سلسلة البناء والتكوين: 20120/2019

كراسة الدوال الناطقة

تطبيقات القيم المتوسطة والإشتقاقية

موجهة لطلاب البكالوريا ع ت ،رياضيات، ت ر

إعداد الأستاذ:جرادي سلطان

سلاسل البناء والتكوين :ج س- العام الدراسي : 2019/2020	كراسة الدوال والإستمرارية....الصفحة(1) **الأستاذ:** جرادي سلطان (الثالثة ع ت + ر + ت ر)

التمرين الأول:

الدالة g معرفة على المجالين $]-\infty,1[\,,\,]1,+\infty[$

كمايلي: $g(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$ ، (Γ) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب للمعلم المتعامد و المتجانس

$(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ هل صحيح أم خاطئ ما يلي:

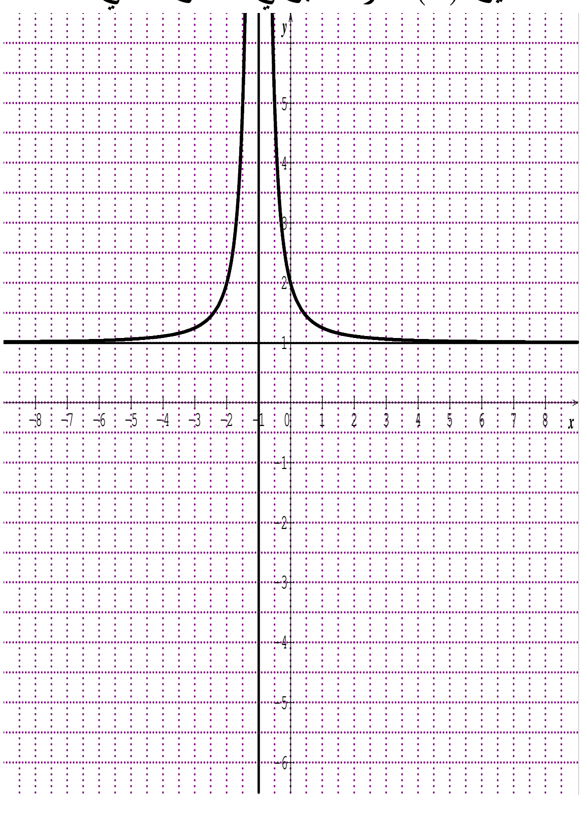
1- صيغة أخرى للدالة g هي: $g(x)=1+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

2- المنحني (Γ) يقبل مقاربين

3- للمنحني (Γ) محور تناظر معادلة له: $x=1$

4- الدالة g متزايدة على المجال $]1,+\infty[$

5- تمثيل (Γ) هو المقابل في الشكل التالي:



التمرين الثاني:

الدالة f معرفة على $R-\{1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

الهدف من التمرين هو إيجاد إن أمكن a و b حيث يكون $f(-1)$ قيمة حدّية محلية عظمى معدومة .

1) لماذا $f'(-1)=0$ و $f(-1)=0$ ؟

2) أوجد إذن a و b ، ثم تحقق أن الدالة المحصل عليها تحقق الهدف .

التمرين الثالث:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي غير معدوم x

معرفة بـ: $f(x)=\dfrac{-x^3+x+1}{x^2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

1) عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x)=ax+\dfrac{x+1}{x^2}$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x)=\frac{(x+1)(-x^2+x-2)}{x^3}$$

3) أدرس تغيرات الدالة f

4) برهن أن المستقيم $(\Delta): y=-x$ مقارب للمنحني (C_f)، ثم أدرس وضعية (C_f) و (Δ)

5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $1<\alpha<2$

4)أرسم (C_f)

التمرين الرابع:

f دالة قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$ جدول تغيراتها هو التالي :

x		-1		0	$+\infty$ $-\infty$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow 5$ $+\infty$

(C) هو منحنى f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- أكد **صحة** أو **خطأ** كل عبارة من العبارات الآتية مع **التبرير**:

1) الدالة f فردية .

2) المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين فقط .

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن : $f(x)>0$.

4) المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلين متمايزين في المجال $]-1;+\infty[$.

5) في المجال $]-\infty;-1[$ ؛ (C) يقطع المستقيم (D) الذي $y=2$ معادلة له في نقطة وحيدة .

.6 المنحنى (C) يقبل في النقطة ذات الفاصلة (-2) مماسا موازيا للمستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له .

.7 $f(1)<f\left(\frac{3}{4}\right)$.

.8 g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;-1[$ كما يلي :

$g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

أ) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=2$.

ب) الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$.

.9 h الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{1}{f(x)};x\neq-1 \\ h(-1)=1 \end{cases}$$

- الدالة h مستمرة عند العدد (-1) .

التمرين الخامس:

1) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- احسب $f(-x)+f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x . وفسر النتيجة بيانيا ؟ .

هـ - بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل ؛ في المجال ؛ $]1;2[$ حلا وحيدا α . فسر النتيجة بيانيا

و- مثل المنحني (C) .

2) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x)=1+\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

أ- ادرس قابلية اشتقاق g عند القيمة 0 . فسر النتيجة هندسيا .

ب- بين أن الدالة g زوجية .

ج- انطلاقا من (C) ارسم (C') منحنى الدالة g في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

التمرين السادس:

- f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$.

1) بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ؛ $|f(x)-3|\leq\dfrac{4}{x-1}$.

2) استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

التمرين السابع:

f دالة عددية قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها لها جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$ $\quad \frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$ $\quad +\infty$
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$	‖	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 3 \nearrow +\infty$

تكتب العبارة $f(x)$ على الشكل :

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

1) احسب $f'(x)$.

2) اعتمادا على جدول تغبرات الدالة f :

عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c .

التمرين الثامن:

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=-x^3+6x^2-13x+8$$

1/ أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(1)=0$)

2/ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ :

$f(x)=-x+1+\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$ وليكن (c_f)

منحنى f في المستوي المنسوب للمعلم المتعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$

حيث: $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=3cm$

أ) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x-2)^3}$$

ب)أستنتج إشارة $f'(x)$

ج)شكل جدول تغيرات f.

3) بين أن (c_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (D) حيث (Δ) هو المستقيم المقارب المائل

4)أدرس وضعية (c_f) بالنسبة لـ : (Δ)

5) أكتب معادلة لـ (T) مماس (c_f) في النقطة ذات الفاصلة 3

6/أرسم $(\Delta);(D);(\mathrm{T});(c_f)$.

التمرين التاسع:

نعرف الدالة f على المجالين: $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=3x-1-\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

وليكن (c_f) منحني الدالة f في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1)أدرس نهايات f عند حدود مجا لي تعريفها

2)بين أن (c_f) يقبل مقاربين احدهما مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

3)بين أن (c_f) يشترك مع مقاربه المائل في نقطة يطلب نعيين إحداثييها، ثم حدد وضعية (c_f) مع (Δ)

4)عين نقط تقاطع (c_f) مع المستقيمين المعرفين بمعادلتيهما": $y=o$ ، $y=2$

5)تحقق أن الدالة المشتقة للدالة f معرفة كما يلي $f'(x)=\dfrac{xp(x)}{(x+1)^3}$ حيث $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية

6)أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم ارسم (c_f) أرسم (c_f)

التمرين العاشر:

التمرين الأول:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}\cos x$$

1 / أ / برهن أنه من أجل كل من x المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$x-\frac{1}{2}\le f(x)\le x+\frac{1}{2}$$

ب / استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 / أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب / أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ و أن $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$.

جـ / عين إشارة $f(x)$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$

التمرين الحادي عشر:

f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

بـ : $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) بين أن الدالة f فردية

2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

3) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحي (C)عند $+\infty$.حدّد وضعية (C) بالنسبة لـΔ

4) باستعمال نتيجة السؤال 1) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

5) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $g(x)=-f(x)$

- عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C') .

التمرين الثاني عشر:

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x-3 & ; \quad x\in[1;+\infty[\\ f(x)=..... & ; \quad x\in]-\infty;1[\end{cases}$$

اقترح عبارة لـ $f(x)$ على المجال $]-\infty;1[$ حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث عشر:

أوجد مايلي:

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right) ، \lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x-1}{2x}\right) ،$$

$$\lim_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{(x+1)^2} ، \lim_{x\to0}\cos\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)$$

التمرين الرابع عشر:

لدينا n من الأعداد الحقيقية المختلفة مثنى- مثنى:

$a_1,a_2,a_3,...,a_n$ حيث: $a_1\prec a_2\prec a_3\prec.....\prec a_n$

نعرف الدالة العددية f من أجل كل عدد حقيقي x كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{1}{x-a_2}+....+\dfrac{1}{x-a_n}$

حيث: $x\ne a_i; i\in\{1,2,3,....,n\}$

1) أدرس إتجاه تغير الدالة

2) شكل جدول تغيرات الدالة f

3) ما هو عدد حلول المعادلة: $f(x)=2010$

التمرين الخامس عشر:

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$$

1) احسب $f(1)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)$

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$

التمرين السادس عشر :

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3x+3}$ ونسمي (c) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود با لمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$f(x)=x-3+\frac{6x+9}{x^2+3x+3}$$

3)إستنتج معادلة للمقارب المائل ثم أدرس وضعية (Δ) مع (c) .

4)أحسب عبارة المشتقة $f'(x)$ مبينا أنها تحقق العلاقة:

$$f'(x)=\frac{x^2(x+3)^2}{(x^2+3x+3)^2}$$

5)إستنتج جدول تغيرات الدالة f

6)برر أن النقطتين $O(0,0)$ و $A(-3,-9)$ هما نقطتا إنعطاف للمنحني (c)

7)أرسم (Δ) و (c)

8) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $g(x)=\dfrac{|x|x^2}{x^2+3|x|+3}$

(γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ)بين أن الدالة g زوجية .

ب)أرسم مع الشرح المنحني (γ) في نفس الشكل.

التمرين السابع عشر :

f الدالة العددية المعرفة على R كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3+9x}{2(x^2+1)}$

1) عين العددين الحقيقيين a,b بحيث لكل عدد حقيقي x

يكون: $f(x)=ax+\dfrac{bx}{x^2+1}$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f

3) ضع جدول تغيرات الدالة f

4)أثبت أن (c_f) منحني الدالة f في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يقبل مقاربا مائلا (Δ)

5)بين أن (c_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

6)أرسم (c_f)

7)بين أن (c_f) يقبل مماسين يوازيان (Δ) وعين معادلتين لهما.

8)ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع (c_f) مع المستقيم المعين بمعادلة له: $y=\dfrac{1}{2}x+m$

التمرين الثامن عشر :

نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ونسمي (c) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود با لمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(-x)+f(x)=0$ ماذاتستنتج بالنسبة للدالة وبالنسبة لتمثيلها البياني؟

2) أوجد : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ حسابيا واستنتج: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1]$ ،واستنتج وجود مقارب مائل للمنحني (c) عند $+\infty$

4) إستنتج معادلة المقارب المائل الثاني للمنحني (c) عند $-\infty$

5) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

6) أرسم (c) ومقاربيه.