Bac 2021

مجلة 5 min Maths

من اعداد الأستاذ شعبان أسامة

الأعداد المركبة

Complex Number

ملخص شامل

تطبيقات

تمارين أجنبية

تمارين محلولة

بكالوريات

شكر خاص للأستاذ بخاخشة خالد الأستاذ بلقاسم عبد الرزاق

Google / Facebook/ Telegram/ Instagram : 5min maths

تلمسان-0775737163

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها الطالب " مجلة 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي الشعب العلمية لمحور الأعداد المركبة

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر

الأستاذ شعبان أسامة

شكر خاص للأستاذ بخاخشة خالد و الأستاذ بلقاسم عبد الرزاق على تعاونهم معي

في انجاز هذا العمل المتواضع

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة،تم اصدار أول نسخة
بتاريخ :2019/09/13

5min Maths

CHABANE Oussama

تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس + تطبيقات
2. تمارين محلولة
3. تمارين بكالوريا محلولة شعبة علوم
4. تمارين البكالوريا شعبة تقني رياضي

#5min Maths

ابراهام دي موافر:ولد عام 1667م عالم في الرياضيات أضاف إضافات هامة في حساب المثلثات وقانون الاحتمالات وهناك ثلاث نظريات رياضية تحمل اسمه. توفي عام 1754م.

« ابراهام دي موافر» من أصدقاء « اسحاق نيوتن»،حيث نشر على التوالي سنة (1718)، (1738)، (1756) مساهماته في الاحتمال ضمن كتابه في المصادفة « مبدأ الفرص ».

في سنة 1707م.اكتشف« ابراهام دي موافر » دستوره الشهير:

$$(\cos(x)+i\sin(x))^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

Abraham de Moivre

1.

ملخص الدرس

أمثلة تطبيقية محلولة

تعريف

نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2=-1$

ملاحظات و ترميز:

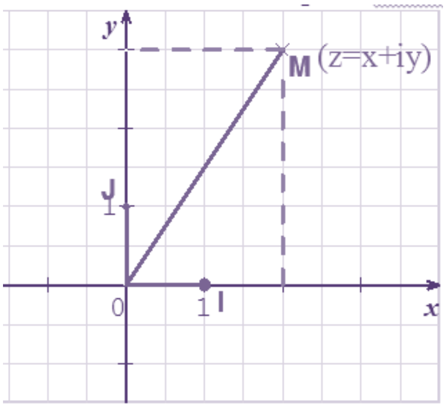
- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بِـ : $\mathbb{C}$.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\operatorname{Re} z$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\operatorname{Im} z$.
- إذا كان $y=0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x=0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما.
  أي $z=0$ يعني $x=0$ و $y=0$.
- الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

مثال: $z=1+2i$ ، $z=-3i$.

تساوي عددين مركبين .

يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$: $z=z'$ معناه ($x=x'$ و $y=y'$)



التمثيل الهندسي لعدد مركب.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

- إلى كل عدد مركب $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ ، $y\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$) نرفق النقطة M إحداثياها $x;y$ ، النقطة

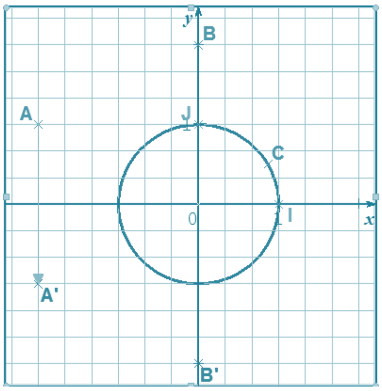
M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب z .

- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z=x+iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ،لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب
- المستوي يسمى المستوي المركب.

تطبيق 1:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

لتكن النقط A ، B ، C من المستوي التي لواحقها $-2+i$ ، $2i$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ على الترتيب .



1) أنشئ النقط A ، B ، C في المعلم $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

2) عين لاحقة النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى O . أنشئ B'.

3) عين لاحقة النقطة A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل ، ثم عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}$. أنشئ A'.

حل التطبيق 1:

1) A صورة العدد $-2+i$ إذن $A\ -2;1$.

B صورة العدد $2i$ إذن $B\ 0;2$.

C صورته العدد $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ إذن $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

لإنشاء النقطة C يمكن الملاحظة أنها تنتمي إلى الدائرة

التي مركزها O و نصف قطرها 1 و ترتيبها $\frac{1}{2}$.

2) B' نظيرة B بالنسبة إلى O إذن $\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}$.

و منه $B'\ 0;-2$ و لاحقة B' هي $-2i$.

3) A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن A'

و A لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن $A'\ -2;-1$

و لاحقة A' هي $-2-i$. $\overrightarrow{AA'}\ 0;-2$ و منه لاحقة $\overrightarrow{AA'}$ هي $-2i$

مرافق عدد مركب.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$). العدد المركب $x-iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z

ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.

أمثلة : • $\overline{2+8i}=2-8i$ ، • $\overline{3-11i}=3+11i$ ، • $\overline{4i}=-4i$ ، • $\overline{-2}=-2$.

التفسير الهندسي لمرافق عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$.

لتكن M صورة z و M' صورة $\bar{z}$ ، M و M'

لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن M و M'

متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

مجموع وجداء عددين مركبين.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث $z'=x'+iy'$ ($x'\in\mathbb{R}$ و $y'\in\mathbb{R}$).

مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z+z'=x+x'+i\ y+y'$.

جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z.z'=xx'-yy'+i\ xy'+x'y$.

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

أمثلة : • $2-i\ +\ -7+4i\ =\ 2-7\ +i\ -1+4\ =-5+3i$.

• $3-2i\ \ -4-7i\ =-12-21i+8i+14i^2=-26-13i$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

$z=x+iy$ عدد مركب و $z'=x'+iy'$ عدد مركب .

المجموع $z+z'$ هو لاحقة النقطة S حيث : $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$.

$\overrightarrow{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$.

ملاحظات: •إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$ ، فإن $z+z'$ هو لاحقة $\vec{u}+\vec{v}$.

•إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان λ عددا حقيقيا فإن λz هو لاحقة $\lambda\vec{u}$.

• شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

تطبيق 2:

n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أكتب على الشكل الجبري كل من : i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8 .

2) ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري .

حل التطبيق 2:

$i^3=i^2\times i=-i$ ، $i^4=i^2\times i^2=1$ ، $i^5=i^4\times i=i$ ، $i^6=-1$ ، $i^7=-i$ ، $i^8=1$.

2) نلاحظ أن $i^4=1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $i^{4k}=1$.

كذلك : $i^{4k+1}=i^{4k}\times i=i$.

$i^{4k+2}=i^{4k}\times i^2=-1$.

$i^{4k+3}=i^{4k}\times i^3=-i$.

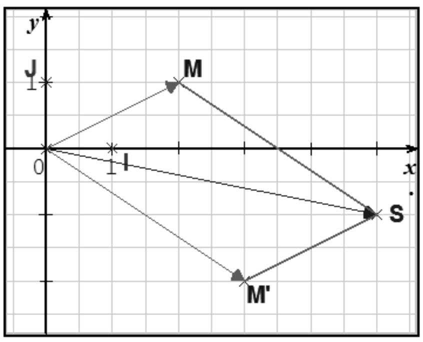
كل عدد طبيعي n يكتب على أحد الأشكال التالية : $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ و $4k+3$.

تطبيق 3:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=\left(1-i\right)^4$ ، **2)** $z_2=\left(-2+i\sqrt{3}\right)\left(3-5i\right)+\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$ ، **3)** $z_3=\left(-7-2i\right)\left(6-4i\right)^2$.

حل التطبيق 3:



1) $z_1=\left(1-i\right)^4$ و منه $z_1=\left[\left(1-i\right)^2\right]^2=\left(-2i\right)\left(-2i\right)$ إذن $z_1=4i^2=-4$.

2) $z_2=\left(-2+i\sqrt{3}\right)\left(3-5i\right)+\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$.

و منه $z_2=-6+3i\sqrt{3}+10i-5i^2\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}i+4i-2i^2$ إذن

$z_2=-\frac{5}{2}+5\sqrt{3}+\left(\frac{53}{4}+3\sqrt{3}\right)i$.

3) $z_3=\left(-7-2i\right)\left(6-4i\right)^2$ و منه

$z_3=\left(-7-2i\right)\left(36-48i+16i^2\right)=\left(-7-2i\right)\left(20-48i\right)$

إذن $z_3=-140+336i-40i+96i^2=-236+296i$.

تطبيق 4:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=\dfrac{5}{1-2i}$ ، 2) $z_2=\dfrac{-7+4i}{4-7i}$ ، 3) $z_3=\dfrac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$.

حل التطبيق 4:

1) $z_1=\dfrac{5}{1-2i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_1=\dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$ أي $z_1=\dfrac{5(1+2i)}{5}=1+2i$.

2) $z_2=\dfrac{-7+4i}{4-7i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_2=\dfrac{(-7+4i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)}=\dfrac{-28+16i-49i+28i^2}{16+49}$ أي $z_2=\dfrac{-56-33i}{65}=-\dfrac{56}{65}-\dfrac{33}{65}i$.

3) $z_3=\dfrac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$ نقوم أولا بكتابة المقام على الشكل الجبري :

$z_3=\dfrac{3+2i}{-6-6i-5i-5i^2}=\dfrac{3+2i}{-1-11i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_3=\dfrac{(3+2i)(-1+11i)}{(-1-11i)(-1+11i)}=\dfrac{-3+33i-2i+22i^2}{1+121}$ أي $z_3=\dfrac{-25+31i}{122}=-\dfrac{25}{122}+\dfrac{31}{122}i$

✍خواص مرافق عدد مركب.

- $\overline{\overline{z}}=z$.
- $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$.
- $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$.
- $z\overline{z}=(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2$.

z عدد مركب و مرافقه $\overline{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\overline{z'}$.

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$.
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$. $n\in\mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ مع $z\neq 0$.
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ مع $z'\neq 0$.

☐تطبيق 5:

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z في الحالتين الآتيتين :

1) $(2-3i)z-26=0$.

2) $z-21i=-14+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}z$.

حل التطبيق 5:

1) $(2-3i)z-26=0$ أي $(2-3i)z=26$ و بالتالي $z=\dfrac{26}{2-3i}$.

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\dfrac{26(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=4+6i$

لتكن S مجموعة الحلول $S=\{4+6i\}$.

2) $z-21i=-14+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}z$. نضرب الطرفين في 2 نحصل على $2z-42i=-28+i\sqrt{3}z$

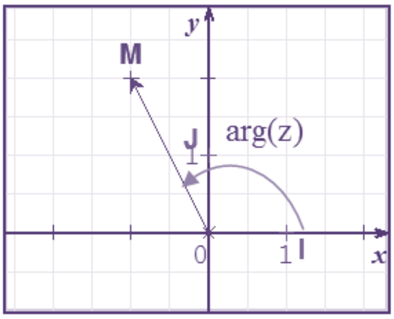
$2z-i\sqrt{3}z=-28+42i$ أي $z(2-i\sqrt{3})=-28+42i$

وبالتالي $z=\dfrac{-28+42i}{2-i\sqrt{3}}$

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\dfrac{(-28+42i)(2+i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})}$

$z=(-4+6i)(2+i\sqrt{3})=(-8-6\sqrt{3})+(12-4\sqrt{3})i$

لتكن S' مجموعة الحلول $S'=\{(-8-6\sqrt{3})+(12-4\sqrt{3})i\}$.



☐ تطبيق 6:

ليكن كثير الحدود P للمتغيرالمركب z المعرف كما يلي :

$P(z)=z^3+z^2-2$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

2) أحسب $P(1)$ و $P(-1-i)$.

3) استنتج جذرا آخرا لـ $P(z)$.

حل التطبيق 6:

1) $\overline{P(z)}=\overline{z^3+z^2-2}$.

$\overline{P(z)}=\overline{z^3}+\overline{z^2}-\overline{2}$ بتطبيق خاصية المجموع .

$\overline{P(z)}=(\overline{z})^3+(\overline{z})^2-2$ بتطبيق خاصية الأس .

إذن $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

2) $P(1)=0$.

$P(-1-i)=(-1-i)^3+(-1-i)^2-2$

$P(-1-i)=2i(-1-i)+2i-2=0$.

3) $P(-1-i)=0$ و منه $\overline{P(-1-i)}=0$ وبالتالي $P(\overline{-1-i})=0$ أي $P(-1+i)=0$

إذن $-1+i$ جذر لِـ $P(z)$.

✍طويلة عدد مركب.

z عدد مركب حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان).

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

☜ أمثلة : $\bullet\ |2+8i|=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$ ، $\bullet\ |-4-3i|=\sqrt{16+9}=5$ ، $\bullet\ |-7i|=\sqrt{49}=7$

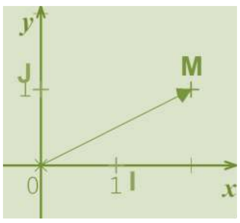
🔔 **ملاحظات:** •إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z .

• $z=0$ يعني $|z|=0$. • $|z|^2=x^2+y^2$.

✍التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM=|z|$



✍خواص طويلة عدد مركب.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

• $|\overline{z}|=|z|$. • $|-z|=|z|$.

• $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$. • $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ مع $z'\neq 0$

• $\left|z^n\right|=|z|^n$.   • $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.(المتباينة الثلاثية).

ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB=\left|z_B-z_A\right|$.

تطبيق 7:

عين طويلة العدد المركب z في كل حالة من الحالات الآتية.

1) $z=(2+i)(-5+3i)$ ، 2) $z=\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$ ، 3) $z=(-3+4i)^4$ ، 4) $z=\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3$.

حل التطبيق 7:

1) $z=(2+i)(-5+3i)$

$|z|=|(2+i)(-5+3i)|=|2+i||-5+3i|$ أي $|z|=\sqrt{5}\times\sqrt{34}=\sqrt{170}$.

2) $z=\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$

$|z|=\left|\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}\right|=\dfrac{|3-4i|}{\left|\sqrt{3}-i\right|}$ أي $|z|=\dfrac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{5}{2}$.

3) $z=(-3+4i)^4$

$|z|=\left|(-3+4i)^4\right|=|-3+4i|^4$ أي $|z|=\left(\sqrt{9+16}\right)^4=5^4=625$.

4) $z=\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3$

$|z|=\left|\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3\right|=\left(\dfrac{\left|(1-i)^6\right|}{\left|(-8-6i)^2\right|}\right)^3=\left(\dfrac{|1-i|^6}{|-8-6i|^2}\right)^3$ أي $|z|=\left(\dfrac{8}{100}\right)^3=\dfrac{8}{15625}$.

عمدة عدد مركب غير معدوم.

z عدد مركب غير معدوم حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ لتكن M صورة z.

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg z$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$.

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

z عدد مركب غير معدوم .العدد z يكتب على الشكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث :

$r=|z|$ و $\theta=\arg z$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لِـ z .

ملاحظة: • إذا كان $z=x+iy$ ، $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ و $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$.

خاصية:

*يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد 2π .

*إذا كان $z=\lambda(\cos\theta+i\sin\theta)$ و كان $\lambda>0$ فإن $\lambda=|z|$ و $\theta=\arg z$.

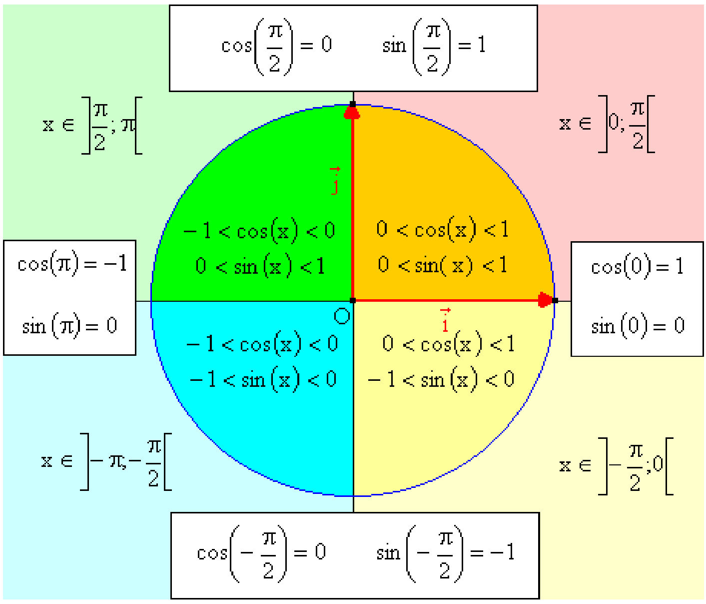
خواص عمدة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومين.

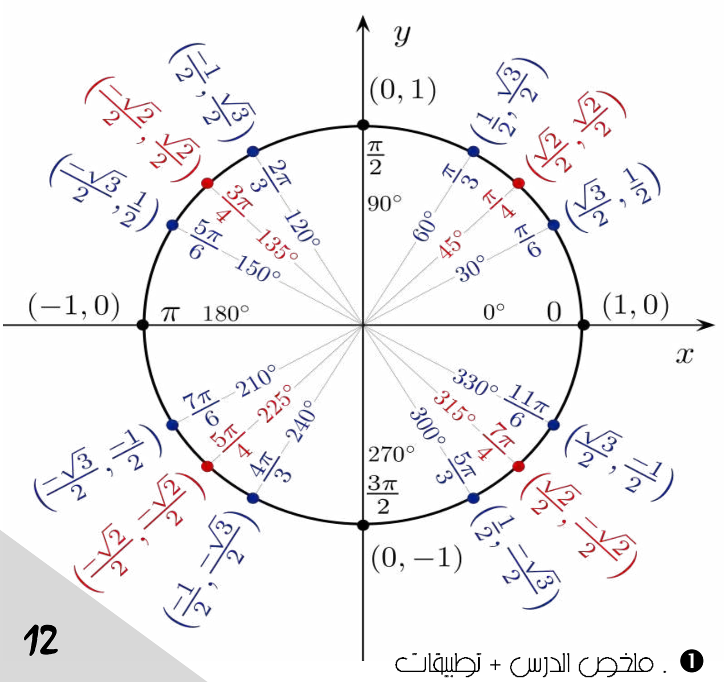
- $\arg z.z' = \arg z + \arg z'$.
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.
- $\arg z^n = n\arg z$. $n\in\mathbb{N}^*$

دستور موافر: $z^n = r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$

معارف سابقة



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1	0



تطبيق 8:

عين الطويلة وعمدة للعدد z ثم أكتبه على الشكل المثلثي في الحالتين الآتيتين :

1) $z=1+i$ 2) $z=\sqrt2-i\sqrt6$

حل التطبيق 8:

1) $z=1+i$. $|z|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt2$. ليكن θ عمدة لِـ z .

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$ و $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$ و منه $\frac{\pi}{4}$ عمدة لِـ z أي $z=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2) $z=\sqrt2-i\sqrt6$.

$|z|=\left|\sqrt2-i\sqrt6\right|=\sqrt{\sqrt2^{\,2}+{-\sqrt6}^{\,2}}=\sqrt8=2\sqrt2$ ليكن θ عمدة لِـ z .

$\cos\theta=\frac{\sqrt2}{2\sqrt2}=\frac{1}{2}$ و $\sin\theta=\frac{-\sqrt6}{2\sqrt2}=-\frac{\sqrt3}{2}$

ومنه $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ عمدة لـ z أي $z=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

تطبيق 9:

ليكن العددان المركبان $Z_1=(1+i)(-1-i\sqrt{3})$ و $Z_2=\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$ ؛

1) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الجبري.   2) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي.

حل التطبيق 9:

1) $Z_1=(1+i)(-1-i\sqrt{3})=-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})$.

$Z_2=\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(-1+i\sqrt{3})}{(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}=\frac{-1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{4}$. $Z_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$.

2) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ، $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

$Z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$.

$Z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)+\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$.

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم : العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z=re^{i\theta}$.

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z.

قواعد الحساب على الشكل الأسي

<u>خواص:</u> θ و θ' عددان حقيقيان.

- $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}$.   • $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$.
- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

<u>أمثلة :</u> • $z_1=1+i$ يكتب $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، • $z_1=-1-i\sqrt{3}$ يكتب $z_1=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

• $z_1=1-i$ يكتب $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، • $z_1=-\sqrt{3}+i$ يكتب $z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

دستور موافر

<u>خواص:</u> z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا: $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.

تطبيق 10:

1) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الجبري ؛

• $z_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ • $z_1=8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ • $z_2=5e^{i\frac{\pi}{2}}$ • $z_3=6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسي ؛

• $z_0=-7i$ • $z_1=-3-3i$ • $z_2=(1-i)^8$ • $z_3=(\sqrt{3}+i)^6$

حل التطبيق 10:

1) $\bullet\ z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

أي $z_0 = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}$.

$\bullet\ z_1 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

أي $z_1 = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}$.

$\bullet\ z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

أي $z_2 = 5(0+i\,1) = 5i$.

$\bullet\ z_3 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

أي $z_3 = 6\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3+3i\sqrt{3}$

2) $\bullet\ z_0 = -7i = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\bullet\ z_1 = -3-3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

أي $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

$\bullet\ z_2 = (1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8$.

أي $z_2 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8 = \left(\sqrt{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^8 = 16e^{-2i\pi}$.

$\bullet\ z_3 = (\sqrt{3}+i)^6 = \left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^6$.

أي $z_3 = 2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 64\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right) = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$.

إذن $z_3 = 64e^{i\pi}$.

المعادلات من الدرجة الثانية.

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$ حيث a ، b و c أعداد مركبة و $a\neq 0$.

مميزها $\Delta = b^2-4ac$.

- إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z = -\frac{b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين :

$$z''=\frac{-b+\omega}{2a} \quad \text{و} \quad z'=\frac{-b-\omega}{2a}$$

حيث ω جذر تربيعي لِـ Δ.

ملاحظة: إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2+bz+c=a\left(z-z'\right)\left(z-z''\right)$$

☜ **مثال:** • حلا المعادلة $z^2-z+1=0$ هما $z'=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z''=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ω عدد مركب .يسمى حلا المعادلة $z^2=\omega$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد ω .

☜ **أمثلة :** •الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما $2-i$ و $-2+i$.

•الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $-3i$ و $3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران .

☐تطبيق 11:

عين الجذرين التربيعيين للعدد $z=-8+6i$

حل التطبيق 11:

ليكن $\omega=x+iy$ جذرا تربيعيا لِـ z . أي $z=\omega^2$.

$\omega^2=x^2-y^2+2xyi$.

$\left|\omega^2\right|=\left|\omega\right|^2=x^2+y^2$ ، $|z|=|-8+6i|=\sqrt{\left(-8\right)^2+6^2}=10$

$z=\omega^2$ يعني $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=-8 \\ 2xy=6 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x^2=2 \\ y^2=10-x^2 \\ xy=3 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \\ xy=3 \end{cases}$

أي ($x=1$ و $y=3$) أو ($x=-1$ و $y=-3$) لأن $xy>0$

إذن $\omega=1+3i$ أو $\omega=-1-3i$.

☐تطبيق 12:

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب z

$z^2+(3-2i)z+5-5i=0$.

حل التطبيق 12:

نحسب المميز : $\Delta=\left(3-2i\right)^2-4\left(1\right)\left(5-5i\right)$.

$$\Delta=9-12i+4i^2-20+20i=-15+8i$$

ليكن $\omega=x+iy$ جذرا تربيعيا لِـ Δ.

$\omega^2=x^2-y^2+2xyi$.

$\left|\omega^2\right|=\left|\omega\right|^2=x^2+y^2$ ، $|\Delta|=|-15+8i|=\sqrt{\left(-15\right)^2+8^2}=17$

$z=\omega^2$ يعني $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x^2-y^2=-15 \\ 2xy=8 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^2 = 17 - x^2 \\ x\,y = 4 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 16 \\ x\,y = 4 \end{cases}$

أي ($x=1$ و $y=4$) أو ($x=-1$ و $y=-4$) لأن $x\ y > 0$

إذن $\omega = 1+4i$ أو $\omega = -1-4i$.

نضع $\Delta = \left(1+4i\right)^2$.

$$z' = \frac{-3+2i-1-4i}{2} = -2-i \quad \text{و} \quad z" = \frac{-3+2i+1+4i}{2} = -1+3i$$

الأعداد المركبة و التحويلات النقطية.

في كل ما يأتي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ أو $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$. ونكتب $f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$.

1. الحالة الأولى $a=1$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z+b$ (b عدد مركب) هو **انسحاب** شعاعه $\vec{U}$ صورة b.

☐تطبيق 13:

> المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.
>
> $t_{\vec{u}}$ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-2;1)$
>
> 1. عين العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$.
> 2. A النقطة التي لاحقتها $3-i$ ، عين لاحقة النقطة A' صورة A بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

حل التطبيق 13:

1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}}(M)=M'$ يعني $z'=z-2+i$.

2) $t_{\vec{u}}(A)=A'$ يعني $z_{A'}=z_A-2+i$ و منه $z_{A'}=3-i-2+i=1$

2. الحالة الثانية $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو **التحاكي** الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ ونسبته a.

☐تطبيق 14:

> المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.
>
> h التحاكي الذي مركزه A ذات اللاحقة $-1+2i$ و نسبته 3.
>
> 1. عين العبارة المركبة للتحاكي h.
> 2. B النقطة التي لاحقتها $-3-2i$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h.

حل التطبيق 14:

1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالتحاكي h.

$h(M)=M'$ يعني $z'=3z+b$. بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h(A)=A$ و منه $z_A=3z_A+b$.

أي $(-1+2i)=3(-1+2i)+b$ و منه $b=2-4i$. إذن $z'=3z+2-4i$.

2) $h(B)=B'$ يعني $z_{B'}=3z_B+2-4i$ و منه $z_{B'}=3(-3-2i)+2-4i=-7-10i$.

3. الحالة الثالثة $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو **الدوران** الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة

$\frac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg a$.

تطبيق 15:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

r الدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و زاويته θ حيث $\frac{\pi}{3}$ أحد أقياسها .

1.عين العبارة المركبة للدوران r.

2. B النقطة التي لاحقتها $1-i\sqrt{3}$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r.

حل التطبيق 15:

1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالدوران r.

$r\left(M\right)=M'$ يعني $z'=az+b$ حيث $|a|=1$ و $\arg\left(a\right)=\frac{\pi}{3}+k2\pi$. $k\in\mathbb{Z}$

و منه $a=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$

بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h\left(A\right)=A$ و منه $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}z_A+b$

نعلم أن $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و منه $e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}+b=e^{i\frac{5\pi}{3}}+b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+b$

إذن $-1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=b$ أي $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-1$.

2) $r\left(B\right)=B'$ يعني $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_B-1$ أي $z_{B'}=1$.

التشابه المباشر

تعريف: القول أن التحويل النقطي S تشابه مباشر معناه أن S يحافظ على نسب المسافات وعلى الزوايا الموجهة أي من أجل كل نقط M,N,P,Q من المستوي و $M\neq N$ ، صورها M',N',P',Q' على الترتيب فإن:

$\frac{PQ}{MN}=\frac{P'Q'}{M'N'}$ و $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)$.

خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا فإن S يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب تماما k.

العدد k يسمى نسبة التشابه S .

حالة خاصة

إذا كان $k=1$ نقول عن التشابه المباشر S أنه تقايس موجب أو إزاحة أي S انسحاب أو دوران .

تعريف: S تشابه مباشر من المستوي . S يحافظ على الزوايا الموجهة $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)$.

و منه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ زاوية ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N

هذه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ تسمى زاوية التشابه المباشر S.

خاصية: كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$
حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$.

خاصية: a و b عددان مركبان حيث $a\neq 0$.
إذا كان S تحويلا نقطيا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$ ، فإن S تشابه مباشر نسبته $|a|$.

ملاحظة: لا توجد تشابهات أخرى كتابتها المركبة تختلف عن $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{C}^*$ و $b\in\mathbb{C}$.

حالات خاصة:

1) الانسحاب تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=z+b$ و هو من الشكل $z'=az+b$ مع $a=1$. نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 .

2) التحاكي تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=az+b$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي $|a|$.

3) الدوران تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير حقيقي ، طويلته تساوي 1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 .
زاوية التشابه المباشر في هذه الحالة هي زاوية الدوران أي $\arg(a)$.

خاصية: تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين وزاويته مجموع الزاويتين .

التحليل القانوني للتشابه المباشر

خاصية: S تشابه مباشر نسبته k $\left(k\in\mathbb{R}_+^*\right)$ و زاويته θ $(\theta\in\mathbb{R})$.

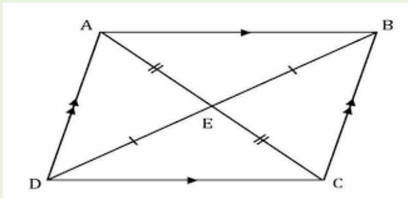
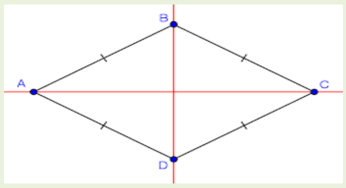
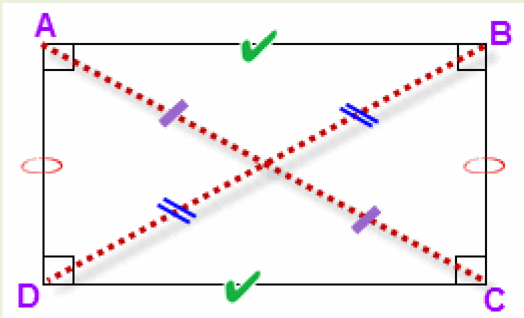
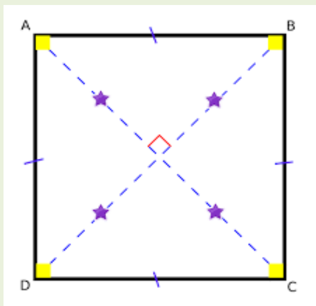
- إذا كان $k=1$ و $\theta=0$ التشابه S انسحاب .
- في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقتها ω و $S=h\circ r=r\circ h$ ، حيث h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k و r هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ .

خاصية: إذا كانت A ، B ، A' و B' أربع نقط حيث $A\neq B$ و $A'\neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

نتائج:

- S هو التشابه المباشر الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .
- إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ لأن $a=\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_A}=1$
- إذا كان $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو تشابه مباشر نسبته $\dfrac{A'B'}{AB}$ وزاويته $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)$. مركزه النقطة الصامدة.

✍أهم الطرق للتعرف على طبيعة رباعي

يكون الرباعي ABCD	إذا كان :	بالأعداد المركبة
متوازي الأضلاع 	1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ أو : للقطرين $[AC]$, $[BD]$ نفس المنتصف .	أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ أي: $z_A + z_C = z_B + z_D$
معين 	1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و $AB=BC$ أو: 2. القطران $[AC]$, $[BD]$ متناصفان و متعامدان	أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ و $\lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_C - z_B\rvert$ أي : $z_A + z_C = z_B + z_D$ و العدد $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$ تخيلي صرف .
مستطيل 	1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و المثلث ABC قائم في B . ... 2. القطران $[AC]$, $[BD]$ متناصفان و متقايسان .	أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ و العدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ تخيلي صرف . أي : $z_A + z_C = z_B + z_D$ و $\lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_D - z_B\rvert$
مربع 	1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين . 2. القطران $[AC]$, $[BD]$ متناصفان و متقايسان ومتعامدان .	أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ والعدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \pm$ أي : $z_A + z_C = z_B + z_D$ والعدد: $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \pm$

تنبيه : توجد طرق أخرى . إنما اخترنا الأكثر استعمالا .

أسئلة حول مجموعة النقط

نفرض في كل ما يلي المستوي مركب و مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(\ ,\vec{u},\vec{v})$.

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات الآتية : **(كل سؤال مستقل عن الاخر)** .

1). $|z| = 3$.
2). $|z - 1 + 2i| = 5$.
3). $|\overline{z}| = 4$.
4). $|\overline{z} + 2 - 3i| = 2$.
5). $|z - 2 + i| = |z + 1 - 2i|$.
6). $|\overline{z} - 2 + i| = |\overline{z} + 1 - 2i|$.
7). $z \times \overline{z} = 3$.
8). $(z - 2)(\overline{z} - 2) = 4$.
9). $z + \overline{z} = 0$.
10). $z - \overline{z} = 0$.
11). $Re(z) = 4$
12). $Re(z) + Im(z) = 0$
13). $Re(z^2) = 0$.
14). $Im(z^2) = 0$.
15). $|z| \leq 2$.
16) $|z| \geq 2$.
17). $3 \leq |z| \leq 4$.
18). $\left|\frac{z-2+i}{z}\right| = 1$.
19). $|z - 1| < |z + 1 - 2i|$.
20). $|z - 2| = |\overline{z} + i|$.
21). $|iz + 3| = |z + 4 + i|$.
22). $|2\overline{z} + 1| = 1$.
23). $|z|^2 = z + \overline{z}$.
24). $\left|\frac{iz+1+i}{z+2}\right| = 1$.
25). $|z - i| = |1 - z|$.
26). $z = 1 + 2i + 3e^{i\theta}\ ,\ (\theta \in \mathbb{R})$.
27). $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R}^+)$.
28). $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \leq 0)$
29). $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R})$.
30). $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R}^*)$.
31). $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, (k عددصحيح).
32). $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + k\pi$, (k عددصحيح) .
33). $\arg(\overline{z}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$, (k عددصحيح).
34). $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, .
35). $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, . .
36). $\arg(\overline{z} + 2 - 3i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.
37). العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي غير معدوم .
38). العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي سالب تماما .
39). العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي موجب تماما .
40). العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ تخيلي صرف .
41). باك 2015 :
$z = k(1 + i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ مع k يمسح $\mathbb{R}^+$.
42). $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) = 2k\pi$.
43). $\arg(-z) = \arg(\overline{z}) + 2k\pi$.
44). $arg(z) - arg(-\overline{z}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
45). $\overline{z} = 1 - 2i + k(1 - i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $(k > 0)$
46). $z = 2 - ke^{i\frac{\pi}{6}}$ مع $(k > 0)$.

تذكير :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس :

1. كل مستقيم له معادلة من الشكل : $ax + by + c = 0$. حيث a, b عددان غير معدومين معا .
2. كل دائرة لها معادلة من الشكل : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. النقطة $\omega(a\,;b)$ هي المركز و R هو نصف القطر .

حلول أسئلة مجموعة النقط

رقم	الخاصية	التفسير الهندسي	مجموعة النقط M
1	$\lvert z\rvert=3$	$OM=3$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 3 .
2	$\lvert z-1+2i\rvert=5$.	$AM=5$ ، مع $A(1;-2)$.	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 5 .
3	$\lvert \bar{z}\rvert=4$ أي : $\lvert z\rvert=4$.	$OM=4$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 4 .
4	$\lvert \bar{z}+2-3i\rvert=2$ أي : $\lvert z-(-2-3i)\rvert=2$.	$BM=2$ ، مع $B(-2;-3)$	هي الدائرة التي مركزها B و نصف قطرها 2 .
5	$\lvert z-2+i\rvert=\lvert z+1-2i\rvert$	$AM=BM$ مع $\begin{cases} A(2;-1) \\ B(-1;2) \end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
6	$\lvert \bar{z}-2+i\rvert=\lvert \bar{z}+1-2i\rvert$ أي : $\lvert z-2-i\rvert=\lvert z+1+2i\rvert$	$AM=BM$ مع $\begin{cases} A(2;1) \\ B(-1;-2) \end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
7	$z\times\bar{z}=3$ أي : $\lvert z\rvert^2=3$ أي : $\lvert z\rvert=\sqrt{3}$.	$OM=\sqrt{3}$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
8	$(z-2)(\bar{z}-2)=4$ أي : $(z-2)(\overline{z-2})=4$ أي : $\lvert z-2\rvert^2=4$ أي : $\lvert z-2\rvert=2$	$AM=2$ ، مع $A(2;0)$.	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 2 .
9	$z+\bar{z}=0$ أي : $2\operatorname{Re}(z)=0$ أي : $\operatorname{Re}(z)=0$	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $x=0$.	هي حامل محور التراتيب (yy') .
10	$z-\bar{z}=0$ أي : $2\operatorname{Im}(z)=0$ أي : $\operatorname{Im}(z)=0$.	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $y=0$.	هي حامل محور الفواصل (xx') .
11	(11 $\operatorname{Re}(z)=4$	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $x=4$.	هي المستقيم الموازي لحامل محور التراتيب ذو المعادلة : $x=4$.
12	$\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)=0$	من أجل كل نقطة M من المستوى تكون إحداثيها متعاكستان .	هي المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ (المنصف الثاني) .

13	$Re(z^2)=0$: أي $x^2-y^2=0$ ، أي : $y=x$ أو $y=-x$.		هي إتحاد المنصف الأول و المنصف الثاني .
14	$Im(z^2)=0$: أي $x.y=0$: أي $x=0$ أو $y=0$.		هي إتحاد حاملي محوري الإحداثيات (الفواصل و التراتيب) .
15	$\lvert z\rvert\leq 2$	$OM\leq 2$.	هي القرص الذي مركزه O و نصف قطره 2 .
16	$\lvert z\rvert\geq 2$	$OM\geq 2$.	هي المستوي ما عدا القرص المفتوح الذي مركزه O و نصف قطره 2 .
17	$3\leq\lvert z\rvert\leq 4$	$3\leq OM\leq 4$.	هي الحلقة المحددة بين القرص الذي مركزه O و نصف قطره 3 و القرص الذي مركزه O و نصف قطره 4 .
18	$\left\lvert\frac{z-2+i}{z}\right\rvert=1$: أي $\lvert z-2+i\rvert=\lvert z\rvert$.	$AM=OM$ مع $A(2;1)$.	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[OA]$.
19	$\lvert z-1\rvert<\lvert z+1-2i\rvert$ أي : $\lvert z-1\rvert<\lvert z-(-1+2i)\rvert$	$AM<BM$ مع $\begin{cases}A(1;0)\\B(-1;2)\end{cases}$ حيث تكون M أقرب إلى A	هي نصف المستوي المحدّد بالمستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ و الذي يشمل A .
20	$\lvert z-2\rvert=\lvert\bar{z}+i\rvert$: أي $\lvert z-2\rvert=\lvert z-i\rvert$.	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(2;0)\\B(0;1)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
21	$\lvert iz+3\rvert=\lvert z+4+i\rvert$ أي : $\lvert i\rvert.\left\lvert z+\frac{3}{i}\right\rvert=\lvert z+4+i\rvert$ أي : $\lvert z-3i\rvert=\lvert z+4+i\rvert$ أي : $\lvert z-3i\rvert=\lvert z-(-4-i)\rvert$	$AM=BM$ مع : $\begin{cases}A(0;-3)\\B(-4;-1)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
22	$\lvert 2\bar{z}+1\rvert=1$: أي	$AM=\frac{1}{2}$ مع : $A(-\frac{1}{2};0)$.	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $\frac{1}{2}$

	أي : $2.\left\|\bar{z}+\frac{1}{2}\right\|=1$ $\left\|z+\frac{1}{2}\right\|=\frac{1}{2}$.		
23	أي : $\|z\|^2 = z+\bar{z}$ أي : $x^2+y^2=2x$ أي : $x^2+y^2-2x=0$ $(x-1)^2-1+y^2=0$ و منه : $(x-1)^2+y^2=1$.	هذه الأخيرة هي معادلة دائرة .	هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1;0)$ و نصف قطرها 1 .
24	أي : $\left\|\frac{iz+1+i}{z+2}\right\|=1$ أي : $\|iz+1+i\|=\|z+2\|$ أي : $\|i\|.\left\|z+\frac{1}{i}+1\right\|=\|z+2\|$ $\|z+1-i\|=\|z+2\|$.	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(1;-1)\\B(2;0)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
25	أي : $\|z-i\|=\|1-z\|$ $\|z-i\|=\|z-1\|$.	$AM=BM$ مع : $\begin{cases}A(0;1)\\B(1;0)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
26	أي : $z=1+2i+3e^{i\theta}$ $z-z_A=3e^{i\theta}$ ، و منه : $\|z-z_A\|=3$.	$AM=3$ مع $A(1;2)$	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 3 .
27	$z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}^+$ أي نميز حالتين : *) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$ أي : $z=z_A$. *) لما $k>0$ يكون : أي تصبح $z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{3}}$: $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}$. $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\leq 0$ أي نميز حالتين :	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. *) $(\vec{u},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.	*) هي النقطة A . هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل . *) هي النقطة A .

28	*) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$ أي : $z=z_A$. *) لما $k<0$ يكون : $z=2-i-ke^{i(\pi+\frac{\pi}{3})}$ ، و منه : $z-z_A=ke^{i\frac{4\pi}{3}}$ ، أي : $\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$.	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. *) $(\vec{u},\overrightarrow{AM})=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$.	*)هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{4\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .
29	$z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}$ ، نميز 3 حالات : *) لما $k=0$ أي : $z=z_A$. *) $k>0$ ، $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}$. *) $k<0$ ، $\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. $(\vec{u},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$	*) هي النقطة A . *) هي المستقيم المار بالنقطة A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .
30	$z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}^*$ ، و واضح أنّه تكون حالتين فقط نستثني النقطة A .		هي المستقيم المار بالنقطة A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .
31	31) $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$. مع : $z\neq 0$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء المبدأ O .
32	$\arg(z)=\frac{\pi}{3}+k\pi$. مع : $z\neq 0$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{3}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـ O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O
33	$\arg(\bar{z})=\frac{\pi}{3}+k\pi$ أي : $\arg(z)=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ مع $z\neq 0$	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـ O و يشكل زاوية قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O .

34	$\arg(z-1+2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $z\neq 1-2i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء النقطة A .
35	$\arg(z-1+2i)=\frac{\pi}{4}+k\pi$ مع $z\neq 1-2i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـ A و يشكل زاوية قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء A .
36	لدينا : $\arg(\bar{z}+2-3i)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أي: $\arg(z+2+3i)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ مع $z\neq -2-3i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل ، ما عدا النقطة A .
37	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي غيرمعدوم أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$ أي أنّ : النقط $A;B;M$ في إستقامية .	هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B
38	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي سالب أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=\pi+2k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\pi+2k\pi$.	هي قطعة المستقيم $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B .
39	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي موجب أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=2k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=0+2k\pi$. أي أنّ : M تكون خارج القطعة $[AB]$.	هي المستقيم (AB) ما عدا القطعة $[AB]$.
40	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ تخيلي صرف أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}=0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=\frac{\pi}{2}+k\pi$.	*) $M=A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$. أي : المثلث ABM قائم في M	هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B

41	أي : $z=k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أي : $z=k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{7\pi}{12}}$ $z=k\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ مع $k\in\mathbb{R}^{+}$. *)إما $k=0$ أي : $z=0$ ، أو *) $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.	*) $M=O$. *) $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$ ما عدا المبدأ O .
42	أي : $\arg(\frac{z}{\bar{z}})=2k\pi$ أي : $\arg(z)-\arg(\bar{z})=2k\pi$ $\arg(z)+\arg(z)=2k\pi$ ، و منه : $\arg(z)=k\pi$.	*) $M\neq O$. معناه أنّ Z حقيقي غير معدوم	هي حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ O .
43	$\arg(-z)=\arg(\bar{z})+2k\pi$ تصبح : $\pi+\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi$ أي : $2\arg(z)=-\pi+2k\pi$ و منه : $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}+k\pi$.	*) $M\neq O$. معناه أنّ Z تخيلي صرف .	هي حامل محور التراتيب ما عدا المبدأ O .
44	لدينا : $\arg(-z)-\arg(-\bar{z})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي : $2\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ و منه : $\arg(z)=\frac{\pi}{6}+k\pi$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{6}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـ O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O
45	لدينا : $\bar{z}=1-2i+k(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ $(k>0)$ أي : أي : $\bar{z}=1-2i+k(\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}})e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي : $\bar{z}=1-2i+k\sqrt{2}$ $z=1+k\sqrt{2}+2i$ ، $(k>0)$	إذن : $\begin{cases}Re(z)=1+k\sqrt{2}>0\\ Im(z)=2\end{cases}$	هي نصف المستقيم المعرف بـ : $\begin{cases}Re(z)>1\\ Im(z)=2\end{cases}$.

46	$z=2-k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $(k>0)$ أي : $z=2+k.e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)}$ أي : $z=2+k.e^{i\frac{7\pi}{6}}$ مع $(k>0)$. و منه : $\arg(z)=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و زاويته $\frac{7\pi}{6}$ باستثناء المبدأ O .

QCM

في كل حالة من الحالات الخمس الآتية اقترحت أربع اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل:

❶. z عدد مركب يحقق $\bar{z}+|z|=6+2i$ ، الشكل الجبري للعدد هو:

أ- $\frac{8}{3}-2i$ ،	ب- $-\frac{8}{3}-2i$ ،	ج- $\frac{8}{3}+2i$ ،	د- $-\frac{8}{3}+2i$.

❷. في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات الاحقة $z=x+iy$ التي تحقق: $|z-1|=|z+i|$ هي المستقيم ذو المعادلة:

أ- $y=x-1$ ،	ب- $y=-x$ ،	ج- $y=-x+1$ ،	د- $y=x$.

❸. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه n من الشكل :

أ- $3k+1$ ،	ب- $3k+2$ ،	ج- $3k$ ،	د- $6k$ ، حيث $k\in\mathbb{N}$.

❹. نعتبر المعادلة $(E): z=\frac{6-z}{3-z}$ مع $z\in\mathbb{C}$ ، حل للمعادلة (E) هو :

أ- $-2-i\sqrt{2}$ ،	ب- $2+i\sqrt{2}$ ،	ج- $1-i$ ،	د- $-1-i$.

❺. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A=i$ و $z_B=\sqrt{3}$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ هي:

أ- $-i$ ،	ب- $2i$	ج- $\sqrt{3}+i$ ،	د- $\sqrt{3}+2i$ ،

الحل

1. z عدد مركب يحقق $\bar{z}+|z|=6+2i$ ،

يكفي التعويض في الشكل الجبري في العلاقة المعطاة نجد: $\frac{8}{3}+2i+\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+4}=\frac{8}{3}+2i+\frac{10}{3}=6+2i$

الشكل الجبري للعدد هو: $\frac{8}{3}-2i$ الاجابة (أ)

2. ليكن عدد مركب z ، نضع $z=x+iy$.

معناه $|z-1|=|z+i|$:

أي:

$$\begin{aligned}&|z-1|^2=|z+i|^2\\&(x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2\\&x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2+2y+1\\&y=-x\end{aligned}$$

الاجابة (ب)

3. n عدد طبيعي،

أي:

$$\begin{aligned}&\left|1+i\sqrt{3}\right|=2\\&1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&\left(1+i\sqrt{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

العدد $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه : $2^n\sin\frac{n\pi}{3}=0\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=k\pi$
$n=3k,(k\in\mathbb{N})$ الاجابة (ج).

4. حل للمعادلة (E):

و منه:

$$z=\frac{6-z}{3-z}\Leftrightarrow\frac{z(3-z)}{3-z}=\frac{6-z}{3-z}\Leftrightarrow 3z-z^2=6-z$$
$$\Rightarrow z^2-4z+6=0\Rightarrow\begin{cases}z_1=2+i\sqrt{2}\\z_2=2-i\sqrt{2}\end{cases}$$

الاجابة **(ب)**

5. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A=i$ و $z_B=\sqrt{3}$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ هي:

ABC مثلث متقايس الأضلاع اذا كانت C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B - z_A\right)$$

$$z_C - i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} - i\right)$$

بعد النشر نجد: $z_C = \sqrt{3} + 2i$ الاجابة (د).

.2

تمارين محلولة

1.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\frac{2}{\overline{z+i}}+\frac{2}{\overline{z-i}}=4$ ، وَ الجملة : $\begin{cases}2a+b=2\\-a+b=-1+3i\end{cases}$.

2) في المستوى المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط : A ، B ، C ، D لواحقها

على الترتيب : $z_A=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2i$ ، $z_D=1-i$.

أ) أكتب z_A وَ z_B على الشكل الأسي ، ثمّ أحسب العدد : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}$.

ب) تحقّق من أنّ : $z_A\times z_D=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ، ثمّ إستنتج قيمة كل من : $\cos(\frac{\pi}{12})$ وَ $\sin(\frac{\pi}{12})$.

ج) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $(\frac{z_A\times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا .

3) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $z\neq 2i$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{3i(z-1+i)}{z-2i}$

أ) تحقّق من أنّ : $OM'=3\times\frac{DM}{CM}$. إستنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ فإنّ M' تنتمي

إلى مجموعة يطلب تحديدها .

ب) بيّن أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM})+2k\pi$ ، حيث : $(k\in\mathbb{Z})$.

ج) إستنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[CD]$ ما عدا النقطة C فإنّ النقطة M' تنتمي إلى

مجموعة يطلب تحديدها .

حل التمرين:

1) حل المعادلة : $\frac{2}{\overline{z+i}}+\frac{2}{\overline{z-i}}=4$ ، أي : $\frac{2}{z+i}+\frac{2}{z-i}=4$ ، أي : $\frac{2(z-i)+2(z+i)}{(z-i)(z+i)}=4$

و منه : $\frac{4z}{z^2+1}=4$ ، أي : $4z^2-4z+4=0$ ، إذن : $\begin{cases}z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

لدينا الجملة : $\begin{cases} 2a+b=2 \\ -a+b=-1+3i \end{cases}$ بالطرح نجد : $3a=3-3i$ ، و منه : $a=1-i$ وَ $b=2i$.

2) أ) لدينا : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، أي : $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و لدينا : $z_B=\overline{z_A}$ ، و منه : $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=(e^{i\frac{\pi}{3}})^{2018}+(e^{-i\frac{\pi}{3}})^{1439}=e^{i\frac{2018\pi}{3}}+e^{-i\frac{1439\pi}{3}}$.

أي : $\begin{cases} \frac{2018\pi}{3}=\frac{2016\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=672\pi+\frac{2\pi}{3} \\ \frac{1439\pi}{3}=\frac{1440\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=480\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}$ ، و منه : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

أي : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، و منه : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=i\sqrt{3}$.

ب) لدينا : $z_D=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، أي : $z_A\times z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}\times\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

و منه : $z_A\times z_D=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ، و هو المطلوب .

إستنتاج القيم المضبوطة لـ : $\cos(\frac{\pi}{12})$ وَ $\sin(\frac{\pi}{12})$.

لدينا : $z_A\times z_D=(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(1-i)$ ، أي : $z_A\times z_D=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي و الشكل الجبري لـلعدد $z_A\times z_D$ نجد :

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

ج) لدينا : $(\frac{z_A\times z_D}{\sqrt{2}})^n=(e^{i\frac{\pi}{12}})^n=e^{i\frac{n\pi}{12}}$ ، إذن $(\frac{z_A\times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا إذا كان : $\frac{n\pi}{12}=0+2k\pi$

و منه : $n=24k$ ، أي : n مضاعف للعدد 24 .

3) أ) التحقق أنّ : $OM'=3\times\frac{DM}{CM}$ ، أي نحسب OM' و نتحقّق من المساواة :

$OM'=|z'|=|3i|\times\frac{|z-1+i|}{|z-2i|}=3\times\frac{|z-z_D|}{|z-z_B|}$ ، و منه : $OM'=3\times\frac{DM}{CM}$ ، و هو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ معناه : $DM = CM$ ، أي : $\frac{DM}{CM} = 1$

و منه : $OM' = 3$ ، إذن M' ستكون تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وَ نصف قطرها 3 .

ب) بيان أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(z') + 2k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg\left[\frac{3i(z-1+i)}{z-2i}\right] + 2k\pi$ ، أي :

$(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(3i) + \arg(\frac{z-1+i}{z-2i}) + 2k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(3i) + \arg(\frac{z-z_D}{z-z_B}) + 2k\pi$

و منه : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، و هو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[CD]$ ، أي : $(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

و منه : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \pi + k\pi$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ O .

2.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z^2-2z-3)(z^2-4z+7) = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة : $(2cm)$ نعتبر النقط A ، B ،

C و G لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2+i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2-i\sqrt{3}$ و $z_G = 3$.

أ) علّم النقط : A ، B ، C و G .

ب) أحسب العدد : $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ، ثمّ إستنتج طبيعة المثلث GAC .

3) نعتبر (D) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG} = 12 ......(1)$.

أ) برهن أنّ G هي مرجح الجملة : $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$.

ب) بيّن أنّ العلاقة (1) تكافئ العلاقة $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG} = -4 ......(2)$.

ج) تحقّق أنّ A تنتمي إلى المجموعة (D) .

د) برهن أنّ العلاقة (2) تكافئ العلاقة (3).......$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$.

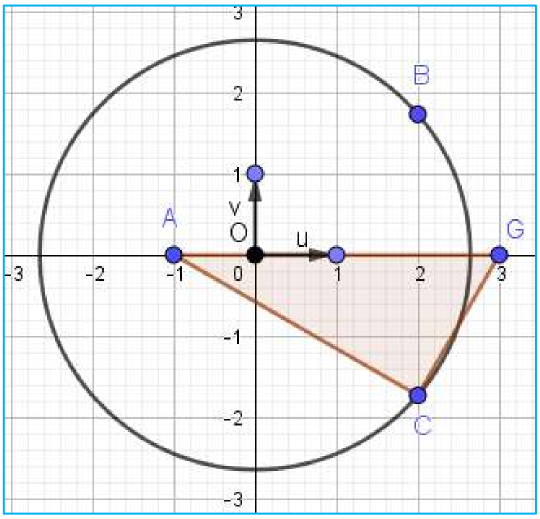
هـ) إستنتج طبيعة المجموعة (D) ثمّ أنشئها .

حل التمرين:

1) حل المعادلة : $(z^2-2z-3)(z^2-4z+7)=0$.

إما : $(z^2-2z-3)=0$ أو $(z^2-4z+7)=0$ و منه : $\begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} z_3=2-i\sqrt{3} \\ z_4=2+i\sqrt{3} \end{cases}$.

إذن : $S=\{-1;3;2-i\sqrt{3};2+i\sqrt{3}\}$.



2) أ) تعليم النقط :

ب) حساب العدد $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$:

$\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$.

و منه : $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=i\sqrt{3}$ (تخيلي صرف)

أي : $(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، و منه : المثلث GAC قائم في C .

3) أ) لنبرهن أنّ النقطة G هي مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$:

نحسب لاحقة المرجح و يجب أن نجدها هي نفسها لاحقة النقطة G .

أي : $z=\dfrac{-z_A+2z_B+2z_C}{3}=\dfrac{9}{3}=3=z_G$ ، و منه : G هي مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$.

ب) لدينا العلاقة : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12.....(1)$ تكافئ $3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=12$ ، أي : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=4$

و منه : $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4\ ....(2)$ ، و هو المطلوب .

ج) التحقّق أنّ $A\in(D)$: نعوض M بـ A في العلاقة (2) ، أي : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4\ ...(2)$ ثم نتحقق من المساواة

- لنحسب الجداء $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}$:

لدينا : $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ، و منه : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=(-4\times1)+(0\times i\sqrt{3})=-4$.

إذن : المساواة محققة ، أي أنّ : $A \in (D)$. ($\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG} = -4$)

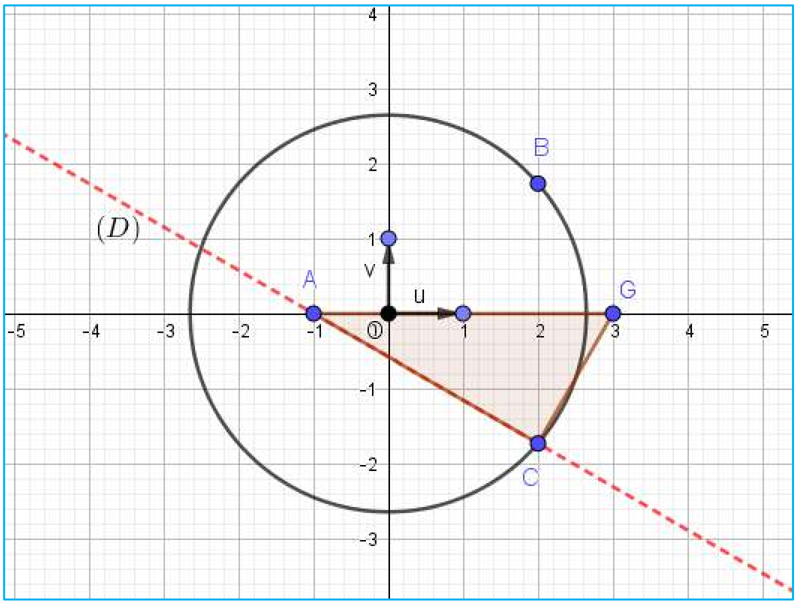
د) لدينا : $\begin{cases} \overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG} = -4 \\ \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG} = -4 \end{cases}$ بالطرح نجد : $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG} = 0$ ، أي : $(\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{GA}).\overrightarrow{CG} = 0$ ،

أي : $(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{AG}).\overrightarrow{CG} = 0$ ، و منه : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG} = 0 ......(3)$ ، و هو المطلوب .

ه) لدينا : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG} = 0$ ، هذا يعني أنّ : $(AM) \perp (CG)$.

إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم المار بالنقطة A و العمودي على (CG) ، أي : هي المستقيم (AC) .

*) الإنشاء :



3.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة : $(8cm)$.

*) نعتبر A هي النقطة ذات اللاحقة -1 وَ B النقطة ذات اللاحقة 1 .

*) لتكن (Γ) هي مجموعة النقط من المستوي التي تختلف عن A ، B وَ O . نرفق بكل نقطة M من (Γ) لاحقتها z النقطة N ذات اللاحقة z^2 وَ النقطة P ذات اللاحقة z^3 .

1) بيّن أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى .

2) نعتبر (C) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائم في P .

أ) باستعمال مبرهنة فيثاغورس بيّن أنّ المثلث MNP قائم في P معناه : $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.

ب) برهن أنّ : $\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2=1$ تكافئ $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

ج) إستنتج طبيعة المجموعة (C) .

3) نعتبر M نقطة من (Γ) لاحقتها z ، r هي طويلة z وَ α عمدته حيث : $\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]$.

أ) برهن أنّ المجموعة (F) للنقط M من (Γ) بحيث تكون لاحقة P عدد حقيقي موجب تماما هي إتحاد ثلاث أنصاف مستقيمات .

ب) مثّل (C) وَ (F) في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

ج) عيّن لواحق النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائما في P وَ لاحقة النقطة P عدد حقيقي موجب تماما .

حل التمرين:

لدينا النقط : $A(-1)$ ، $B(1)$ و النقط : $M(z)$ ، $N(z^2)$ ، $P(z^3)$ هذه الأخيرة تختلف عن A ، B و O .

1) لنبيّن أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى :

أي تكون : $M\neq N$ ، $M\neq P$ و $N\neq P$.

- نعلم أنه : $M=N$ معناه : $z=z^2$ ، أي : $z^2-z=0$ ، أي : $z(z-1)=0$ ، و منه : $z=0$ أو $z=1$

أي أنّ : $M=O$ أو $M=B$ ، لكن M تختلف عن O و B ، إذن : $M\neq N$.

- و أيضا : $M=P$ معناه : $z=z^3$ ، أي : $z^3-z=0$ ، أي : $z(z^2-1)=0$ ، أي : $z=0$ أو $z^2-1=0$

و منه : $z=0$ أو $z=1$ أو $z=-1$ ، أي أنّ : $M=O$ أو $M=B$ أو $M=A$.

لكن M تختلف عن O ، B و A ، إذن : $M\neq P$.

- كذلك بنفس الطريقة نبيّن أنّ $N\neq P$.

إذن مما سبق نستنتج أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى .

2) أ) المثلث MNP قائم في P معناه : $MN^2=MP^2+NP^2$ ، أي : $\left|z_N-z_M\right|^2=\left|z_P-z_M\right|^2+\left|z_P-z_N\right|^2$

أي : $\left|z^2-z\right|^2=\left|z^3-z\right|^2+\left|z^3-z^2\right|^2$ ، أي : $\left|z(z-1)\right|^2=\left|z(z^2-1)\right|^2+\left|z^2(z-1)\right|^2$ ، أي :

$\left|z\right|^2.\left|z-1\right|^2=\left|z\right|^2.\left|z-1\right|^2.\left|z+1\right|^2+\left|z^2\right|^2\left|z-1\right|^2$ ، بما أنّ : $z\neq 1$ و $z\neq 0$ يمكن الإختزال بعد القسمة

على $\left|z\right|^2.\left|z-1\right|^2$ ، فنتحصل على : $1=\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2$ ، و منه : $\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2=1$ و هو المطلوب .

ب) لدينا : $\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2=1$ معناه : $(z+1)(\bar{z}+1)+z.\bar{z}=1$ ، لأنّ : $\left|z\right|^2=z.\bar{z}$ ، أي تصبح :

$z.\bar{z}+z+\bar{z}+1+z.\bar{z}=1$ ، أي : $2z.\bar{z}+z+\bar{z}=0$.

و من جهة أخرى لدينا : $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$ تعني : $(z+\frac{1}{2})(\bar{z}+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ ، أي تصبح :

$z.\bar{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\bar{z}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ ، أي : $z.\bar{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\bar{z}=0$ (نضرب في 2) نجد : $2z.\bar{z}+z+\bar{z}=0$.

إذن : من هذا و ذاك نستنتج أنّ المساواة $\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2=1$ تكافئ المساواة $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

ج) طبيعة المجموعة (C) :

(C) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائم في P .

أي : $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$ ، أي : $\left|z+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$ ، أي : $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ، و منه : $EM=\frac{1}{2}$.

حيث : $z_E=-\frac{1}{2}$ ، إذن المجموعة (C) هي الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ ما عدا النقطتين O و A .

3) (F) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث تكون لاحقة P عدد حقيقي موجب تماما .

أ) P عدد حقيقي موجب تماما أي : z^3 عدد حقيقي موجب تماما ، أي أنّ : $\arg(z^3)=0+2k\pi$ ، أي :

$3\arg(z)=2k\pi$ ، أي : $\arg(z)=\frac{2k\pi}{3}$ ، و منه : $\alpha=\frac{2k\pi}{3}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ ، لكن : $-\pi<\alpha\leq\pi$ ،

أي : $-\pi<\frac{2k\pi}{3}\leq\pi$ ، أي : $-1<\frac{2k}{3}\leq 1$ ، أي : $-3<2k\leq 3$ ، أي : $-\frac{3}{2}<k\leq\frac{3}{2}$ ، و منه :

$k\in\{-1;0;1\}$ ، و منه : $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$ أو $\alpha=0$ أو $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

إذن : $\arg(z)=0$ أو $\arg(z)=\frac{2\pi}{3}$ أو $\arg(z)=-\frac{2\pi}{3}$.

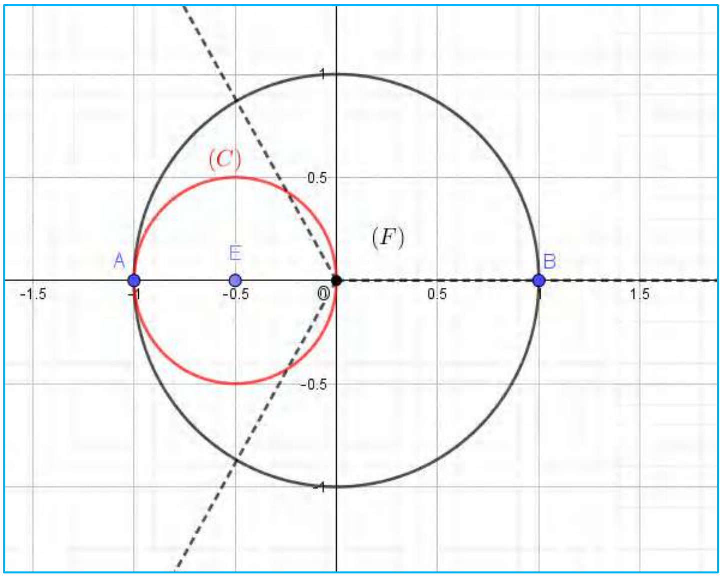
أي أنّ : المجموعة (F) تكون : نصف المستقيم $[Ox)$ ما عدا النقطتين O و B أو نصف المستقيم الذي مبدؤه O

و يشكل زاوية قيسها $\frac{2\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ما عدا النقطة O أو نصف المستقيم الذي مبدؤه O و يشكل

زاوية قيسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ما عدا النقطة O .

إذن : مجموعة النقط (F) هي إتحاد ثلاث أنصاف مستقيمات .

ب) التمثيل :



ج) بما أنّ المثلث MNP قائم في P و z_P موجب تماما ، إذن : M تنتمي إلى تقاطع المجموعتين (C) و (F) .

لدينا : (C) معرفة بالعلاقة $\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2=1$ لأنّ : $M\in(C)$ ، أي : $z.\bar{z}+\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$ ، حيث :

$z=r.e^{i\frac{2k\pi}{2}}$ مع $k\in\{-1;0;1\}$ لأنّ : $M\in(F)$.

*) نعلم أنّ : $z.\bar{z}=\left|z\right|^2$ و $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$ ، أي : $z.\bar{z}=r^2$ و $z+\bar{z}=2\times r.\cos(\frac{2k\pi}{3})$.

إذن : $z.\bar{z}+\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$ تعني : $r^2+\frac{1}{2}\times 2r.\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$ ، أي : $r^2+r.\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$ ، أي :

$r\left[r+\cos(\frac{2k\pi}{3})\right]=0$ ، نعلم أنّ : $(r>0)$ ، إذن : $r+\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$.

*) لما $k=0$ يكون : $r+1=0$ ، و منه : $r=-1$ (مرفوض) .

*) لما $k=1$ يكون : $r+\cos(\frac{2\pi}{3})=0$ ، أي : $r-\frac{1}{2}=0$ ، و منه : $r=\frac{1}{2}$.

*) لما $k=-1$ يكون : $r+\cos(-\frac{2\pi}{3})=0$ ، أي : $r-\frac{1}{2}=0$ ، و منه : $r=\frac{1}{2}$.

إذن : $r=\frac{1}{2}$ ، أي : $z_1=\frac{1}{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z_2=\frac{1}{2}.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ، و بالتالي توجد نقطتان تحققان المطلوب .

1) عيّن العددين المركبين a وَ b علما أنّ : $\begin{cases} \bar{a}-\bar{b}=1+3i \\ a+ib=-1+3i \end{cases}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين A وَ B لاحقتاهما على الترتيب : $a=3+i$ وَ $b=2+4i$ ، وَ نفرض الإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

أ) عيّن لاحقة النقطة C صورة O بالإنسحاب T .

ب) أحسب العدد $\frac{z_c-z_A}{z_B}$ ، ثمّ أكتبه على الشكل الأسي .

ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ وَ $[OB]$ ؟ .

ج) إستنتج ممّا سبق طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثمّ عيّن لاحقة E مركز تناظر الرباعي $OABC$.

3) نعتبر التشابه المباشر S الذي مركزه O وَ يحوّل B إلى C .

أ) أعط الكتابة المركّبة للتشابه المباشر S .

ب) ماهي صورة النقطة A بالتشابه S ؟ .

ج) نضع : $S^4=S\circ S\circ S\circ S$. أعط الكتابة المركّبة للتحويل S^4 ، وَ ماطبيعة هذا التحويل ؟ .

حل التمرين:

1) تعيين العددين المركبين a وَ b :

لدينا الجملة : $\begin{cases} \bar{a}-\bar{b}=1+3i \\ a+ib=-1+3i \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a-b=1-3i\ ....(1) \\ a+ib=-1+3i\ .....(2) \end{cases}$ بالطرح نجد : $-b-ib=2-6i$ ، أي :

$b(-1-i)=2-6i$ ، أي : $b=\frac{2-6i}{-1-i}$ $\qquad$ $b=\boxed{2+4i}$. و بالتعويض نجد : $a=3+i$.

2) أ) تعيين لاحقة C صورة O بالإنسحاب T :

بما أنّ C هي صورة O بالإنسحاب T فإن : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ ، و منه : $z_C=z_B-z_A$ ، أي : $z_C=-1+3i$.

ب) حساب العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B}$ ، ثم كتابته على الشكل الأسي :

لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B}=\frac{-1+3i-3-i}{2+4i}=\frac{-4+2i}{2+4i}=i$ ، أي : $\frac{z_C-z_A}{z_B}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

إذن : $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B}\right| = 1$ وَ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، ومنه : $AC = OB$ وَ $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

إذن القطعتان $[AC]$ و $[OB]$ متقايستان و متعامدتان .

ج) إستنتاج مما سبق طبيعة الرباعي $OABC$ و تعيين لاحقة النقطة E :

بما أنّ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ فإنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ، وَ بما أنّ $[AC]$ ، $[OB]$ متقايستان و متعامدتان فسيكون الرباعي $OABC$ مربّع .

E هي مركز تناظر الرباعي $OABC$ ، أي : هي منتصف القطرين ، و منه : $z_E = \frac{z_O + z_B}{2} = 1 + 2i$.

3) أ) الكتابة المركبة للتشابه

لدينا : S مركزه O و يحوّل B إلى C أي : $z' - z_O = ke^{i\theta}(z - z_O)$ ، أي : $z' = ke^{i\theta}z$ ، و منه :

$z_C = ke^{i\theta}z_B$ ، أي : $\frac{z_C}{z_B} = ke^{i\theta}$.

نحسب $\frac{z_C}{z_B}$: $\frac{z_C}{z_B} = \frac{-1+3i}{2+4i} = \left(\frac{-1+3i}{2+4i}\right)\left(\frac{2-4i}{2-4i}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

لدينا: $\begin{cases} \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ ، إذن عبارة التشابه S هي : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$ أو $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.

ب) صورة A بالتشابه S :

لدينا : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$ ، أي : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_A$ ، أي: $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(3+i)$ ، و منه: $z' = 1 + 2i$.

إذن : E هي صورة A بالتشابه S .

ج) العبارة المركبة للتحويل S^4 ، و طبيعته :

لدينا : $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$ ، أي أنّ : S^4 هو تشابه مباشر نسبته : $k = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ ، وزاويته : $\theta = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$ و مركزه : O .

- الكتابة المركبة : $z' = \frac{1}{4}e^{i\pi}.z$ ، أي : $z' = -\frac{1}{4}z$ ، لأنّ : $e^{i\pi} = -1$. إذن التحويل S^4 هو تحاكي مركزه O و نسبته $-\frac{1}{4}$.

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $6cm$) .

نعتبر التحويل f للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$.

و لتكن النقطة M_0 ذات اللاحقة z_0 ، حيث : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = f(M_n)$ وَ نسمي z_n لاحقة النقطة M_n .

1) عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل f ، ثمّ علّم النقط : M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

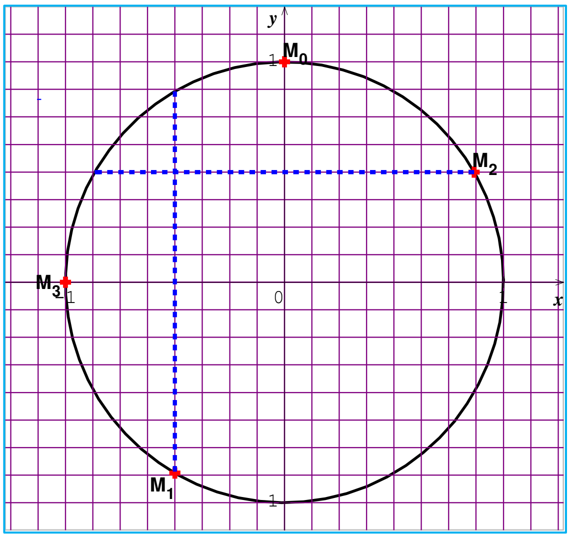
3) نعتبر n وَ p عددان طبيعيان . برهن أنّ النقطتان M_n وَ M_p متطابقتان إذا وافقط إذا كان $(n-p)$ مضاعفا لـ 12 .

4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $12x - 5y = 3$ علما أنّ الثنائية $(4;9)$ حل خاص لها .

ب) إستنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث تكون النقطة M_n تنتمي إلى نصف المستقيم $[Ox)$.

حل التمرين:

1) طبيعة التحويل f : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ $\Leftarrow$ f هو دوران مركزه O و زاويته $\dfrac{5\pi}{6}$.



2) البرهان من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، لنستعمل البرهان بالتراجع :

✓ نتحقّق من أجل $n=0$: $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2}+0\times\frac{5\pi}{6})}$ ،

أي : $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ ، (محقّقة) .

✓ نفرض صحة : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

✓ نبرهن صحة : $z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6})}$.

البرهان : نعلم أنّ : $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n$ ،

وَ لدينا فرضا :

$z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، أي : $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ،

أي : $z_{n+1} = e^{i\left[\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6}\right]}$ ، أي : $z_{n+1} = e^{i\left[\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6}\right]}$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

3) M_n وَ M_p متطابقتان معناه أنّ : $z_p = z_n$ ، أي : $e^{i(\frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، و هذا معناه أنّ :

$\frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6}+2k\pi = \frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6}$ ، أي : $n\frac{5\pi}{6} = p\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ، أي : $n\times 5\pi = p\times 5\pi+12k\pi$ أي :

$5n = 5p+12k$ ، أي : $5n-5p = 12k$ ، ومنه : $5(n-p) = 12k$. $12 / 5(n-p)$ وَ 12

أوّلي مع 5 ، حسب غوص : 12 يقسم $(n-p)$ ، أي أنّ : $(n-p)$ مضاعف لــ 12 .

4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $12x-5y=3$: $12x-5y=12(4)-5(9)$ ، أي : $12(x-4)=5(y-9)$ حسب غوص نستنتج

أنّ : $\begin{cases} x = 5k+4 \\ y = 12k+9 \end{cases}$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$.

ب) $M_n \in [Ox)$ معناه أنّ : z_n حقيقي موجب ، أي : $\arg(z_n) = 0+2k\pi$ ، أي : $\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6} = 2k\pi$ ، أي :

$3\pi+5n\pi = 12k\pi$ ، أي : $3+5n = 12k$ ، أي : $12k-5n=3$.

إذن : $n = y = 12k+9$ مع $k\in\mathbb{N}$.

6.

1) أ) نعتبر (r_n) المتتالية الهندسية التي حدها الأول r_0 و أساسها $\frac{2}{3}$ ، مع $r_0 > 0$.

عبّر عن r_n بدلالة r_0 و n .

ب) نعتبر (θ_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول θ_0 و أساسها $\frac{2\pi}{3}$ ، مع $\theta_0 \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

عبّر عن θ_n بدلالة θ_0 و n .

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = r_n.(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ، علما أنّ : $z_0\times z_1\times z_2 = 8$.

عيّن الطويلة و العمدة لكل من : z_1 و z_2 .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ وحدته : $4cm$.

نسمي M_n النقطة ذات اللاحقة z_n .

أ) علم النقط : M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 .

ب) عبّر عن : $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ بدلالة n .

ج) نضع : $L_n=\left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\|+\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|+........+\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$.

عبّر عن L_n بدلالة n .

ماهي نهاية L_n لما n يؤول إلى $+\infty$ ؟ .

حل التمرين:

1) أ) التعبير عن r_n بدلالة r_0 و n : $r_n=r_0\times q^n$ **و منه :** $r_n=r_0.(\frac{2}{3})^n$.

ب) التعبير عن θ_n بدلالة θ_0 و n : $\theta_n=\theta_0+\frac{2\pi}{3}n$ **و منه :** $\theta_n=\theta_0+\frac{2n\pi}{3}$.

ج) لدينا : $z_0\times z_1\times z_2=8$.

*) $|z_0\times z_1\times z_2|=|8|$ **أي :** $|z_0|\times|z_1|\times|z_2|=8$ **أي :** $r_0\times r_1\times r_2=8$ **و نعلم أنّ :** $r_0\times r_2=r_1^2$

إذن : $r_1\times r_1^2=8$ **أي :** $r_1^3=8$ **و عليه :** $r_1=2$.

*) $\arg(z_0\times z_1\times z_2)=\arg(8)+2k\pi$ **أي :** $\arg(z_0)+\arg(z_1)+\arg(z_2)=0+2k\pi$ **، أي :**

$\theta_0+\theta_1+\theta_2=2k\pi$ **و نعلم أنّ :** $\theta_0+\theta_2=2\theta_1$ **، إذن :** $3\theta_1=2k\pi$ **و عليه :** $\theta_1=\frac{2k\pi}{3}$.

نعلم أنّ : $\theta_0=\theta_1-\frac{2\pi}{3}$ **و منه :** $\theta_0=\frac{2k\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}$ **و لدينا أيضا :** $\theta_0\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ **، أي :**

$0\leq\frac{2k\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$ **، أي :** $0\leq\frac{2k}{3}-\frac{2}{3}<\frac{1}{2}$ **، أي :** $\frac{2}{3}\leq\frac{2k}{3}<\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ **، أي :** $\frac{2}{3}\leq\frac{2k}{3}<\frac{7}{6}$

أي : $\frac{6}{3}\leq 2k<\frac{21}{6}$ **، أي :** $2\leq 2k<\frac{21}{6}$ **، و منه :** $1\leq k<\frac{21}{12}$ **، إذن :** $k=1$.

و منه سنجد أنّ : $\theta_0=0$.

***) حساب r_1 و r_2 :**

لدينا : $r_1=2$ ، أي : $r_2=r_1\times\frac{2}{3}$ ، و منه : $r_2=\frac{4}{3}$. إذن : $r_0=3$ و $r_3=\frac{8}{9}$.

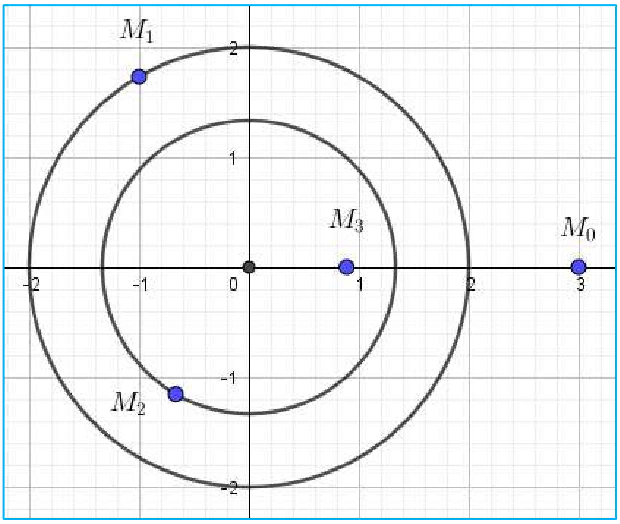
*) حساب θ_1 و θ_2 :

لدينا : $\theta_1=\theta_0+\frac{2\pi}{3}$ و منه : $\theta_1=\frac{2\pi}{3}$. لدينا : $\theta_2=\theta_1+\frac{2\pi}{3}$ و منه : $\theta_2=\frac{4\pi}{3}$ و $\theta_3=2\pi$.

2) تعليم النقط :

لدينا : $z_0=3$ ، $z_1=-1+i\sqrt{3}$

$z_2=-\frac{2}{3}-i\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $z_3=\frac{8}{9}$



ب) التعبيّر عن $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ بدلالة n :

نعلم أنّ : $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|=\left|z_{n+1}-z_n\right|$.

لدينا : $z_n=r_n.e^{i(\theta_n)}$ ، أي : $z_n=r_0\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$ ، و منه : $z_n=3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$.

و لدينا : $z_{n+1}=r_{n+1}.e^{i(\theta_{n+1})}$ ، و منه : $z_{n+1}=3\times(\frac{2}{3})^{n+1}.e^{i(\frac{2(n+1)\pi}{3})}$.

إذن : $z_{n+1}-z_n=3\times(\frac{2}{3})^{n+1}.e^{i(\frac{2(n+1)\pi}{3})}-3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$ ، أي :

$z_{n+1}-z_n=3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\left[\frac{2}{3}.e^{i(\frac{2\pi}{3})}-1\right]$ ، أي : $z_{n+1}-z_n=3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\left[\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-1\right]$ أي :

$z_{n+1}-z_n=3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\times(-\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}-1)$ ، أي : $z_{n+1}-z_n=3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\times(-\frac{4}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3})$

و منه : $\left|z_{n+1}-z_n\right|=3\times(\frac{2}{3})^n\times\frac{\sqrt{19}}{3}$ ، أي : $\left|z_{n+1}-z_n\right|=\sqrt{19}\times(\frac{2}{3})^n$.

و عليه : $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|=\sqrt{19}\times(\frac{2}{3})^n$.

ج) لدينا : $L_n=\left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\|+\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|+........+\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$

*) التعبير عن L_n بدلالة n :

$L_n=\sqrt{19}(\frac{2}{3})^0+\sqrt{19}(\frac{2}{3})^1+\sqrt{19}(\frac{2}{3})^2+....+\sqrt{19}(\frac{2}{3})^n$ ، أي :

$L_n=\sqrt{19}\left[(\frac{2}{3})^0+(\frac{2}{3})^1+(\frac{2}{3})^2+....+(\frac{2}{3})^n\right]$.

نلاحظ أنّ : $\left[(\frac{2}{3})^0+(\frac{2}{3})^1+(\frac{2}{3})^2+....+(\frac{2}{3})^n\right]$ هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول 1

عدد حدودها $(n+1)$ حدا .

إذن : $L_n=\sqrt{19}\left[1\times\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]$ ، أي : $L_n=\sqrt{19}\times3\left[1-(\frac{2}{3})^{n+1}\right]$ ، و منه : $L_n=3\sqrt{19}\left[1-(\frac{2}{3})^{n+1}\right]$

*) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n$:

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^{n+1}=0$ ، و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n=3\sqrt{19}$.

7.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدته $2cm$) .

نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

I) 1) أ) أعط الشكل الأسي لـ z_B ثمّ لـ z_C .

ب) علّم النقط : C,B,A .

2) عيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.

3) عيّن و أنشئ المجموعة (D) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z|=|z-2|$.

II) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z $(z\neq z_A)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{-4}{z-2}$.

1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z=\frac{-4}{z-2}$.

ب) إستنتج النقطتين المرفقتين بالنقطتين B و C .

ج) عيّن و علّم G' النقطة المرفقة بالنقطة G مركز الثقل للمثلث OAB .

2) أ) برهن أنّه من أجل كل z يختلف عن 2 يكون : $\left|z'-2\right|=\dfrac{2\left|z\right|}{\left|z-2\right|}$.

ب) بيّن أنّه إذا كانت M نقطة كيفية من المجموعة (D) المذكورة في الجزء الأوّل فإنّ M' تنتمي إلى المجموعة (T) يطلب تعيينها ثمّ إنشاؤها .

حل التمرين:

I) 1) أ) إعطاء الشكل الأسي لـ z_B ثمّ لـ z_C :

*) لدينا : $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، أي : $\begin{cases}\left|z_B\right|=2\\ \arg(z_B):\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Bigg\rangle\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ و منه : $z_B=2.e^{\frac{\pi}{3}}$.

*) نلاحظ أنّ : $z_C=\overline{z_B}$ ، و منه : $z_C=2.e^{-\frac{\pi}{3}}$.

ب) تعليم النقط : (أنظر الشكل أسفله) .

2) طبيعة الرباعي $OBAC$:

- لدينا : $z_A-z_B=z_C-z_O$ ، أي أنّ : $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}$ ، إذن الرباعي $OBAC$ متوازي أضلاع .

- و من جهة أخرى لدينا : $\left|z_B\right|=\left|z_C\right|$ أي أنّ : $OB=OC$ ، إذن الرباعي $OBAC$ هو معين .

3) طبيعة المجموعة (D) :

لدينا : $\left|z\right|=\left|z-2\right|$ ، أي : $OM=AM$ ، و منه : (D) هي محور القطعة $\left[OA\right]$.

II) لدينا : $z'=\dfrac{-4}{z-2}$ مع $(z\neq z_A)$.

1) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z=\dfrac{-4}{z-2}$ ، هذه الأخيرة تكافئ : $z^2-2z+4=0$ مع $(z\neq 2)$.

نجد : $\Delta=(2\sqrt{3}i)^2$ ، و منه : $z_1=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=1-i\sqrt{3}$.

ب) مما سبق نستنتج أنّ النقطة المرفقة بالنقطة B هي B نفسها و النقطة المرفقة بالنقطة C هي C نفسها أيضا .

ج) لدينا : النقطة G هي مركز الثقل للمثلث OAB ، أي : $z_G=\dfrac{z_O+z_A+z_B}{3}$ ، و منه : $z_G=1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

إذن : $z_{G'}=\dfrac{-4}{z_G-2}$ ، أي : $z_{G'}=\dfrac{-4}{1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}-2}$ و منه بعد الحساب نجد : $z_{G'}=3+i\sqrt{3}$.

*) تعليم $z_{G'}$: (أنظر الشكل أسفله)

2) أ) البرهان أنّ : $\left|z'-2\right|=\dfrac{2\left|z\right|}{\left|z-2\right|}$.

لدينا : $\left|z'-2\right|=\left|\dfrac{-4}{z-2}-2\right|$ ، أي : $\left|z'-2\right|=\left|\dfrac{-4-2z+4}{z-2}\right|$ ، أي : $\left|z'-2\right|=\left|\dfrac{-2z}{z-2}\right|$ ، و منه :

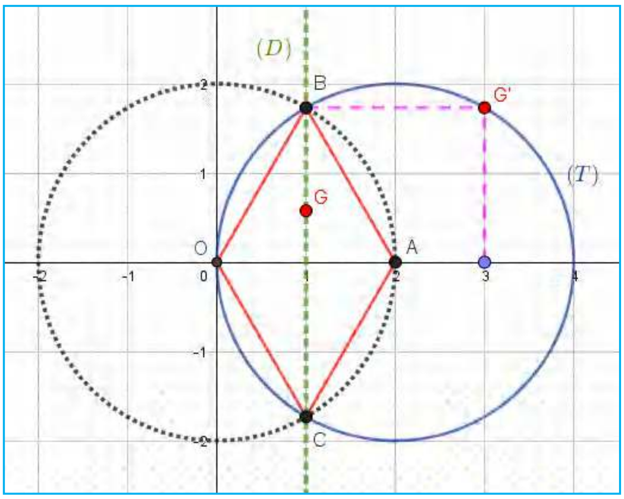
$\left|z'-2\right|=\dfrac{2\left|z\right|}{\left|z-2\right|}$ و هو المطلوب .

ب) إذا كانت M تنتمي إلى المجموعة (D) فإنّ : $OM=AM$ ، أي : $\left|z\right|=\left|z-2\right|$.

و منه : المساواة $\left|z'-2\right|=\dfrac{2\left|z\right|}{\left|z-2\right|}$ تصبح : $\left|z'-2\right|=2$ ، أي أنّ : $AM'=2$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T) التي مركزها A و نصف قطرها 2 .

*) الإنشاء :



.8

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدته $2cm$) .

نفرض النقطتين : A وَ B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$.

1) برّر أنّه يوجد تشابه مباشر S حيث : $S(A) = B$ وَ $S(O) = A$.

2) أ) بيّن أنّ الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1-i)z + i$.

ب) عيّن العناصر المميزة لـ S (نسمي Ω المركز) .

3) نعتبر متتالية النقط (A_n) حيث : A_0 هي المبدأ O و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = S(A_n)$.

نسمي z_n لاحقة A_n (لدينا إذن : $A_0 = O$ ، $A_1 = A$ ، $A_2 = B$) .

أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 1-(1-i)^n$.

ب) عيّن بدلالة n لاحقتي الشعاعين : $\overrightarrow{\Omega A_n}$ وَ $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$.

قارن بين طويلتي هذين الشعاعين و احسب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})$.

ج) إستنتج طريقة إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n ثمّ أنشئ A_3 وَ A_4 .

د) عيّن النقط A_n التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB) .

حل التمرين:

1) بما أنّ : A **تختلف عن** B **و** A **تختلف عن** O **، فإنّه يوجد تشابه مباشر** S **يحوّل** A **إلى** B **و يحوّل** O **إلى** A .

2) أ) تبيين أن الكتابة المركبة لـ S **هي :** $z' = (1-i)z + i$.

لدينا : $\begin{cases} S(A) = B \\ S(O) = A \end{cases}$ **أي :** $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_A = az_O + b \end{cases}$ **بالطرح نجد :** $z_B - z_A = a(z_A - z_O)$ **، أي :**

$a = \dfrac{z_B - z_A}{z_A - z_O} = \dfrac{1+2i-i}{i}$ **، و منه :** $a = 1-i$ **. نعوض قيمة** a **في** $z_A = az_O + b$ **نجد :** $z_A = b$ **، أي :**

$b = i$ **، إذن الكتابة المركبة للتشابه** S **هي :** $z' = (1-i)z + i$ **، و هو المطلوب .**

ب) العناصر المميزة للتشابه S **:**

لدينا : $a=1-i$ ، أي : $\begin{cases}|a|=\sqrt{2}\\ \arg(a)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ و لدينا : $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}=1$ ، أي : $\Omega(1;0)$.

إذن العناصر المميزة للتشابه S هي : نسبته $\sqrt{2}$ ، زاويته $-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ و مركزه Ω .

3) أ) لنبرهن بالتراجع على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n=1-(1-i)^n$

- لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $z_0=1-(1-i)^0$ ، أي : $z_0=0$ ، و منه : z_0 لاحقة A_0 (محققة) .

- نفرض صحة : $z_n=1-(1-i)^n$ و نبرهن صحة : $z_{n+1}=1-(1-i)^{n+1}$:

لدينا : $A_{n+1}=S(A_n)$ ، أي : $z_{n+1}=(1-i)z_n+i$ و لدينا فرضا أنّ : $z_n=1-(1-i)^n$ ، أي :

$z_{n+1}=(1-i)\left[1-(1-i)^n\right]+i$ ، أي : $z_{n+1}=1-i-(1-i)(1-i)^n+i$ ، و منه :

$z_{n+1}=1-(1-i)^{n+1}$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n=1-(1-i)^n$.

ب) تعيين بدلالة n لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$:

❖ $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}=z_n-z_\Omega$ ، أي : $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}=1-(1-i)^n-1$ ، و منه : $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}=-(1-i)^n$.

❖ $z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}}=z_{n+1}-z_n$ ، أي : $z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}}=1-(1-i)^{n+1}-1+(1-i)^n$ ، و منه : $z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}}=i(1-i)^n$.

*) المقارنة بين طويلتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$:

❖ $\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\|=\Omega A_n$ ، أي : $\Omega A_n=\left|-(1-i)^n\right|=\left|1-i\right|^n$ ، و منه : $\Omega A_n=(\sqrt{2})^n$.

❖ $\left\|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right\|=A_nA_{n+1}$ ، أي : $A_nA_{n+1}=\left|i(1-i)^n\right|=|i|.|1-i|^n$ ، و منه : $A_nA_{n+1}=(\sqrt{2})^n$.

إذن نستنتج أنّ : $\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\|=\left\|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right\|$ أي : $\Omega A_n=A_nA_{n+1}$.

*) حساب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})$: $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})=\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}\right)+2k\pi$ ، أي :

$$(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})=\arg\left[\frac{i(1-i)^n}{-(1-i)^n}\right]+2k\pi=\arg(-i)+2k\pi .$$

و منه : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ج) إستنتاج طريقة إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n :

لدينا : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{A_n\Omega};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = -\dfrac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi$ ،

و منه : $(\overrightarrow{A_n\Omega};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

و لدينا من قبل أنّ : $\Omega A_n = A_nA_{n+1}$ ، إذن النقطة A_{n+1} هي صورة النقطة Ω بالدوران الذي مركزه A_n و زاويته

$\dfrac{\pi}{2}$ ، فبذلك سيكون المثلث ΩA_nA_{n+1} متقايس الضلعين و قائم في A_n .

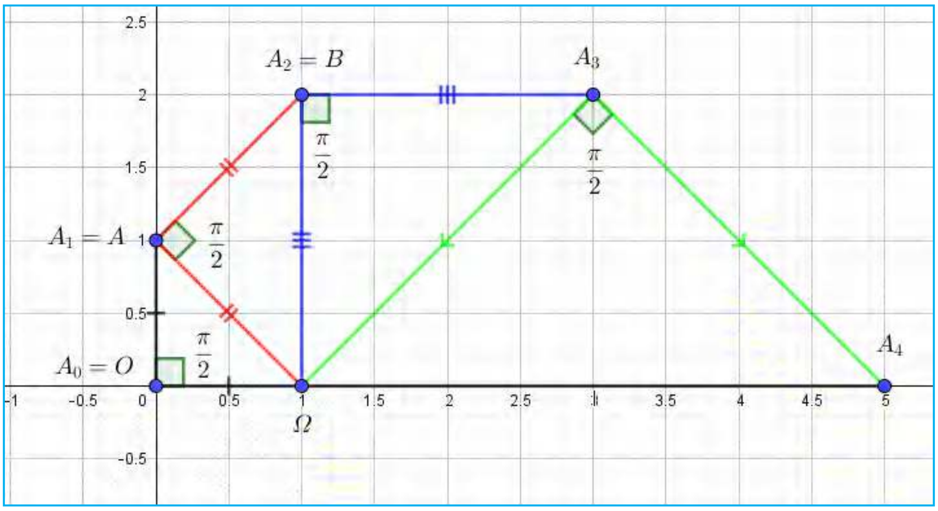
*) إنشاء النقطتين A_3 و A_4 :

أولا ننشئ كل من النقط : $A_0 = O$ ، $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ و $\Omega(1;0)$ ، بعدها سنلاحظ أنّ كل من المثلثين

ΩAB و ΩOA المتقايسا الضلعين و القائمين في A و O على الترتيب .

إذن لإنشاء النقطتين A_3 و A_4 نقوم بإنشاء المثلثين ΩBA_3 و ΩA_3A_4 المتقايسا الضلعين و القائمين في B و A_3

على الترتيب . (أنظر إلى الشكل الموالي) :



د) تعيّن النقط A_n التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB) :

لدينا : $A_n \in (\Omega B)$ يعني أنّ النقط Ω ، B و A_n على إستقامة واحدة ، أي : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega B}) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

و منه : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_2}) = k\pi$ ، أي : $\arg(\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_2}}}) = k\pi$ ، أي : $\arg\left[\dfrac{-(1-i)^n}{-(1-i)^2}\right] = k\pi$ ، و منه :

$\arg\left[(1-i)^{n-2}\right] = k\pi$ ، أي : $(n-2)\arg(1-i) = k\pi$ ، أي : $(n-2)(-\dfrac{\pi}{4}) = k\pi$ ، و منه :

$n - 2 = -4k$ ، إذن : $n = -4k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}^-$ لأنّ $n \in \mathbb{N}$.

و عليه فسيكون : $n \in \{2;6;10;14;.....\}$.

إذن النقط A_n التي تنتمي للمستقيم (ΩB) هي : A_2 ، A_6 ، A_{10} ، A_{14} ، .... إلخ .

9.

I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط : A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1+i$ ، $z_B = i$ و $z_C = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

1) بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S يحوّل A إلى B و يحوّل B إلى C .

2) أعط العبارة المركبة لـ S ثمّ استنتج العناصر المميزة له .

3) نعتبر النقطة A_0 ذات اللاحقة $z_0 = 2$ و النقطتان A_n ، A_{n+1} لاحقتاهما z_n و z_{n+1} حيث : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

أ) أحسب كلا من : z_1, z_2, z_3, z_4 ثمّ علّم النقط : A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

ج) ما هي أوّل نقطة A_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه O و نصف قطره $0{,}1$ ؟ .

II) تحتوي علبة على 30 كرة مرقّمة من 1 إلى 30 لا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كرة واحدة من العلبة و نسجل رقمها n $(1 \le n \le 30)$ ثمّ نعلّم النقطة A_n ذات اللاحقة z_n (المذكورة في السؤال 3 -ب-).

- أحسب إحتمال كل حادثة :

A : " النقطة A_n تنتمي إلى حامل محور الفواصل " .

B : " النقطة A_n تنتمي إلى حامل محور التراتيب " .

C : " النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ " .

حل التمرين:

I) 1) بما أنّ : A تختلف عن B وَ A تختلف عن C ، فإنّه يوجد تشابه مباشر S يحوّل A إلى B ، و يحوّل B إلى C .

2) العبارة المركبة للتشابه S : $\boxed{z' = az + b}$. لدينا : $S(A) = B$ وَ $S(B) = C$ ، و منه :

$\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$ بالطرح نجد : $z_B - z_C = a(z_A - z_B)$ ، و منه : $a = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \dfrac{i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{1 + i - i}$ ،

و منه : $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. نختار : $z_B = az_A + b$ ، أي : $i = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(1+i) + b$ ، و منه : $b = 0$.

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $\boxed{z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z}$.

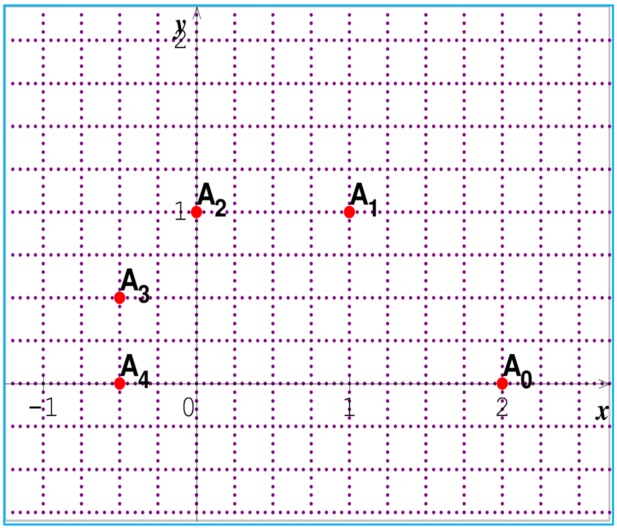
العناصر المميزة لـ S : النسبة : $k = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، الزاوية : $\arg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\pi}{4}$ ، المركز : المبدأ O .

3) أ) حساب : z_1, z_2, z_3, z_4 ، ثم تعليم النقط : A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 .

لدينا : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$ ، أي : $z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} \times 2 = 1+i$ $z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2} \times 1 + i = i$ ،

$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{1+i}{2} \times i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = -\frac{1}{2}$

تعليم النقط : (أنظر الشكل المقابل) .



ب) برهان أنّ : $z_n = 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^n . e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

- التحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $z_0 = 2$ (محققة) .

- نفرض صحة : $z_n = 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^n . e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

- و نبرهن صحة : $z_{n+1} = 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} . e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$.

لدينا فرضا : $z_n = 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^n . e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ، أي : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} \times 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n . e^{i\frac{n\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n . e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ،

أي : $z_{n+1} = 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} . e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{4})}$ ، و منه : $z_{n+1} = 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} . e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^n . e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

ج) النقطة A_n تكون في القرص الذي مركزه O و نصف قطره 0,1 :

معناه أنّ : $OA_n \leq 0,1$ ، أي : $\left|z_n\right| \leq 0,1$ ، أي : $2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq 0,1$ ، أي : $(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq 0,05$ ، و منه :

$\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq \ln(0,05)$ ، أي : $n\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) \leq \ln(0,05)$ ، ومنه : $n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})}$ ، أي : $n \geq 8,64$.

إذن : $n \in \{9;10;11;12;........\}$ و منه : أوّل نقطة تكون في القرص الذي مركزه O و نصف قطره 0,1 هي : A_9 .

II) A : "النقطة A_n تنتمي إلى محور الفواصل" معناه أنّ : z_n حقيقي ، أي : $\arg(z_n) = k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4} = k\pi$

أي : $\frac{n}{4} = k$ ، و منه : $n = 4k$ ، (n مضاعف لـ 4) أي : $n \in \{4;8;12,16;20;24;28\}$. إذن : $p(A) = \frac{7}{30}$.

B : "النقطة A_n تنتمي إلى محور التراتيب" معناه أنّ : z_n تخيلي صرف ، أي : $\arg(z_n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، و منه : $n = 4k+2$ ، أي : $n \in \{2;6;10,14;18,22,26;30\}$. إذن : $p(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

C : "النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$" ، أي أنّ : $\arg(z_n) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

أي : $\frac{n}{4} = \frac{1}{4} + k$ ، ومنه : $n = 4k+1$ ، أي : $n \in \{1;5;9;13;17;21,25,29\}$. إذن : $p(C) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

10.

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

- نعتبر A و B نقطتان لاحقاتاهما على الترتيب : $a=1$ و $b=-1$.

- نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{z-1}{z+1}$ مع $z \neq -1$ (1 أ) عيّن و أنشئ المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً حقيقياً .

ب) عيّن و أنشئ المجموعة (Δ') للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' تخيلياً صرفاً.

ج) عيّن و أنشئ المجموعة (D) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون : $\left|z'\right| = 1$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن -1 يكون : $(z'-1)(z+1) = -2$.

ب) إستنتج أنّ : $AM' \times BM = 2$ و $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) + (\vec{u},\overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$.

3) بيّن أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 فإنّ M' تنتمي إلى الدائرة (T') يطلب تعيينها .

4) نرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة N ذات اللاحقة $-\bar{z}$.

بيّن أنّه إذا كانت M تختلف عن B فإنّ M' تنتمي إلى نصف المستقيم $[AN)$.

5) نعتبر K النقطة ذات اللاحقة : $t=-2+i\sqrt{3}$.

أ) أكتب $(t+1)$ على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّ النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) .

6) باستعمال الأسئلة السابقة ، أعط إنشاءاً للنقطة K' المرفقة بالنقطة K بواسطة العلاقة : $z'=\dfrac{z-1}{z+1}$.

حل التمرين:

1) أ) يكون z' عدداً حقيقياً معناه : $z'=0$ أو $\arg(z')=k\pi$ ، أي : $\dfrac{z-1}{z+1}=0$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$

أي : $\begin{cases} z-1=0 \\ z+1\neq 0 \end{cases}$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$ ، و منه : المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً حقيقياً هي المستقيم (AB) ما عدا النقطة B .

ب) يكون z' تخيلياً صرفاً معناه : $z'=0$ أو $\arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

أي : $\dfrac{z-1}{z+1}=0$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي : $\begin{cases} z-1=0 \\ z+1\neq 0 \end{cases}$ أو المثلث AMB قائم في M .

و منه : المجموعة (Δ') للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً تخيلياً صرفاً هي الدائرة ذات القطر AB ما عدا النقطة B .

ج) يكون $|z'|=1$ ، أي : $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=1$ ، أي : $|z-1|=|z+1|$ ، أي : $AM=BM$.

و منه : المجموعة (D) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون $|z'|=1$ هي محور قطعة المستقيم $[AB]$.

2) أ) لنبيّن أنّ : $(z'-1)(z+1)=-2$.

$(z'-1)(z+1)=(\frac{z-1}{z+1}-1)(z+1)$ ، أي : $(z'-1)(z+1)=(\frac{z-1-z-1}{z+1})(z+1)$ ،

أي : $(z'-1)(z+1)=(\frac{-2}{z+1})(z+1)$ ، و منه : $(z'-1)(z+1)=-2$ و هو المطلوب .

ب) لدينا : $(z'-1)(z+1)=-2$ ، أي : $|z'-1|.|z+1|=2$ و $\arg[(z'-1)(z+1)]=\pi+2k\pi$

أي : $AM'\times BM=2$ و $\arg(z'-1)+\arg(z+1)=\pi+2k\pi$.

و منه : $AM'\times BM=2$ و $(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+(\vec{u},\overrightarrow{BM})=\pi+2k\pi$ ، و هو المطلوب .

3) إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 هذا يعني أنّ : $BM=2$.

أي : $AM'\times BM=2$ تصبح : $AM'\times 2=2$ و منه : $AM'=1$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T') ذات المركز A و نصف القطر 1 .

4) لإثبات أنّ : $M'\in[AN)$ يكفي تبيين أنّ : $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الإتجاه ، أي أنّ :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=0+2k\pi$.

*) لنحسب $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})$:

حسب علاقة شال يكون لدينا : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=(\overrightarrow{AN};\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=-(\vec{u},\overrightarrow{AN})+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=-\arg(z_N-z_A)+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$

أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=-\arg(-\bar{z}-1)+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\arg(-z-1)+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$

أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\arg[-(z+1)]+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\arg(-1)+\arg(z+1)+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\pi+\arg(z+1)+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\pi+(\vec{u},\overrightarrow{BM})+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ و

نعلم أنّ : $(\vec{u},\overrightarrow{BM})+(\vec{u},\overrightarrow{AM'})=\pi+2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=2\pi+2k\pi$.

و منه : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=0+2k\pi$ و عليه فإنّ : $M'\in[AN)$.

5) أ) لدينا : K لاحقتها $t=-2+i\sqrt{3}$ ، أي : $t+1=-1+i\sqrt{3}$.

$|t+1|=|-1+i\sqrt{3}|=2$ ، أي : $t+1=2(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، و منه : $t+1=2.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

ب) لنبيّن أنّ النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) :

*) نحسب الطول BK : $BK=|z_K-z_B|=|-2+i\sqrt{3}+1|=|-1+i\sqrt{3}|$ ، و منه : $BK=2$.

إذن : النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 .

6) *) بما أنّ : النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) ، فحسب السؤال (3) : النقطة K' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T')

ذات المركز A و نصف القطر 1 .

*) و حسب السؤال (4) : النقطة K' ستكون تنتمي إلى نصف المستقيم $[AN)$ حيث : $z_N=-\overline{z_K}$.

أي : $z_N=2+i\sqrt{3}$.

- من هذا و ذاك نستنتج أنّ النقطة K' هي نقطة تقاطع الدائرة (T') مع نصف المستقيم $[AN)$.

11.

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2+4z-\frac{25}{4}=0$.

. إستنتج حلول المعادلة : $-\left(z+1-\frac{1}{2}i\right)^2+4\left(z+1-\frac{1}{2}i\right)-\frac{25}{4}=0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ وحدته 2cm .

- علم النقط A, B, C , D لواحقها على الترتيب: $z_A=1-i$, $z_B=1+2i$, $z_C=2+\frac{3}{2}i$, $z_D=2-\frac{3}{2}i$

- ما طبيعة الرباعي ABCD ؟ .

3. نعتبر M نقطة من المستقيم (AB) ترتيبها α والنقطة N هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- عين قيمة العدد α حتى تكون N على إستقامية مع النقطتين O و A .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-1+i}{z-1-2i}$ حقيقيا سالبا تماما .

حل التمرين:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2+4z-\frac{25}{4}=0$.

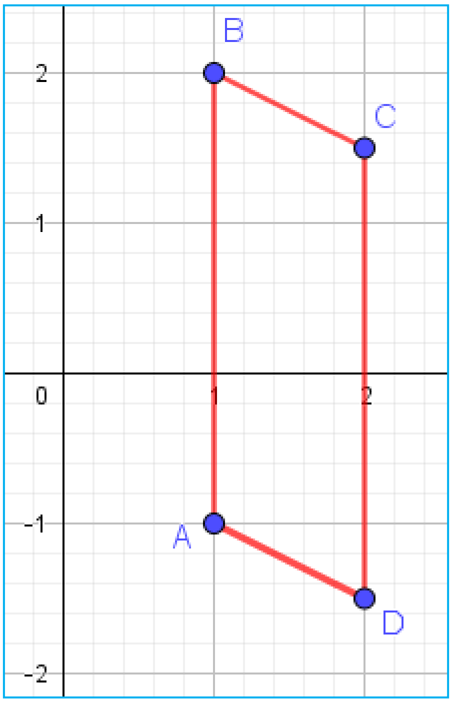
نجد : $\Delta=(3i)^2$ و $z_1=2-\frac{3}{2}i$ ، $z_2=2+\frac{3}{2}i$

*) إستنتاج حلول المعادلة :

مما سبق لدينا : $z+1-\frac{1}{2}i=2-\frac{3}{2}i$ أي : $z=1-i$

أو $z+1-\frac{1}{2}i=2+\frac{3}{2}i$ ، أي : $z=1+2i$.

2) *) تعليم النقط :



*) طبيعة الرباعي $ABCD$:

من خلال الشكل نلاحظ أنّ الرباعي هو متوازي أضلاع

- لنبين ذلك :

بعد الحساب نجد أنّ : $z_D-z_A=z_C-z_B$ ، و منه :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ، إذن الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع .

3) لدينا : النقطة M نقطة من (AB) و بما أنّ للنقطتين

A و B نفس الفاصلة 1 فستكون : $M(1;\alpha)$.

لدينا : النقطة N هي صورة M بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، أي : $z_N-z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M-z_O)$ ، أي :

$z_N=i(z_M)$ ، أي : $z_N=i(1+i\alpha)$ ، أي : $z_N=i-\alpha$ ، و منه : $z_N=-\alpha+i$.

*) تكون النقطة N على إستقامية مع O و A إذا كان :

العدد $\frac{z_N-z_O}{z_A-z_O}$ حقيقيا ، أي : $(\frac{-\alpha+1}{1-i})\in\mathbb{R}$.

أي : $\frac{z_N}{z_A} = \frac{-\alpha-1}{2} + i\frac{1-\alpha}{2}$.

إذن : تكون N على استقامية مع O و A إذا كان :

$\frac{1-\alpha}{2} = 0$ ، و منه : $\alpha = 1$.

4) العدد $\frac{z-1+i}{z-1-2i}$ حقيقي سالب معناه أنّ :

$\frac{z-1+i}{z-1-2i} \neq 0$ و $\arg(\frac{z-1+i}{z-1-2i}) = \pi + 2k\pi$

أي : $\begin{cases} z \neq z_A \\ z \neq z_B \end{cases}$ و $\arg(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = \pi + 2k\pi$.

و منه : مجموعة النقط M هي قطعة المستقيم $[AB]$ ماعدا النقطتين A و B .

.12

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

نفرض النقطتين $A(2-i)$, $B(2+i)$ و نعتبر التحاكي h الذي مركزه O ونسبته 2 .

ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$. عين لاحقة النقطة E صورة I بالتحاكي h .

3. أحسب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_E}$. إستنتج طبيعة الرباعي $OAEB$ ، ثم أحسب مساحته .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z_A - z|^2 + |z_B - z|^2 = 4$.

حل التمرين:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$. نجد : $\Delta = (2i)^2$ و $z_1 = 2 + i$ ، $z_2 = 2 - i$.

2) لدينا : I هي منتصف $[AB]$ ، أي أنّ : $z_I = 2$.لدينا : النقطة E هي صورة I بالتحاكي h ، أي : $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OI}$ ، أي : $z_E = 2.z_I$ ،

و منه : $z_E = 4$.

3) حساب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_E}$: بعد الحساب نجد : $\frac{z_B - z_A}{z_E} = \frac{1}{2}i$.

*) طبيعة الرباعي $OAEB$: لدينا : I منتصف $[AB]$ و أيضا منتصف $[OE]$ ، أي :

القطران متناصفان ، إذن الرباعي $OAEB$ متوازي أضلاع و بما أنّ : $\frac{z_B - z_A}{z_E} = \frac{1}{2}i$ ، أي : $\arg(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

إذن : القطران متعامدان ، و عليه سيكون الرباعي $OAEB$ معيّن .

*) حساب مساحة الرباعي $OAEB$: $S_{OAEB} = \frac{AB \times OE}{2} = \frac{4}{2} = 2(u.a)$.

4) تعيين مجموعة النقط M :

لدينا : $|z_A - z|^2 + |z_B - z|^2 = 4$ ، أي : $MA^2 + MB^2 = 4$ ، نعلم أنّ : $AB^2 = 4$

و منه : $MA^2 + MB^2 = AB^2$ (مبرهنة فيثاغورس)

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي قطرها AB . ملاحظة : يمكن وضع $z = x + iy$ فنجد معادلة الدائرة .

.3

تمارين بكالوريا 2008 -2019 محلولة / شعبة علوم

السنة	نص التمرين
2008 الموضوع 1	1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$. نرمز للحلّين بـ z_1 و z_2 حيث $\|z_1\|<\|z_2\|$. بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي . 2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، z_1 و z_2 . ليكن z العدد المركّب حيث : $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$. أ- إنطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$. برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ حيث θ، θ_1 وθ_2 أعداد حقيقية. بـ - أكتب z على الشكل الأسّي . جـ - أكتب z على الشكل المثلثي و استنتج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين نسبته و زاويته .
2008 الموضوع 2	1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2+iz-2-6i=0$ 2) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث : $z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$. عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$. 3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث : $z_C=\frac{4-i}{1+i}$. أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) . 4) أ - برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$ بـ - تطبيق : عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.
2009 الموضوع 1	$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب . 1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$. 2) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$. أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي . بـ - أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي . جـ - إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. 3) أ - n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا. بـ - أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

2009 الموضوع 2	المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. 1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$. 2) نسمي z_1 و z_2 حلّي هذه المعادلة . أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي . ب- - A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\frac{1}{2}(5+i\sqrt{3})$ أحسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC. جـ - جد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$. د- أحسب z^3 ، z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.
2010 الموضوع 2	نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب : $z_A=1+i$ و $z_B=3i$ 1) أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي . 2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z'=2iz+6+3i$ أ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S . بـ - عيّن z_C لا حقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S . جـ - استنتج طبيعة المثلث ABC . 3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$. أ- عيّن z_D لا حقة النقطة D . بـ - عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$. 4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما. أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ). بـ - أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$. عيّن حينئذ المجموعة (Δ).
2010 الموضوع 2	1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$ ، ثم أكتب الحلّين على الشكل الأسّي . 2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$. أ- بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O . بـ - عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B . جـ - بيّن أن النقط A ، O و C في استقامية و كذلك النقط B ، O و D . د- إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.
2011 الموضوع 1	بر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1)أ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب - عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

1) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث :

$z' = iz - 1 - i$

أ- عيّن طبيعة التحويل T محدّدا عناصره المميزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ- بيّن أن النقط A ، C و D في استقامية.

ب - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .

جـ - عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

2011 الموضوع 2

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$

1) أ- علّم النقط A ، B و C .

ب - ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك .

جـ - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 12$

3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

نسمي z_0 ، z_1 حلّي هذه المعادلة .

ب - لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

- عيّن مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

2012 الموضوع 1

1)نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2-3i$)

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

2)ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$z_A = 1 + i\sqrt{5}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{5}$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3)نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

ب - إستنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

2012 الموضوع 2

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ-تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب - حدّد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب :

$z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$

أ-أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب - أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

جـ - إستنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ-جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب - عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ - بيّن أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

2013 الموضوع 1

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ...... (I) حيث α وسيط حقيقي .

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلّي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

ب - أكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

جـ - عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ثم أنشئ G.

د - أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

2013 الموضوع 2

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : $z^2+4z+13=0$ ...... (E)

1) تحقق أن العدد المركّب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر .

2) A و B نقطتان من المستوي المركّب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- بيّن أن : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب - أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

3) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{O}$.

أ- بيّن أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقين يطلب تعيينهما .

ب - أحسب z_D لاحقة النقطة D. جـ - بيّن أن $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD	
1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$ 2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = 3\sqrt{2}\left(1+i\right)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \dfrac{z_C}{2}$. أ- أكتب z_A ، z_B و $\left(1+i\right)z_A$ على الشكل الأسّي. ب - أحسب $\left(\dfrac{\left(1+i\right)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$. جـ - بيّن أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها . د- أحسب $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟ 3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ أ- أكتب العبارة المركّبة للدوران R . ب - عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A، C و C' في إستقامية . جـ - عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .	2014 الموضوع 1
1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z - i\right)\left(z^2 - 2z + 5\right) = 0$ 2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (وحدة الطول $1cm$) تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ ، $z_C = 1 - 2i$. أ- أنشئ النقط A ، B و C . ب - جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على $\left(BC\right)$. جـ - أحسب مساحة المثلث ABC. 3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\dfrac{1}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ أ- عيّن الكتابة المركّبة للتشابه S . ب - بيّن أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\dfrac{1}{2}cm^2$. 4) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث : $\left\|z\right\| = \left\|iz + 1 + 2i\right\|$.	2014 الموضوع 2
I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β. II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$.	2015 الموضوع 1

1)أ- أكتب z_A وz_C على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

بـ - تحقق أن العدد المركّب $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}-\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}+2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}$ حقيقي .

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$

أ- حدّد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحوّل D إلى A .

بـ - أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3)عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

2015 الموضوع 2

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$.

1)أ- أكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسّي.

بـ - استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ - أنشىء الدائرة (γ) و النقط A ، B و C.

2) أ- تحقق أن : $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

بـ - استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

جـ - عيّن و أنشىء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$.

3) أ- عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحوّل C إلى A .

بـ - أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

2016 الموضوع 1 الدورة الأولى

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z\neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث : $z'=\frac{z-2}{z-1}$.

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2)النقطتان A و B لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث : $z_1=1-i$ ، $z_2=\overline{z_1}$.

أ- أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي .

بـ - بيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يطلب تعيين زاوية له .

3)نضع : $z'\neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ (Γ) .

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2 .

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ و عناصره المميزة .

بـ - أكتب العبارة المركبة للتحويل S .

جـ - عيّن ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

2016 الموضوع 2

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$

الدورة الأولى

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ- أكتب z_A، z_B و z_C على الشكل الأسّي .

ب - بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة .

3) أ- عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته .

ب - عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z-z_A|=|\bar{z}-z_B|$.

جـ - عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغيّر على ،ثم تحقق أن $A\in(\Gamma)$

2016 موضوع 1 الدورة الثانية

1) نضع من أجل كل عددمركب z : $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$

أ-تحقق أن: $P(2\sqrt{3})=0$.

ب - جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-2\sqrt{3})(z^2+az+b)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$

أ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب - بيّن أنه يوجد دوران R مركزه A و يحوّل النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته .

جـ - استنتج طبيعة المثلث ABC.

د- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$

.

3) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2016 موضوع 2 الدورة الثانية

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : (E) .... $2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0$

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

1) أ- أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$.

ب - حل في المجوعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1$ ، $z_D=-\frac{5}{2}$

ب- أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .

بـ - أنشئ النقط A ، B ، C و D .

جـ - أثبت أن : $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$.

د- إستنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أنشئ النقطة F ثم حدّد طبيعة المثلث AFC . 4) عيّن طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z+1=kz_B$. لمّا يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.	
حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$. II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$ 1) أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي . 2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD . 3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث :. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$ تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها . 4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C و نسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h . عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .	2017 الموضوع 1
المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي : 1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$. 2) من أجل كل عدد مركب z ، . $(z+2)(\overline{z}+2)=\|z+2\|^2$ 3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$. 4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$. صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر 9 5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ حيث k عدد صحيح .	2017 الموضوع 2
حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$. II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث : $\|\vec{u}\|=2cm$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ 1) أ - أكتب z_B على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركّب z_C . ب - عيّن مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A، B و C . 2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S . أ - أكتب العبارة المركّبة للتشابه S ثم عيّن لاحقة كل A'، B' و C' من صور النقط A، B و C على الترتيب بالتشابه S ، ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A'، B' و C' . ب - أحسب بالسنتمتر المربّع مساحة المثلث $A'B'C'$.	2017 الموضوع 1 الدورة الاستثنائية

2017 الموضوع 2 الدورة الاستثنائية

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$

1) عيّن النسبة و زاوية للتشابه S المباشر ذي المركز A و الذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C .

2) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $\left[AC\right]$.

عيّن كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ، ثم بيّن أن النقط B ، G و I في إستقامية .

4) نعتبر النقطة D نظيرة النقطة B بالنسب إلى I . حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$.

أ - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) .

بـ - عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

2018 الموضوع 1

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ ، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و

$z_C=\overline{z_B}$.

أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) أ- تحقق أن : $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدّد طبيعة المثلث OBC .

بـ - إستنتج أن : B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميّزة .

4) نسمّي (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $\left|z\right|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$.

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r .

2018 الموضوع 2

حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$.

1) تحقق أن : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث :
$$\begin{cases}\left|z_D-z_A\right|=\left|z_B-z_A\right|\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{cases}$$

بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و أحسب z_D.

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحوّل G إلى D .

	4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث : $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
2019 الموضوع 1	I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$. II) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها : i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب . 1) أكتب العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC. 2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع : $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$. أ - عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $\|f(z)\| = \frac{1}{2}$. بـ - بيّن أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب . 3) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة C و زاويته $\frac{\pi}{2}$. أ - عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r و بيّن أن النقط D ، A و C في إستقامية . بـ - استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .
2019 الموضوع 2	المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2z_A$. 1) أ - أكتب العدد المركّب z_A على الشكل الأسي . بـ - أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$. 2) أ- T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T. بـ - استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$. 3) أكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسي . 4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا . 5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A و تختلف عن C . عيّن (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

حلول التمارين

3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

لدينا : $\Delta=(1+2i)^2-4\times1\times(-1+i)=1$ و منه للمعادلة حلّين هما :

$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$ و $z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$.

● تبيان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ حقيقي :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{i+1}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{(i+1)^2}{4}\right)^{1004}=\left(\frac{2i}{4}\right)^{1004}=\left(\frac{i}{2}\right)^{1004}=\frac{\left(i^4\right)^{251}}{2^{1004}}=\frac{1}{2^{1004}}$$

4) أ- إعتمادا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$.

● لبرهان أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ يكفي إثبات أن : $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=1$.

لدينا : $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=e^{(-i\theta+i\theta)}=e^0=\cos 0+i\sin 0=1$

● إثبات : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

لدينا : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\frac{1}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}=e^{i\theta_1-i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

بـ - كتابة z على الشكل الأسّي .

لدينا : $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$ و منه $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{1+i-1}{i-1}=\frac{i}{i-1}=\frac{i(-i-1)}{2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

لدينا : $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ و منه : $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

و بفرض θ عمدة للعدد المركب z ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

جـ - كتابة z على الشكل المثلثي :

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

● استنتاج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين نسبته و زاويته :

لدينا : $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ يكافئ $z_2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_1-1)$ و منه C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A،

و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2+iz-2-6i=0$

لدينا : $\Delta=i^2-4\times1\times(-2-6i)=7+24i=7+2\times4\times3i=16-9+2\times4\times3i=(4+3i)^2$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى للبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ)

و منه للمعادلة حلّين مركبين هما : $z_1=\dfrac{-i+4+3i}{2}=2+i$ و $z_2=\dfrac{-i-4-3i}{2}=-2-2i$.

2) تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$:

$$z_\omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-2-2i+2+i}{2}=-\frac{1}{2}i$$

3) كتابة z_C على الشكل الجبري :

$$z_C=\frac{4-i}{1+i}=\frac{(4-i)(1-i)}{2}=\frac{4-i-4i-1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$

- إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) :

يكفي أن نثبت أن : $\omega C=\dfrac{1}{2}AB$ أي : $|z_C-z_\omega|=\dfrac{1}{2}|z_B-z_A|$.

لدينا : $|z_B-z_A|=|-2-2i-2-i|=|-4-3i|=5$ و،

$$|z_C-z_\omega|=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i-\left(-\frac{1}{2}i\right)\right|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}=\frac{1}{2}|z_B-z_A|$$

و منه $C\in(\Gamma)$.

4) أ - S التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ معناه :

- $S(M_0)=M_0$.

- من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن M_0 ، $S(M)=M'$ معناه :

$$\begin{cases} M_0M'=k\,M_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}\right)=\theta \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} |z'-z_0|=k\,|z-z_0| \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right)=\theta[2\pi] \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \left|\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right|=k \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right)=\theta[2\pi] \end{cases}$$

و منه $\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}=ke^{i\theta}$ أي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$ هي عبارة التشابه S .

ب - **تطبيق** : تعيين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ : $z'+\dfrac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\dfrac{1}{2}i\right)$.

التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $-\dfrac{1}{2}i$ أي ω و نسبته 2 و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب .

4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

$P(z)=0$ تكافئ $(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$ تكافئ $z=1+i$ أو $z^2-2z+4=0$

لنحل المعادلة $z^2-2z+4=0$:

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12=(i\sqrt{12})^2=(2i\sqrt{3})^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\{1+i;1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$.

5) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أ- كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=1+i$ و منه : $|z_1|=\sqrt{2}$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_2=1-i\sqrt{3}$ و منه : $|z_2|=2$.

و بفرض θ_2 عمدة للعدد المركب z_2 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_2=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_2)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب - كتابة $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4}=\frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

جـ - إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :

و منه $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{2}} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$.

6) أ - n عدد طبيعي ، تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

لدينا : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{7n\pi}{12}}$,

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\frac{7n\pi}{12}=k\pi$ يكافئ $n=12k$ ، مع $k\in\mathbb{N}$.

ب - حساب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}e^{i\frac{7\times 456\pi}{12}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{456}e^{266i\pi}=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{228}=\frac{1}{2^{228}}$$

تصحيح مقترح للتمرين [4][باك 2009][م2]

3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12=12i^2=\left(\sqrt{12}i\right)^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$.

4) أ- كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=1-i\sqrt{3}$ و منه : $|z_1|=2$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_1=\frac{1}{2} \\ \sin\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $z_2=\overline{z_1}$ و منه : $z_2=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

حساب الأطوال :

$$AB=|z_B-z_A|=\left|2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3} ،\ AC=|z_C-z_A|=\left|\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|=3 \text{ و } BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$$

طبيعة المثلث ABC:

لدينا : $AB^2=AC^2+BC^2$ و منه المثلث ABC قائم في C حسب النظرية العكسية لفيتاغورس .

جـ - إيجاد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

لدينا : $|z|=\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{|z_C-z_B|}{|z_A-z_B|}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

و $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\sqrt{3}}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و منه $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

د- حساب z^3 ، z^6 ثم استنتاج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

لدينا : $z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\frac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}}=\frac{1}{8}e^{i\pi}=-\frac{1}{8}$

و $z^6=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\frac{1}{2^6}e^{i\frac{6\pi}{3}}=\frac{1}{8}e^{i2\pi}=\frac{1}{64}$

و لدينا : $z^{3k}=\left(z^3\right)^k=\left(-\frac{1}{8}\right)^k$ و منه z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

تصحيح مقترح للتمرين [5][باك 2010][1م]

5) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A=1+i$ و منه : $|z_A|=\sqrt{2}$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_B=3i$ و منه : $|z_B|=3$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{0}{3}=0\\ \sin\theta_B=\frac{3}{3}=1\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_B=3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

6) S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z'=2iz+6+3i$

الكتابة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z'=\alpha z+\beta$ بحيث : $\alpha=2i$ و $\beta=6+3i$.

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S :

نسبة التشابه المباشر S هي : $k=|\alpha|=2$.

زاوية للتشابه المباشر S هي : $\theta=\arg(\alpha)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

مركز التشابه المباشر S هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا : $z_B=3i=\frac{15i}{5}=\frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{6+3i}{1-2i}=\frac{\beta}{1-\alpha}$ و منه النقطة B هي مركز التشابه المباشر S .

ب- عيّن z_C لا حقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

لدينا $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$ و منه $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$ ، إذن : $z_C = 4 + 5i$.

جـ - طبيعة المثلث ABC :

لدينا : النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S الذي مركزه B و نسبته 2 و هذا يعني : $\begin{cases} BC = 2BA \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

و منه المثلث ABC مثلث قائم في النقطة B .

7) النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$.

أ- تعيين z_D لاحقة النقطة D :

لدينا : $z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$ و منه $z_D = \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2}$ إذن : $z_D = 5 + 3i$.

بـ - تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$ مع التبرير :

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3i - (1+i) = -1 + 2i$ و $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 4 + 5i - (5+3i) = -1 + 2i$

و منه الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

و لدينا مما سبق : ABC مثلث قائم و $BC = 2BA$ و بالتالي الرباعي $ABCD$ مستطيل .

8) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- التحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ).

لدينا : $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - (6+3i)}{5+3i-(6+3i)} = \frac{-6}{-1} = 6$ و منه العدد $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ حقيقي موجب تماما و بالتالي $E \in (\Delta)$.

بـ - $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MB})$.

العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 0 + 2k\pi$ أي $(\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$.

و بالتالي المجموعة (Δ) هي : $(BD) - [BD]$ (المستقيم (BD) باستثناء القطعة $[BD]$)

تصحيح مقترح للتمرين [6][باك 2010][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4\times1\times18 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3 + 3i$ و $z_2 = \frac{6-6i}{2} = 3 - 3i$.

كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1 = 3 + 3i$ و منه : $|z_1| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن : $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_2 = \overline{z_1}$ و منه : $z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ- تبيان أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O :

لدينا : $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=3\sqrt{2}$ أي : $OA=OB=OC=OD$ و منه النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $3\sqrt{2}$.

ب - تعيين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B :

$\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=\arg\left(\dfrac{\overline{z_A}}{z_A}\right)=\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

جـ - إثبات أن النقط A ، O و C في استقامية و كذلك النقط B ، O و D .

يكفي إثبات أن كلا من $\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}$ و $\dfrac{z_B-z_O}{z_D-z_O}$ حقيقي .

لدينا : $\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}=\dfrac{z_A}{z_C}=-1$ و $\dfrac{z_B-z_O}{z_D-z_O}=\dfrac{z_B}{z_D}=-1$.

(يمكن استخدام كون $z_A+z_C=0$ و $z_B+z_D=0$ و بالتالي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$)

د - طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي $ABCD$ قطراه متناصفان و متقايسان بالتالي فهو متوازي أضلاع ، و لدينا $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ و منه الرباعي $ABCD$ مربع

تصحيح مقترح للتمرين [7][باك 2011][م1]

$z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1)أ - كتابة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+i-(-i)}{2+3i-(-i)}=\frac{-4+2i}{2+4i}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{20i}{20}=i$$

ب - طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له :

لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$ و منه

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

طبيعة المثلث ABC:

لدينا: $\begin{cases}\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ معناه $\begin{cases}\dfrac{AC}{AB}=1\\ \overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ ، أي : $\begin{cases}AB=AC\\ \overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

و منه المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

1) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث :

$z'=iz-1-i$

أ- تعيين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة :

الكتابة المركبة للتحويل النقطي T من الشكل : $z'=\alpha z+\beta$ بحيث : $\alpha=i$ و $\beta=-1-i$.

لدينا : $\alpha\in\mathbb{C}$ و $|\alpha|=|i|=1$ و منه التحويل T هو دوران .

زاوية للدوران T هي : $\theta=\arg(\alpha)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

مركز الدوران T هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا : $\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{-1-i}{1-i}=\frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i=z_A$ و منه النقطة A هي مركز الدوران T .

ب - صورة النقطة B بالتحويل T :

نسمي النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل T و منه $z_{B'}=iz_B-1-i=i(2+3i)-1-i=i-4$ أي : $z_{B'}=z_C$.

إذن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .

3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$

أ- تبيان أن النقط A ، C و D في استقامية : يكفي إثبات أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ حقيقي .

لدينا : $\frac{2}{3}=\frac{2(-2+i)}{3(-2+i)}=\frac{-4+2i}{-6+3i}=\frac{-4+i-(-i)}{-6+2i-(-i)}=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ و منه النقط A ، C و D في استقامية .

ب - تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D :

العبارة المركبة للتحاكي h من الشكل : $z_D-z_A=k(z_C-z_A)$ بحيث : k هي نسبة التحاكي h .

لدينا : $\frac{3}{2}=\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}$ و منه نسبة التحاكي h هي : $k=\frac{3}{2}$.

جـ - تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z_D-z_A=a(z_B-z_A)$

لدينا : $\frac{3}{2}i=\frac{3i(2i+1)}{2(1+2i)}=\frac{-6+3i}{2+4i}=\frac{-6+2i-(-i)}{2+3i-(-i)}=\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=a$ و منه :

نسبة التشابه المباشر S هي : $k=|a|=\frac{3}{2}$.

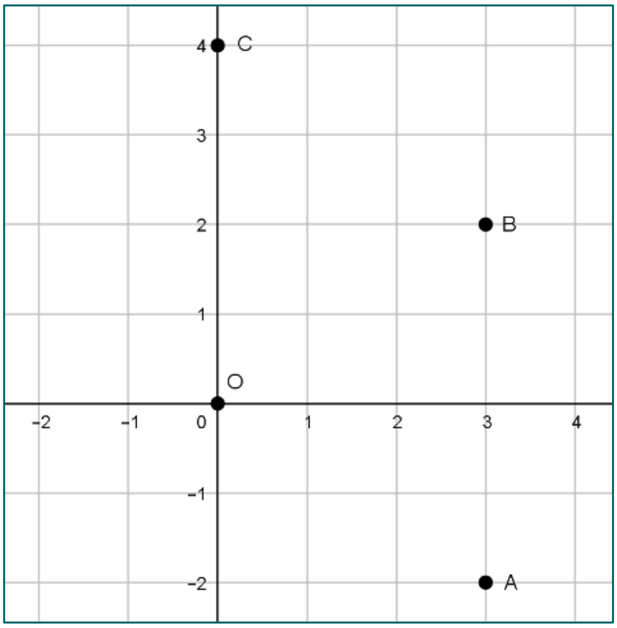
زاوية للتشابه المباشر S هي : $\theta=\arg(a)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

(يمكن إثبات أن : $S=h\circ T$

تصحيح مقترح للتمرين [8][باك 2011][م2]

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$

4) أ- تعليم النقط A ، B و C :



بـ - طبيعة الرباعي $OABC$:

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=3+2i-(3-2i)=4i$ و $z_{\overrightarrow{OC}}=z_{\overrightarrow{AB}}$ أي : $z_{\overrightarrow{OC}}=z_C-z_O=4i$ و منه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$

و بالتالي $OABC$ متوازي أضلاع .

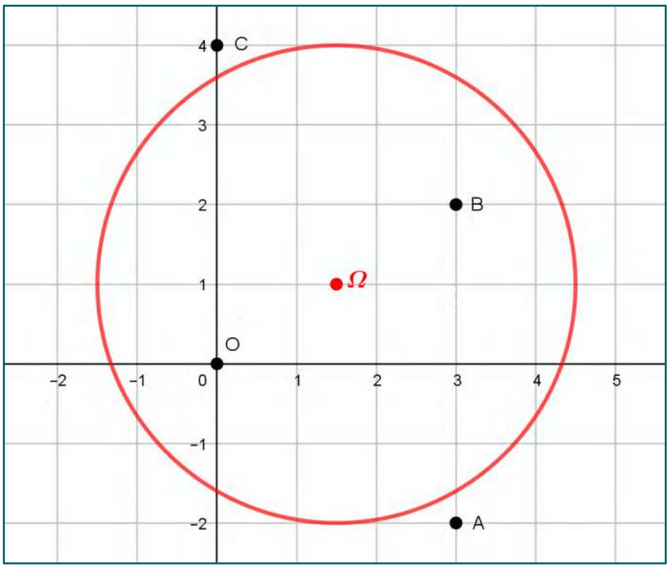
جـ - تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

النقطة Ω هي مرجح الجملة $\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ و منه : $z_\Omega=\dfrac{z_O+z_A+z_B+z_C}{4}$ أي : $z_\Omega=\dfrac{3}{2}+i$.

5) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$

$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$ أي $M\Omega=3$ و بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة Ω و نصف قطرها 3 .

الرسم :



6) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$.

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times13=-16=16i^2=(4i)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_A = 3-2i = \frac{6-4i}{2} = z_0$ و $z_B = 3+2i = \frac{6+4i}{2} = z_1$.

ب - تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $|z-z_0| = |z-z_1|$

$|z-z_0| = |z-z_1|$ معناه $AM = BM$ و بالتالي المجموعة المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$. (محور الفواصل)

تصحيح مقترح للتمرين [9][باك 2012][م1]

4) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2-3i$)

لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ تكافئ $z(z-2+3i) = 3i(z+2i)$ تكافئ $z^2-2z+6=0$.

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times6 = -20 = 20i^2 = \left(\sqrt{20}i\right)^2 = \left(2\sqrt{5}i\right)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1 = \frac{2+2\sqrt{5}i}{2} = 1+i\sqrt{5}$ و $z_2 = \frac{2-2\sqrt{5}i}{2} = 1-i\sqrt{5}$.

5) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$z_A = 1+i\sqrt{5}$ و $z_B = 1-i\sqrt{5}$

التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها :

لدينا : $|z_A| = |1+i\sqrt{5}| = \sqrt{6}$ و $|z_B| = |1-i\sqrt{5}| = \sqrt{6}$ و منه $|z_A| = |z_B|$ أي: $OA = OB$.

و بالتالي A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.

6) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

لدينا : $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ أي $z' = \frac{z_E(z-z_C)}{z-z_D}$ و منه $|z'| = \left|\frac{z_E(z-z_C)}{z-z_D}\right| = \frac{|z_E|.|z-z_C|}{|z-z_D|}$ أي : $OM' = \frac{3CM}{DM}$

ب - $M \in (\Delta)$ معناه : $CM = DM$ و منه $OM' = 3$ أي أن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O و نصف قطرها 3 .

التحقق أن $E \in (\gamma)$:

لدينا : $|z_E| = |3i| = 3$ أي : $OE = 3$ و منه $E \in (\gamma)$.

تصحيح مقترح للتمرين [10][باك 2012][م2]

4) $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

ب- التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

$$P(6) = 6^3 - 12\times6^2 + 48\times6 - 72 = 216 - 432 + 288 - 72 = 0$$

بـ - تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$

$$\begin{aligned}P(z)&=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)\\&=z^3+\alpha z^2+\beta z-6z^2-6\alpha z-6\beta\\&=z^3+(\alpha-6)z^2+(\beta-6\alpha)z-6\beta\\&=z^3-12z^2+48z-72\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد $\alpha=-6$ ، $\beta=12$ و منه $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ تكافئ $(z-6)(z^2-6z+12)=0$ معناه : $z-6=0$ أو $z^2-6z+12=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة $z^2-6z+12=0$.

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times12=-12=12i^2=\left(\sqrt{12}i\right)^2=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{6-2\sqrt{3}i}{2}=3-i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{6+2\sqrt{3}i}{2}=3+i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\left\{6;3-i\sqrt{3};3+i\sqrt{3}\right\}$.

5) أ - كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي:

لدينا : $z_A=6$ و منه $|z_A|=6$ إذن $z_A=6e^{i0}$.

لدينا : $z_B=3+i\sqrt{3}$ و منه : $|z_B|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_B=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_B)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_B=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

لدينا : $z_C=\overline{z_B}$ و منه : $z_C=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

بـ - كتابة العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي :

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{6-\left(3+i\sqrt{3}\right)}{6-\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{6-6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا : $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و منه $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ إذن $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

جـ - إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$ معناه $\begin{cases} BA = CA \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع .

6) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

ب- الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا : $z' = az + b$ بحيث $a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$ و $b = (1-a)z_C$ ، أي : $b = \left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(3 - i\sqrt{3}\right) = -4i\sqrt{3}$.

و منه $z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$ هي العبارة المركبة للتشابه S .

ب- تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :

$$z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$$

جـ - تبيان أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

يكفي إثبات أن $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي .

لدينا : $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{6 - \left(3 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(3 - i\sqrt{3}\right)}{3 - i\sqrt{3}} = 2$ و بالتالي النقط A ، B و A' في إستقامية.

تصحيح مقترح للتمرين [11][باك 2013][م1]

4) حل في $\mathbb{C}$، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية : (I) ...... $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$ حيث α وسيط حقيقي .

لدينا : $\Delta = (-4\cos\alpha)^2 - 4\times1\times4 = 16\cos^2\alpha - 16 = 16\left(\cos^2\alpha - 1\right) = -16\sin^2\alpha = (4i\sin\alpha)^2$ و منه للمعادلة حلّين

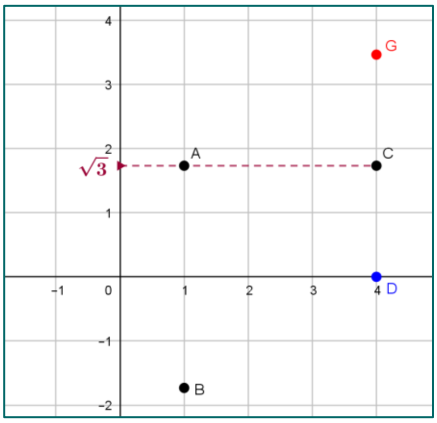
مركبين هما : $z_1 = \frac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2} = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ و $z_2 = \frac{4\cos\alpha - 4i\sin\alpha}{2} = 2(\cos\alpha - i\sin\alpha)$.

5) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نجد : $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

تبيان أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

لدينا : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و منه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013} = e^{i\frac{4026\pi}{3}} = e^{i(1342\pi)} = e^{i(2\pi)} = 1$.

6) أ- تعليم النقط A ، B و C .

(7 

ب ـ كتابة العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - \left(1 + i\sqrt{3}\right)}{1 - i\sqrt{3} - \left(1 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إستنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و منه $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(z_B - z_A\right)$ إذن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A

و نسبته $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$.

جـ - تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;-1),(C;2)\right\}$:

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} - \left(1 - i\sqrt{3}\right) + 2\left(4 + i\sqrt{3}\right)}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

د - تعيين z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع :

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$ معناه $z_B - z_A = z_D - z_G$ و بالتالي $z_D = z_B - z_A + z_G = 4$.

تصحيح مقترح للتمرين [12][باك 2013][م2]

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : (E) ...... $z^2 + 4z + 13 = 0$

4) التحقق أن العدد المركّب $-2-3i$ حل للمعادلة (E):

$$\left(-2-3i\right)^2 + 4\left(-2-3i\right) + 13 = 4 - 9 + 12i - 8 - 12i + 13 = 0$$

بما أن $-2-3i$ حل للمعادلة (E) فإن $\overline{-2-3i} = -2+3i$ كذلك حل للمعادلة (E) . ((E) معادلة في $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية)

5) A و B نقطتان من المستوي المركّب لاحقتاهما $z_A = -2-3i$ و $z_B = i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ-تبيان أن : $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$

العبارة المركبة للتشابه المباشر S : $z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ أي $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}iz_A+z_A$ و منه

$z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

بـ - حساب z_C لاحقة النقطة C هي صورة B بالتشابه S :

$$z_C=\frac{1}{2}iz_B-\frac{7}{2}-2i=\frac{1}{2}i(i)-\frac{7}{2}-2i=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$$

6) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O}$.

أ- تبيان أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقين يطلب تعيينهما :

لدينا $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O}$ و منه $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{O}$ أي $-3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{O}$ إذن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب .

بـ - حساب z_D لاحقة النقطة D.

$$z_D=\frac{-3z_A+z_B}{-2}=\frac{-3(-2-3i)+i}{-2}=\frac{6+9i+i}{-2}=-3-5i$$

جـ - تبيان أن : $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-3-5i-(-2-3i)}{-4-2i-(-2-3i)}=\frac{-1-2i}{-2+i}=\frac{i(i-2)}{-2+i}=i$$

طبيعة المثلث ACD :

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases}\left|\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases}AD=AC\\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

و منه المثلث ACD قائم في A و متساوي الساقين .

.4

تمارين بكالوريا 2008- 2019 / شعبة تقني رياضي

التمرين [1]

[باك 2008][م1] [4 ن]

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ المعرفة كمايلي :

$$(*) \text{ .... } z^3+(2-4i)z^2-(6+9i)z+9(-1+i)=0$$

1) بيّن أن $z_0=3i$ هو حل للمعادلة $(*)$.

2) حل ، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(*)$ ثم أكتب حلولها z_0 ، z_1 و z_2 على الشكل الأسي ، حيث $|z_1|<|z_2|$.

3) لتكن A ، B و C صور الحلول z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

عيّن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$.

4) عيّن المجموعة (E) للنقط M حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$.

5) تحقق أن النقط O ، B و G في إستقامية ثم عيّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O و يحول B إلى G محددا عناصره المميزة .

التمرين [2]

[باك 2008][م2] [4 ن]

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$

أكتب الحلّين على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين .

عيّن θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع .

التمرين [3]

[باك 2009][م1] [4 ن]

1) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2z+2=0$.

ب - إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z : $(\overline{z}+3)^2-2(\overline{z}+3)+2=0$ ، حيث $\overline{z}$ مرافق z .

2) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A ، B و M لواحقها $(1-i)$ ، $(1+i)$ و z على الترتيب .

أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$.

ب - عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z-1+i|=|z-1-i|$.

التمرين [4]

[باك 2009][م2] [4 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-6z+18=0$.

2) ليكن العدد المركب z_1 حيث : $z_1=3-3i$.

أ - أكتب z_1 على الشكل الأسي .

ب - أحسب طويلة العدد z_3 و عمدة له حيث : $z_1 \times z_3 = 6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C لواحقها $3+3i$ ، $3-3i$ و $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ على الترتيب .

أ - عيّن قيم العددالحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بـ G_α.

ب - عيّن مجموعة النقط G_α لما يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$.

التمرين [5]

[باك 2010][م1] [5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$.

2) علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، C ، D و I لواحقها $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب .

3) z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\frac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$.

أ - بيّن أن الجملة تكافئ : $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ ، ثم عيّن قيمة z .

ب - B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ - لتكن J النقطة التي لاحقتها z_J حيث : $z_J=1-2i$.

أكتب على الشكل الأسي العدد المركب z حيث : $z=\frac{z_A-z_J}{z_B-z_J}$.

تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين [6]

[باك 2010][م2] [5 ن]

1) أ - أكتب على الشكل الأسي العدد المركب a حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$.

ب - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2=-2+2i\sqrt{3}$.

2) يُنسب المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ - أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له .

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن (E) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث $\arg(\bar{z}+2)=\frac{\pi}{3}$.

أ - تحقق أن B تنتمي إلى (E).

بـ - عيّن المجموعة (E) .

التمرين [5]

[باك 2010][م1] [5 ن]

4) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$.

5) علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، C ، D و I لواحقها $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب .

6) z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\dfrac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$.

أ - بيّن أن الجملة تكافئ : $\dfrac{z-3+2i}{z-1}=i$ ، ثم عيّن قيمة z .

بـ - B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ - لتكن J النقطة التي لاحقتها z_J حيث : $z_J=1-2i$.

أكتب على الشكل الأسي العدد المركب z حيث : $z=\dfrac{z_A-z_J}{z_B-z_J}$.

تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين [6]

[باك 2010][م2] [5 ن]

4) أ - أكتب على الشكل الأسي العدد المركب a حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$.

بـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2=-2+2i\sqrt{3}$.

5) يُنسب المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ - أحسب طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له .

بـ - استنتج طبيعة المثلث ABC .

6) لتكن (E) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث $\arg(\bar{z}+2)=\dfrac{\pi}{3}$.

أ - تحقق أن B تنتمي إلى (E).

بـ - عيّن المجموعة (E) .

التمرين [9]

[باك 2012][م1] [6 ن]

1) عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث : $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\ 3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$.

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و Ω التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3+2i$ ، $z_B = -3$ و $z_\Omega = 1-2i$.

أ - أثبت أن : $z_B - z_\Omega = i\left(z_A - z_\Omega\right)$.

ب - عيّن طبيعة المثلث ΩAB .

3) h التحاكي الذي مركزه النقطة A و نسبته 2 .

أ - عيّن الكتابة المركبة للتحاكي h.

ب - عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h .

جـ - عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

د- بيّن أن $ABCD$ مربع .

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.

أ - تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم عيّن طبيعة (E) و عناصرها المميزة .

ب - أنشئ المجموعة (E) .

التمرين [10]

[باك 2012][م2] [5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B ، C و D النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3}+i$ ، $z_B = \sqrt{3}-i$ ، $z_C = -1-\sqrt{3}i$ و $z_D = -1+\sqrt{3}i$

.

أ - أكتب كلا من z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي .

ب - تحقق أن : $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

3) z_n العدد المركب الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و $\dfrac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي .

L_n العدد المركب المعرّف بـ : $L_n = z_D \times z_n$.

أ - أكتب كلا من L_0 و L_1 على الشكل الجبري .

ب - (u_n) المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = |L_n|$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

- M_0 ، M_1 ، ...... ، M_n صور الأعداد المركبة L_0 ، L_1 ، ...... ، L_n على الترتيب .

أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{OM_2}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$

- جد نهاية S_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين [11]

[باك 2013][م1] [5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+6z+17=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -4$ ، $z_B = -\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$ و $z_C = -\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$.

أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) أ - عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A .

ب - عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=10\sqrt{2}$.

4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ، ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عيّن المجموعة (Γ_2) .

التمرين [12]

[باك 2013][م2] [4,5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C و يحول O إلى B .

- جد العبارة المركبة للتشابه S ، ثم عيّن العناصر المميزة له .

3) أ - عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

ب - أكتب العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .

جـ - عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

التمرين [13]

[باك 2014][م1] [5,5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

أ - أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي .

ب - هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك .

3) أ - عيّن العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى C ، محددا نسبته و زاويته .

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) أ - عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=5$

ب - عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $|z-z_1|=|z-z_3|$.

التمرين [14]

[باك 2014][م2] [4,5 ن]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة $z_0=1+i$.

1) أ - عيّن ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

ب - عيّن ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$.

جـ - عيّن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث : $z_1 = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

أ - عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

ب - عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

جـ - عيّن العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$.

د- عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

التمرين [15]

[باك 2015][م1][4 ن]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B حيث : $z_A = -1 - i$ و $z_B = 3 + 3i$.

1) أ - أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي .

ب - n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا .

جـ - z عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، أحسب طويلة العدد z و عمدة له ، ثم أكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري .

د- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) أ - أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب - أحسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$ ، ثم بيّن أن $ABDC$ مربع .

التمرين [16]

[باك 2015][م2][5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 4(\sin\theta)z + 4 = 0$ .... (I) ، حيث θ وسيط حقيقي .

2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

3) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$.

أ - أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب - استنتج النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته و زاوية له .

جـ - عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم حدّد طبيعة الرباعي $ABDC$.

4) أ - عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.

ب - عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$.

التمرين [17]

[باك 2016][م1] [4 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$.

2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب :

$z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$.

أ - أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي .

بـ - بيّن أن : $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$.

جـ - عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{n}$ عددا حقيقيا .

3) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)z$.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميزة .

بـ - أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

جـ - عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

جـ - عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

التمرين [18]

[باك 2016][م2] [4,5 ن]

1) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(2z-\sqrt{2}\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)=0$.

بـ - أكتب الحلول على الشكل الأسي .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

أ - علّم النقط A ، B و C في المعلم السابق .

بـ - نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و نسبته 3 و زاويته π .

و النقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

- أحسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب .

3) نضع : $z=\dfrac{d-b}{e-b}$.

أ - أكتب العدد z على الشكل المثلثي .

بـ - نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة I . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

بـ - نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة I . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

التمرين [19]

[باك 2017][م1] [5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=-i$.

1) أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C و يحول B إلى A .

3) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C و النقطة E صورة النقطة D بالتشابه S.

أ - عيّن z_D لاحقة النقطة D ، ثم تحقق أن : $z_E=1-2i$ حيث z_E لاحقة النقطة E .

بـ - حدّد طبيعة الرباعي $ADEB$.

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

حيث : $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدّد طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها .

التمرين [20]

[باك 2017][م2] [5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=\frac{1}{2}(1-i)$ و $z_D=\overline{z_C}$.

1) أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ، ثم استنتج الشكل الأسي لكل من z_B و z_D .

بـ - عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $(z_A)^n=(z_B)^n$.

2) أ - جد نسبة و مركز التحاكي h الذي يحول D إلى A و يحوّل C إلى B .

بـ - أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,2);(C,-1);(D,-1)\}$ ،

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$.

بيّن أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدّد طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة و أنشئها .

التمرين [21]

[باك 2017][الدورة الإستثنائية][م1] [5 ن]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-4)(z^2-2z+4)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) أ - عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

بـ - عيّن طبيعة الرباعي $ABDC$.

3)من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $z_n=(z_A)^n+(z_B)^n$

أ - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n=2^{n+1}\times\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

بـ - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n=z_{6n}$

عبّر عن t_n بدلالة n ثم أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n=t_0\times t_1\times t_2\times......\times t_n$.

التمرين [22]

[باك 2017][الدورة الإستثنائية][م2] [5 ن]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(z+1-\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1+\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

1) بيّن أن $z_B-z_A=i\left(z_C-z_A\right)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC و أحسب مساحته .

2) أ - أكتب على الشكل الجبري العدد L حيث : $L=\frac{z_C-z_A}{z_C}$.

بـ - بيّن أن : $L=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$.

3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' و المعرّف بـ :

$z'=\left(z-z_B\right)L+z_B$.

- بيّن أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة .

4)لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل $S\circ S$.

- أحسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين [23]

[باك 2018][م1] [5 ن]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما: $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_B=\overline{z_A}$.

1) أكتب على الشكل الأسي كلا من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بيّن أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف .

2) لتكن النقطة C صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و نسبته -3 .

- بيّن أن لاحقة النقطة C هي : $z_C=-\sqrt{2}+i\,3\sqrt{2}$.

3) عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

4) أ - بيّن أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

بـ - جد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا .

التمرين [24]

[باك 2018][م2] [5 ن]

I) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $4z^2-2z+1=0$ .... (E).

ب - أكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي، حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E) .

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1) أحسب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم حدّد طبيعة المثلث ABC .

ب - استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

2) جد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

3) حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|iz+\sqrt{3}-i|=|z-1+i\sqrt{3}|$.

4) بيّن أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

التمرين [25]

[باك 2019][م1] [5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=\frac{3}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(Γ) الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1 .

1) أ) تحقق أنّ النقطة C من الدائرة (Γ).

ب) عيّن قيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ثم استنتج أنّ C صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

2) S التشابه المباشر الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$$

أ) حدّد العناصر المميزة للتشابه S .

ب) عيّن z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S.

3) ماهي نسبة التّحاكي h الذي مركزه A حيث $S=h\circ r$ ؟ استنتج أنّ النقط A ، C و D في استقامية.

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k\in\mathbb{R}_+^*$

– تحقّق أنّ النقطة C من المجموعة (E). ثم حدّد طبيعة (E) .

التمرين [26]

[باك 2019][م2] [5 ن]

I) أ) تحقّق أنّ: $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2=16-8\sqrt{3}$.

ب) عيّن على الشكل الجبري الجذرين التّربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركّب Z حيث : $Z=-16\sqrt{3}-16i$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B و C التي

لاحقاتها $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B=\frac{1}{2}iz_A$ و $z_C=-\frac{1}{4}z_A$.

1) اكتب z_A على الشكل الجبري ، ثمّ بيّن أن $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) S التشابه المباشر الذي يحوّل A إلى B و يحوّل B إلى C .

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاّحقة z بالتّشابه S.

أ) بيّن أنّ: $z'=\frac{1}{2}iz$.

ب) حدّد العناصر المميزة للتّشابه S.

4) G النّقطة ذات اللاّحقة z_G مرجح الجملة $\left\{(A;2),(B;-2),(C;4)\right\}$.

أ) بيّن أنّ : $z_G=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث:

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}$$

– حدّد طبيعة (E) وعناصرها المميّزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S.

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths

5min Maths