سلسلة البناء والتكوين: 2020/2019

كراسة الدوال اللوغرتمية

تطبيقات متنوعة ونماذج شاملة

موجهة لطلاب البكالوريا ع ت ،رياضيات، ت ر

إعداد الأستاذ:جرادي سلطان

سلاسل البناء والتكوين :ج س- العام الدراسي: 2019/2020	كراسة الدوال اللوغرتمية الصفحة(1) **الأستاذ:** جرادي سلطان (الشالثةع ت+ر+ ت ر)

التمرين الأول:

أوجد النهايات التالية:

أ) $\lim_{x\to+\infty} 2x+\ln x$ ؛ ب) $\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln x$

ج) $\lim_{x\to+\infty} 3-2\ln x$ ؛ د) $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x+5-\ln x$

أ) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3+\ln x}$ ب) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln\left(x^2\right)}$

جـ) $\lim_{x\to+\infty}(3-x)\ln x$ د) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x\right)\ln(-x)$

أ) $\lim_{x\to+\infty}(x^2+\ln x)$ ب) $\lim_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)$

جـ) $\lim_{x\to+\infty} x-4+\ln x$ د) $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x-4+\ln x$

أ) $\lim_{x\xrightarrow{>}0}(3(\ln x)^2-\ln x)$ ب) $\lim_{x\to+\infty}(1-(\ln x)^2)$

جـ) $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1+2\ln x}{x}$ د) $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x^2+\ln x-1$

التمرين الثاني:

f دالة معرفة على $]e;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

1) بين انه من أجل كل $x>e$ ، $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\ln x}+1}{\frac{1}{\ln x}-1}$

2) عين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أدرس تغيرات الدالة f

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x^2-1+2\ln x$$

1)أحسب نهايتي f عند طرفي مجال تعريفها

2)أدرس اتجاه تغير الدالة f باستعمال قوانين الجمع لدوال مرجعية ثم باستعمال اشارة المشتقة

3)عين معادلة المماس للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

التمرين الرابع:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;2[$ بـ:

$$f(x)=2x^2-3-\ln x$$

(C)هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\|=5cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$

1. ادرس نهاية الدالة f عند 0 ، فسر النتيجة هندسيا.
2. شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. عين معادلة المماس T للمنحني (C)عند النقطة التي فاصلتها 1.

التمرين الخامس:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=2(\ln x)^2-\ln x-3$$

هو (C) التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(الوحدة $2cm$)

1) أ) حل المعادلة $f(x)=0$

ب) ماذا تمثل هذه الحلول هندسيا؟.

2) احسب نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟

3) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4) أنشئ للمنحني (C) في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

التمرين السادس:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

1. عين إشارة $f(x)$ على $]1;+\infty[$.
2. ادرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.
3. استنتج نهايتي الدالة g حيث $g(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$ عند 1 و $+\infty$.

التمرين السابع:

لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x+1+2\left[\ln x-\ln(x-1)\right]$$

نسمي (C) إلى التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.الوحدة $1cm$

1. بين أنه من أجل كل $x\in]1;+\infty[$: $f(x)=x+1+2\ln\dfrac{x}{x-1}$
2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
4. احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$. استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ يطلب تعيين معادلة له .

ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

5. ارسم بعناية المنحني (C) .

التمرين الثامن:

نعلم أن المنحني C_f الممثل لدالة f معرفة على $]-2;+\infty[$ يشمل النقط $O(0;0)$ و $A(-1;0)$ ، و أن المماس لـ C_f عند O معامل توجيهه $\ln 2$ و المماس لـ C_f عند A معادلته $y=x+1$.

1.أ- باستعمال هذه المعطيات ، عين $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f(-1)$ و $f'(-1)$.

ب- عين معادلة المماس لـ C_f عند O .

2. علما أنه يوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x>-2$ ، $f(x)=(ax^2+bx+c)\ln(x+2)$

أ- عبر عن $f(0)$ بدلالة a ، b و c .

ب- عبر عن $f'(x)$ بدلالة a ، b و c .

جـ- استنتج $f'(0)$ و $f'(-1)$ بدلالة a ، b و c .

د- استنتج a ، b و c .

التمرين التاسع:

الدالة f امعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α . تحقق أن $1<\alpha<2$.
4. عين حصرا للعدد α سعته $0,01$.
5. ليكن (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 1.

أ)عين معادلة للمماس (Δ) و أكتبها على الشكل: $y=ax+b$.

ب)أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=f(x)-(ax+b)$.

ج)استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المماس (Δ) .

6. ارسم المماس (Δ) و المنحني (C).

التمرين العاشر:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي:

$$g(x)=(1-x)e^x-1$$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها (لا يطلب حساب النهايات).

ب-استنتج إشارة $g(x)$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$e^x\le\frac{1}{1-x}$$

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي:

$$f(x)=e^x+\ln(1-x)$$

أ- اشرح لماذا الدالة f معرفة على $]-\infty;1[$ ؟

ب- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند 1 .

جـ- ادرس تغيرات الدالة f. (يمكن استعمال نتائج السؤال1)

د- ارسم بدقة المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

التمرين الحادي عشر:

الهدف من هذا التمرين إثبات أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

أ- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$

1) احسب $f'(x)$ و بين أن $f'(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

2) استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ (حساب النهايات غير مطلوب)

3) برر إذن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln x<\sqrt{x}$

ب- 1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$:

$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) عين $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$.استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$

التمرين الثاني عشر:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^x+1\right)$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1.أ- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب-عين الدالة المشتقة للدالة f .

ج-ادرس إشارة $f'(x)$.استنتج تغيرات f .

2.أ- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ب- ارسم المستقيم D والمنحني (C) .

التمرين الثالث عشر :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بالشكل: $f(x)=\ln(e^{-x}+x^2)$ ، (c) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أوجد: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ) علما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ، بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{x}=0$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty,0]$ فإن: $f(x)=-x+\ln(1+x^2e^x)$

3) أوجد: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ واستنتج معادلة للمقارب المائل (Δ) للمنحني (c)

4) أدرس وضعية المنحني (c) مع المستقيم (Δ) .

5) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty,0]$ فإن عبارة f' مشتقة الدالة f تعطى بالعبارة : $f'(x)=\dfrac{2xe^x-1}{x^2e^x+1}$

6) بين أن الدالة f متناقصة تماما وضع جدول تغيراتها

7) أرسم (c) (يمكنك ملاحظة معامل توجيه المماس عند المبدأ)

8) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^{2m+x}-x^2e^x=1$.

التمرين الرابع عشر :

1. لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+x+2\ln x$

أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g .

ب- احسب $g(1)$ ثم عين إشارة على $]0;+\infty[$.

جـ- استنتج أن:إذا كان $0<x<1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ و إذا كان $x>1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$

2. نعتبر الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-x^2\ln x$ إذا كان $x>0$ وَ $f(0)=0$ نرمز بـ C على المنحني الممثل للدالة f م متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الأطوال $2cm$.

أ- احسب $f'(x)$ و تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$

ب- شكل جدول تغيرات f

جـ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا α حيث $\frac{7}{4}<\alpha<2$

3. ا- تحقق أن المماس Δ للمنحني C عند النقطة O معادله له: $y=x$

ب- ادرس وضعية C بالنسبة لـ Δ .

جـ- ارسم Δ و C .

التمرين الخامس عشر :

أولا: نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كمايلي: $g(x)=2x^3-1+2\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0,+\infty[$.

2) بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α وأن: $0,86<\alpha<0,87$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$.

ثانيا: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

2) ا) بين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

3) اثبت انّ اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$.

4) استنتج جدول تغيرات الدالة f .

5) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

التمرين السادس عشر:

f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرَّفة كما يلي:

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$$

(C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث وحدة الطول $1cm$.

1)أ)أدرس تغيرات الدالة f (يطلب حساب النهايات والمستقيمات المقاربة)

ب) أثبت أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما .

ج)أحسب $f(-x) + f(x)$. ماذا تستنتج ؟

2)بين أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدًا حيث :. $\alpha \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right[$

3)أ)أثبت أنَّ(C) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0,1)$ ويمس (C) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما .

ب)أوجد معادلة للمماس (T).

ج)أرسم (T) ثم (C).

د)نـاقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$.

4)h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$.

(γ) تمثيلها البياني في المعلم المستوي السابق.

أ) بين أنَّ h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيرات h شكل جدول تغيراتها مع التعليل. أرسم (γ).

التمرين السابع عشر:

الدالة f معرفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها مستنتجا معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنيها البياني

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f .ثمضع جدول تغيرات f.

3)أرسم المنحني (c)

التمرين الثامن عشر:

أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل عما يلي:

1) من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $\ln(x^n) = n\ln x$ حيث n عدد طبيعي زوجي

2) الدالة : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$ متزايدة على المجال $]1,+\infty[$.

3) إذا كان العدد الحقيقي α الموجب تماما هو حل للمعادلة: $x + \ln x = 0$ فإن: $e^{-\alpha} = \alpha$.

4) الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ متزايدة تماما على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما

5) نهاية الدالة : $x \mapsto \frac{\ln x - xe}{x^2}$ عند $+\infty$ هي: $-\infty$.

6) الدالة : $x \mapsto \ln(x+3)^2$ متزايدة على المجال $]-\infty;-3[$.

7) الدالة : $x \mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ نهايتها عند $+\infty$ هي 1

التمرين التاسع عشر:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعلاقة:

$$f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x^3}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول 3cm)

أ)1) احسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$

2) أ-بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته : $y = 3 - x$

ب-ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

3) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعلاقة :

$$g(x) = -x^4 + 1 - 3\ln x$$

أ- حدد اتجاه تغير الدالة g ب-شكل جدول تغيرات الدالة g

ج-احسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$

4) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^4}$ وشكل جدول تغيراتها .

ب) 1)بين أن $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,5;0,6[$ حلا وحيدا α

2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]3;3,1[$ حلا وحيدا β

3) أنشئ بدقة (C_f) و (D)

الأستاذ: جرادي سلطان (الثالثة ع ت+ر+ت ر)

التمرين العشرون:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=ax+(bx+c)\ln x$$

حيث a، b و c أعداد حقيقية و (C) هو المنحني الممثل للدالة f

1) باستعمال المنحني (C) و علما أن $f(2)=2-3\ln 2$
بين أن $a=c=1$ و $b=-2$

2) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$$g(x)=x+(1-2x)\ln x$$

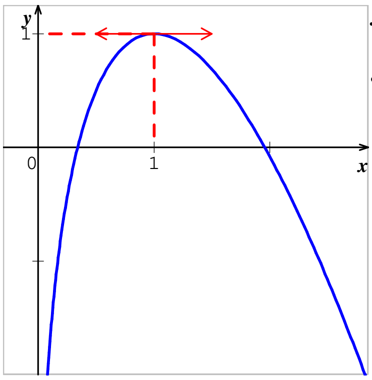
أ- عين نهاية g عند 0.

ب) عين نهاية g عند $+\infty$.

2.أ- عين الدالة المشتقة للدالة g.

ب- ادر على $]0;+\infty[$ إشارة $-2\ln x$ و إشارة $\frac{1-x}{x}$، ثم استنتج إشارة $g'(x)$ و تغيرات g .

جـ- شكل جدول تغيرات g



3. ليكن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$

أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(1-2x)\ln x=0$ وأعط تفسيرا بيانيا هذه الحلول.

ب- استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

التمرين الواحد و العشرون:

الجزء الأول:

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x-1-\ln x \quad \text{و} \quad h(x)=x+(x-2)\ln x$$

1. احسب $g'(x)$ من أجل x من المجال $]0;+\infty[$
ثم ادرس تغيرات g

2.أ) استنتج أن $g(x)\ge 0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

ب) بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ،

$$h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$$

3). بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ،

$$(x-1)\ln x\ge 0$$

4.استنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$

و ليكن C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

1.أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$. فسر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2.أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $f'(x)=\frac{h(x)}{x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. ليكن Δ المماس للمنحني C_f في النقطة $A(1;1)$

أ) عين معادلة ديكارتية للمستقيم Δ .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$$f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$$

جـ) ادرس إشارة $f(x)-x$ ثم استنتج الوضعية النسبية للمنحني C_f و المستقيم Δ .

4.أنشئ Δ و C_f. (نقبل أن C_f يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و 1,5).

التمرين الثاني و العشرون:

لكل سؤال عين الإجابة(أو الأجوبة) الصحيحة المقترحة.

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x+2\frac{\ln x}{x}$$

1. إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)=x^2+2-2\ln x$
2. على $]0;+\infty[$ شارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(x-1)$.
3. على $]0;+\infty[$ الدالة g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3.
4. f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.
5. المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[1;2]$
6. منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$.