذاك نستنتج أن :  $u(x) \leq 0$  من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  .

$x$	0	$+\infty$
$(x+1)$		+
$u(x)$		-
$(x+1)u(x)$		-
الوضعية	$(C_f)$ يقع تحت $(T)$ $(T)$ يمس $(C_f)$	

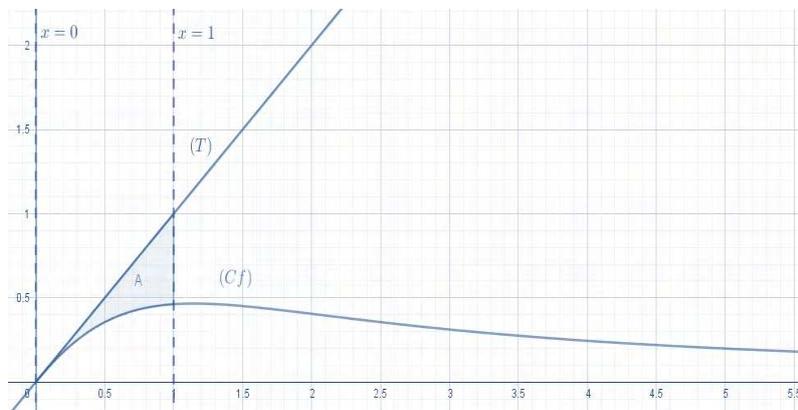
ج) إستنتاج الوضعية النسبية للمنحني  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(T)$  :  
 لاستنتاج وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(T)$  يكفي دراسة إشارة :

$$\frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$$

لدينا من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  :  $xe^x + 1 \geq 0$  ، إذن الإشارة من إشارة  $(x+1)u(x)$  .

إذن نلخص الوضعية في الجدول المقابل .

د) رسم كلا من  $(T)$  و المنحني  $(C_f)$  :



## 5.

1) معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 e^x$

أ\*/ دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$  : الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  :  $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x$

بما ان  $g'(x) > 0$  فإن الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$

ب\*/ استنتاج أنه : إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

وإذا كان  $x > 1$  فإن  $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $x < \frac{1}{x}$  ولدينا  $g$  متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$  ، فإن  $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان  $x > 1$  فإن  $x > \frac{1}{x}$  ولدينا  $g$  متزايدة تماما على

$]0; +\infty[$  ، فإن  $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

(2)  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  :  $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

أ\* / حساب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب\* / نبين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$  ، ثم حساب  $f'(1)$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  دالتها المشتقة  $f'$  :

$$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ومنه: } f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

ج\* / تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

إشارة  $f'(x)$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-e = -2.71$	$+\infty$

$f$  متزايدة تماما على  $]1; +\infty[$

$f$  متناقصة تماما على  $]0; 1]$

وبالتالي جدول التغيرات هو كالتالي:

(3) أ\* / نبين أن المعادلة:  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $1.5 < \beta < 1.6$  و  $0.5 < \alpha < 0.6$

$$(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0 \text{ تكافئ } (x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$$

تكافئ  $f(x) = 0$  ، لدينا:  $f(0.5) \approx 1.25$  ،  $f(0.6) \approx -0.74$  ، بما ان الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على  $]0.5; 0.6]$

$f(0.6) \times f(0.5) < 0$  فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  حيث:  $0.5 < \alpha < 0.6$  ،  $f(\alpha) = 0$

لدينا:  $f(1.5) \approx -0.60$  ،  $f(1.6) \approx 0.44$  ، بما ان الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على  $[1.5; 1.6]$

$f(1.5) \times f(1.6) < 0$  فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$  تقبل حل وحيد  $\beta$  حيث:  $1.5 < \beta < 1.6$  ،  $f(\beta) = 0$

\*/استنتاج أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطتين:

بما ان المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  فإن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما  $\alpha$  و  $\beta$

ب\*/ دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمنحنى  $(C_h)$ :

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$x^2 - 2x + 2 > 0$  من أجل كل  $x \in ]0; +\infty[$  لأن  $\Delta = -4$

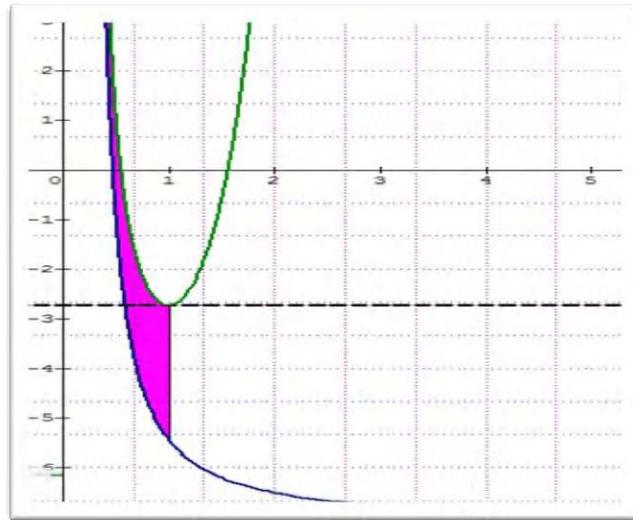
ومنه:  $(C_f)$  يقع فوق  $(C_h)$  على المجال  $]0; +\infty[$

ج\*/ نبين ان المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  في النقطة التي فاصلتها  $1$  يطلب كتابة معادلته:

بما ان الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  فإن تمثيلها  $(C_f)$  يقبل عند كل نقطة فاصلتها من  $]0; +\infty[$  مماسا

$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$  ،  $f'(1) = 0; f(1) = -e$  ومنه:  $(T): y = -e$

(4) \*رسم  $(T)$  و  $(C_f)$ :



ب\*/إيجاد قيم  $m$  حتى تقبل المعادلة ( $E$ ) حلين متميزين:

لدينا  $m$  وسيط حقيقي:

إشارة ( $m$ ):  $f$ :

$m$	0	$\alpha$	1	$E+\infty$
$f(m)$	+	0	-	- 0 +

من أجل  $m = 1$  المعادلة ( $E$ ) تقبل حلا مضاعفا .

ومنه: المعادلة ( $E$ ) تقبل حلين متميزين لما  $m \in ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$ .

6.

1. لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $[0;+\infty[$  كما يلي :  $g(x) = (1-x)e^x - 1$ .

أ- دراسة تغيرات الدالة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x - 1 = -\infty \text{ و } g(0) = 0 \text{ لدينا:}$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0;+\infty[$  حيث من أجل كل  $x$  من  $[0;+\infty[$  لدينا:  $g'(x) = -xe^x$

وبالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $[0;+\infty[$

و جمل تغيراتها يكون كالتالي:

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	$-\infty$

استنتاج إشارة  $g(x)$  على المجال  $[0;+\infty[$ .

من جدول التغيرات نلاحظ أن  $g(x) \leq 0$  على المجال  $[0;+\infty[$

ب- تبين ان الدالة  $k$  حيث:  $k(x) = (2-x)e^x - x$  دالة أصلية للدالة  $g$  على المجال  $[0;+\infty[$ .

الدالة  $k$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0;+\infty[$  حيث من أجل كل  $x$  من  $[0;+\infty[$  لدينا:  $k'(x) = (1-x)e^x - 1 = g(x)$

وبالتالي  $k$  دالة أصلية للدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

ج- استنتاج حساب  $\int_0^1 g(x)dx$ .

$$\int_0^1 g(x)dx = k(1) - k(0) = [k(x)]_0^1 = (e-1) - 2 = (e-3)ua$$

2.  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $f(0) = 1$  ومن أجل كل يختلف عن الصفر:  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ .

$$\text{أ- أثبت أن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

باستعمال خاصية العدد المشتق: نعلم أن:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+a) - g(a)}{x-a} = g'(a)$  يكفي أن نضع  $g(x) = e^x$ .

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x-0} = (e^x)'(0) = e^0 = 1$$

ب- عين نهاية الدالة  $f$  عند 0،

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)} = \frac{1}{1} = 1 \text{ اذن: } f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ أي:}$$

استنتاج أن  $f$  مستمرة عند الصفر من اليمين. لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$

ج- عين نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ . فسر النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \right)$$

نهاية شهيرة

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ومنه  $y = 0$  معادلة مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  حيث:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - e^x \times x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

ب- استنتاج تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

لدينا:  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$  ومما سبق  $g(x) \leq 0$  و  $(e^x - 1) > 0$  اذن:  $f'(x) < 0$  أي أن الدالة متناقصة تماما على  $]0; +\infty[$

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1	$-\infty$

ج- رسم المنحنى  $(C_f)$ .



4. لتكن المتتالية  $(u_n)$  معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ب:  $u_n = \frac{1}{n} \left[ 1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right]$

أ- برهن أن:  $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$

هو مجموع  $n$  حدا الأولى لمتتالية هندسة حدها الأول  $v_0 = 1$  وأساسها  $q = e^{\frac{1}{n}}$

وبالتالي:  $S_n = 1 \times \frac{1 - e^{\left(\frac{1}{n}\right)^n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1 - e^1}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$  حدد الحدود هو  $n$ .

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} \left( \frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}} \right) \quad \text{أي:} \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{لدينا:} \quad u_n = (e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$$u_n = -\frac{1}{n} \left( \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} \right) = (1-e) \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}} \right) = -(1-e) f\left(\frac{1}{n}\right)$$

ومن جهة أخرى:

$$u_n = (e-1) f\left(\frac{1}{n}\right)$$

ب-استنتاج باستعمال الجزء الأول من التمرين أيضا، أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو  $e-1$ .

بما أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  ولدينا مما سبق  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$  وبالجداء والتركيب نجد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e-1$  فالمتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو  $e-1$ .

7

1 دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $f(x) = a + bxe^{-x}$ .

$$f(x) = 1 - xe^{-x} \quad \text{اذن:} \quad \begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow a = 1 \\ f(1) = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow 1 + be^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

تعيين العددين  $a$  و  $b$ : بقراءة بيانية لدينا:

2. دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 1 + xe^{-x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + xe^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + xe^{-x} = 1 \quad \text{1. حساب نهايات الدالة } g$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ : الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ :  $g'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-1)$

لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $e^{-x} > 0$  وبالتالي إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $x-1$  أي:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	

3. جدول تغيرات الدالة  $g$ :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$1 - e^{-1}$	$+\infty$

4. كتابة معادلة المماس ( $T$ ) للمنحنى ( $C_g$ ) عند النقطة التي ترتيبها 1:

بما أن:  $g(0) = 1$  فبالتالي نكتب معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها 0:  
 $(T): y = g'(0)(x-0) + g(0)$   
 $y = -x + 1$

5. بين أن المنحنى ( $C_g$ ) يقبل نقطة انعطاف: لدينا: من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

نلاحظ أن  $g''(x)$  تنعدم وتغير من إشارتها عند 2. إذن: أي:  $\omega(2; 1 - 2e^{-2})$  نقطة انعطاف للمنحنى ( $C_g$ ).  
 $g'(x) = e^{-x}(x-1)$   
 $g''(x) = e^{-x}(2-x)$

## 8

1. اثبات أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

وبما أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0$  أي:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

11. الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (x+1)e^{-x}$ .

1.1-أحساب نهايتي الدالة  $f$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ولدينا

ب- اتجاه تغير الدالة  $f$ :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث:  $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

وبالتالي إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-x$  لأن  $e^{-x} > 0$  على  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$

جدول تغيراتها:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$0$

2. رسم (C): (أنظر الشكل في نهاية التصحيح)

iii.  $k$  عدد صحيح،  $f_k$  نسبي الدالة المعرفة  $\mathbb{R}$  على كمايلي:  $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$ .

1. أ- طبيعة الدالة  $f_0$ :  $f_0(x) = (0+1)e^{0 \cdot x} = x+1$  وبالتالي:  $f_0$  دالة تألفية.

ب- تعيين نقط تقاطع المنحنين  $(C_0)$  و  $(C_1)$ :

يعني نقوم بحل المعادلة:  $f_0(x) = f_1(x)$  أي:  $(x+1)e^x = x+1$  يعني:

$$(x+1)(e^x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ e^x - 1=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow (C_0) \cap (C_1) = \{A(-1;0), B(0;1)\}$$

التحقق أن هذه النقطة تنتمي الى  $(C_k)$  .:

لدينا:  $A(-1;0) \in (C_k)$  وبالتالي  $f_k(-1) = (-1+1)e^{-1} = 0$

وعليه لدينا:  $B(0;1) \in (C_k)$  وبالتالي  $f_k(0) = (0+1)e^0 = 1$

2. إشارة العبارة:  $(x+1)(e^x - 1)$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x+1$		$-$	$0$	$+$
$e^x - 1$		$-$	$-$	$0$
$(x+1)(e^x - 1)$	$+$	$0$	$-$	$0$

من جدول الاشارة نستنتج مايلي:

$$\text{من أجل } x = -1 \text{ و } x = 0 \text{ تكون } (x+1)(e^x - 1) = 0.$$

$$\text{من أجل } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[ \text{ تكون } (x+1)(e^x - 1) > 0.$$

$$\text{من أجل } x \in ]-1; 0[ \text{ تكون } (x+1)(e^x - 1) < 0.$$

استنتاج الوضعية النسبية للمنحنين  $(C_k)$  و  $(C_{k+1})$ :

ندرس اشارة الفرق:  $f_{k+1}(x) - f_k(x)$

$$\text{لدينا } f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} = (x+1)e^{kx}(e^x - 1)$$

نستنتج ان اشارة الفرق  $f_{k+1}(x) - f_k(x)$  من اشارة الجداء  $(x+1)(e^x - 1)$ .

مما سبق نستنتج أن: المنحنين  $(C_k)$  و  $(C_{k+1})$  يتقاطعان في النقطتين  $A(-1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ .

على المجال  $]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$  المنحنى  $(C_{k+1})$  يقع فوق المنحنى  $(C_k)$ .

على المجال  $]-1; 0[$  المنحنى  $(C_{k+1})$  يقع تحت المنحنى  $(C_k)$ .

3. حساب  $f'_k(x)$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد صحيح  $k$  غير معدوم. الدالة  $f_k$  قابلة للاشتقاق:  $f'_k(x) = (kx + k + 1)e^{kx}$

اشارة  $f'_k(x)$  من اشارة  $(kx + k + 1)$  لأن  $e^{kx} > 0$  مهما يكن  $k$  غير معدوم.

نميز الحالتين:  $k > 0$  و  $k < 0$

الحالة الأولى:  $k > 0$

$$(kx + k + 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{k+1}{k} \text{ أي:}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{k+1}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	-	0	+

اذن: من أجل  $x > -\frac{k+1}{k}$ ، الدالة  $f_k$  متزايدة تماما.

من أجل  $x < -\frac{k+1}{k}$  الدالة  $f_k$  متناقصة تماما.

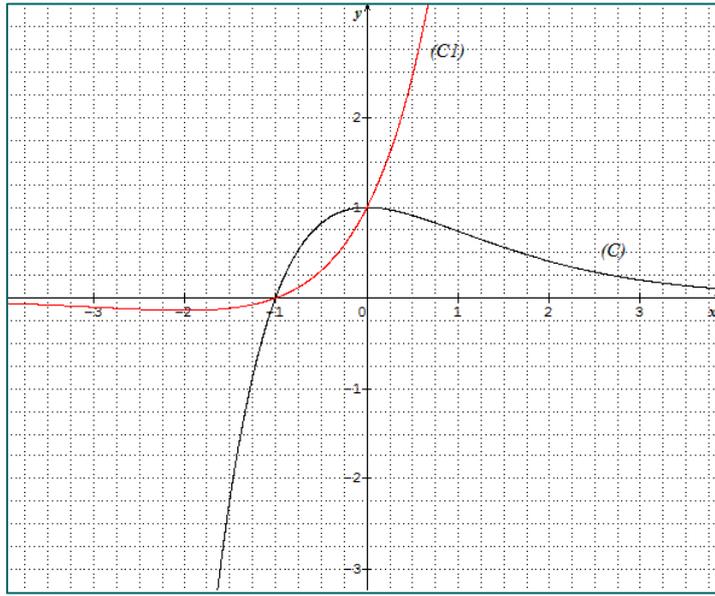
الحالة الثانية  $k < 0$ :

$x$	$-\infty$	$-\frac{k+1}{k}$	$+\infty$
$f_k'(x)$	+	0	-

اذن: من أجل  $x > -\frac{k+1}{k}$  ، الدالة  $f_k$  متناقصة تماما.

من أجل  $x < -\frac{k+1}{k}$  ، الدالة  $f_k$  متزايدة تماما.

4. أرسم  $(C)$  و  $(C_1)$ :



9

1. لتكن الدالة  $f_1$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \left( \frac{4e^x}{e^x + 7} \right) = \frac{4e^{x-x}}{e^{x-x} + 7e^{-x}} = \frac{4}{1+7e^{-x}}$$

لدينا:  $= f_1(x)$

2. أ-بين أن للمنحنى  $(C_1)$  مستقيمين مقاربين يطلب ايجاد معادلتهم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+7e^{-x}} = 4$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1+7e^{-x}} = 0$$

وبالتالي: المستقيم ذا المعادلة  $y = 4$  مقارب للمنحنى  $(C_1)$  موازي لمحور الفواصل عند  $+\infty$ .

المستقيم ذا المعادلة  $y = 0$  مقارب للمنحنى  $(C_1)$  موازي لمحور الفواصل عند  $-\infty$

ب- اثبات أن الدالة  $f_1$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي الدالة  $f_1$  قابلة للاشتقاق:

$$f_1'(x) = \left( \frac{4e^x}{e^x + 7} \right)' = \frac{4e^x(e^x + 7) - 4e^x \cdot e^x}{(e^x + 7)^2} = \frac{28e^x}{(e^x + 7)^2}$$

لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $\frac{28e^x}{(e^x + 7)^2} > 0$  وبالتالي:  $f_1'(x) > 0$  وعليه: أن الدالة  $f_1$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

يمكن استنتاج جدول تغيراتها:

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	
$f_1(x)$	0	4

ج- أثبات أنه من أجل كل  $x$  عدد حقيقي،  $0 < f_1(x) < 4$ :

لدينا الدالة  $f_1$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 4$  وبالتالي:  $0 < f_1(x) < 4$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0$

يمكن ملاحظته من خلال جدول تغيرات الدالة  $f_1$ .

3-أ- من أجل كل  $x$ ،  $(2 \ln 7 - x)$  من  $\mathbb{R}$  نثبت أنه:  $f_1(2 \ln 7 - x) + f_1(x) = 4$ .

$$\begin{aligned} f_1(2 \ln 7 - x) + f_1(x) &= \frac{4e^{2 \ln 7 - x}}{e^{2 \ln 7 - x} + 7} + \frac{4}{1 + 7e^{-x}} \\ &= \frac{4(49)e^{-x}}{49e^{-x} + 7} + \frac{4}{1 + 7e^{-x}} \\ &= \frac{28e^{-x}}{7e^{-x} + 1} + \frac{4}{1 + 7e^{-x}} \quad \text{أي:} \\ &= 4 \left( \frac{1 + 7e^{-x}}{1 + 7e^{-x}} \right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

اذن النقطة  $I_1(\ln 7; 2)$  مركز تناظر للمنحنى  $(C_1)$ :

ب- معادلة المماس  $(T_1)$  للمنحنى  $(C_1)$  عند النقطة  $I_1$ : تكتب من الشكل:

$$(T_1): y = f_1'(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$$

$$(T_1): y = (x - \ln 7) + 2$$

$$(T_1): y = x - \ln 7 + 2$$

ج- أرسم المماس  $(T_1)$ : أنظر في الأسفل

4.أ- تعين دالة أصلية للدالة  $f_1$  على  $\mathbb{R}$ :

لدينا:  $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$  نلاحظ أن اذا قمنا باشتقاق المقام سنتحصل عليه في البسط جداء 4: يعني:

$$F_1(x) = 4 \ln(e^x + 7) + c, c \in \mathbb{R} \text{ اذن } f_1(x) = \frac{4(e^x + 7)'}{e^x + 7}$$

ب- القيمة المتوسطة للدالة  $\mathbb{R}$  على المجال  $[0; \ln 7]$ .

$$m = \frac{1}{\ln 7} \int_0^{\ln 7} f_1(x) dx \text{ ومنه:}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\ln 7} [F_1(\ln 7) - F_1(0)] = \frac{1}{\ln 7} [4 \ln(e^{\ln 7} + 7) - 4 \ln(e^0 + 7)] \\ &= \frac{1}{\ln 7} [4 \ln 14 - 4 \ln 8] \\ &= \frac{4}{\ln 7} \ln \left( \frac{14}{8} \right) \\ m &= \frac{4}{\ln 7} \ln \left( \frac{7}{4} \right) \end{aligned}$$

1.II. أثبت أنه من لأجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم النقطة  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  تنتمي للمنحنى  $(C_n)$ :

يعني:  $f_n(0) = \frac{1}{2}$  (فرضية التراجع)

من أجل  $n=1$  لدينا:  $f_1(0) = \frac{4e^0}{e^0 + 7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$  . وبالتالي: محققة.

نفرض أنها محققة من كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ونثبت صحتها من أجل الرتبة  $n+1$  أي:  $f_{n+1}(0) = \frac{1}{2}$ .

لدينا:  $f_n(0) = \frac{1}{2}$  أي:  $\frac{4e^{n0}}{e^{n0} + 7} = \frac{1}{2}$  ومنه:  $\frac{4e^{(n+1)0}}{e^{(n+1)0} + 7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$  وعليه:  $f_{n+1}(0) = \frac{1}{2}$ .

اذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع لدينا: من كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم  $f_n(0) = \frac{1}{2}$  يعني: النقطة  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  تنتمي للمنحنى  $(C_n)$

ويمكن الاستنتاج أن جميع المنحنيات  $(C_n)$  تلتقي في نقطة وحيدة هي  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

2.أ- أثبات أنه مهما تغيرت قيمة  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  فان المستقيم ذا المعادلة  $y=2$  يقطع  $(C_n)$  في نقطة  $I_n$ :

نقوم بحل المعادلة :  $f_n(x) = y$  أي:

$$\begin{aligned} \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7} &= 2 \\ 4e^{nx} &= 2(e^{nx} + 7) \\ 2e^{nx} &= 14 \Leftrightarrow e^{nx} = 7 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln 7}{n} \end{aligned}$$

اذن: النقطة  $I_n$  ذات لفاصلة  $x = \frac{\ln 7}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) هي نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  مع  $(C_n)$ .

ب-معادلة المماس  $(T_n)$  للمنحنى  $(C_n)$  عند النقطة  $I_n$ :

$$f_n'(x) = \frac{28n \cdot e^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2} \quad \text{ولدينا:} \quad f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right) = n \quad \text{و} \quad f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right) = 2$$

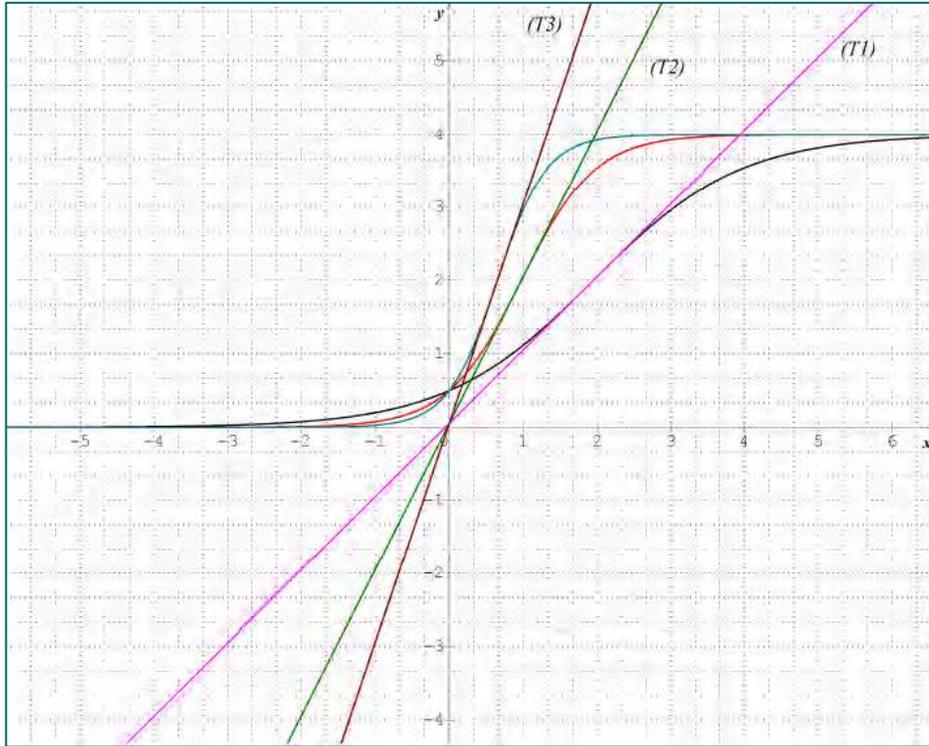
وبالتالي:  $(T_n): y = f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)$

$$(T_n): y = n\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + 2$$

ومنه نجد ما يلي:

$$(T_n): y = nx - \ln 7 + 2$$

ج-رسم  $(T_2)$  و  $(T_3)$ .



نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

.1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} - 4 = -4 \end{array} \right. \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = -\infty$$

2. أثبات أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = -x + \frac{5}{2}$  مقارب للمنحنى  $(C)$  بجوار  $-\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ب- حل المعادلة  $e^{x-2} - 4 = 0$ :

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \ln 4$$

لدراسة وضعية المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C)$  نقوم بدراسة إشارة الفرق  $f(x) - y$ .

$$f(x) - y = -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

نلخص الإشارة في الجدول التالي مما سبق:

$x$	$-\infty$	$2 + \ln 4$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$		+	0 -
الوضعية		(C) فوق $(\Delta)$	(C) تحت $(\Delta)$

$$(C) \cap (\Delta) = (2 + \ln 4; f(2 + \ln 4))$$

.3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2x}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x}e^{x-2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} - 4 = +\infty \end{cases}$$

4.4-أبين أن

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ،

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \frac{1}{2}e^{x-2} \cdot e^{x-2} \\ &= -1 - (e^{x-2})^2 + 2e^{x-2} \\ &= -[1 + (e^{x-2})^2 - 2e^{x-2}] \end{aligned}$$

ومنه لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$  .

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $-(e^{x-2} - 1)^2 < 0$  أي  $f'(x) < 0$  وعليه الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$  .

ب- جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

5..أحسب من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f''(x)$

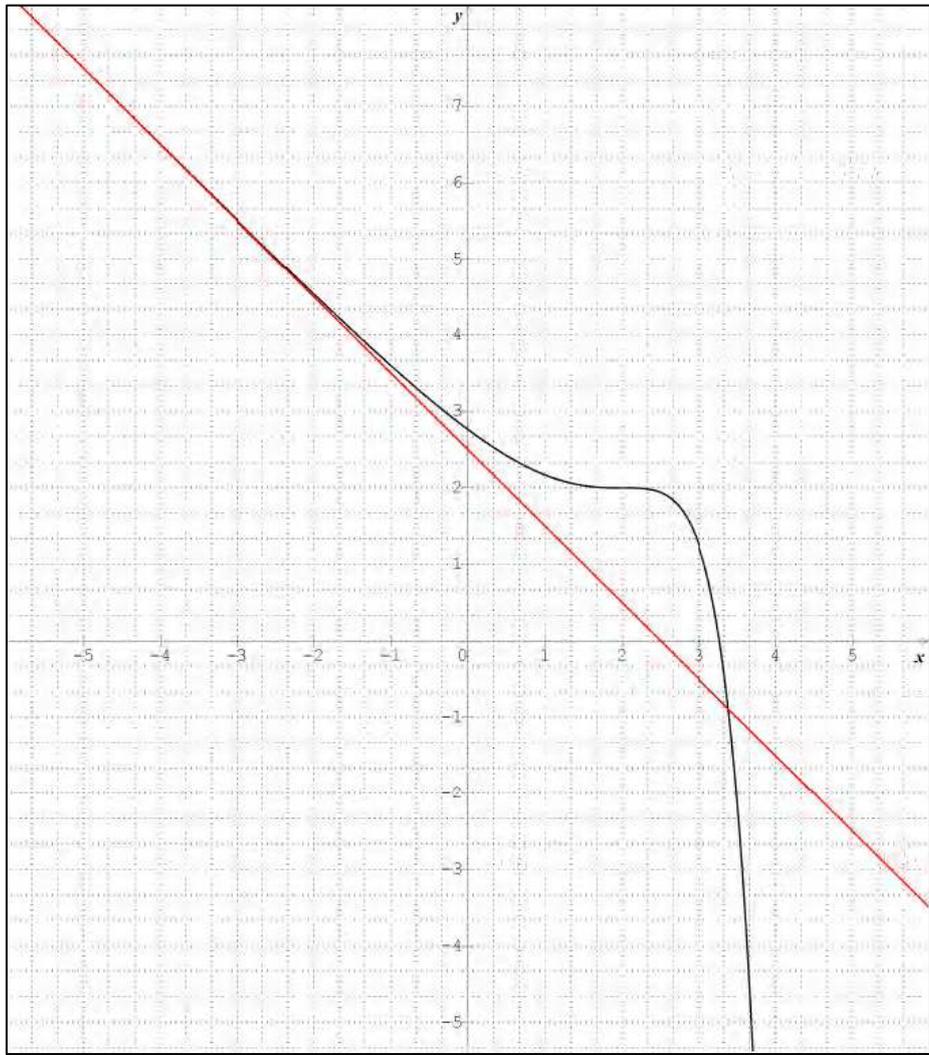
الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ،  $f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$  ،

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

بما أن  $f''$  تنعدم عند 2 وتغير منم اشارتها فان  $A(2;2)$  نقطة انعطاف للمنحنى (C) .

6.اثبات أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث ،  $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$  . (تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة)

7.أنشئ  $(\Delta)$  و (C) في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقربتين التاليين  $\ln 2 \approx 0,7$  ،  $\ln 3 \approx 1,1$ ).



# 11.

1. الدالة  $\varphi$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$ .

أ- نهايتي الدالة  $\varphi$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1 = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right. \text{ لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} + x e^{-x} + e^{-x} - 1 = -1 \text{ و}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة  $\varphi$ :

الدالة  $\varphi$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ،

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (2x+1)e^{-x} - (x^2+x+1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(2x+1-x^2-x-1) = (-x^2+x)e^{-x}\end{aligned}$$

وبالتالي:  $\varphi'(x) = (-x^2+x)e^{-x}$  لدينا من  $x \in \mathbb{R}$   $e^{-x} > 0$ .

وعليه إشارة  $\varphi'(x)$  من إشارة  $(-x^2+x)$  أي:

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$(-x^2+x)$	-	0	+	0	-

جدول تغيرات:

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	-	0	+	0	-
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	-1

2. لدينا:  $\varphi(0) = 0$  و الدالة  $\varphi$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0]$  و متزايدة تماما على المجال  $[0; 1]$

لكن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم من  $]-\infty; 1]$  لدينا  $\varphi(x) > \varphi(0)$  أي  $\varphi(x) > 0$ .

اذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم من  $]-\infty; 1]$  ،  $\varphi(x) \neq 0$  . اذن  $\beta = 0$ .

الدالة  $\varphi$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $[1; +\infty[$  مع  $\varphi(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -1 < 0$ .

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $\varphi(x) = 0$  تقبل حل  $\alpha$  حيث  $\alpha \in [1; +\infty[$

تعيين حصر  $\alpha$ : لدينا:  $\varphi(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$  و الدالة  $\varphi$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $[1; +\infty[$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد  $\varphi(1,79) = 0,0007 > 0$  و  $\varphi(1,8) = -0,001 < 0$  و عليه  $1,79 < \alpha < 1,8$ .

3. إشارة  $\varphi(x)$ :

$x$	$-\infty$	0	$\alpha$	$+\infty$	
$\varphi(x)$	+	0	+	0	-

II. 1. لدينا:  $f(0) = 1$  و  $g(0) = 1$  فالتالي: المنحنين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  يمران بالنقطة  $A(0; 1)$ .

\*معادلة المماس عند النقطة  $A$ :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = (-2x+1)e^{-x}$ .

معادلة المماس عند النقطة A للمنحنى  $(C_f)$  هي:  $y = x - 1$

لدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ :  $g'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)}$

معادلة المماس عند النقطة A للمنحنى  $(C_g)$  هي:  $y = x - 1$

أ.2- ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= (2x+1) \left( e^{-x} - \frac{1}{x^2+x+1} \right) \\ &= \frac{(2x+1) [(x^2+x+1)e^{-x} - 1]}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

اذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$

ب- اشارة  $f(x) - g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $x^2 + x + 1 > 0$  ( $\Delta < 0; a > 0$ )

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+		
$\varphi(x)$			+	0	-
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0	-

ج-الوضع النسبي للمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$ :

على المجال  $]-\infty; -\frac{1}{2}[$  و  $]\alpha; +\infty[$  المنحنى  $(C_f)$  يقع تحت المنحنى  $(C_g)$

وعلى المجال  $]-\frac{1}{2}; \alpha[$  المنحنى  $(C_f)$  يقع فوق المنحنى  $(C_g)$ .

المنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  يتقاطعان في النقط:  $(0;1)$  و  $(-\frac{1}{2}; 0)$  و  $(\alpha; f(\alpha))$

لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$ .

$$1. \text{ لدينا: } g(0) = e^0 - 0^2 + 3(0) - 1 = 0$$

وعليه:  $g(0) = 0$ .

2. تحديد إشارة  $g(x)$ :

من أجل  $x \leq 0$  وانطلاقاً من جدول تغيرات الدالة لدينا:  $g$  دالة متزايدة وعليه  $g(x) \leq g(0)$

وبالتالي:  $g(x) \leq 0$

ومن أجل  $x \geq 0$  وانطلاقاً من جدول تغيرات الدالة لدينا:  $g$  دالة متزايدة وعليه  $g(x) \geq g(0)$

وبالتالي:  $g(x) \geq 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$	-	$0$	+

ا. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$ .

1. لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x \\ &= (x^2 - x) \frac{1}{e^x} + x \\ &= \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x \end{aligned}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$$

ب- حساب:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} \\ &= 0\end{aligned}$$

و بالتالي المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب (D) بجوار  $+\infty$  معادلته  $y = x$ .

ج- لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x &= \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} \text{ و عليه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} (x^2 - x + xe^x) = +\infty \text{ حساب}$$

2.أ- لدينا  $f(x) - x = (x^2 - x)e^{-x}$  و عليه  $e^{-x} > 0$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ .

و بالتالي  $f(x) - x$  و  $x^2 - x$  لهما نفس الاشارة من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  أي:

$x$	$+\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$		+	0 - 0	+

ب- بما أن  $f(x) - x$  و  $x^2 - x$  لهما نفس الاشارة من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  فان الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D).

و بالتالي المنحنى (C) يوجد فوق (D) على المجالين  $]-\infty; 0]$  و  $[1; +\infty[$  و تحت (D) على المجال  $[0; 1]$ .

3.أ- الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)e^{-x} + 1 \\ &= e^{-x} (2x - 1 - x^2 + x + e^x) \\ &= e^{-x} (e^x - x^2 + 3x - 1) \\ &= e^{-x} g(x)\end{aligned}$$

و بالتالي من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $f'(x) = g(x)e^{-x}$ .

ب- لدينا  $e^{-x} > 0$  على  $\mathbb{R}$  و بالتالي اشارة  $f'(x)$  من اشارة  $g(x)$ .

أي:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$0$	+

اذن الدالة  $f$  متناقصة على  $]-\infty; 0]$  و متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$ .

ج-جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$0$	+
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

4.أ-تحقق من أن  $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x}(e^x - x^2 + 3x - 1) + e^{-x}(e^x - 2x + 3) \\ &= -e^{-x}(-e^x + x^2 - 3x + 1 + e^x - 2x + 3) \\ &= e^{-x}(x^2 - 5x + 4) \end{aligned}$$

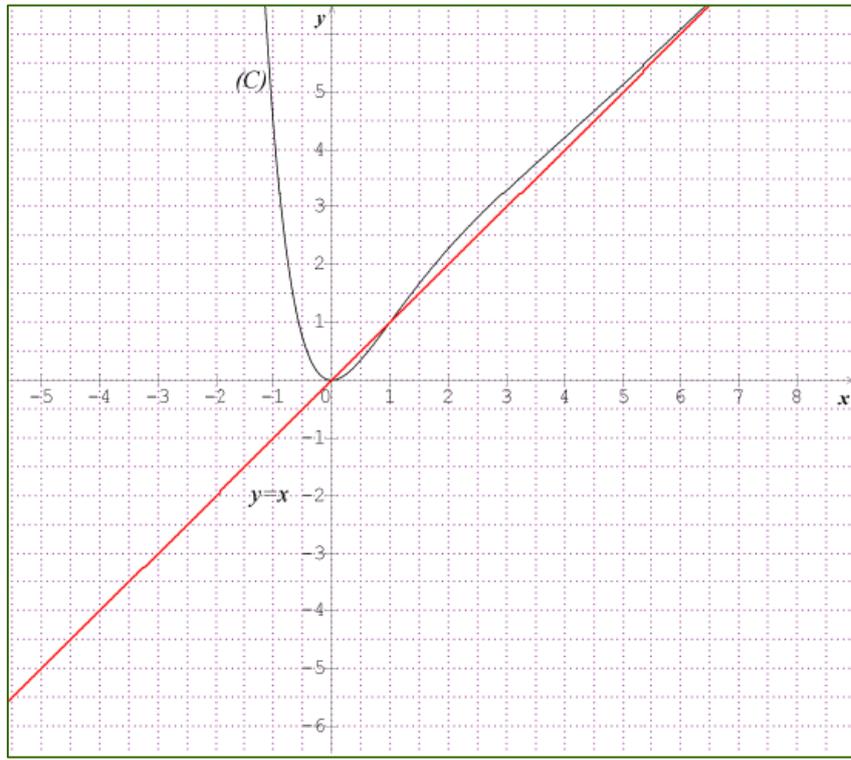
وعليه اشارة  $f''(x)$  من اشارة  $x^2 - 5x + 4$  أي:

$x$	$+\infty$	$1$	$4$	$+\infty$
$x^2 - x$		+	$0$ - $0$	+

لدينا المشتقة الثانية تنعدم وتغير من اشارتها عند  $1$  وبالتالي النقطة  $A(1; f(1))$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$ .

ولدينا المشتقة الثانية تنعدم وتغير من اشارتها عند  $4$  وبالتالي النقطة  $B(4; f(4))$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$ .

5. انشاء  $(D)$  و  $(C)$ :



# 13

التكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$ .  $(C_f)$  و تمثيلها البياني في معلم متعامد زمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1.أ-حساب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} \left( 1 + \frac{3x}{e^{-2x-1}} - \frac{1}{e^{-2x-1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} (1 + 3xe^{2x+1} - e^{2x+1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} = +\infty \end{aligned}$$

أُن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{2x+1}) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x-1} + 3x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x-1}}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{2x+1}} + 3 + \frac{1}{x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ومنه

ب-لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-2x-1} + 3x - 1 - (3x - 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x-1)] = 0$$

التفسير: نقول أن المستقيم ذا المعادلة  $y = 3x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

2. اتجاه تغير الدالة  $f$ :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث:  $f'(x) = -2e^{-2x-1} + 3$

ومنه  $f'(x) = 0$  تكافئ

$$-2e^{-2x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x-1} = \frac{3}{2}$$

$$-2x - 1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{نستنتج أن:}$$

$$x = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)$	$+\infty$
$-2e^{-2x-1} + 3$	-	0	+

جدول تغيرات  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right)$	$+\infty$

$$f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right) - 1} + 3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right) - 1$$

$$= \frac{3}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)\right) - 1$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right)$$

$$\approx -1,6$$

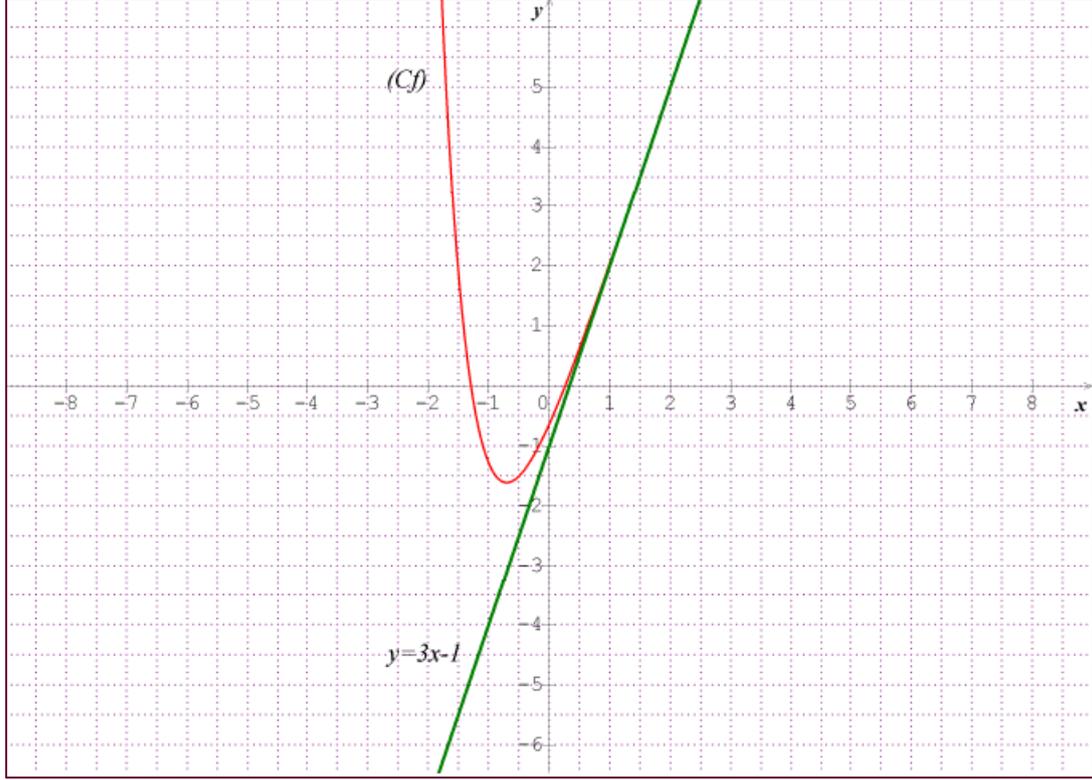
لدينا:

3. الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة على المجال  $\left] -\infty; -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right[$  و  $f(-1,3) \times f(-1,2) < 0$

ولدينا كذلك الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $\left] -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right); +\infty\right[$  ولدينا:  $f(0,2) \times f(0,3) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث  $-1,3 < \alpha < -1,2$  و  $0,2 < \beta < 0,3$ .

4. رسم المنحنى  $(C_f)$ :



1. نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي:  $u_n = e^{-2n-1}$  و  $v_n = 3n-1$ .

1.

$$\text{لدينا: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-2(n+1)-1}}{e^{-2n-1}} = e^{-2(n+1)-1+2n+1} = e^{-2}$$

ومن المتتالية  $(u_n)$  هندسية أساسها  $q = e^{-2}$  و حدها الأول  $u_0 = e^{-1}$ .

ولدينا:  $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1 = 3$  ومنه نجد أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية

أساسها  $r = 3$  و حدها الأول  $v_0 = -1$ .

2. اتجاه تغير المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$ .

بما أن  $r = 3 > 0$  فإن المتتالية  $(v_n)$  متتالية متزايدة.

بما أن الأساس  $-1 < e^{-2} < 1$  و الحد الأول  $e^{-1} > 0$  فإن  $(u_n)$  متتالية متزايدة.

3. لدينا:  $(u_n)$  متتالية متزايدة و  $(v_n)$  متتالية متزايدة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 1 - e^{-2n-1} = +\infty$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = +\infty$$

اذن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  ليس بمتتاليتين متجاورتان .

4. حساب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$ :

بحيث :  $f(n) = u_n + v_n$  نلاحظ ان يكفي ان نلاحظ أن  $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$

$$S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$$

$$= u_0 + u_1 + \dots + u_n + v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= e^{-1} \left( \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}} \right) + (n+1) \left( \frac{-1 - 1 + 3n}{2} \right) \quad \text{وبالتالي:}$$

$$= \left( \frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)}) + (n+1) \left( \frac{-2 + 3n}{2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)}) + (n+1) \left( \frac{-2 + 3n}{2} \right) = +\infty \quad \text{ب- احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)}) + (n+1) \left( \frac{-2 + 3n}{2} \right)}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)})}{n^2} + \frac{(n+1) \left( \frac{-2 + 3n}{2} \right)}{n^2} \quad \text{اذن:}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{e^{-1}}{1 - e^{-2}} \right) (1 - e^{-2(n+1)})}{n^2} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \left( \frac{-2 + 3n}{2} \right)}{n^2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{3}{2}$$

# 14

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = xe^{1-x}$ .

$$1. \text{ ليكن } x \text{ عدد حقيقي } f(x) = xe^{1-x} = x \times e \times e^{-x} = ex \frac{1}{e^x}$$

اذن بين أنه من اجل كل  $x$  عدد حقيقي،  $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty$$

2. اذن  $y=0$  معادلة مستقيم مقارب لمنحنى الدالة  $f$  عند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \times \frac{x}{e^x} = 0$$

3. اتجاه تغير الدالة  $f$  الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $e^{1-x} > 0$  وبالتالي اشارة  $f'(x)$  من اشارة  $1-x$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$		+	-

جدول تغيرات:

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

1.1. ليكن  $x$  عدد حقيقي،

$$\begin{aligned} (1-x)g_n(x) &= g_n(x) - xg_n(x) \\ &= (1+x+x^2+\dots+x^n) - x(1+x+x^2+\dots+x^n) \\ &= (1+x+x^2+\dots+x^n) - (x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}) \\ &= 1-x^{n+1} \end{aligned}$$

$$g_n(x) = \frac{(1-x^{n+1})}{(1-x)} , x \neq 1$$

اذن من أجل كل  $x \neq 1$

2. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1،

نلاحظ أن أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1،  $h_n(x) = g_n'(x)$  وعليه

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

وبالتالي:

3. نضع  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

حساب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$ :

$$\begin{aligned}
S_n &= f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{e^0} + \frac{2}{e^1} + \frac{3}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^{n-1}} \\
&= 1 + 2\left(\frac{1}{e}\right) + 3\left(\frac{1}{e}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{1}{e}\right)^n \\
&= h_n\left(\frac{1}{e}\right) \\
&= \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}
\end{aligned}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ،  $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2}ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$  ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2}f(n) = 0 \text{ وعليه}$$

$$(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = (n+1)e^{-n} = f(n+1) \text{ وكذلك}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \text{ وعليه نستنتج ان:}$$

# 15

1. الدالة  $g$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1. اتجاه تغير الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$  ،  $g'(x) = e^x - 1$  ،

$x$	0	$+\infty$
$e^x - 1$		+

وعليه الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$ .

2. عين حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  :

بما أن  $g(0) = 0$  و الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  . اذن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  ،  $g(x) \geq g(0) = 0$  .

$x$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	

$$e^x - x \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \quad \text{لدينا: } g(x) \geq 0 \text{ أي:}$$

$$\Leftrightarrow e^x - x \geq 0$$

اذن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  ،  $e^x - x > 0$  .

$$\text{الدالة } f \text{ المعرفة على المجال } [0;1] \text{ كما يلي: } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

1. لدينا  $x \in [0;1]$  وبما أن  $f$  دالة متزايدة تماما على المجال  $[0;1]$  فان ،  $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$  .

أي  $0 \leq f(x) \leq 1$  تكافئ  $f(x) \in [0;1]$  .

اذن من أجل كل  $x$  من  $[0;1]$  ،  $f(x) \in [0;1]$  .

أ.2-

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{(1-x)(e^x - (1+x))}{e^x - x}$$

$$\text{اذن: } f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$$

ب- الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) :

من أجل كل  $x$  من  $[0;1]$  ،  $g(x) \geq 0$  و  $1-x > 0$  و  $e^x - x > 0$

اذن  $f(x) - x > 0$  أي أن للمنحنى (C) يقع فوق المستقيم (D) ويتقاطعان في النقطة (0;0) و (1;1) .

أ.3- دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0;1]$  .

$$\text{نلاحظ أن: } (e^x - x)' = e^x - 1 \text{ و عليه } F(x) = \ln(e^x - x) + c, (c \in \mathbb{R})$$

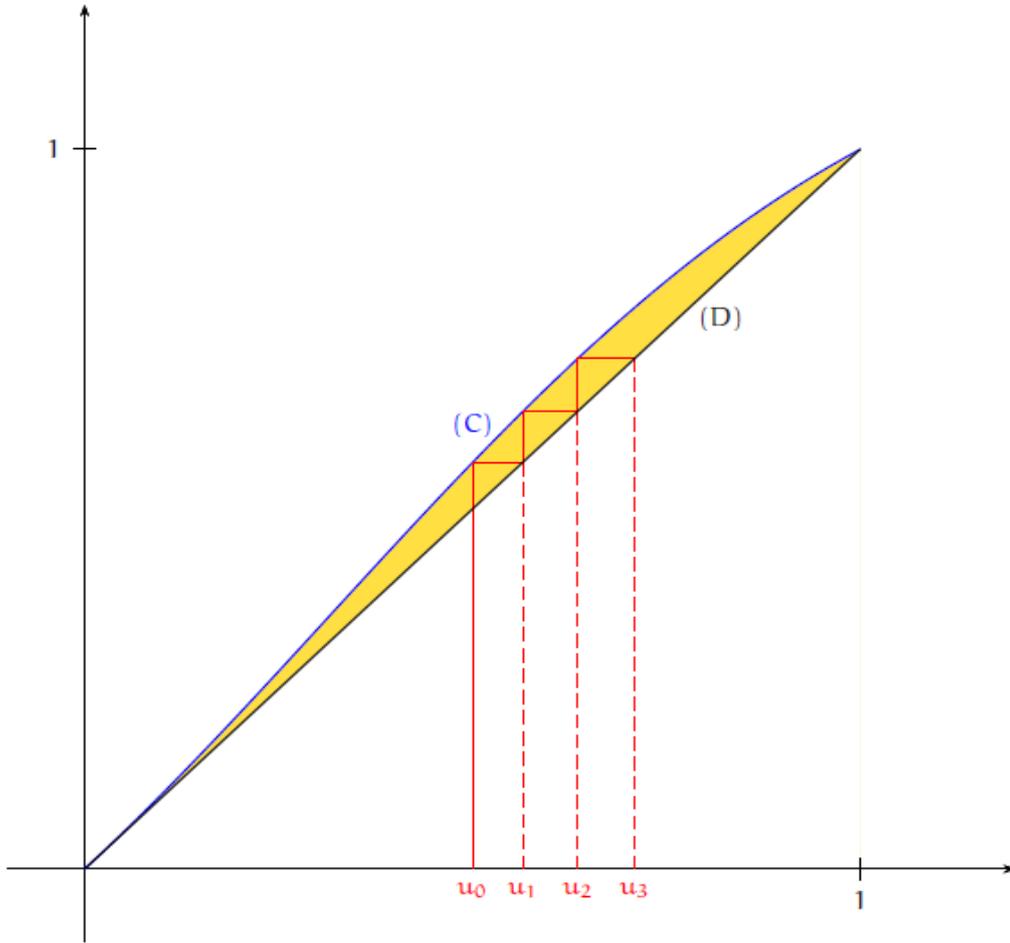
ب- مساحة الحيز:

على المجال  $[0;1]$   $f(x) > x$  وبالتالي:

$$\int_0^1 f(x) - x dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = [F(x)]_0^1 - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \ln(e-1) - \frac{1}{2}$$

الجزء الثالث:



2. لدينا:  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومنه  $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$ .

ليكن  $n \geq 0$  نفرض أن  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$  وبما أن  $f$  دالة متزايدة تماما على المجال  $[0;1]$

ومنه نستنتج أن  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$  أي:  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

وعليه حسب خاصية الاستدلال بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ .

حسب ما سبق لدينا على المجال  $[0;1]$ ،  $f(x) > x$  وبما أن  $u_n \in [0;1]$

فان  $f(u_n) \geq u_n$ .

اذن من أجل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{1}{2} < u_n < u_{n+1} < 1$ .

3. بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة نحو العدد  $l$  حيث  $l \in [0;1]$ .

لأن  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

$$. l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(l)$$

من أجل  $x=1$  لدينا  $f(x) = x$  وبالتالي،  $l=1$  و عليه:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(I) نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  .  
 تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول  $1 \text{ cm}$  .

عَيّن قيمتي  $a$  و  $b$  بحيث تكون النقطة  $A(-1; 1)$  تنتمي إلى  $(C_f)$  و معامل توجيه المماس عند  $A$  يساوي  $(-e)$  .

(II) نعتبر الدالة العددية  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$  .  
 تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

(1) بيّن أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$  و فسر النتيجة بيانياً. ( نذكر أن  $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$  )

(2) أدرس تغيّرات الدالة  $g$  ، ثم أنشئ جدول تغيّراتها .

(3) بيّن أن المنحنى  $(C_g)$  يقبل نقطة إنعطاف  $I$  يطلب تعيين إحداثيها .

(4) أكتب معادلة المماس للمنحنى  $(C_g)$  عند النقطة  $I$  .

(5) أرسم  $(C_g)$  .

(6)  $H$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان

- عَيّن  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون  $H$  دالة أصلية للدالة :  $x \mapsto g(x) - 1$  . استنتج الدالة الأصلية للدالة  $g$  و التي تنعدم عند القيمة  $0$  .

(III) لتكن  $k$  الدالة المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يأتي :  $k(x) = g(x^2)$  .

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عَيّن اتجاه تغيّر الدالة  $k$  ثم شكّل جدول تغيّراتها .

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ  $(C_f)$  لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و فسر هندسياً النتيجة .

(2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة  $f$  على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيّراتها .

(3) أ- بيّن أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين مائلين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  معادلتيهما على الترتيب :  $y = x + 1$  و  $y = x$  .

ب- أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .

(4) أثبت أن النقطة  $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  .

(5) أ- بيّن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث :  $\ln 2 < \alpha < 1$  و  $-1.4 < \beta < -1.3$  .

ب- هل توجد مماسات لـ  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$  ؟

ج- أرسم  $(\Delta)$  ،  $(\Delta')$  ثم المنحنى  $(C_f)$  .

د- ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة :  $(m-1)e^{-x} = m$  .

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = e^x - ex - 1$ .

(1)  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

أ - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب - أحسب  $f'(x)$  ثم أدرس إشارتها.

ج - شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(2) أ - بيّن أن المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = -ex - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $(-\infty)$ .

ب - أكتب معادلة للمستقيم  $(T)$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج - بيّن أنّ المعادلة  $f(x) = 0$ ، تقبل في المجال  $]1,75; 1,76[$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

د - أرسم المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  ثم المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-\infty; 2]$ .

(3) أ - أحسب بدلالة  $\alpha$ ، المساحة  $A(\alpha)$  للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى  $(C_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما:  $x = \alpha$  ،  $x = 0$ .

ب - أثبت أنّ:  $A(\alpha) = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$  (حيث  $ua$  هي وحدة المساحات)

(I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 1 - xe^x$ .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ - بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

ب - تحقق أنّ  $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-\infty; 2]$  كما يلي:  $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$ .

(1)  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(3) لتكن  $f'$  مشتقة الدالة  $f$ . بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 2]$  فإن:  $f'(x) = -g(x)$ .

استنتج إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]-\infty; 2]$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(4) بيّن أنّ  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$  (تدور النتائج إلى  $10^{-2}$ )

(5) أ - بيّن أنّ المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ .

ب - أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

(6) بيّن أنّ المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث  $-1.6 < x_1 < -1.5$  و  $1.5 < x_2 < 1.6$ .

ب - أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

(7) لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = (ax + b)e^x$ .

أ - عيّن العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث تكون  $h$  دالة أصلية للدالة  $xe^x \mapsto x$  على  $\mathbb{R}$ .

ب - استنتج دالة أصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

$x$	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

(I) الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ :  $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ .

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

(2) أحسب  $f'(x)$ . بيّن أنّ الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(3) بيّن أنّ المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في  $]-\infty; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$ . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد  $\alpha$ .

(4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثمّ أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة  $|f|$ .

(5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية  $m$  التي من أجلها يكون للمعادلة  $|f(x)| = m$  حلان مختلفان في الإشارة.

(II) الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ :  $g(x) = f(2x-1)$ . (عبارة  $g(x)$  غير مطلوبة)

(1) أدرس تغيّرات الدالة  $g$  على  $]-\infty; 1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(2) أ- تحقّق أنّ  $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثمّ بيّن أنّ :  $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$ .

ب- استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة  $g$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+1}{2}$ .

ج- تحقّق من أنّ :  $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

## التمرين 6

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$ .

(1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

(2) بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق أنّ :  $0,36 < \alpha < 0,37$ .

(3) استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$ .

و (C<sub>f</sub>) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ- بيّن أنّه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$ .

ب- استنتج أنّ الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; -\alpha[$  و متزايدة تماما على  $]-\alpha; +\infty[$ .

(2) أحسب نهاية  $f$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة  $f$ .

(3) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$  ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(4) أدرس وضعية (C<sub>f</sub>) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته  $y = -x + 1$ .

(5) أنشئ (Δ) و (C<sub>f</sub>) على المجال  $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، نأخذ  $f(-\alpha) \approx 0,1$ .

(6) أ- تحقّق أنّه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$ .

ب- استنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

## التمرين 7

(I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$ .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

(2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة  $g$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) أ- بيّن أنّ للمعادلة  $g(x) = 0$  حلّين في  $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر  $\alpha$  حيث :  $-1,52 < \alpha < -1,51$ .

ب- استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $O; \vec{i}, \vec{j}$ ).

1- أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $f'(x) = -g(x)$ .

ج- شكّل جدول تغيّرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ . (نأخذ  $f(\alpha) \approx 0.38$ )

د- عيّن دون حساب :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$  ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .

2- أ- بين أنّ المستقيم ( $\Delta$ ) ذا المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ ) عند  $+\infty$

ب- أدرس وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة للمستقيم ( $\Delta$ ).

ج- بين أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما .

د- أرسم ( $\Delta$ ) و ( $C_f$ ) على المجال  $[-2; +\infty[$ .

هـ- ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة :  $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$  على المجال  $[-2; +\infty[$ .

(III)  $h$  و  $H$  الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = x + f(x)$  و  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

1) عيّن الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  بحيث تكون الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$ .

2) أ- أحسب التكامل التالي :  $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$  ، حيث  $\lambda$  عدد حقيقي موجب تماماً و فسّر النتيجة هندسياً .

ب- أحسب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

## التمرين 8- إلك 2016- الدورة الثالثة - 2P ﴿6﴾

(I)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 2e^x - x^2 - x$

1) أ- أحسب  $g'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ، ثم أدرس إتجاه تغيّر الدالة  $g'$  (حيث  $g'$  هي مشتقة الدالة  $g$ )

ب- بين أنه ، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) > 0$

ج- أحسب نهايتي الدالة  $g$  عند كل من  $+\infty$  و  $-\infty$  ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بين أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث :  $-1,37 < \alpha < -1,38$ .

3) إستنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .

(II)  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$

و ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ( $O; \vec{i}, \vec{j}$ ).

1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب- بين أنه ، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$  ، (حيث  $f'$  هي مشتق الدالة  $f$ ).

ج- أدرس اتجاه تغيّر الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ- بين أن :  $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$  ، ثم استنتج حصراً للعدد  $f(\alpha)$ .

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$  ، ثم فسّر النتيجة بيانياً .

ج- أنشئ المنحنى ( $C_f$ ) . (تعطى  $f(\alpha) \approx 0,29$ )

## التمرين 9- إلك 2017- الدورة العادية - 2P ﴿7﴾

(I) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$

و ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ( $O; \vec{i}, \vec{j}$ ).

(1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  و أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(2) أ- بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$  ،  
ب- أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكّل جدول تغيراتها .

(3) أكتب معادلة لـ  $(T)$  المماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = 1 - xe^{1-x}$ .

(1) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $h(x) \geq 0$  ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المماس  $(T)$ .

(2) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,7 < \alpha < -0,6$ .

(3) أنشئ المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  على المجال  $[-1; +\infty[$ .

(4)  $F$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$ .

- تحقق أن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، حامل محور الفواصل

و المستقيمين اللذين معادلتيهما :  $x = 0$  و  $x = 1$  .

### التمرين 10 : بلك 2017 - الدورة الإستثنائية - 1P 7

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = x^2 e^x - e$ .

$(C_g)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الشكل)

• أحسب  $g(1)$  .

• بقراءة بيانية عين إشارة  $g(x)$  ، ثم استنتج إشارة  $g(-x)$

حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ :  $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أحسب النهايات الآتية :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

(2) بين أن المنحنى  $(\gamma)$  الذي معادلته  $y = e^{-x} - 2$  و المنحنى  $(C_f)$  متقاربان بجوار ، ثم أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\gamma)$ .

(3) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  ،  $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$  .

(4) استنتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $[-1; 0]$  و  $]0; +\infty[$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; -1]$  ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى  $(\gamma)$  إنطلاقا من منحنى الدالة  $e^x$  ، ثم أرسم بعناية كلا من  $(\gamma)$  و  $(C_f)$  في نفس المعلم .

(6) ليكن  $n$  عددا طبيعيا و  $A(n)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(\gamma)$  و المستقيمين اللذين معادلتيهما :

$$x = -e^{n+1} \text{ و } x = -e^n$$

أحسب العدد الحقيقي  $l$  حيث :  $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$  .

### التمرين 11 : بلك 2018 - 1P 7

(I)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$  .

أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكّل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,38 < \alpha < -0,37$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

- 1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .  
 ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)]$  ، ثم فسر النتيجة بيانياً .  
 ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  حيث  $y = 2x + 1$  :  $(\Delta)$  .  
 2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون  $f'(x) = g(x)$  ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$  و شكّل جدول تغيّراتها .  
 3) أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .  
 4) أنشئ  $(\Delta)$  ،  $(T)$  و المنحنى  $(C_f)$  (نأخذ  $f(\alpha) \approx 0,8$ ) .  
 5) ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x$  :  $x = (1 - m)e^x$  .  
 6) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة  $x \mapsto xe^{-x}$  و التي تنعدم من أجل  $x = 1$  .  
 ب- أحسب العدد  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمتين التي معادلاتهما:  $x = 1$  ،  $x = 3$  و  $y = 2x + 1$

## التمرين 12 / بلك 2019 / 1P / 7

- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . تؤخذ وحدة الطول  $2cm$  .  
 $(C_g)$  و  $(C_f)$  التمثيلان البيانيان للدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي :
- $$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$
- 1) أ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة  $g$  .  
 ب- إستنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  .  
 2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة  $f$  .  
 3) أحسب كلا من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة  $f$  .  
 4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  على  $\mathbb{R}$  .  
 5) أرسم على المجال  $[0; 2]$  المنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  في نفس المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  . (يعطى  $e^2 - 2e \approx 2$ ) .  
 6) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  .  
 7)  $h$  الدالة المعرفة على المجال  $[-2; 2]$  كما يلي :  $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$  و ليكن  $(\Gamma)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق .  
 أ- بيّن أن الدالة  $h$  زوجية .  
 ب- من أجل  $x \in [0; 2]$  أحسب  $h(x) + f(x)$  ثم استنتج كيفية رسم  $(\Gamma)$  إنطلاقاً من  $(C_f)$  ثم أرسمه .

(I) الدالة العددية المعرفة على  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  .  
 تعيين قيمتي  $a$  و  $b$  بحيث تكون النقطة  $A(-1; 1)$  تنتمي إلى  $(C_f)$  و معامل توجييه المماس عند  $A$  يساوي  $(-e)$  .  
 $A \in (C_f)$  معناه  $f(-1) = 1$  أي  $(-a + b)e + 1 = 1$  و منه :  $a = b$  .  
 معامل توجييه المماس عند  $A$  يساوي  $(-e)$  معناه :  $f'(-1) = -e$  .

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $[-2; +\infty[$  و :  $f'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = (-ax - b + a)e^{-x}$  .  
 و منه  $f'(-1) = (2a - b)e$  و مما سبق  $f'(-1) = -e$  .  
 بالمطابقة لدينا  $2a - b = -1$  و  $a = b$  و منه نجد :  $a = b = -1$  .

(II) الدالة  $g$  معرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  :  $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$  .

(1) تبيان أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$  .  
 $\lim_{u \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$   
 التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_g)$  عند  $+\infty$  .

(2) دراسة تغيّرات الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$  ، و  $g'(x) = -e^{-x} + (-e^{-x})(-x - 1) = xe^{-x}$  .  
 - إتجاه تغيّر الدالة  $g$  :  
 إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $x$  .

و منه : من أجل  $x \in [-2; 0]$  ، يكون  $g'(x) \leq 0$  و بالتالي الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $[-2; 0]$  .  
 من أجل  $x \in [0; +\infty[$  ، يكون  $g'(x) \geq 0$  و بالتالي الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$  .

جدول تغيّرات الدالة  $g$

$x$	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$e^2 + 1$	0	1

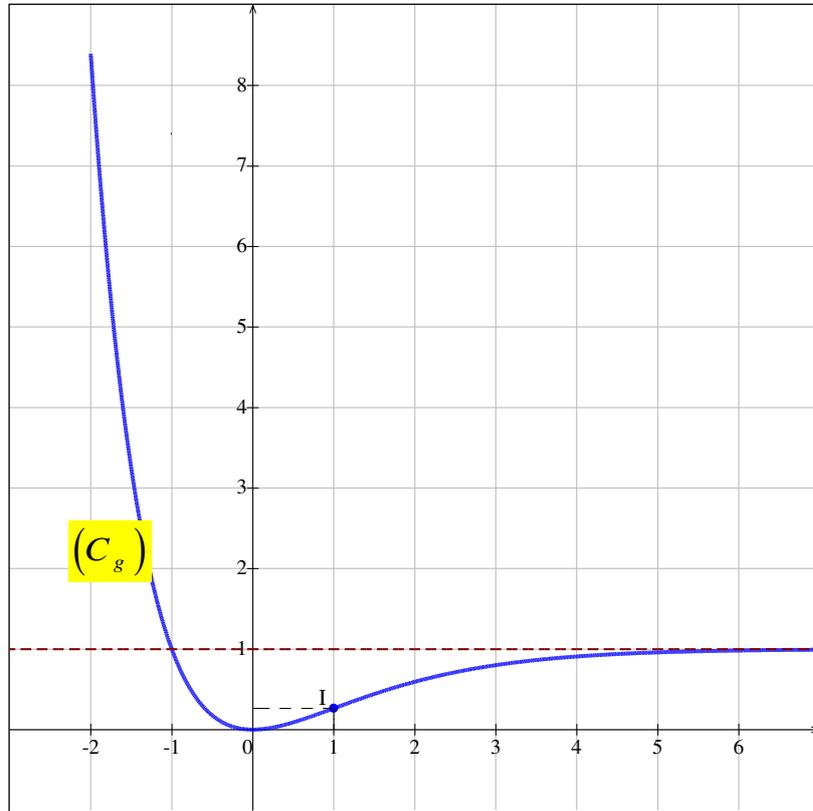
(3) تبيان أن المنحنى  $(C_g)$  يقبل مماساً عند  $x = 1$  .

الدالة  $g'$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$  ، و  $g''(x) = (1 - x)e^{-x}$  .

إشارة  $g''(x)$  من إشارة  $1 - x$  و بالتالي  $g''(x)$  ينعدم عند  $1$  مغيّراً إشارته ، و منه  $I\left(1; 1 - \frac{2}{e}\right)$  هي نقطة إنعطاف لـ  $(C_g)$  .

(4) كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_g)$  عند النقطة  $I$  .

لدينا :  $(T): y = g'(1)(x - 1) + g(1)$  و منه  $(T): y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$  .



(6) الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي :  $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان .

- تعيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون  $H$  دالة أصلية للدالة  $-1 : x \mapsto g(x)$  :

الدالة  $H$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$  ، و  $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x + \beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$  .

$H$  دالة أصلية للدالة  $-1 : x \mapsto g(x)$  معناه :  $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$  و منه نجد :  $\alpha = 1$  و  $\beta = 2$  .

لدينا :  $G(x) = H(x) + x + c$  : الشكل من الدالة الأصلية للدالة  $g$  و منه الدالة الأصلية للدالة  $g$  من الشكل :

الدالة الأصلية للدالة  $g$  و التي تنعدم عند 0 هي :  $G(x) = (x + 2)e^{-x} + x + 2$  .

(III) لتكن  $k$  الدالة المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يأتي :  $k(x) = g(x^2)$  :

الدالة  $k$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[-2; +\infty[$  لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ،

$$k'(x) = 2xg'(x^2) = 2x(x^2 e^{-x^2}) = 2x^3 e^{-x^2} \text{ و}$$

إتجاه تغيّر الدالة  $k$  :

إشارة  $k'(x)$  من إشارة  $x$  .

و منه : من أجل  $x \in [-2; 0]$  ، يكون  $k'(x) \leq 0$  و بالتالي الدالة  $k$  متناقصة على المجال  $[-2; 0]$  .

من أجل  $x \in [0; +\infty[$  ، يكون  $k'(x) \geq 0$  و بالتالي الدالة  $k$  متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$  .

جدول تغيّرات الدالة :

$x$	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$	-	0	+
$k(x)$	$1 - 5e^{-4}$	0	1

$f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

(1) أ-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$

ب-  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم :  $f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم ،  $f'(x) > 0$  و بالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من

المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗ $+\infty$		↗ $+\infty$

(3) أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{e^x - 1} \right] = 0$  و منه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

و لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right] = 0$  و منه المستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل

للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

ب- دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  :

لدينا :  $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^x}$  و منه إشارة الفرق من إشارة  $1 - e^x$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضع النسبي	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$		$(C_f)$ تحت $(\Delta)$

• دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta')$  :

لدينا :  $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{e^x}{1 - e^x}$  و منه إشارة الفرق من إشارة  $1 - e^x$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضع النسبي	$(C_f)$ فوق $(\Delta')$		$(C_f)$ تحت $(\Delta')$

(4) إثبات أن النقطة  $\omega \left( 0; \frac{1}{2} \right)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  :

لدينا : من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  ،  $-x \in \mathbb{R}^*$  و  $f(-x) + f(x) = -\frac{1}{e^{-x} - 1} - \frac{1}{e^x - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$

و منه النقطة  $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  .

(5) أ- تبيان أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث :  $\ln 2 < \alpha < 1$  و  $-1.4 < \beta < -1.3$  .

• الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]0; +\infty[$  و  $] \ln 2; 1[$  و  $f(1) \approx 0,41$  أي  $f(1) \times f(\ln 2) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0; +\infty[$  حلا وحيدا  $\alpha$  ، حيث  $\ln 2 < \alpha < 1$  .

• الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $] -\infty; 0[$  و  $] -\infty; 0[$  و  $] -1,4; -1,3[$  و  $f(-1.3) \approx 0,07$  و  $f(-1.4) \approx -0,07$

أي  $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $] -\infty; 0[$  حلا وحيدا  $\beta$  ، حيث  $-1.4 < \beta < -1.3$  .

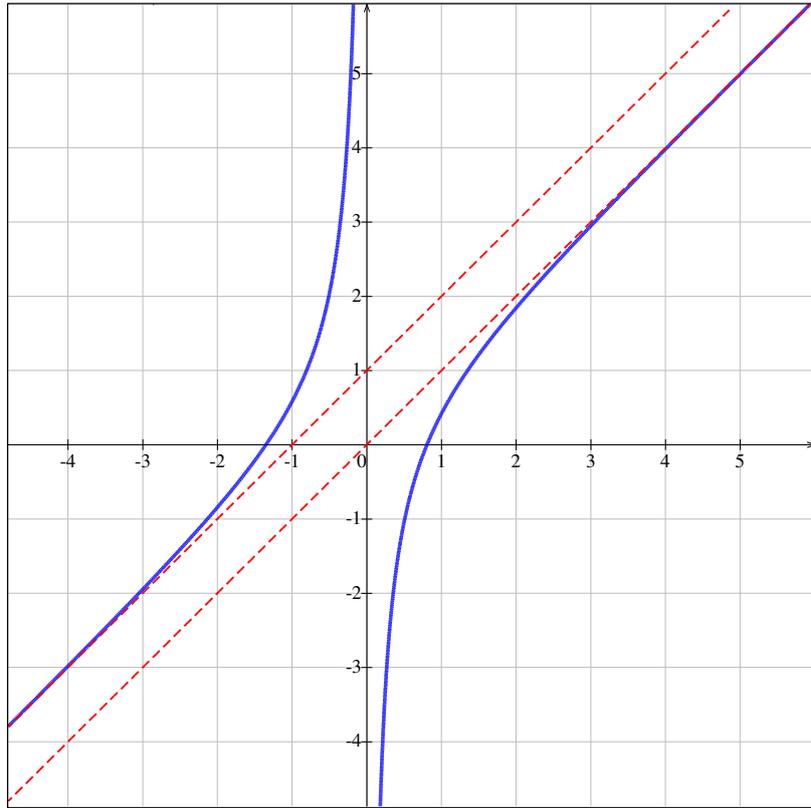
ب- دراسة وجود مماسات للمنحنى  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$  .

لنحل في  $\mathbb{R}^*$  المعادلة :  $f'(x) = 1$  .

لدينا :  $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 1$  تكافئ  $\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$  أي  $e^x = 0$  و هذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها

حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$  .

ج- الرسم :



د - المناقشة البيانية :

لدينا :  $(m - 1)e^{-x} = m$  تكافئ  $m - 1 = me^x$  تكافئ  $m = -\frac{1}{e^x - 1}$  تكافئ  $m + x = x - \frac{1}{e^x - 1}$

تكافئ  $f(x) = x + m$  ، و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذي المعادلة  $y = x + m$  .

إذا كان  $m \in ]-\infty; 0[$  فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان  $m \in [0; 1]$  فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان  $m \in ]1; +\infty[$  فإن للمعادلة حل واحد سالب .

### حل مقترح للتمرين (3) (بأك 2011)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = e^x - ex - 1$  .  
 أ - حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - ex - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ex - 1) = +\infty$$

ب - حساب  $f'(x)$  :

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = e^x - e$

$f'(x) = 0$  تكافئ  $e^x - e = 0$  تكافئ  $e^x = e$  تكافئ  $x = 1$  .

من أجل  $x \in ]-\infty; 1]$  ، يكون  $e^x \leq e$  أي  $f'(x) \leq 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 1]$  .

من أجل  $x \in [1; +\infty[$  ، يكون  $e^x \geq e$  أي  $f'(x) \geq 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$  .

ج - جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
$f(x)$	$+\infty$	$-1$	$+\infty$

أ - لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - ex - 1 - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

و منه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -ex - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$  .

ب - كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $0$  :

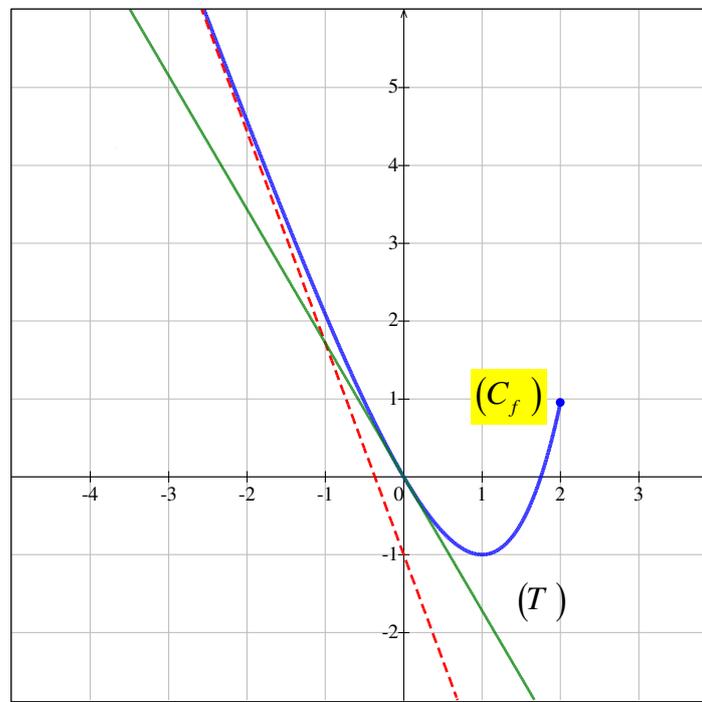
لدينا :  $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  و منه  $(T) : y = (1 - e)x$  .

ج - تبيان أنّ المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[1,75; 1,76[$  حلا وحيدا  $\alpha$  .

الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[1; +\infty[$  و  $[1,75; 1,76[ \subset [1; +\infty[$  و  $f(1,75) \approx -0,002$  و  $f(1,76) \approx 0,02$

أي  $f(1,75) \times f(1,76) < 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1,75 < \alpha < 1,76$  .

د - الرسم :



3 أ - حساب ، بدلالة  $\alpha$  ، المساحة  $A(\alpha)$  للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني  $(C_f)$  ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما:  $x=0$  و  $x=\alpha$  .

$$A(\alpha) = -\int_0^{\alpha} f(x) dx = -\int_0^{\alpha} (e^x - ex - 1) dx = -\left[ e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x \right]_0^{\alpha} = 1 - \left( e^{\alpha} - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha \right)$$

$$A(\alpha) = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua \quad \text{ب- إثبات أنّ :}$$

لدينا :  $f(\alpha) = 0$  و منه  $e^{\alpha} - e\alpha - 1 = 0$  أي  $e^{\alpha} = e\alpha + 1$  و بالتالي :

$$A(\alpha) = -e^{\alpha} + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha + 1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$$

( $ua$  هي وحدة المساحات)

### حل مقترح للتمرين (4) (بأك 2012)

(I)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  :  $g(x) = 1 - xe^x$  .

(1) حساب النهايات :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$  .

(2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = -1 \times e^x + (-x)e^x = -(x+1)e^x$  .

بما أن  $e^x > 0$  فإن إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $-(x+1)$  ، و منه :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$

و بالتالي الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $[-1; +\infty[$  و متزايدة على المجال  $] -\infty; -1]$  .

جدول تغيّرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$1$	$1+e^{-1}$	$-\infty$

(3) أ - تبيان أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  ، تقبل في حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $[-1; +\infty[$  :

والدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $[-1; +\infty[$  و  $g(-1) = 1 + e^{-1}$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[-1; +\infty[$  .

ب - التحقق أنّ  $0.5 < \alpha < 0.6$  :

لدينا :  $0.5; 0.6[ \subset [-1; +\infty[$  و  $g(0.5) \approx 0,18$  و منه  $0.5 < \alpha < 0.6$  .

إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$0$	$-$

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-\infty; 2]$  كما يلي :  $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$  .

(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x - x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x - e^x - x - 1] = +\infty$  .

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 2]$  :  $f'(x) = -g(x)$  .

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]-\infty; 2]$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-\infty; 2]$  :

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x - 1 = e^x + xe^x - e^x - 1 = xe^x - 1 = -(1 - xe^x) = -g(x)$$

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]-\infty; 2]$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	2
$f'(x)$		-	0 +

جدول تغيّرات الدالة

$x$	$-\infty$	$\alpha$	2
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$e^2 - 3$

(3) تبيان أن :  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$

لدينا :  $f(\alpha) = (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1$  ، ولدينا من جهة  $g(\alpha) = 0$  يكافئ  $1 - \alpha e^\alpha = 0$  يكافئ  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

ومنه  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$  أي  $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{(\alpha-1) - \alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha}$

إيجاد حصر للعدد  $f(\alpha)$  :

$$\frac{1,25}{0,6} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < \frac{1,36}{0,5} \text{ يكافئ } \begin{cases} \frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,5} \\ 1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36 \end{cases} \text{ يكافئ } 0,5 < \alpha < 0,6$$

يكافئ  $-2,72 < f(\alpha) < -2,08$  أي  $-\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6}$

(4) أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0$

ومن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x - 1$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

ب- دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  :

لدينا :  $f(x) - y = (x-1)e^x$  و منه إشارة الفرق من إشارة  $x-1$  على المجال  $]-\infty; 2]$ .

$x$	$-\infty$	1	2
$f(x) - y$		-	0 +
الوضع النسبي		$(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(1; -2)$	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$ $(C_f)$ تحت $(\Delta)$

(5) أ- تبيان أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث  $-1.6 < x_1 < -1.5$  و  $1.5 < x_2 < 1.6$ .

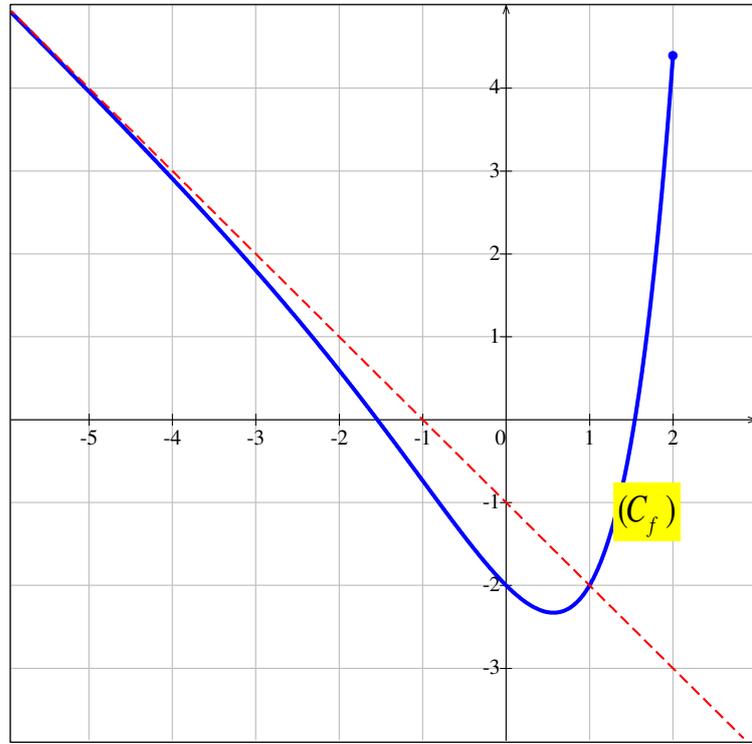
• الدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha]$  و  $]-\infty; \alpha]$  و  $]-1,6; -1,5[$  و  $f(-1.5) \approx -0,05$   
 $f(-1.6) \approx 0,07$

أي  $f(-1,6) \times f(-1,5) < 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $x_1$  حيث  $-1.6 < x_1 < -1.5$  و يحقق  $f(x_1) = 0$ .

• الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[\alpha; 2]$  و  $[\alpha; 2]$  و  $1,5; 1,6[$  و  $f(1.5) \approx -0,26$   
 $f(1.6) \approx 0,37$

أي  $f(1,5) \times f(1,6) < 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $x_2$  حيث  $1.5 < x_2 < 1.6$  و يحقق  $f(x_2) = 0$ .

ب- الرسم :



(6) لتكن  $h$  الدالة المعر

أ- تعيين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث تكون  $h$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto xe^x$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $h$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$  ،

الدالة  $h$  أصلية للدالة  $x \mapsto xe^x$  يعني :  $h'(x) = xe^x$  ، و منه بالمطابقة نجد :  $a = 1$  و  $b = -1$  . أي

$$.h(x) = (x - 1)e^x$$

ب- إستنتاج دالة أصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  :

لدينا :  $g(x) = 1 - xe^x$  و منه دالة أصلية للدالة  $g$  من الشكل :  $G(x) = x - (x - 1)e^x$  .

### حل مقترح للتمرين (5) (باك 2013)

(I) الدالة المعرّفة على  $] -\infty; 1[$  بـ :  $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$  .

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{x-1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 1 \end{cases} \quad \text{لأن ،} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب أفقي للمنحنى (C).

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن ،} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مقارب عمودي للمنحنى (C).

(2) حساب  $f'(x)$  :

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $] -\infty; 1[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $] -\infty; 1[$  :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} + \left( \frac{-1}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left( 1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

بما أن  $f'(x) < 0$  من أجل كل  $x \in ]-\infty; 1[$  ، فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1[$  .  
جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$-\infty$	2

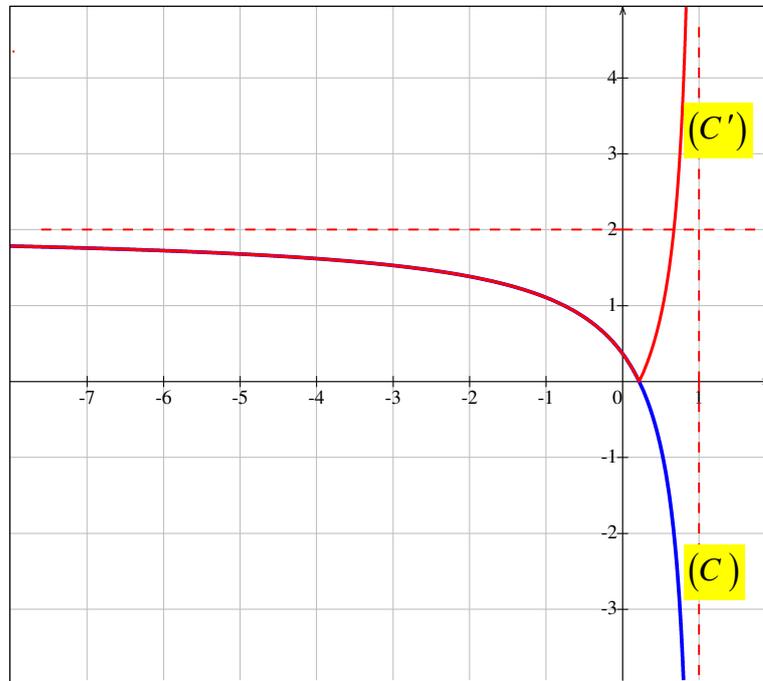
(3) نبيان أنّ المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-\infty; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$  .

الدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1[$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-\infty; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$  .

حسب جدول القيم :  $0,21 < \alpha < 0,22$  .

(4) الرسم :



(5) تعيين مجموعة قيم الاعداد الحقيقيه  $m$  التي من اجلها يكون للمعادله  $|f(x)| = m$  حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة  $|f(x)| = m$  بيانها هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C')$  مع المستقيم ذي المعادلة  $y = m$  .

من أجل  $m \in \left] \frac{1}{e}; 2 \right[$  المعادلة  $|f(x)| = m$  تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

(II) الدالة المعرّفة على  $]-\infty; 1[$  بـ:  $g(x) = f(2x - 1)$  .

(1) دراسة تغيّرات الدالة  $g$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(2x - 1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x - 1) = 2$$

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]-\infty; 1[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 1[$  :  $g'(x) = 2f'(2x - 1)$  .

بما أنه من أجل كل  $x \in ]-\infty; 1[$  ،  $(2x - 1) \in ]-\infty; 1[$  ، فإن  $f'(2x - 1) < 0$  ، وبالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على

المجال  $]-\infty; 1[$  .

جدول تغيّرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	1
$g'(x)$	-	
$g(x)$	2	$-\infty$

(2) أ - التحقّق أنّ  $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$  :

لدينا :  $g(x) = f(2x-1)$  و منه  $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = f(\alpha) = 0$

تبيان أنّ :  $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$

لدينا :  $g'(x) = 2f'(2x-1)$  و منه  $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha)$

ب - إستنتاج معادلة  $(T)$  المماس لمنحنى الدالة  $g$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+1}{2}$ .

لدينا :  $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$  و منه  $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$

ج - التحقّق من أنّ :  $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$  ، معادلة للمستقيم  $(T)$ .

لدينا :  $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$  ، لكن  $f(\alpha) = 0$  و هذا يعني  $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$  و منه  $f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن :  $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$  أي  $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$

### حل مقترح للتمرين (6) (باك 2015)

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$

(1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + 2e^{2x-2})$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) < 0$  و بالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

(2) تبيان أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-2) \left( \frac{1-2x}{2x-2} - \frac{e^{2x-2}}{2x-2} \right) = -\infty \end{cases}$$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ .

التحقّق أنّ :  $0,36 < \alpha < 0,37$ .

لدينا : أي :  $g(0,36) \times g(0,37) < 0$  و منه  $0,36 < \alpha < 0,37$  ،  $\begin{cases} g(0,36) \approx 0,002 \\ g(0,37) \approx -0,02 \end{cases}$

(3) إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$ .

(1) أ- تبيان أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$ .

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2}) = e^{2x+2}(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}) = e^{2x+2}g(-x)$$

ب- إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(-x)$  :

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

نستنتج أن الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; -\alpha]$  و متزايدة على  $]-\alpha; +\infty[$ .

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \text{ لأن } \cdot, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\alpha)$	$+\infty$

جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

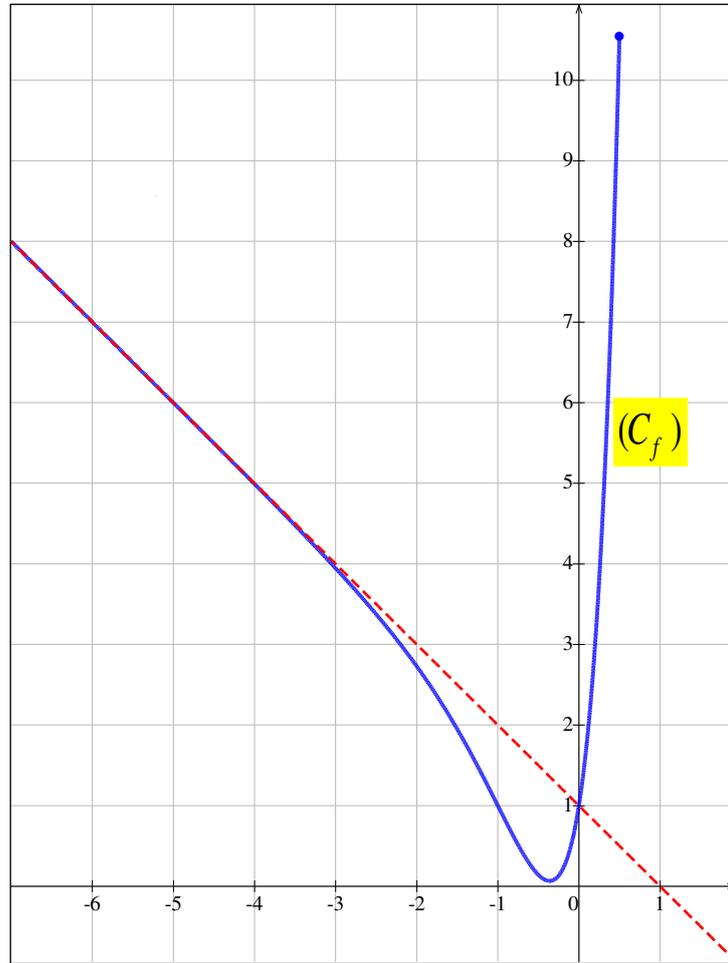
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \quad (3)$$

التفسير الهندسي : المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = -x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

(4) دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  :

لدينا :  $f(x) - (-x + 1) = xe^{2x+2}$  و منه إشارة الفرق من إشارة  $x$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي		$(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(0;1)$	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$ $(C_f)$ تحت $(\Delta)$



(6) أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - (4x + 4)e^{2x+2} = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

ب- إستنتاج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

لدينا : من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  ،  $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$

$$. f(x) = -\frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}e^{2x+2} \text{ ومنه}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ -f'(x) + f''(x) + x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} \right] + c \text{ : الشكل من الشكل}$$

$$. F(x) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \right) e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + c \text{ : أي}$$

### حل مقترح للتمرين (7) (باك 2016 - الدورة الأولى -)

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$

(1) حساب النهايات :

$$. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$g'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^{-x} = (2 - x)(x + 1)e^{-x}$$

إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $(2 - x)(x + 1)$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$

الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[-1; 2]$  و متناقصة على كل من المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $[2; +\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$1-e$	$1+5e^{-2}$	$1$	

(3) أ- تبيان انّ للمعادلة  $g(x) = 0$  حلين في  $\mathbb{R}$  ، احدهما معدوم و الاخر  $\alpha$  حيث :  $-1.52 < \alpha < -1.51$  .

لدينا :  $g(0) = 1 + (0^2 + 0 - 1)e^0 = 1 - 1 = 0$

الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; -1[$  و  $]-1; 2[$  و  $]2; +\infty[$  و  $g(-1,52) \approx 0,041$  و  $g(-1,51) \approx -0,040$

أي  $g(-1,52) \times g(-1,51) < 0$  و منه حسب ميرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-\infty; -1[$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-1.52 < \alpha < -1.51$  .

ب- إشارة  $g(x)$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$0$	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

(1) أ- حساب النهايات :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = +\infty$

ب- الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$f'(x) = -1 + (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = -1 - (x^2 + x - 1)e^{-x} = -g(x)$

ج- جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$0$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$2$	$-\infty$	

د-  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha) = 0$

التفسير الهندسي : المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$  معامل توجيهه معدوم . (يوازي لحامل محور الفواصل).

(2) أ-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0$  و منه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل

للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  .

ب- دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  :

لدينا :  $f(x) - (-x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = (x+1)(x+2)e^{-x}$  و منه إشارة الفرق من إشارة

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$+\infty$	
$f(x) - y$	+	0	-	0	+
الوضع النسبي		تحت $(C_f)$ $(\Delta)$		فوق $(C_f)$ $(\Delta)$	فوق $(C_f)$ $(\Delta)$
		يقطع $(C_f)$ $(\Delta)$		يقطع $(C_f)$ $(\Delta)$	
		في النقطة $B(-2;2)$		في النقطة $A(-1;1)$	

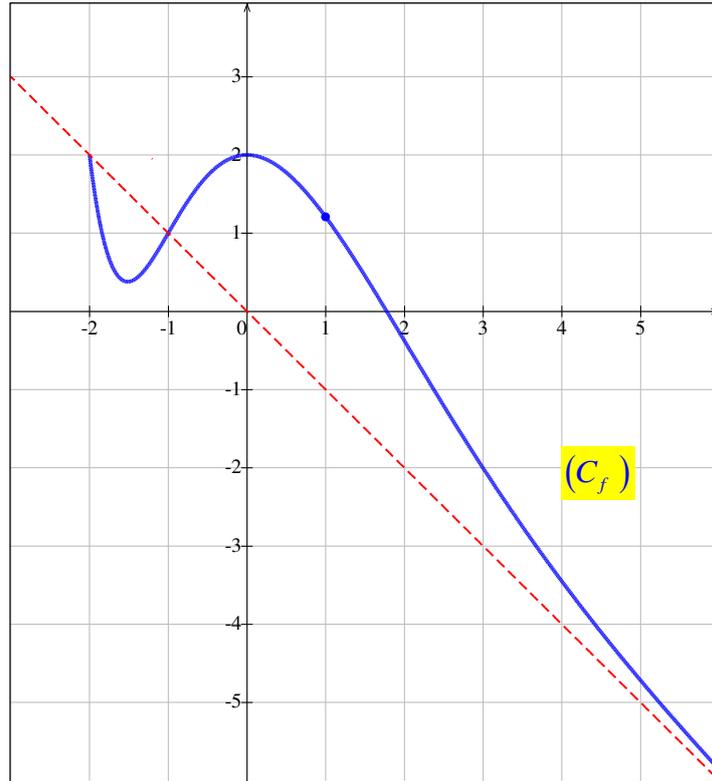
ج - تبيان أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي إنعطاف :

لدينا : الدالة  $f'$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f''(x) = -g'(x) = (x-2)(x+1)e^{-x}$  ، إشارة  $f''(x)$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

و منه المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي إنعطاف هما :  $A(-1;1)$  و  $C(2;-2+12e^{-2})$  .

د - الرسم :



هـ - المناقشة البيانية :

$$. f(x) = -m \text{ تكافئ } (m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0 \text{ المعادلة}$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = -m$  .

لما  $m \in ]-f(\alpha); +\infty[$  يكون  $f(\alpha) \in ]-\infty; -m[$  و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما  $m = -f(\alpha)$  المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب و الآخر سالب .

لما  $m \in ]-2; -f(\alpha)[$  يكون  $f(\alpha) \in ]-m; 2[$  و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان و الآخر موجب .

لما  $m = -2$  المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر معدوم .

(III)  $H$  و  $h$  الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = x + f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$  و  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ .

(1) تعيين الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  ، و  $c$  بحيث تكون الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  :

$H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  يعني : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $H'(x) = h(x)$  .

الدالة  $H$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

$$H'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

و منه بالمطابقة نجد :  $a = -1$  ،  $b = -5$  ، و  $c = -7$  أي  $H(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ .

(2) أ - حساب التكامل :  $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$  ، حيث  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  .

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx = [H(x)]_0^\lambda = (-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$  يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  ، المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x$  و المستقيمين اللذين

معادلتيهما  $x = 0$  و  $x = \lambda$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  .

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7] = 7 -$$

### حل مقترح للتمرين (8) (باك 2016 - الدورة الثانية -)

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 2e^x - x^2 - x$  .

(1) أ- الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$  ،

دراسة إتجاه تغير الدالة  $g'$  :

الدالة  $g'$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$  ،

إشارة  $g''(x)$  :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+

الدالة  $g'$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 0]$  و متزايدة على المجال  $]0; +\infty[$  .

ب- تبيان أنه ، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) > 0$  .

الدالة  $g'$  تقبل قيمة حدية صغرى على  $\mathbb{R}$  هي  $g'(0) = 1$  و منه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) > 0$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{2e^x}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبيان أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-1,38 < \alpha < -1,37$  .

الدالة  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  و  $g(-1,38) \approx -0,02$  أي  $g(-1,38) \times g(-1,37) < 0$  و منه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-1,38 < \alpha < -1,37$  .

(3) إشارة  $g(x)$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$

(1) أ- حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن ، } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{1 - x e^{-x}} \right) = +\infty$$

ب- الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f'(x) = \frac{(2xe^x + x^2 e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2 e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x [(2+x)(e^x - x) - x(e^x - 1)]}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x.g(x)$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[\alpha; +\infty[$  و متزايدة على كل من المجالين  $]-\infty; \alpha]$  و  $]-\infty; \alpha]$  :

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$0$	$+\infty$

(2) أ- تبيان أن :  $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{-}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\alpha^2 \left( \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \alpha} = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{\alpha - 1} \text{ و منه } e^\alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \text{ أي } g(\alpha) = 0$$

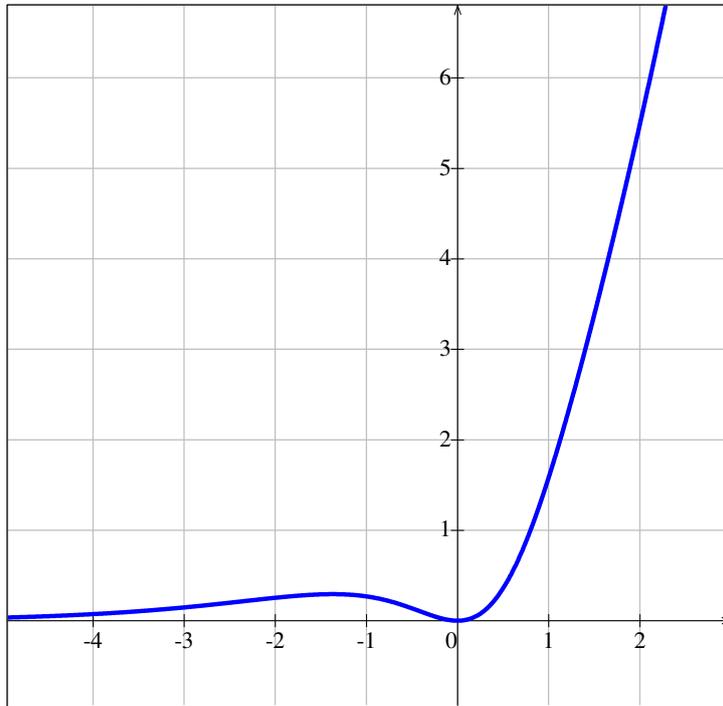
$$\text{أي : } f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$$

إستنتاج حصر للعدد  $f(\alpha)$  .

$$\text{لدينا : } -1,38 < \alpha < -1,37 \text{ يكافئ } \begin{cases} -0,76 < 2\alpha + 2 < -0,74 \\ (-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2 \\ -2,38 < \alpha - 1 < -2,37 \\ -\frac{2}{2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < -\frac{2}{2,38} \end{cases} \text{ و منه } 0,27 < f(\alpha) < 0,32$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \rightarrow$$

التفسير البياني : المنحنى  $(C_f)$  و المنحنى الممثل للدالة "مربع"  $(x \mapsto x^2)$  متقاربان عند  $+\infty$  .



### حل مقترح للتمرين (9) (باك 2017 - الدورة العادية -)

(I) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$ .

(1) تبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e \times x^2 e^{-x}) = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = -\infty$$

(2) أ- الدالة قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

$$f'(x) = -2x e^{1-x} + x^2 e^{1-x} = (x^2 - 2x) e^{1-x} = x(x-2) e^{1-x}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x(x-2)$  :

$x$	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[0; 2]$  و متزايدة على كل من المجالين  $]-\infty; 0]$  و  $[2; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		2	↘		$2 - 4e^{-1}$
		↖			↗		2

(3) كتابة معادلة لـ  $(T)$  المماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا :  $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$  و منه  $(T) : y = -x + 2$ .

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = 1 - x e^{1-x}$ .

(1) تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $h(x) \geq 0$  :



$$S = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (7 - 2e) u.a$$

حل مقترح للتمرين (10) (باك 2017 - الدورة الإستثنائية -)

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = x^2 e^x - e$ .

•  $g(1) = e^1 - e = 0$

• إشارة  $g(x)$  :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

• إشارة  $g(-x)$  :

$x$	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ :  $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$ .

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

(2) لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{e}{x} \right) = 0$  : المعادلة  $y = e^{-x} - 2$  متقاربان عند  $-\infty$ .

دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\gamma)$  :

لدينا :  $f(x) - y = -\frac{e}{x}$  و منه إشارة الفرق من إشارة  $-x$  :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضع النسبي	فوق $(C_f)$ $(\gamma)$		تحت $(C_f)$ $(\gamma)$

(3) تبيان أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  ،  $f'(x) = \frac{-x^2 e^{-x} - e}{x^2}$  ،

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم :

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2} = \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} = \frac{-(x^2 e^{-x} - e)}{x^2} = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغيّر  $f$  الدالة :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-g(-x)$  :

$x$	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+

و منه الدالة  $f$  متزايدة على كل من المجالين  $]-1; 0[$  و  $]0; +\infty[$  متناقصة على المجال  $]-\infty; -1[$ .

جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

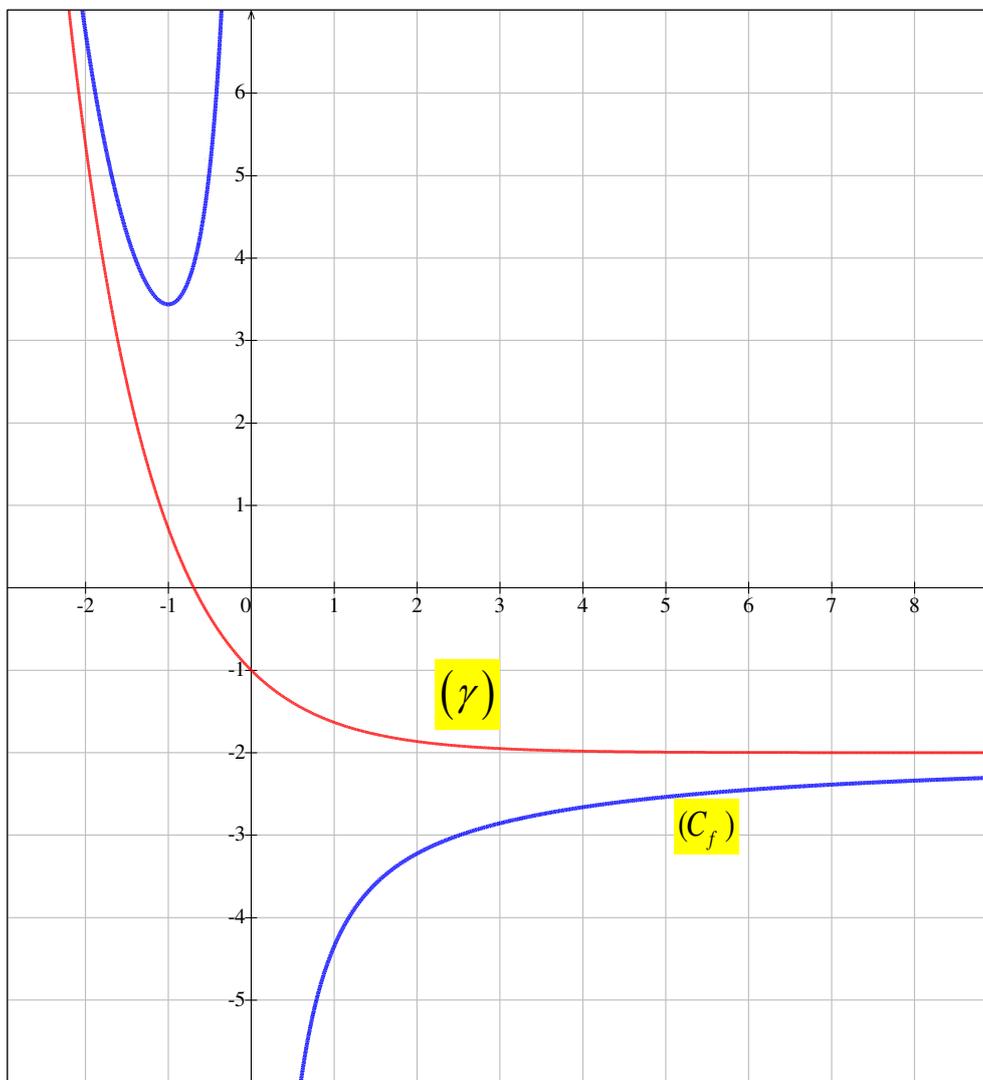
$x$	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2e - 2$	$\nearrow$
				$+\infty$

(4) شرح كيفية إنشاء المنحنى  $(\gamma)$  انطلاقاً من منحنى الدالة  $e^x \mapsto x$ :

لدينا:  $(\gamma)$  المنحنى ذي المعادلة  $y = e^{-x} - 2$

و منه  $(\gamma)$  هو صورة  $(\Gamma)$  منحنى الدالة  $e^{-x} \mapsto x$  بالإسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(0; -2)$  ، علماً أن  $(\Gamma)$  هو نظير منحنى الدالة  $e^x \mapsto x$  بالنسبة لحامل محور الترتيب .

الرسم :



(5)  $n$  عدد طبيعي و  $A(n)$  مساحة الحيز المسوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(\gamma)$  و المسقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x = -e^{n+1} \quad \text{و} \quad x = -e^n$$

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} [f(x) - e^{-x} + 2] dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left( -\frac{e}{x} \right) dx = -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left( \frac{1}{x} \right) dx = -e [\ln|x|]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e$$

$$. \quad l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016) = 2017e : l \text{ حساب العدد الحقيقي}$$

حل مقترح للتمرين (11) (بأك 2018)

(I) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

(1) حساب النهايات :

$$. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty : \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = -\infty$$

$$. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 : \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x e^{-x} - e^{-x}) = 2$$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x-1) = (2-x)e^{-x}$  .  
لدينا : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{-x} > 0$  و بالتالي إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $2-x$  .

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $[2; +\infty[$  و متزايدة على المجال  $] -\infty; 2]$  .

جدول تغيّرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	$-\infty$	$2 + e^{-2}$	2

(3) أ - تبيان أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0.38 < \alpha < -0.37$  .

الدالة  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $] -\infty; 2]$  و  $] -\infty; 2[ \subset ] -0,38; -0,37[$  و  $g(-0.38) \approx -0,017$   
 $g(-0.37) \approx 0,016$

أي  $g(-0,38) \times g(-0,37) < 0$  و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0.38 < \alpha < -0.37$  .

ب - إشارة  $g(x)$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		-	0 +

(II) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$  :  
(1) - حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \left( 2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0 \text{ - ب}$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  .

ج - دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  بحيث :  $y = 2x + 1 : (\Delta)$  .

لدينا :  $f(x) - y = f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$  و منه إشارة الفرق من إشارة  $-x$  .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0 -
الوضع النسبي		$(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(0;1)$	$(C_f)$ تحت $(\Delta)$ فوق $(\Delta)$

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون :  $f'(x) = g(x)$  ،

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f'(x) = 2 + (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x) = 2 + (x-1)e^{-x} = g(x)$$

- إتجاه تغيّرات الدالة  $f$  :

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  ، و منه نستنتج أن :

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $] -\infty; \alpha]$  و متزايدة على المجال  $[\alpha; +\infty[$  .

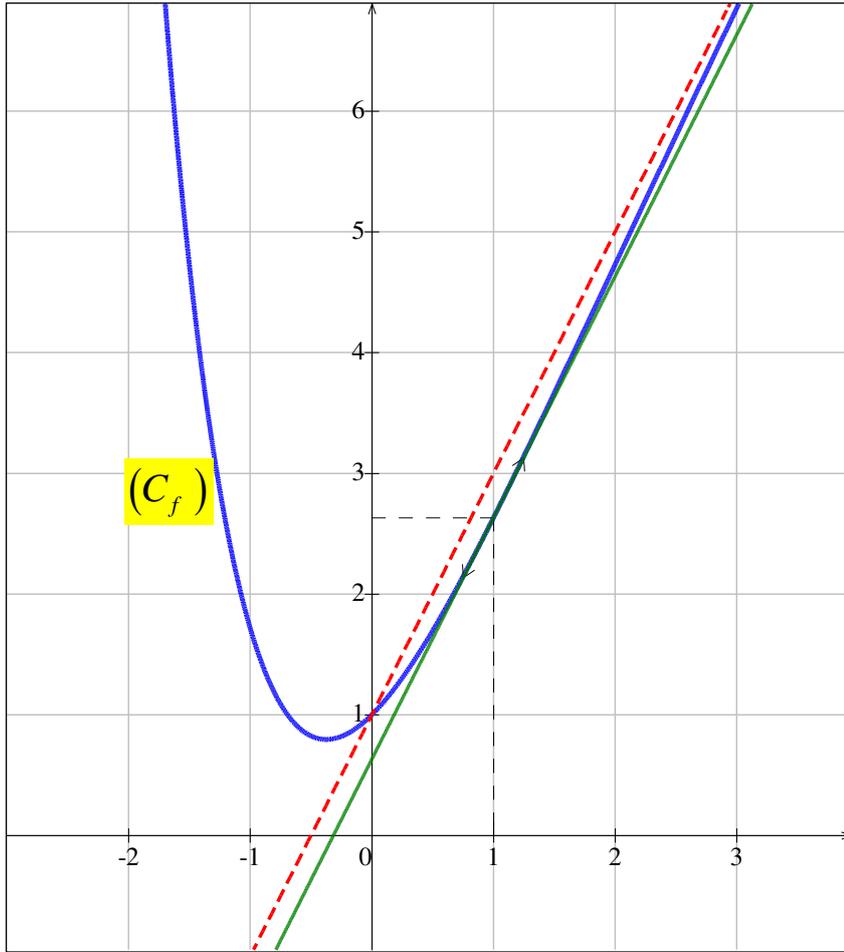
$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(\alpha)$	$+\infty$

جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

(3) كتابة معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا :  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$  و منه  $y = 2x + 1 - \frac{1}{e}$  هي معادلة  $(T)$  .

(4) الرسم :



(5) المناقشة البيانية :

$$2x + 1 - xe^{-x} = 2x + 1 + m - 1 \text{ تكافئ } -xe^{-x} = m - 1 \text{ تكافئ } xe^{-x} = (1 - m) \text{ تكافئ } x = (1 - m)e^{-x}$$

أي  $2x + m = 2x + 1 - xe^{-x}$  أي  $f(x) = 2x + m$  ← مناقشة مائلة .

إذا كان  $m \in \left] -\infty; 1 - \frac{1}{e} \right[$  فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان  $m = 1 - \frac{1}{e}$  المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان  $m \in \left] 1 - \frac{1}{e}; 1 \right[$  فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .

إذا كان  $m = 1$  فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان  $m \in \left] 1; +\infty \right[$  فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما .

(6) - تعيين دالة أصلية للدالة  $x \mapsto xe^{-x}$  على  $\mathbb{R}$  والتي تتعدم من أجل  $x = 1$  .

الدالة  $x \mapsto xe^{-x}$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  و بالتالي فدالتها الأصلية التي تتعدم عند 1 هي الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $F(x) = \int_1^x te^{-t} dt$

نضع  $v(t) = -e^{-t}$  ،  $u'(t) = 1$  ومنه  $v'(t) = e^{-t}$  ،  $u(t) = t$   
بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x) = \left[ -te^{-t} \right]_1^x - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = (-x - 1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

ومن الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto xe^{-x}$  على  $\mathbb{R}$  والتي تتعدم من أجل  $x = 1$  هي:  $F(x) = (-x - 1)e^{-x} + 2e^{-1}$ .

ب- حساب العدد  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيميات التي معادلاتها:  $x = 1$  ،  $x = 3$  و

$$y = 2x + 1$$

$$A = \int_1^3 ((2x + 1) - f(x)) dx = \int_1^3 xe^{-x} dx = F(3) - F(1) = 2e^{-1} - 4e^{-3} \text{ (u.a)}$$

حل مقترح للتمرين (12) (باك 2019)

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

(1) أ- دراسة إتجاه تغيّر الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = e^x - e$

من أجل  $x \in ]-\infty; 1]$  ، يكون  $e^x \leq e$  أي  $g'(x) \leq 0$  و بالتالي الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 1]$ .

من أجل  $x \in [1; +\infty[$  ، يكون  $e^x \geq e$  أي  $g'(x) \geq 0$  و بالتالي الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$ .

ب- إستنتاج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  :

بما أن  $g(1) = 0$  و الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$  و متناقصة على المجال  $]-\infty; 1]$  فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة  $g$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g(x) \geq 0$ .

(2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة  $f$  :

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = e^x - ex = g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) \geq 0$  و بالتالي الدالة  $f$  متزايدة على  $\mathbb{R}$ .

(3) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x^2} \right) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن ،} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \left( \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right) \right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2}ex^2 \right) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن ،} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = -\infty$$

جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

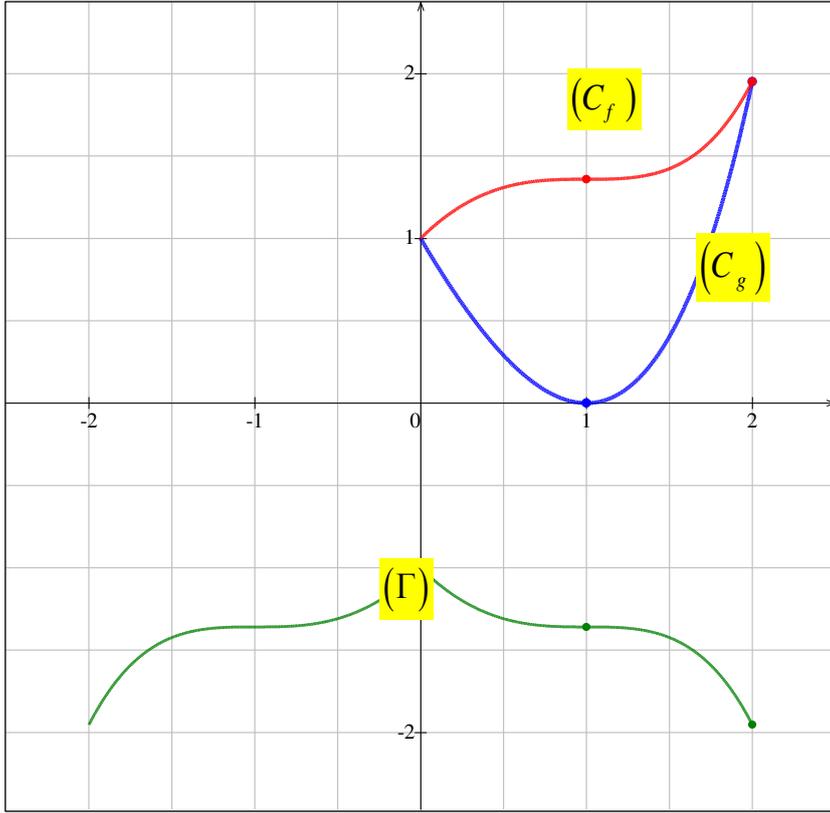
$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

(4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين  $(C_g)$  و  $(C_f)$  على  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 - (e^x - ex) = -\frac{1}{2}ex^2 + ex = ex \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right) :$$

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f(x) - g(x)$		-	0	+	0	-
الوضع النسبي		$(C_f)$	$(C_f)$ فوق $(C_g)$	$(C_f)$ تحت $(C_g)$		$(C_f)$ تحت $(C_g)$
		$(C_f)$ يقطع $(C_g)$		$(C_f)$ يقطع $(C_g)$		
		$A(0;1)$		$B(2; e^2 - 2e)$		

(5) الرسم :



(6) حساب مساحة الحيز المحدد

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 \left( -\frac{1}{2}ex^2 + ex \right) dx = \left[ -\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{6}e + 2e = \frac{2e}{3} \text{ (u.a)}$$

$$\text{و منه } A = \frac{2e}{3} \times 4 = \frac{8e}{3} \text{ cm}^2$$

(7) الدالة المعرفة على المجال  $[-2; 2]$  كما يلي:  $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$

أ - تبيان أن الدالة  $h$  زوجية :

$$\text{من أجل كل } x \in [-2; 2], -x \in [-2; 2] \text{ و } h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{|-x|} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|} = h(x) \text{ و منه الدالة } h \text{ زوجية.}$$

$$\text{ب- من أجل } x \in [0; 2], h(x) + f(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^x + e^x - \frac{1}{2}ex^2 = 0$$

استنتاج كيفية رسم  $(\Gamma)$  انطلاقاً من  $(C_f)$  :

من أجل  $x \in [0; 2], h(x) = -f(x)$  ، وبالتالي  $(\Gamma)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال  $[0; 2]$  .

و لرسم  $(\Gamma)$  على المجال  $[-2; 0]$  نستخدم كون الدالة  $h$  زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .



هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ  
و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

**تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي  
للصفحة**

5min  Maths

