الباب 6

المتتاليات العددية

عند بداية القرن التاسع عشر، انتشر اصطياد حيتان العنبر للحصول على دهونها التي تستعمل بشكل لافت في الإضاءة العمومية وكذا لأجل العنبر التي تفرزه أمعاؤها ليتم استخدامه في صناعة العطور. في التسعينيات قُدّر عدد الأفراد الباقية من مُستعمرات حوت العنبر حول العالم ببضع مئات الآلاف وهو ما يمثل انخفاضا يصل إلى 67٪ من عددها الإجمالي مقارنة بعددها قبل استغلالها من طرف البشر. منذ الحظر المقرر سنة 1982 على اصطياد الحيتان، بدأت تجمعات الحيتان تتعافى ببطء.

تجدون في هذا الملف

1. الدرس
2. تطبيقات محلولة
3. طرائق هامة لحل التمارين
4. تمارين محلولة من ★ إلى ★★★★★

+ لمزيد من الأعمال...

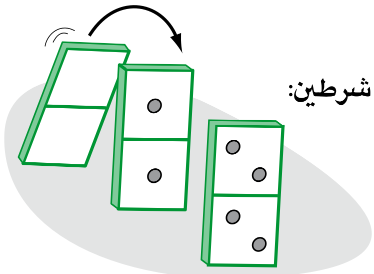
- قرص الجامع في الرياضيات
- قرص EXTRA BAC
- أولمبياد الرياضيات
- حوليات شهادة البكالوريا مع الحل
- فروض واختبارات محلولة لكل المستويات

BAC

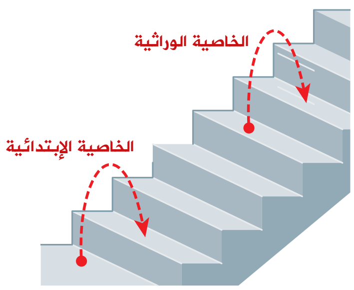
الأستاذ: عبد الحفيظي عادل

1 الاستدلال بالتراجع :

■ مبدأ الاستدلال بالتراجع: [2]



◂ تخيل أنّ لدينا عددًا من قطع الدومينو موضوعة الواحدة تلو الأخرى. لإسقاطهم ، يجب استيفاء شرطين:
عليك اسقاط قطعة الدومينو الأولى ، كما أنَّ سقوط أي قطعة من الدومينو يجب أن يتسبّب في سقوط الدومينو الموالي. عند استيفاء هذين الشرطين ، نتقبّل بديهياً أنّ كل قطع الدومينو الموضوعة بعد قطعة الدومينو الأولى ستسقط.



◂ تخيل أنّ لدينا سلّم. إذا عرفنا كيف نصعد درجة من السلّم وإذا عرفنا كيفية الانتقال من أي درجة إلى أخرى موالية ، فإنّنا نتقبّل بديهياً أنه يمكننا الوصول إلى أي درجة تقع بعد الدرجة الأولى التي صعدنا عليها. هذه هي الفكرة التي سنقوم بإضفاء الطابع الرسمي عليها.

[8] [9]

مبرهنة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n وَ n_0 عدد طبيعي .
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :
1) نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2) نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع)
و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

تنبيه: ◂ إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن: $n_0 = 0$ ، وَ إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن: $n_0 = 1$ ، وهكذا ...
◂ يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية :
البرهان على صحة مساواة ، البرهان على صحة متباينة ، البرهان على أن مقدار مضاعف لعدد...

$P(n_0)$ صحيحة — المرحلة الأولى
إذا كانت $P(n)$ صحيحة — المرحلة الثانية
فإنَّ $P(n+1)$ صحيحة

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 $P(n)$ صحيحة. [10]

تطبيق 01: برهن بالتراجع صحة القضايا التالية ، من أجل كل عدد طبيعي n : [4] [5] [9] الانتقال الـى الحـل

1) $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 2) $2^n \geq n+1$ 3) $4^n + 2$ مضاعفاً للعدد 3

الحل:

....

....

....

[2] : © Cned – Académie en ligne
[8] : استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر)
[10] : الكتاب المدرسي الجزائري
[9] : العملاق في الرياضيات (بواب نورالدين)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[5] : الكتاب المدرسي السوري

2 المتتالية العددية:

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

[10] [11]

- يرمز لمتتالية بأحد الرموز T ، U ، H ، (u_n) ، (v_n) ... إلخ
- نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـــ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .
- u_n هو الحد الذي دليله n و يسمى كذالك الحد العام للمتتالية u .
- u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

العلاقة بين رتبة حد ودليله في متتالية:

- في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n = \dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 و أما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

- رتبة حد u_b $(b \in \mathbb{N})$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

طرق توليد متتالية عددية: يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها.

- **متتالية عددية معرفة بحدها العام** $u_n = f(n)$: مثلاً من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2n+1$
- **متتالية عددية معرفة بعلاقة تراجعية** $u_{n+1} = f(u_n)$: مثلاً من أجل كل عدد طبيعي n : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

تطبيق 02: [5] الانتقال إلى الحل

المتتالية (u_n) معرفة وفق $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = -u_n + 4$ في حالة عدد طبيعي n.

1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 وخمِّنْ عبارة u_n بدلالة n ثمَّ حدد u_n بدلالة n.

2) استنتج عندئذ قيمة الحد الذي رتبته 100.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3 اتجاه تغير متتالية عددية :

تعريف: من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية العددية (u_n) [11] [10]

- (u_n) متزايدة تماما (متزايدة على الترتيب) يعني أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n>0$ $(u_{n+1}-u_n\geq 0)$
- (u_n) متناقصة تماما (متناقصة على الترتيب) يعني أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n<0$ $(u_{n+1}-u_n\leq 0)$
- (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ يعني أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=0$

تنبيه: اذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أنّ المتتالية رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب)

طريقة: لدراسة إتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يمكن :

❶ دراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

❷ إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماما نقارن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1

❸ دراسة إتجاه تغير الدالة f على $[0;+\infty[$ في حالة $u_n=f(n)$

تنبيه: يمكن أن نستعمل الطرق الثلاث مع نفس المتتالية ، ان تحقق الشروط المطلوبة.

تطبيق 03: ادرس إتجاه تغير كل من المتتاليات التالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: [12] [4] [5]

الانتقال الى الحل

1) $u_n=n^2-1$ 2) $u_n=\dfrac{2n-1}{n+3}$ 3) $w_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[5] : الكتاب المدرسي السوري
[12] : العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[10] : الكتاب المدرسي الجزائري
[11] : مذكرات الأستاذ (بخدة أمين)

4 متتالية محدودة من الأعلى. محدودة من الأسفل. متتالية محدودة :

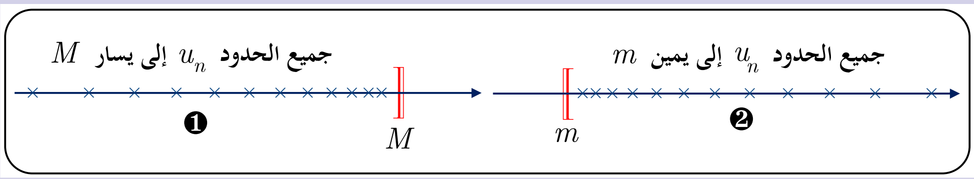
[11] [5]

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

❶ القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي M حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq M$. نقول أن M عنصر حاد من الأعلى .

❷ القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي m حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq m$. نقول أن m عنصر حاد من الأسفل .

❸ القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .



طريقة: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

لإثبات أن (u_n) متتالية محدودة من الأعلى بعدد حقيقي M (أو من الأسفل بعدد حقيقي m) نتبع إحدى الطرق التالية :

- إستعمال الإستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq M$ (أو $u_n \geq m$)
- المقارنة بين u_n و M (أو بين u_n و m) بدراسة إشارة $u_n - M$ (أو $u_n - m$)
- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$

تطبيق 04: [10] [4] [5] الانتقال الـى الحـل

1) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+4}$. ◄ أحسب الفرق $u_n - 2$ ثم إستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى .

2) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \dfrac{n^2+n+9}{n}$. ◄ أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .

3) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$. ◄ أثبت أنَّ $1 \leq u_n \leq 3$ ، أياً يكن العدد الطبيعي n .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[10] : الكتاب المدرسي الجزائري
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[5] : الكتاب المدرسي السوري
[11] : مذكرات الأستاذ (بخدة أمين)

5 نهاية متتالية عددية :

نهاية متتالية عددية:

[10] [2]

- ندرس دائما نهاية متتالية عند $+\infty$ وغالبا ما يُطلب دراسة نهاية متتالية بدون تحديد عند $+\infty$.
- تبقى المبرهنات الأولية لحساب نهاية دالة عددية صحيحة لحساب نهاية متتالية عددية عند $+\infty$.
- q عدد حقيقي.

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \ldots$	$+\infty$	1	0	غير موجودة

تطبيق 05: ذهنياً، صل كلّ متتالية بنهايتها ، إن وجدت. [5] [2] الانتقال الى الحل

المتتالية
1. $u_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n$
2. $f_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n$
3. $v_n = (-1)^n$
4. $w_n = 2^{-n}$
5. $t_n = 2$
6. $s_n = -3 \times (1,2)^n$

النهاية
a. $-\infty$
b. $3,5$
c. 0
d. 20
e. $+\infty$
f. 2
g. غير موجودة

المتتالية
7. $i_n = \frac{7 - 0,1^n}{2 + 0,99^n}$
8. $k_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$
9. $o_n = 16 \times \frac{1 - 1,1^n}{1 - 1,1}$
10. $p_n = 10 \times \frac{1 - 0,5^n}{0,5}$
11. $x_n = -\frac{5^n + 3^n}{4^n}$
12. $y_n = 4^n - 2^n$

تطبيق 06: ذهنياً. باستعمال العمليات على النهايات ، صلْ بما يناسب. [2] [5] الانتقال الى الحل

المتتالية
1. $u_n = \frac{n+1}{n+2}$
2. $f_n = \frac{3}{e^n} + 2$
3. $v_n = -2n^2 - n - 3$
4. $w_n = (1 - 2n)(n^2 + 3)$
5. $t_n = n^2 + (-1)^n$
6. $s_n = \frac{1}{n}(n^2 + 10)$

النهاية
a. $-\infty$
b. 1
c. 0
d. 4
e. $+\infty$
f. 2
g. 6

المتتالية
7. $i_n = \cos\left(\frac{n\pi + 1}{2n + 1}\right)$
8. $k_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$
9. $o_n = \sqrt{\frac{4n - 3}{n + 1}}$
10. $p_n = \left(3 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$
11. $w_n = \sqrt{n}\left(1 - 2n\sqrt{n}\right)$
12. $y_n = \frac{3}{n} \times e^{-n}$

[2] : © Cned – Académie en ligne

[10] : الكتاب المدرسي الجزائري

[5] : الكتاب المدرسي السوري

6 تقارب وتباعد متتالية عددية :

مبرهنات وتعاريف: (u_n) متتالية عددية وَ ℓ عدد حقيقي.

[11] ❶ إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

[5] ❷ إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

❸ إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ فإنَّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو ℓ .

◂ إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ أو (غير موجودة) ، فإنَّ المتتالية (u_n) متباعدة نحو $\pm\infty$.

تنبيه: لا تعطي المبرهنتين ❶ وَ ❷ نهاية المتتالية ، إنّما تثبت فقط وجود نهاية حقيقية لها.

مثلا: عندما تكون متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بعدد M ، تكون متقاربة. ولكن نهايتها ℓ ليست بالضرورة مساويةً للعدد M ، بل $\ell \leq M$.

حالة متتالية معرّفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$:

[5] ◂ إذا كانت للمتتالية (u_n) نهاية حقيقية ℓ ، وكانت f دالة مستمرة عند ℓ فإنَّ $f(\ell) = \ell$.
ممّا يعني أيضا أنَّ ℓ هو حلّ للمعادلة $x = f(x)$.

تطبيق 07: [10] الانتقال الى الحل

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بِـ $u_0 = 5$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2) برر أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l أكبر من أو تساوي 2 .

3) بين أن l تحقق $l = \sqrt{2+l}$. استنتج قيمة l .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7 المتتالية الحسابية :

تعريف:

[11] ◂ نقول أن (u_n) متتالية حسابية أساسها r $(r \in \mathbb{R})$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$

[2] ◂ إذن في متتالية حسابية ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بإضافة العدد الحقيقي نفسه r

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \cdots\cdots \xrightarrow{+r} u_n$$

طريقة:

[10] للبرهان على أن متتالية (u_n) متتالية حسابية يمكن البرهان على أن الفرق بين حدين متتابعين كيفيين عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو أساس المتتالية .

تطبيق 08: • أكّد إذا كانت المتتالية (u_n) حسابية أم لا . [10] الانتقال الــــحـــل

1) $u_n = 3n - 1$.

2) $u_n = \dfrac{1}{2} - 3n$.

3) $u_n = 2n^2 + 3n$.

4) $u_n = n^2$.

5) $u_{n+2} = \dfrac{3-4n}{5}$.

6) $u_n = n - \dfrac{1}{n}$.

7) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$.

8) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -4u_n \end{cases}$.

الحل:

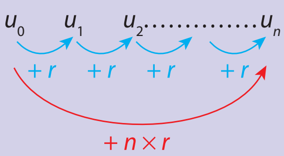
[10] : الكتاب المدرسي الجزائري

[11] : مذكرات الأستاذ (بخدة أمين)

[10] [8] [2]

الحدّ العام لمتتالية حسابية:

- تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n



◂ إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_0 + n\,r$

◂ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_1 + (n-1)r$

◂ بصفة عامة: $u_n = u_p + (n-p)r$ حيث $p \in \mathbb{N}$ (تسمّى العلاقة بين حدّين كيفيين).

تطبيق 09: • (u_n) متتالية حسابية أساسها r . [10] الانتقال إلى الحـــل

1) $u_0 = -1$ و $u_{15} = 59$ ؛ أحسب r و u_{2007} . 2) $u_{17} = -33$ و $r = -2$ ؛ أحسب u_0 .

• عين في كل حالة من الحالات الآتية قيمة العدد الطبيعي n

1) $u_{15} = 32$ ، $r = -3$ و $u_n = -82$. 2) $u_{10} = -64$ ، $u_5 = -14$ و $u_n = -114$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[10]: الكتاب المدرسي الجزائري
[8]: استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر)
[2]: © Cned – Académie en ligne

الوسط الحسابي:

[8] [2] ● إذا كانت a ، b ، c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن : $a+c=2b$

$$a \xrightarrow{+r} b \xrightarrow{+r} c$$

اتجاه تغيّر متتالية حسابية: ● اتّجاه تغيّر متتالية حسابية يتعلّق بإشارة الأساس r لأنَّ ($u_{n+1}-u_n=r$) .

[11]
- إذا كان r سالبا تماما $(r<0)$ فإن المتتالية متناقصة تماما .
- إذا كان موجبا تماما $(r>0)$ فإن المتتالية متزايدة تماما .
- إذا كان r معدوما $(r=0)$ فإن المتتالية ثابتة .

تطبيق 10: [6] الانتقال الى الحل

● عيّن الحدود الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 ، u_2 لمتتالية حسابية حيث : $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=3 \\ u_0\times u_1\times u_2=-24 \end{cases}$

الحل:

[10] : الكتاب المدرسي الجزائري
[8] : استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر)
[6] : قواعد أساسية (واضحي عبد الكريم)
[11] : مذكرات الأستاذ (بخدة أمين)

مجموع الحدود:

● مجموع حدود متتالية حسابية يعطى بالعلاقة التالية: $S_n = (\text{عدد الحدود}) \times \dfrac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$ [11] [2]

◂ عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول +1

أمثلة:

◂ $S = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = n\left(\dfrac{u_1 + u_n}{2}\right)$

◂ $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$

بصفة عامة : ◂ $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$

تطبيق 11: ● باستعمال متتالية حسابية ، أحسب المجموع S في كل حالة من الحالات التالية : [10]

الانتقال الى الحل

1) $S = 5+6+7+8+...+67$.

2) $S = \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} + 2 + \dfrac{5}{2} + ... + 10$.

3) $S = 1+3+5+...+101$.

4) $S = 17+12+7+2-3-8...-53$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[10] : الكتاب المدرسي الجزائري

[11] : مذكرات الأستاذ (بخدة أمين)

8 المتتالية الهندسية:

تعريف:

◂ نقول أن (V_n) متتالية هندسية أساسها q $(q\in\mathbb{R}^*)$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $V_{n+1} = V_n \times q$

◂ إذن في متتالية هندسية ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بالضرب بالعدد الحقيقي نفسه q [2]

$$V_0 \xrightarrow{\times q} V_1 \xrightarrow{\times q} V_2 \xrightarrow{\times q} \cdots\cdots \xrightarrow{\times q} V_n$$

طريقة:

• للبرهان على أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يكفي إثبات أنّ النسبة $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت. هذا العدد هو q أساس المتتالية.

تطبيق 12: • أكِّد إذا كانت المتتالية (u_n) هندسية أم لا . [10]

الانتقال الــى الحــل

1) $u_n = -5\times 3^n$.

2) $u_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$.

3) $u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$.

4) $u_n = 3^{2n-1}$.

5) $u_n = \dfrac{4^n}{6}$.

6) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 3u_{n+1} = u_n^{\ 2} \end{cases}$.

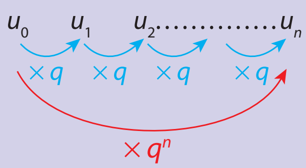
7) $u_n = \sqrt{2n}$.

8) $u_n = \sqrt{2^n}$.

الحل:

الحدّ العام لمتتالية هندسية:

- تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n
- إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_0 \times q^n$
- إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- بصفة عامة : $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حيث $p \in \mathbb{N}$ (تسمّى العلاقة بين حدّين كيفيين).



[10] [8] [2]

تطبيق 13: [10] [2]

الانتقال الـــى الحـــل

- (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدّها الأول u_0 . صل في كلّ حالة المتتالية بحدّها العام .

(u_n) معرّفة بـ :
1. $q = 3$ et $u_0 = -4$
2. $q = -3$ et $u_0 = 4$
3. $q = 4$ et $u_0 = -3$
4. $q = -4$ et $u_0 = 3$

الحدّ العام
a. $u_n = (-3)^n \times 4$
b. $u_n = (-4)^n \times 3$
c. $u_n = -3 \times 4^n$
d. $u_n = (-4) \times 3^n$

- (u_n) متتالية هندسية أساسها q .

1) $u_5 = 88$ و $u_8 = 11$. أحسب q و u_{100} .

2) $u_5 = 10$ و $q = -\frac{1}{2}$. أحسب u_0 و u_2 .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الوسط الهندسي:

[8] [2]

● إذا كانت a ، b ، c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن : $a \times c = b^2$

$$a \xrightarrow{\times q} b \xrightarrow{\times q} c$$

إتّجاه تغيّر متتالية هندسية:

● إتّجاه تغيّر متتالية هندسية يتعلّق بإشارة u_0 وَ q لأنَّ:

[2] [11]

$$u_{n+1} - u_n = q \times u_n - u_n = u_n(q-1) = u_0 \times q^n(q-1)$$

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q < 0$	(u_n) غير رتيبة	(u_n) غير رتيبة
$0 < q < 1$	(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما
$q = 1$	(u_n) ثابتة	(u_n) ثابتة
$q > 1$	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) متزايدة تماما

حالات خاصة: ◄ إذا كان $q=0$ فإنّه إبتداء من u_1 كل الحدود معدومة.

◄ إذا كان $u_0=0$ فإنَّ كل الحدود معدومة.

تطبيق 14: [2] الانتقال الى الحل

● لكل متتالية هندسية (u_n) أساسها q، صل الكلمة المناسبة لرتابتها المحتملة ، وذلك حسب قيمة الحد u_0 المرفق.

1) $u_0 = 4,21$

الرتابة	الأساس q لـ (u_n)
غير رتيبة	**1.** $q = 5$
متزايدة تماما	**2.** $q = -5$
متناقصة تماما	**3.** $q = 0,5$

2) $u_0 = -4,21$

الرتابة	الأساس q لـ (u_n)
غير رتيبة	**1.** $q = 5$
متزايدة تماما	**2.** $q = -5$
متناقصة تماما	**3.** $q = 0,5$

تطبيق 15: [10] الانتقال الى الحل

● لتكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها سالبة .

1) ما يمكن القول عن أساسها .

2) إذا علمنا أن: $u_1 \times u_3 = \dfrac{1}{4}$ و $u_1 + u_2 + u_3 = -\dfrac{19}{12}$. أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

الحل:

....

....

....

....

....

[10] : الكتاب المدرسي الجزائري

[8] : استعد للبكالوريا مع توام (توامي عمر)

[11] : مذكرات الأستاذ (بخدة أمين)

مجموع الحدود:

[15] [11] [2]

● مجموع حدود متتالية هندسية يعطى بالعلاقة التالية: $S_n =$ الحد الأول $\times \left(\dfrac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q-1}\right)$

◄ عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول +1

أمثلة:

◄ $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$

◄ $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

بصفة عامة : ◄ $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

مجاميع وجداءات مهمة و شهيرة:

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{m \text{ مرة}} = ma$$

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m \text{ مرة}} = a^m$$

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a\times a^2\times a^3\times\cdots\times a^n = a^{1+2+3+\cdots n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

تطبيق 16: [13] الانتقال الى الحل

(v_n) متتالية هندسية حيث $v_n = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ (الأساس $q = \dfrac{1}{3}$ و الحد الأول $v_0 = 2$)

و لتكن المتتالية (w_n) حيث $v_n = w_n + a$ (مع عدد a حقيقي غير معدوم)

● احسب المجاميع و الجداءات التالية:

1) $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

2) $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_{2n}$

3) $S_3 = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

4) $S_4 = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{v_1} + \dots + \dfrac{1}{v_n}$

5) $S_5 = v_0 + v_2 + \dots + v_{2n}$

6) $P_1 = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

7) $S_6 = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$ (بطريقتين)

الحل:

....

....

....

....

....

....

[15] : المجاميع والجداءات في المتتاليات العددية (مجاهد حبيب)
[13] : مجاميع وجداءات المتتاليات (عبلة محمد أمين)
[11] : مذكرات الأستاذ (بخدة أمين)
[2] : © Cned – Académie en ligne

المتتاليات العددية

عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول + 1

رتبة حد = دليل الحد ناقص دليل الحد الأول زائد 1

الحسابية: $u_{n+1} = u_n + r$

الحد العام (بدلالة الحد الأول)

$u_n = u_0 + nr$

الحد العام (بدلالة حد كيفي)

$u_n = u_p + (n - p)r$

اتجاه التغير

- $r > 0$: متزايدة تماما .
- $r < 0$: متناقصة تماما .
- $r = 0$: ثابتة .

مجموع حدود متتابعة

$S = \frac{(\text{عدد الحدود})(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})}{2}$

الوسط الحسابي

a و b و c ثلاث حدود متتابعة

$a + c = 2b$

النهايات

- $r > 0 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- $r < 0 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- $r = 0 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$

الهندسية: $v_{n+1} = v_n \times q$

الحد العام (بدلالة الحد الأول)

$v_n = v_0 \times q^n$

الحد العام (بدلالة حد كيفي)

$v_n = v_p \times q^{n-p}$

اتجاه التغير

- $q < 0$: ليست رتيبة .
- $q = 1$: ثابتة .
- $0 < q < 1$: $v_0 > 0$: متناقصة تماما .
  - $v_0 < 0$: متزايدة تماما .
- $q > 1$: $v_0 > 0$: متزايدة تماما.
  - $v_0 < 0$: متناقصة تماما.

مجموع حدود متتابعة

$S = (\text{الحد الأول})\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)$

الوسط الهندسي

a و b و c ثلاث حدود متتابعة

$a \times c = b^2$

النهايات

- $q \leq -1 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$ غير موجودة $\rightarrow$ v_n متباعدة
- $-1 < q < 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0 \rightarrow$ v_n متقاربة
- $q = 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1 \rightarrow$ v_n متقاربة
- $q > 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty \rightarrow$ v_n متباعدة

اتجاه التغير

$u_{n+1} - u_n$

- $+$: متزايدة تماما
- 0 : ثابتة
- $-$: متناقصة تماما

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (فقط في حالة $u_n > 0$)

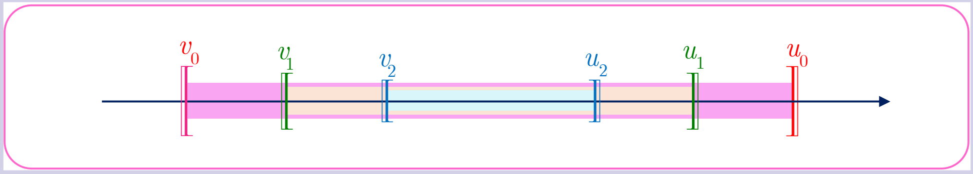
- أكبر من 1 : متزايدة تماما
- أصغر من 1 : متناقصة تماما

9 المتتاليتان المتجاورتان :

تعريف:

[8] [5]

• تكون المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.



مبرهنة:

[10]

• إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تطبيق 17: [10] الانتقال الــى الحـــل

• لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .أحسب w_n بدلالة n. ما هي نهاية (w_n)؟

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

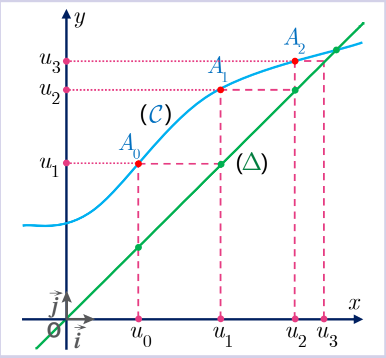
3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

الحل:

10 التمثيل البياني لمتتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$:

طريقة:



[5]

• في الشكل المجاور، $(\mathcal{C})$ هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعيّن العدد الحقيقي u_0 على محور الفواصل، ثمَّ النقطة A_0 ذات الفاصلة u_0 على التمثيل البياني $(\mathcal{C})$، نرمز إلى ترتيب A_0 بالرمز u_1 فيكون $u_1 = f(u_0)$.

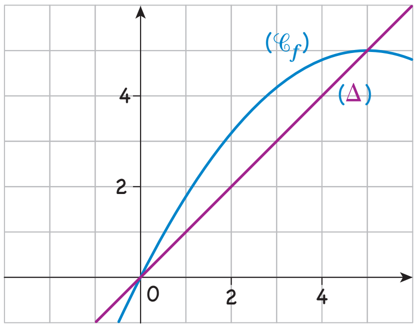
• نعيّن u_1 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$، u_1 هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) والمستقيم الذي معادلته $y = u_1$.

• نرمز إلى ترتيب النقطة A_1 من (C)، التي فاصلتها u_1، بالرمز u_2 فيكون $u_2 = f(u_1)$. نعيّن u_2 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم (Δ) كما في السابق. ونتابع بهذا لتعيين القيم المتوالية للمتتالية (u_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$.

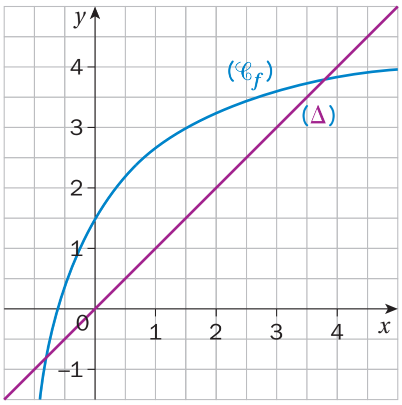
تطبيق 18: [2] الانتقال الى الحل

• في كلّ حالة من الحالات التالية ، مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأولى للمتتالية (u_n)، ثم ضع تخميناً حول اتّجاه تغيّرها ونهايتها.

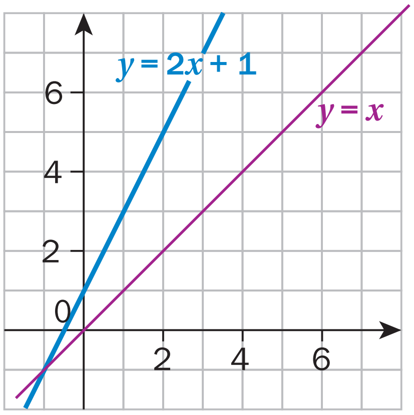
(1 $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = -0{,}2u_n(u_n - 10) \end{cases}$



(2 $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



(3 $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$



الحل:

....

....

....

....

....

8 تحقق من فهمك الجيد للدرس : الانتقال إلى الحل

أجب ب "صح" أو "خطأ": [4] [6]

1 للبرهان على صحة خاصية p(n) نفرض صحة p(n) و نبرهن صحة p(n+1) . ☐

2 المتتالية (u_n) حيث : $u_n = 4n-3$ هي متتالية تراجعية. ☐

3 المتتالية (v_n) المعرفة بالعبارة : $u_n = an+b$ هي متتالية حسابية أساسها a و حدها الأول b. ☐

4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1000}\right)^n = +\infty$ ☐

5 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{840}\right)^n = 0$ ☐

6 النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n$ غير موجودة. ☐

7 إذا كان: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ فإن المتتاليتان (V_n) و (u_n) متجاورتان. ☐

8 $1+4+4^2+4^3+....+4^{99} = \frac{1-4^{100}}{1-4}$ ☐

9 $3+5+7+...+(2n+1) = \frac{(2n+4)(n)}{2}$ ☐

10 كل متتالية حسابية غير ثابتة متباعدة. ☐

11 كل متتالية هندسية متقاربة . ☐

12 إذا كانت $\ell \neq 0, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ فإن (u_n) متقاربة. ☐

13 إذا كانت متتالية محدودة فهي متقاربة . ☐

14 المتتالية (u_n) المعرفة بـــ : $u_{n+1} = u_n - 3$ هي متتالية متناقصة . ☐

15 المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $u_n = (-1)^n$ ، تقبل نهايتين : -1 و 1 . ☐

16 يعطى الحدان $v_1 = \sqrt{2}$ ، $v_2 = 1$ من متتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$. المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐

17 كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى. ☐

18 كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة . ☐

19 كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي محدودة. ☐

20 المتتاليات (u_n) أدناه ، متتاليات هندسية ؟

a. « $u_{n+1} = -3{,}14\ u_n$. » ☐
b. « $u_{n+1} = 3{,}14 + u_n$. » ☐
c. « $u_{n+1} = \pi\ u_n$. » ☐
d. « $u_{n+1} = \pi^2 u_n$. » ☐
e. « $u_{n+1} = \pi - u_n$. » ☐
f. « $u_{n+1} = \frac{u_n}{3{,}14}$. » ☐

إتجاه تغيّر متتالية عددية: [4] [6]

• اربط كلّ متتالية (u_n) معرّفة أدناه برتابتها المحتملة ، علما أنّ $u_0 = 2{,}5$.

الرتابة	العلاقة التراجعية
a. غير رتيبة	1. $u_{n+1} = u_n - 2n \quad ; n \in \mathbb{N}$
b. متزايدة	2. $u_{n+1} = u_n + 0{,}2n \quad ; n \in \mathbb{N}$
c. متناقصة	3. $u_{n+1} = -u_n \quad ; n \in \mathbb{N}$

• اربط كل متتالية أدناه ، نفرض أنها موجبة تماما ، برتابتها .

الرتابة	العلاقة التراجعية
a. ثابتة	1. $u_{n+1} = (2+n)u_n \quad ; n \in \mathbb{N}$
b. متزايدة	2. $u_{n+1} = 0{,}2u_n \quad ; n \in \mathbb{N}$
c. متناقصة	3. $u_{n+1} = u_n \quad ; n \in \mathbb{N}$

• اربط كلّ متتالية (u_n) معرّفة أدناه برتابتها المحتملة .

الرتابة	عبارة الحد العام
a. متزايدة	1. $u_n = 7n + 0{,}3$ avec $n \in \mathbb{N}$
b. غير رتيبة	2. $u_n = -0{,}7n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$
c. متناقصة	3. $u_n = -1$ avec $n \in \mathbb{N}$
d. ثابتة	4. $u_n = n \times (-4)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[6] : MATH'X TS SPÉCIFIQUE

في أقلّ من 40 ثانية ! [6]

الانتقال إلى الحل

• اربط كل متتالية (u_n) بمتتالية (v_n) يمكننا مقارنتها بها ، ثمّ حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ ...	(u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ ...
a. $v_n=-n$	**1.** $u_n=2n^2+\cos(n)$
b. $v_n=3n$	**2.** $u_n=3n+(n+1)^{10}$
c. $v_n=2n^2-1$	**3.** $u_n=-3n^2+\sin(n)$
d. $v_n=-3n^2+1$	**4.** $u_n=-n-1-(-1)^n$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ldots$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ldots$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ldots$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ldots$

في أقلّ من 30 ثانية ! [6]

• اربط كلّ متتالية (u_n) بزوج من المتتاليات (v_n) وَ (w_n)، المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ ، بحيث يمكننا حصرها بهما ، ثمّ حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(v_n) وَ (w_n) معرّفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ ...	(u_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ ...
a. $v_n=-\frac{2}{n}$; $w_n=\frac{2}{n}$	**1.** $u_n=\frac{2+\cos(n)}{n}$
b. $v_n=\frac{1}{n}$; $w_n=\frac{3}{n}$	**2.** $u_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$
c. $v_n=\frac{n-1}{n}$; $w_n=\frac{n+1}{n}$	**3.** $u_n=\frac{\sin(n)+\cos(n)}{n}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ldots$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ldots$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ldots$

أجزاء مفقودة:

• وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حله ، لكنه يتضمن أجزاء غير مقروءة بسبب ملامسته للحبر. ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر.

النص

المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$w_n=\sqrt{n+1}-[illegible]$$

أ. أثبت أنّه ، من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $w_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

ب. برّر أنّه ، من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $0\leqslant w_n\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

جـ. استنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=$ [illegible].

الحل

أ. من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}$ ،

$w_n=$ [illegible]

$$=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

ب. من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}^*$ ، [illegible] وَ [illegible] اذن

$w_n\geqslant 0.$

كما أنّ $n+1\geqslant n$ اذن $\sqrt{n+1}\geqslant\sqrt{n}$ وعليه

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{[illegible]}$ وأخيرا $w_n\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

جـ. لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0=\lim\limits_{n\to+\infty}0$ اذن حسب مـ[illegible]

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=$ [illegible].

QUIZ

لكل سؤال من الأسئلة التالية ، ضع إطار حول الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة.

الانتقال الى الحل

	A	B	C	D
01 لتكن القضية P_n : « $3^n \geqslant n+2$ ». القضية P_{n+1} هي:	« $3^{n+1} \geqslant n+2$ »	« $3 \times 3^n \geqslant (n+1)+2$ »	« $3^n+1 \geqslant n+3$ »	« $3^{n+1} \geqslant n+3$ »
02 لتكن القضية P_n : « $1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ». القضية P_{n+1} هي:	« $1^4+2^4+...+n^4=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$ »	« $2^3+3^3+...+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ »	« $1^3+2^3+...+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ »	« $1^3+2^3+...+n^3+1=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+1$ »
03 المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $v_n=2+\frac{5}{n}$	الحدّ الأول هو v_0	الحدّ الأول هو v_1	الحدّ الذي يلي v_5 هو v_4	الحدّ الذي يسبق v_5 هو v_4
04 المتتالية (b_n) معرّفة بـ $b_1=1$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1}=b_n-5$	$b_0=6$	b_0 غير موجود	$b_3=-9$	$b_3=-11$
05 المتتالية (b_n) معرّفة بـ $b_1=5$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1}=b_n-11$. المتتالية (b_n) هي	حسابية أساسها 5	حسابية أساسها -11	متزايدة	متناقصة
06 المتتالية (d_n) معرّفة بـ $d_0=-7$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $d_{n+1}=1{,}5d_n$. المتتالية (d_n) هي	هندسية أساسها -7	هندسية أساسها 1,5	متزايدة	متناقصة
07 المتتالية (t_n) معرّفة بـ $t_0=-3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $t_{n+1}=5t_n-0{,}8$. المتتالية (t_n) هي	حسابية	هندسية	حسابية و هندسية	ليست حسابية ولا هندسية
08 المتتالية (u_n) تحقق: $u_0<u_1<u_2<u_3$.	(u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$	(u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$	$u_3<u_4$.	لا نستطيع تحديد إتجاه تغيّر (u_n)
09 إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=+\infty$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=+\infty$ فإنّ:	$\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-d_n)=0$.	لا نستطيع تحديد نهاية (c_n-d_n) مباشرة	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c_n}{d_n}=1$.	لا نستطيع تحديد نهاية $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)$ مباشرة
10 المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=\frac{2^n+5}{3\times2^n}$.	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{3}$.	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{5}{3}$.	(v_n) ليس لها نهاية
11 إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty$ ومن أجل n كبير بالقدر الكافي $y_n \leqslant x_n$ فإنّ:	$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=-\infty$.	(y_n) متقاربة	(y_n) متباعدة	لا نستطيع تحديد نهاية y_n

تطبيق 01: [4] [5] [9]

1 – من أجل $n=0$ لدينا : $0=0$ و منه $p(0)$ صحيحة.

– نفرض صحة $p(n)$ و نبرهن صحة $p(n+1)$

الفرضية: $p(n):\ 1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

المطلوب : $p(n+1):\ 1+2+3+...+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا: $1+2+3+...+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

و منه: $p(n+1)$ صحيحة. إذن: $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2 نسمي p_n الخاصية " $2^n \geq n+1$ "

التحقق من صحة p_0 :

من أجل $n=0$ لدينا : $2^0 \geq 0+1$ أي : $1 \geq 1$ وهي محققة. إذن : p_0 صحيحة

نفرض صحة p_n أي : $2^n \geq n+1$ ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $2^{n+1} \geq n+2$

من فرضية التراجع لدينا : $2^n \geq n+1$ ومنه : $2^n+2^n \geq (n+1)+2^n$

أي : $2\times 2^n \geq (n+1)+2^n$ ومنه : $2^{n+1} \geq (n+1)+2^n$

وبما أن $n \in \mathbb{N}$ فإن $n \geq 0$ وبالتالي $2^n \geq 2^0$ أي $2^n \geq 1$

من العلاقة $2^{n+1} \geq (n+1)+2^n$ والعلاقة $2^n \geq 1$ نستنتج أن

$2^{n+1} \geq (n+1)+1$ أي : $2^{n+1} \geq n+2$ ومنه : p_{n+1} صحيحة

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $2^n \geq n+1$.

3 الخاصة $E(n)$ المطلوبة هي

« 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3» ☞ $E(n)$

① الخاصّة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ $4^0+2=1+2=3$، مضاعف للعدد 3.

② نفترض أنَّ $E(n)$ صحيحة، أي إنّ 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3. ثُمّ نلاحظ أنّ

$$4^{n+1}+2=4^n\times 4+2=(4^n+2)\times 4-8+2=4(4^n+2)-6$$

بحسب افتراضنا، 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3، إذن $4(4^n+2)$ مضاعفٌ للعدد 3، ومن ثَمّ يكون $4(4^n+2)-6$ مضاعفاً للعدد 3 لأنه مجموع مضاعفين للعدد 3. فالقضية $E(n+1)$ صحيحة. إذن $E(n)$ صحيحة مهما كان العدد الطبيعي n.

[9] : العملاق في الرياضيات (بواب نورالدين)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[5] : الكتاب المدرسي السوري

تطبيق 02: [5]

1 لدينا

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	1	3	1	3	1

وهكذا نرى أنّ $u_n = \begin{cases} 3 & : n \text{ زوجي} \\ 1 & : n \text{ فردي} \end{cases}$

ويمكن التعبير عن u_n بصيغة أخرى $u_n = 2+(-1)^n$، التي يمكن إثبات صحتها بدلالة n.

2 بما ان المتتالية معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية فان الحد الذي رتبته 100 دليله 99 اذن $u_{99} = 2+(-1)^{99} = 1$

تطبيق 03: [4] [5] [12]

1 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$

لمعرفة اتجاه تغيّر متتالية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 1^2 + 2(n)(1) - 1 = n^2 + 2n$$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (n^2+2n) - (n^2-1) = 2n+1 > 0$،

إذن: **المتتالية (u_n) متزايدة تماما.**

2 الحدّ العام للمتتالية من الشّكل $u_n = f(n)$، حيث f الدالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا: $f'(x) = \dfrac{2(x+3)-(2x-1)(1)}{(x+3)^2} = \dfrac{7}{(x+3)^2}$

من أجل كلّ x من $[0;+\infty[$، $f'(x) > 0$. منه f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3 لنتأمّل المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ وفق $w_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. جميع حدودها w_n موجبة تماماً، ولدينا $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{2}{3}$ أياً كان العدد الطبيعي n. إذن، أياً كان العدد الطبيعي n، كان $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ أو $w_{n+1} < w_n$. فالمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

تطبيق 04: [10] [4] [5]

1 نحسب في البداية، $u_n - 2$: فنجد $u_n - 2 = \dfrac{2n^2+1}{n^2+4} - 2 = \dfrac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4} = \dfrac{-7}{n^2+4}$

ندرس إشارة $\dfrac{-7}{n^2+4}$ ، فنجد من أجل كلّ عدد طبيعي n: $\dfrac{-7}{n^2+4} < 0$.

وبالتالي، من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n - 2 < 0$. أي أنّ $u_n < 2$.

إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 .

つづく

2 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ حيث: $f(x)=\dfrac{x^2+x+9}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	7	$\nearrow$	

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x)\geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_n \geq 7$ ، و المتتالية u_n محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

3 لدينا:

$$u_n - 1 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 = \frac{2n}{1+n(n-1)} \geq 0$$

$$3 - u_n = 3 - \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \frac{2(n-1)^2}{1+n(n-1)} \geq 0$$

ومنه يكون $1 \leq u_n \leq 3$ ، أيا كانت n.

تطبيق 05: [2] [5]

المتتالية
1. $u_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n$
2. $f_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n$
3. $v_n = (-1)^n$
4. $w_n = 2^{-n}$
5. $t_n = 2$
6. $s_n = -3\times(1,2)^n$

النهاية
a. $-\infty$
b. 3,5
c. 0
d. 20
e. $+\infty$
f. 2
g. غير موجودة

المتتالية
7. $i_n = \dfrac{7-0,1^n}{2+0,99^n}$
8. $k_n = \dfrac{10^n}{(10.1)^n}$
9. $o_n = 16\times\dfrac{1-1,1^n}{1-1,1}$
10. $p_n = 10\times\dfrac{1-0,5^n}{0,5}$
11. $x_n = -\dfrac{5^n+3^n}{4^n}$
12. $y_n = 4^n - 2^n$

تطبيق 06: [2] [5]

المتتالية
1. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$
2. $f_n = \dfrac{3}{e^n}+2$
3. $v_n = -2n^2-n-3$
4. $w_n = (1-2n)(n^2+3)$
5. $t_n = n^2+(-1)^n$
6. $s_n = \dfrac{1}{n}(n^2+10)$

النهاية
a. $-\infty$
b. 1
c. 0
d. 4
e. $+\infty$
f. 2
g. 6

المتتالية
7. $i_n = \cos\left(\dfrac{n\pi+1}{2n+1}\right)$
8. $k_n = \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2$
9. $o_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$
10. $p_n = \left(3+\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right)$
11. $w_n = \sqrt{n}\left(1-2n\sqrt{n}\right)$
12. $y_n = \dfrac{3}{n}\times e^{-n}$

تطبيق 07: [10]

1 (u_n) معرفة بـ $u_0=5$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

لدينا $u_0=5$ ، $u_1=\sqrt{7}$ و $2\le\sqrt{7}\le 5$ إذن $2\le u_1\le u_0$.

نفترض $2\le u_{k+1}\le u_k$ يعني $4\le 2+u_{k+1}\le 2+u_k$ بما أن الدالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

فإن $\sqrt{4}\le\sqrt{2+u_{k+1}}\le\sqrt{2+u_k}$ أي $2\le u_{k+2}\le u_{k+1}$

وحسب مبدأ التراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_{n+1}\le u_n$.

2 من السؤال السابق ينتج أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 إذن هي متقاربة ونهايتها $l\ge 2$.

3 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ هذا من جهة ، ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+u_n}=\sqrt{2+l}$

إذن $l=\sqrt{2+l}$.

لدينا $l\ge 2$ و $l=\sqrt{2+l}$ إذن $l^2=2+l$ معناه $l^2-l-2=0$ ومعناه $(l+1)(l-2)=0$ يكافئ

$l=2$ أو $l=-1$. بما أن $l\ge 2$ فإن $l=2$.

تطبيق 08: [10]

1 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=3$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 .

2 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=-3$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها -3 .

3 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=4n+5$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

4 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=2n+1$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

5 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+3}-u_{n+2}=-\frac{4}{5}$ إذن : (u_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{4}{5}$ وحدها الأول $u_2=\frac{3}{5}$.

6 من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{n+1}$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

7 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=2$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 .

8 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=-5u_n$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

تطبيق 09: [10]

1 $u_{15}=u_0+15r$ ومنه $r=\frac{u_{15}-u_0}{15}=4$ ؛ $u_{2007}=u_0+2007r=8027$.

2 $u_0=u_{17}+(0-17)r=1$.

3 $u_n=u_{15}+(n-15)r$ ونجد $n=53$.

4 $r=\frac{u_{10}-u_5}{10-5}=-10$ ؛ $n=\frac{u_n-u_5}{r}+5=15$.

تطبيق 10: [6]

$u_0+u_1+u_2=3 \Rightarrow 3u_1=3 \Rightarrow \boxed{u_1=1}$

$u_0 \times \underbrace{u_1}_{=1} \times u_2=-24 \Rightarrow \underbrace{u_0}_{u_1-r} \times \underbrace{u_2}_{u_1+r}=-24 \Rightarrow (1-r)(1+r)=-24 \Rightarrow 1-r^2=-24 \Rightarrow r^2=25$

بما أنّ السؤال لم يحدّد طبيعة المتتالية (u_n) ، فإنّ $r=-5$ أو $r=5$

- $r=-5 \Rightarrow u_0=1-(-5)=6\,;u_2=1+(-5)=-4 \Rightarrow \boxed{(u_0,u_1,u_2)=(6,1,-4)}$
- $r=5 \Rightarrow u_0=1-5=-4\,;u_2=1+5=6 \Rightarrow \boxed{(u_0,u_1,u_2)=(-4,1,6)}$

التحقيق :

$u_0+u_1+u_2=6+1-4=\boxed{3}\,;\ u_0\times u_1\times u_2=6\times 1\times(-4)=\boxed{-24}$

تطبيق 11: [10]

1 $S=\frac{63}{2}(5+67)=2268$.

2 $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+...+10$. S هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول $a_1=\frac{1}{2}$؛ $a_n=a_1+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}n$ إذن $a_n=10$ معناه $n=20$ وبالتالي $S=\frac{20}{2}\left(\frac{1}{2}+10\right)$

أي $S=105$.

3 $u_n=2n+1$ ؛ $S=\frac{51}{2}(1+101)=2601$.

4 $S=(17+7-3-13-23-33-43-53)+(12+2-8-18-28-38-48)$

$S=4(17-53)+\frac{7}{2}(12-48)=-270$

تطبيق 12: [10]

1 (u_n) هندسية و $r=3$. 2 (u_n) ليست هندسية . 3 (u_n) هندسية و $r=\frac{4}{3}$.

4 (u_n) هندسية و $r=9$. 5 (u_n) هندسية و $r=4$. 6 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}u_n$ ؛ (u_n) ليست هندسية .

7 (u_n) ليست هندسية . 8 (u_n) هندسية و $r=\sqrt{2}$.

تطبيق 13: [10] [2]

•

الحدّ العام
a. $u_n=(-3)^n\times 4$
b. $u_n=(-4)^n\times 3$
c. $u_n=-3\times 4^n$
d. $u_n=(-4)\times 3^n$

(u_n) معرّفة بـ:
1. $q=3$ et $u_0=-4$
2. $q=-3$ et $u_0=4$
3. $q=4$ et $u_0=-3$
4. $q=-4$ et $u_0=3$

• 1 $q^3=\frac{1}{8}$ ومنه $q=\frac{1}{2}$ ؛ $u_{100}=\frac{11}{2^{92}}$.

2 $u_0=-320$ ؛ $u_2=-80$.

تطبيق 14: [2]

1) $u_0 = 4{,}21$

الرتابة	الأساس q لـ (u_n)
غير رتيبة	**1.** $q = 5$
متزايدة تماما	**2.** $q = -5$
متناقصة تماما	**3.** $q = 0{,}5$

2) $u_0 = -4{,}21$

الرتابة	الأساس q لـ (u_n)
غير رتيبة	**1.** $q = 5$
متزايدة تماما	**2.** $q = -5$
متناقصة تماما	**3.** $q = 0{,}5$

تطبيق 15: [10]

1 $0 < r < 1$

2 $u_2 = -\dfrac{1}{2}$ ثم نحل المعادلة $12x^2 + 13x + 3 = 0$ ، $\Delta = 25$ ، $x' = -\dfrac{3}{4}$ ، $x'' = -\dfrac{1}{3}$ وبما أن المتتالية متزايدة فإن $u_1 = -\dfrac{3}{4}$ ، $u_2 = -\dfrac{1}{2}$ ، $u_3 = -\dfrac{1}{3}$.

تطبيق 16: [13]

1 $S_1 = v_0 + v_1 + ... + v_n$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 2$ إذا

$$S_1 = v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) = 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

2 $S_2 = v_0 + v_1 + ... + v_{2n}$

S_2 عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 و لكن الإختلاف مع S_1 يكمن في عدد الحدود فقط

إذا

$$S_2 = v_0\left(\frac{1-(9)^{2n-0+1}}{1-9}\right) = 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{\frac{2}{3}}\right) = 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right)$$

3 $S_3 = w_0 + w_1 + ... + w_n$

المتتالية (w_n) لا حسابية و لا هندسية و لكنها مكتوبة بدلالة المتتالية الهندسية (v_n) لدينا $w_n = v_n - a$

نكتب كل حدود لمتتالية (w_n) بدلالة حدود المتتالية (v_n) فيصبح لدينا: $s_3 = v_0 - a + v_1 - a + ... + v_n - a$

نجمع حدود المتتالية (v_n) لوحدهم و الأعداد $-a$ لوحدهم أيضا إذا $S_3 = \underbrace{v_0 + v_1 + ... + v_n}_{S_2} \underbrace{-a - a - a - .... - a}_{\text{مرة } (n+1)}$

هناك $n+1$ حد من الأعداد $-a$ لأن كل حد من حدود المتتالية (v_n) يرافقه عدد $-a$ إذا $S_3 = S_1 - a(n+1)$

つづく

4 $S_4=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+....+\frac{1}{v_n}$

لدينا $\frac{1}{v_n}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{2}\times 3^n$ إذا بعد البرهان نجد أن $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q}=3$

و حدها الأول $\frac{1}{v_0}=\frac{1}{2}$ إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد $S_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{-2}\right)=\frac{1}{4}\left(3^{n+1}-1\right)$

5 $S_5=v_0+v_2+....+v_{2n}$

نلاحظ أن $\frac{v_2}{v_0}=q^2=....=\frac{v_{2n}}{v_{2n-2}}$ (قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه) إذا المجموع S_5 هو مجموع متتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_0 نسميها $x_n=v_0\cdot\left(q^2\right)^n$ إذا $S_5=x_0+x_1+....+x_n=v_0\left(\frac{1-\left(q^2\right)^{n-0+1}}{1-q^2}\right)$

6 $P_1=v_0\times v_1\times....\times v_n$

نكتب كل حدود المتتالية $\left(v_n\right)$ بدلالة v_0 و q أي بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية $v_n=v_0q^n$

إذا $P_1=v_0\times v_0q\times v_0q^2\times\ldots\times v_0q^n=\underbrace{v_0\times v_0\times....\times v_0}_{\text{(n+1) مرة}}\times q^1\times q^2\times....\times q^n=v_0^{n+1}\times q^{1+2+....+n}$

نلاحظ أن $1+2+3+....+n$ هو مجموع لمتتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول 1 (لاحظ أن المجموع بدأ من 1

و الفرق بين حد و الحد الذي يليه هو 1) إذا بعد تطبيق قانون مجموع متتالية حسابية نجد $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

و منه $P_1=v_0^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}=2^{n+1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

7 $S_6=\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_n$

طريقة 1: بتطبيق خواص الدالة اللوغاريتمية نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي

بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية $v_n=v_0q^n$ فنجد: $S_6=\ln v_0+\ln v_0\cdot q+\ln v_0\cdot q^2+\ldots+\ln v_0\cdot q^n$

نطبق خاصية الدالة اللوغاريتمية $\ln a\cdot b=\ln a+\ln b$ يصبح لدينا $S_6=\ln v_0+\ln v_0+\ln q+\ln v_0+\ln q^2+....+\ln v_0+\ln q^n$

بتطبيق خاصية الدالة اللوغاريتمية $\ln a^n=n\ln a$ و بجمع الحدود $\ln v_0$ لوحدهم و الحدود من الشكل $\ln q^n$

لوحدهم نجد $S_6=\underbrace{\ln v_0+\ln v_0+....+\ln v_0}_{(n-0+1)\text{ مرة}}+\ln q+2\ln q+....+n\ln q$

$$S_6=(n+1)\ln v_0+(1+2+....+n)\ln q$$

$$=(n+1)\ln v_0+\frac{n(n+1)}{2}\ln q$$

إذا $S_6=2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}\ln\frac{1}{3}$

つづく

طريقة 2: (شرط أن نكون قد وجدنا جداء المتتالية الهندسية) نستخدم العلاقة $\ln a+\ln b=\ln a\cdot b$

نجد $S_6 = \ln(v_0\times v_1\times\ldots\times v_n) = \ln P_1$

إذا $S_6 = \ln\left(v_0^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)=\ln v_0^{n+1}+\ln q^{\frac{n(n+2)}{2}}$

$$=(n+1)\ln v_0+\frac{n(n+2)}{2}\ln q$$

تطبيق 17: [10]

1 لدينا $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+3v_n}{4}$

$w_{n+1}=\frac{4u_n+8v_n-3u_n-9v_n}{12}=\frac{u_n-v_n}{12}$ أي $w_{n+1}=\frac{1}{12}w_n$.

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0=11$.

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=11\left(\frac{1}{12}\right)^n$. بما أن $-1<\frac{1}{12}<1$ (w_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$.

2 $t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=\frac{3(u_n+2v_n)}{3}+\frac{8(u_n+3v_n)}{4}$

أي $t_{n+1}=u_n+2v_n+2u_n+6v_n=3u_n+8v_n$ و منه $t_{n+1}=t_n$ و المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=t_0=44$.

3 • $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n-3u_n}{3}$ و $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n$: ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{-2(u_n-v_n)}{3}=-\frac{2}{3}w_n$

إذن: $u_{n+1}-u_n=-\frac{22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n<0$ والمتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

• $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}$ ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n$: $v_{n+1}-v_n=\frac{(u_n-v_n)}{4}=\frac{1}{4}w_n$

إذن: $v_{n+1}-v_n=\frac{11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}-v_n>0$ و المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$ و أن $w_n=u_n-v_n$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$.

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى 0 . إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4 المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

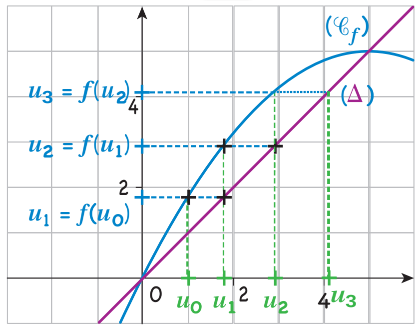
إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=t_0=44$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n+8v_n=44$

نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=4$.

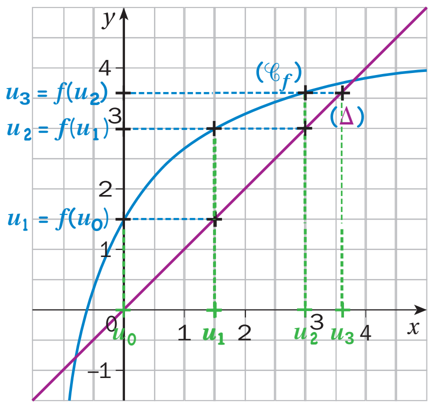
تطبيق 18: [2]

1



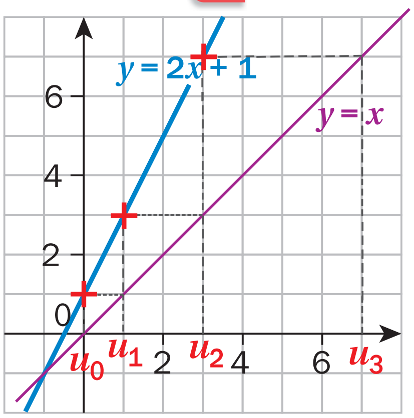
التخمين: (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 5

2



التخمين: (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

3



التخمين: (u_n) متزايدة تماما ومتباعدة نحو $+\infty$

حل المراجعة السريعة

8 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

أجب ب "صح" أو " خطأ": [4] [6]

1 للبرهان على صحة خاصية p(n) نفرض صحة p(n) و نبرهن صحة p(n+1) . ✗

2 المتتالية (u_n) حيث : $u_n=4n-3$ هي متتالية تراجعية. ✗

3 المتتالية (v_n) المعرفة بالعبارة : $u_n=an+b$ هي متتالية حسابية أساسها a و حدها الأول b. ✓

4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1000}\right)^n=+\infty$ ✗

5 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{840}\right)^n=0$ ✓

6 النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n$ غير موجودة. ✗

7 إذا كان: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ فإن المتتاليتان (u_n) و (V_n) متجاورتان. ✗

8 $1+4+4^2+4^3+....+4^{99}=\dfrac{1-4^{100}}{1-4}$ ✓

9 $3+5+7+...+(2n+1)=\dfrac{(2n+4)(n)}{2}$ ✓

10 كل متتالية حسابية غير ثابتة متباعدة. ✓

11 كل متتالية هندسية متقاربة . ✗

12 إذا كانت $\ell\neq0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ فإن (u_n) متقاربة. ✓

13 إذا كانت متتالية محدودة فهي متقاربة . ✗

14 المتتالية (u_n) المعرفة بـــ : $u_{n+1}=u_n-3$ هي متتالية متناقصة . ✓

15 خطأ لأن إذا قبلت متتالية نهاية فإنها تكون وحيدة.

16 خطأ لأنه لا يمكن الحكم على (v_n) أنها هندسية من الحدين v_1 و v_2 فقط .

17 **صحيحة** لأن كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى بحدها الأول.

18 كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة ، **جملة خاطئة** لأن نهايتها موجبة ويمكن أن تكون غير معدومة

19 إذا كانت متتالية متزايدة فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول؛ والجملة المعطاة **صحيحة**.

20 المتتاليات (u_n) أدناه ، متتاليات هندسية ؟

a. « $u_{n+1}=-3{,}14\ u_n$. » ✓ b. « $u_{n+1}=3{,}14+u_n$. » ✗

c. « $u_{n+1}=\pi\ u_n$. » ✓ d. « $u_{n+1}=\pi^2u_n$. » ✓

e. « $u_{n+1}=\pi-u_n$. » ✗ f. « $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3{,}14}$. » ✓

إتجاه تغيّر متتالية عددية: [4] [6]

• اربط كلّ متتالية (u_n) معرّفة أدناه برتابتها المحتملة ، علما أنّ $u_0=2{,}5$.

العلاقة التراجعية
1. $u_{n+1}=u_n-2n$; $n\in\mathbb{N}$
2. $u_{n+1}=u_n+0{,}2n$; $n\in\mathbb{N}$
3. $u_{n+1}=-u_n$; $n\in\mathbb{N}$

الرتابة
a. غير رتيبة
b. متزايدة
c. متناقصة

• اربط كل متتالية أدناه ، نفرض أنها موجبة تماما ، برتابتها .

العلاقة التراجعية
1. $u_{n+1}=(2+n)u_n$; $n\in\mathbb{N}$
2. $u_{n+1}=0{,}2u_n$; $n\in\mathbb{N}$
3. $u_{n+1}=u_n$; $n\in\mathbb{N}$

الرتابة
a. ثابتة
b. متزايدة
c. متناقصة

• اربط كلّ متتالية (u_n) معرّفة أدناه برتابتها المحتملة .

عبارة الحد العام
1. $u_n=7n+0{,}3$ avec $n\in\mathbb{N}$
2. $u_n=-0{,}7n+3$ avec $n\in\mathbb{N}$
3. $u_n=-1$ avec $n\in\mathbb{N}$
4. $u_n=n\times(-4)^n$ avec $n\in\mathbb{N}$

الرتابة
a. متزايدة
b. غير رتيبة
c. متناقصة
d. ثابتة

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[6] : MATH'x TS SPÉCIFIQUE

في أقلّ من 40 ثانية ! [6]

• اربط كل متتالية (u_n) بمتتالية (v_n) يمكننا مقارنتها بها ، ثمّ حدّد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ ...	(u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ ...
a. $v_n = -n$	**1.** $u_n = 2n^2 + \cos(n)$
b. $v_n = 3n$	**2.** $u_n = 3n + (n+1)^{10}$
c. $v_n = 2n^2 - 1$	**3.** $u_n = -3n^2 + \sin(n)$
d. $v_n = -3n^2 + 1$	**4.** $u_n = -n - 1 - (-1)^n$

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **2.** $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **3.** $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

4. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

في أقلّ من 30 ثانية ! [6]

• اربط كلّ متتالية (u_n) بزوج من المتتاليات (v_n) وَ (w_n)، المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ ، بحيث يمكننا حصرها بهما ، ثمّ حدّد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(v_n) وَ (w_n) معرّفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ ...	(u_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ ...
a. $v_n = -\frac{2}{n}$; $w_n = \frac{2}{n}$	**1.** $u_n = \frac{2+\cos(n)}{n}$
b. $v_n = \frac{1}{n}$; $w_n = \frac{3}{n}$	**2.** $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
c. $v_n = \frac{n-1}{n}$; $w_n = \frac{n+1}{n}$	**3.** $u_n = \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n}$

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ **2.** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ **3.** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

أجزاء مفقودة:

• وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حله ، لكنه يتضمن أجزاء غير مقروءة بسبب ملامسته للحبر. ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر.

النص

(w_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

أ. أثبت أنّه ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

ب. برّر أنّه ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

جـ. استنتج أنّ .. $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

الحـــل

أ. من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}$ ،

$$w_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

ب. من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $\sqrt{n+1} > 0$ وَ $\sqrt{n} > 0$ اذن

$w_n \geqslant 0.$

كما أنّ $n+1 \geqslant n$ اذن $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ وعليه

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$ وأخيرا $w_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

جـ. لدينا $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0 = \lim_{n\to+\infty} 0$ اذن حسب مبرهنة الحصر

$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$

QUIZ

لكل سؤال من الأسئلة التالية ، ضع إطار حول الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة.

	A	B	C	D
01 لتكن القضية P_n : « $3^n \geqslant n+2$ ». القضية P_{n+1} هي:	« $3^{n+1} \geqslant n+2$ »	« $3 \times 3^n \geqslant (n+1)+2$ »	« $3^n+1 \geqslant n+3$ »	« $3^{n+1} \geqslant n+3$ »
02 لتكن القضية P_n : « $1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ». القضية P_{n+1} هي:	« $1^4+2^4+...+n^4=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$ »	« $2^3+3^3+...+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ »	« $1^3+2^3+...+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ »	« $1^3+2^3+...+n^3+1=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+1$ »
03 المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $v_n=2+\frac{5}{n}$	الحدّ الأول هو v_0	الحدّ الأول هو v_1	الحدّ الذي يلي v_5 هو v_4	الحدّ الذي يسبق v_5 هو v_4
04 المتتالية (b_n) معرّفة بـ $b_1=1$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $b_{n+1}=b_n-5$	$b_0=6$	b_0 غير موجود	$b_3=-9$	$b_3=-11$
05 المتتالية (b_n) معرّفة بـ $b_1=5$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $b_{n+1}=b_n-11$. المتتالية (b_n) هي	حسابية أساسها 5	حسابية أساسها -11	متزايدة	متناقصة
06 المتتالية (d_n) معرّفة بـ $d_0=-7$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $d_{n+1}=1{,}5d_n$. المتتالية (d_n) هي	هندسية أساسها -7	هندسية أساسها 1,5	متزايدة	متناقصة
07 المتتالية (t_n) معرّفة بـ $t_0=-3$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $t_{n+1}=5t_n-0{,}8$. المتتالية (t_n) هي	حسابية	هندسية	حسابية و هندسية	ليست حسابية و لا هندسية
08 المتتالية (u_n) تحقق: $u_0<u_1<u_2<u_3$.	(u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$	(u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$	$u_3<u_4$.	لا نستطيع تحديد إتجاه تغيّر (u_n)
09 إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=+\infty$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=+\infty$ فإنّ:	$\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-d_n)=0$.	لا نستطيع تحديد نهاية (c_n-d_n) مباشرة	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c_n}{d_n}=1$.	لا نستطيع تحديد نهاية $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)$ مباشرة
10 المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=\frac{2^n+5}{3\times 2^n}$.	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{3}$.	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{5}{3}$.	(v_n) ليس لها نهاية
11 إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty$ ومن أجل n كبير بالقدر الكافي $y_n\leqslant x_n$ فإنّ:	$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=-\infty$.	(y_n) متقاربة	(y_n) متباعدة	لا نستطيع تحديد نهاية y_n

تمارين المستوى الأول ★

1 BAC علوم تجريبية 2011 الموضوع الأول (07 نقاط) ★ الانتقال الــى الحـــل

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n+1$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

1 المتتالية (v_n) :

(أ) حسابية (ب) هندسية (ج) لا حسابية و لا هندسية

2 نهاية المتتالية (u_n) هي :

(أ) $+\infty$ (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) $-\infty$

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=-\frac{1}{2}\left(1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+\cdots+e^{n\ln 3}\right)$

(أ) $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ (ب) $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ (ج) $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$

2 BAC آداب وفلسفة+لغات أجنبية 2013 الموضوع الثاني (06 نقاط) ★ الانتقال الــى الحـــل

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 و أساسها 5 بحيث: $U_0+U_1+U_2+U_3=34$

1 أحسب U_0.

2 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n=5n+1$.

3 عين العدد الطبيعي n بحيث : $U_{n+1}+U_n-8n=4033$.

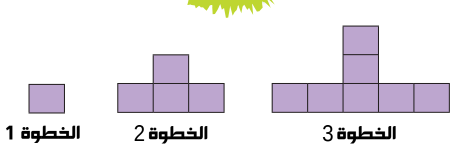
4 أحسب المجموع : $S=U_0+U_1+...+U_{2013}$.

5 المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $V_n=2U_n+1$

أ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (V_n) .

ب) أحسب المجموع : $S'=V_0+V_1+...+V_{2013}$.

أحجية 16



• كم عدد المربعات سيكون في الخطوة 100 ؟

3 BAC تسيير واقتصاد 2014 الموضوع الأول (03 نقاط) ★ الانتقال الــى الحـــل

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

• (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln u_n$

1 إذا كانت (u_n) متقاربة فإن (v_n) متقاربة.

2 إذا كانت (u_n) متناقصة فإن (v_n) متناقصة.

3 إذا كانت (u_n) هندسية فإن (v_n) حسابية.

4 BAC آداب وفلسفة+لغات أجنبية 2012 الموضوع الثاني (06 نقاط) ★ الانتقال الـــى الحـــل

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1 أ) احسب بدلالة r الجدائين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

ب) عيّن الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

2 نضع $r = 3$.

أ) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

بيّن أن: $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$.

ج) جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.

3 أ) اكتب الحد u_{n+5} بدلالة n.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$.

ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا.

فيديو

القصة الشيقة لمبرهنة فيثاغورس الشهيرة.

▸fc.com/adel.maths17

5 BAC مجمّعة من عدّة دورات لجميع الشعب ★ الانتقال الـــى الحـــل

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

• المتتالية العددية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = 4 \times 5^n - 2n + 1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

S_n يساوي: أ) $5^{n+1} - (n+1)^2$ ب) $5^{n+1} - n^2$ ج) $5^n - n^2$

• لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول u_0، حيث: $u_0 = e^{-\frac{1}{2}}$. (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n)$

S_n يساوي: أ) $\frac{n^2-1}{2}$ ب) $\frac{n^2+1}{2}$ ج) $\frac{n^2}{2}$

• لتكن (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 1 و أساسها 2

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \cdots \times e^{u_n}$. عبارة P_n هي:

أ) $e^{n(n+1)}$ ب) $e^{(n+1)^2}$ ج) $e^{-n(n+1)}$

• (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ قيمة n التي من أجلها يكون $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2015$، هي:

أ) $n = 31$ ب) $n = 32$ ج) $n = 33$

• المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، المجموع $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ يساوي:

أ) $-\ln(n+1)$ ب) $\ln(n+2)$ ج) $1 - \ln(n+1)$

つづく

• (w_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما وأساسها عدد حقيقي q موجب تماما و يختلف عن 1
نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = \ln w_n$. (v_n) هـي متتالية :

أ) هندسية.　　ب) حسابية.　　جـ) لا حسابية و لا هندسية.

• نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$.

أ) (u_n) حسابية　　ب) (u_n) هندسية　　جـ) (u_n) ليست هندسية ولا حسابية.

• الحد العام للمتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ هو:

أ) $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$　　ب) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$　　جـ) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}$.

• a عدد حقيقي، الأعداد a ، $a+2$ ، $a+6$ بهذا الترتيب هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية من أجل:

أ) $a = 2$　　ب) $a = -2$　　جـ) $a = 4$

• β عدد حقيقي، تكون الأعداد: $e^{\beta}+1$ ، $e^{\beta}+2$ ، $2e^{\beta}$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية من أجل β يساوي:

أ) $\ln(\sqrt{5}-1)$　　ب) 0　　جـ) $\ln(1+\sqrt{5})$

• (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 3^{-2n}$. (v_n) متتالية هندسية أساسها:

أ) $\frac{1}{9}$　　ب) 9　　جـ) -9

6 BAC علوم تجريبية 2014 الموضوع الثاني (04 نقاط)

الانتقال الى الحل

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$.
(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري) .

1 بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل.

2 احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

1 عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2 أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$.

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$.

7 BAC شعبة علوم الطبيعة والحياة (النظام القديم)

الانتقال الى الحل

1 بيَن أنه إذا كانت a، b، c ثلاثة أعداد حقيقية حدودا متعاقبة بهذا الترتيب لمتتالية هندسية فإن:
$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$$

2 جد ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 و مجموع مربعاتها 3276.

8 BAC علوم تجريبية 2008 الموضوع الأول (04 نقاط) ★ الانتقال الى الحل

1 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماماً على I.

بـ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2 (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

بـ- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

بـ- عيّن النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

فيديو

لماذا يختار النحل الشكل السداسي لبناء بيوته؟

▶fc.com/adel.maths17

1 BAC تسيير واقتصاد 2014 الموضوع الثاني (04.5 نقطة) ★★

الانتقال إلى الحل

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1 أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$

ب/ بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ج/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2 لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18$

أ/ بيّن أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$.

ب/ احسب الأساس q ثم عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ج/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

2 تمارين المراجعة النهائية (سعيد وزاني) ★★

الانتقال إلى الحل

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = u_n + 3n + 4$.

و (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3n + 4$.

1 بين أن (v_n) متتالية حسابية. عين أساسها وحدها الأول.

2 نعتبر S_n المجموع حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.

3 بين أن $S_n = u_n - u_0$.

4 استنتج الحد العام u_n بدلالة n. ما رتبة الحد الذي قيمته 13 ؟

3 BAC بكالوريا الهند (أفريل 2004) ★★

الانتقال إلى الحل

I) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرّفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$.

1 احسب الحدود u_1، u_2 و u_3.

2 قارن بين الحدود الأربعة للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ والحدود الأربعة للمتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$، حيث: $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

3 باستعمال البرهان بالتراجع، برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = w_n$.

II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

1 برهن أنّ: $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = -\ln 5$.

2 اكتب بدلالة n المجموع S_n، حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

3 احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4 BAC تقني رياضي 2013 الموضوع الأول (04 نقاط) ★★

الانتقال إلى الحل

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = \sqrt{\dfrac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{1}{2}\ln u_n + \dfrac{1}{2}$.

つづく

1 بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أحسب حدها الأول .

2 أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3 أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

4 أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times .... \times u_n$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

5 BAC تسيير واقتصاد 2020 الموضوع الثاني (04 نقاط) ★★

الانتقال إلى الحل

المتتالية الهندسية (v_n) حدّها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما و : $\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8\ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2\ln 2 \end{cases}$

1 بيّن أنّ: $v_5 = 32$ و $v_3 = 8$

2 أ . بيّن أنّ: $q = 2$ و $v_0 = 1$

ب. اكتب v_n بدلالة n .

جـ. هل العدد 1024 حدّ من حدود المتتالية (v_n)؟

3 المتتالية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n - 3 + 2^n$

أ . تحقّق أنّ : $w_n = u_n + v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول u_0.

ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

6 BAC تسيير واقتصاد 2013 الموضوع الأول (05 نقاط) ★★

الانتقال إلى الحل

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right) u_n - \frac{2a+4}{3}$؛ حيث a وسيط حقيقي.

1 عيّن قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2 نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية، ثمّ احسب عندئذٍ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية.

3 عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثمّ عيّن في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

4 نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، فإن: $u_n = 3^n + 2$، ثم بيّن أنّ:

$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$.

7 BAC علوم تجريبية 2017 الاستثنائية الموضوع الأول (04 نقاط) ★★

الانتقال إلى الحل

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$.

1 احسب الحدّين: u_1 و v_1 .

2 أ) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

つづく

3 نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$.

برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأوّل w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n .

4 بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

8 BAC تقني رياضي 2018 الموضوع الأول (04 نقاط) ★★ الانتقال الحـــل

f الدالة العددية المعرّفة والمتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{e.x+1}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

1 أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n(\frac{1}{e} - u_n)}{e.u_n + 1}$ ،

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برّر أنّها متقاربة.

2 لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$

أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 و عبارة v_n بدلالة n.

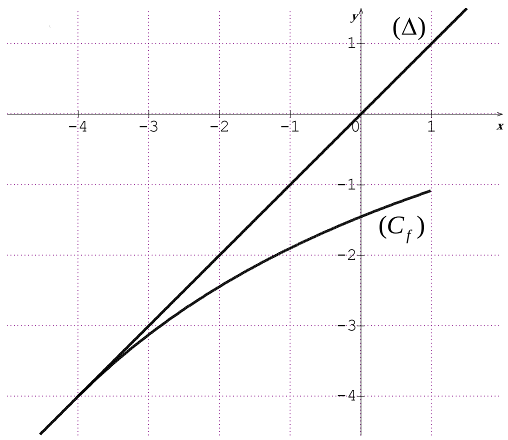
3 أ) تحقق أنّه من أجل كل n من : $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

تمارين المستوى الثالث ★★★

1 علوم تجريبية 2017 الموضوع الثاني (04 نقاط) ★★★

الانتقال إلى الحل



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f الدالة المعرّفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

I) تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثم بيّن أنّ:

من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإنّ $f(x)\in[-4;1]$

II) (u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1 انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2 برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4<u_n\leq 0$

ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3 لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n\times u_n=1-4v_n$.

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$، ثم احسب المجموع S حيث

$S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+\cdots+v_{2016}\times u_{2016}$.

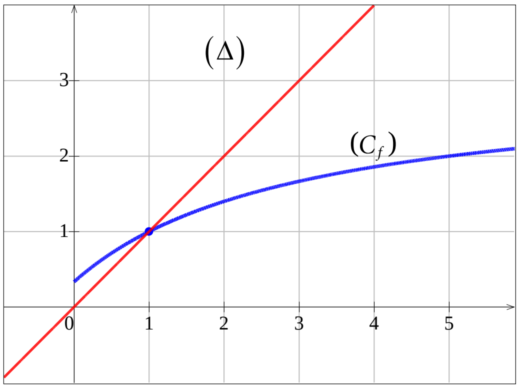
2 علوم تجريبية 2017 الاستثنائية الموضوع الثاني (04 نقاط) ★★★

الانتقال إلى الحل

نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 حيث $u_0=\alpha$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$



I) عيّن قيمة α حتّى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

II) نضع في كل ما يلي $\alpha=5$

1 أ) انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2، u_3 (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

つづく

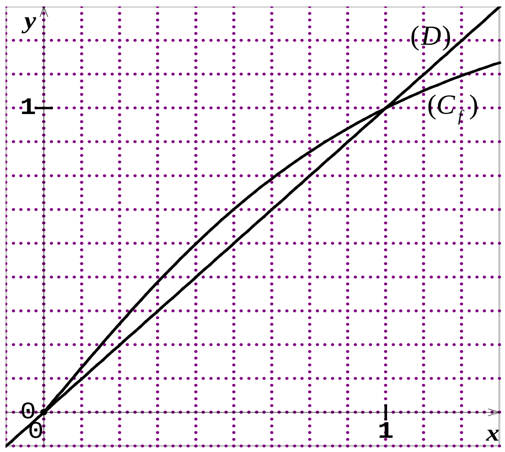
3 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016}$.

ثمّ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = \dfrac{1}{u_n+1} + \dfrac{1}{u_{n+1}+1} + \dfrac{1}{u_{n+2}+1} + \cdots + \dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$.

3 BAC تقني رياضي 2020 الموضوع الأول (04 نقاط) ★★★

الانتقال إلى الحل

الدالة العددية f معرفة ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث: $u_0 = \dfrac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1 أ . أعد رسم الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2 أ . برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $\dfrac{1}{2} \le u_n < 1$.

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3 المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n^2}{1-u_n^2}$

برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{9}{5}$ يُطلب تعيين حدها الأول v_0.

4 أ . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ب. احسب نهاية المتتالية (u_n).

4 BAC رياضيات 2014 الموضوع الثاني (04.5 نقاط) ★★★

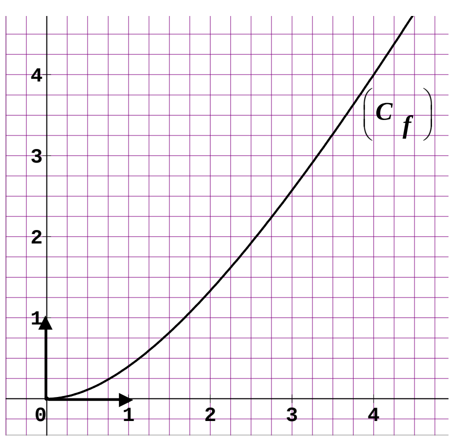
الانتقال إلى الحل

الدالة العددية f **معرفة على** $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+4}$. (C_f) **المنحنى الممثل للدالة** f **في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

1 بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما.

2 (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $U_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n؛ $U_{n+1} = f(U_n)$

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$



أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل، على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0، U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

3 أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $0 \le U_n \le 3$

ب) بيّن أنّ المتتالية (U_n) **متناقصة** .

ج) **إستنتج أنّ** (U_n) **مقاربة**.

4 أ) ادرس إشارة العدد $7U_{n+1} - 6U_n$ واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $0 \le U_{n+1} \le \dfrac{6}{7} U_n$

つづく

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le U_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

5 BAC بكالوريا الهند (أفريل 2003) ★★★ الانتقال الى الحل

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a & \text{حيث } a \text{ عدد حقيقي من المجال }]0\,;\,1[\\ u_{n+1} = (2-u_n).u_n & \text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1 نفرض في هذا السؤال أن : $a = \frac{1}{8}$.

أ- احسب u_1 و u_2 .

ب- ارسم في معلم متعامد و متجانس المنحني (p) الممثل للدالة f المعرفة في المجال $[0\,;2]$ بـ $f(x) = x(2-x)$ ، والمستقيم (d) الذي معادلته $y = x$

استخدم (p) و (d) لتمثيل النقط A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 التي فواصلها u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على الترتيب . (وحدة الطول $8\,cm$)

2 نفرض في هذا السؤال أن a عدد حقيقي كيفي من المجال $]0\,;\,1[$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$.

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

جـ- ماذا تستنتج ؟

3 نضع $a = \frac{1}{8}$ ، ونعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = 1 - u_n$.

أ- احسب v_0 و v_1 .

ب- اكتب عبارة v_{n+1} بدلالة v_n ثم استنتج v_n بدلالة n .

جـ- استنتج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n .

د- احسب نهاية المتتالية (v_n) ، ثم نهاية المتتالية (u_n) .

6 BAC علوم تجريبية 2015 الموضوع الثاني (05 نقاط) ★★★ الانتقال الى الحل

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1 عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2 ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$.

3 مثّل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$.

1 أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ؛ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 دون حسابها.

ب) خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

つづく

2 أ) أثبت أنّه من أجل كل n من n : $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث: $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3 أ) أثبت أنّه من أجل كل n من n : $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل n من n : $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتج أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ؛ ثمّ حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

7 BAC رياضيات 2008 الموضوع الأول (06 نقاط) ★★★

الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

(الوحدة على المحورين 2 cm)

1 ا) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و فسّر النتيجة هندسيا

ب) ادرس تغيّرات الدالة f

ج) باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$

د) ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

2 نعرّف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

ا) باستعمال (D) و $(\mathcal{C}_f)$ ، مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3 ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ و $u_{n+1} > u_n$

ب) استنتج أنّ (u_n) متقاربة. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

8 BAC تقني رياضي 2008 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★

الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

1 ا) ادرس تغيّرات الدّالة f على المجال $[0;2]$

ب) أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدّالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (الوحدة على المحورين 4 cm)

ج) برهن أنّه إذا كان $x \in [0;2]$ فإنّ $f(x) \in [0;2]$

2 نعرّف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

ا) برّر وجود المتتالية (u_n) . احسب الحدّين u_1 و u_2

ب) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق

つづく

3 أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$

ب) برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $u_{n+1} > u_n$

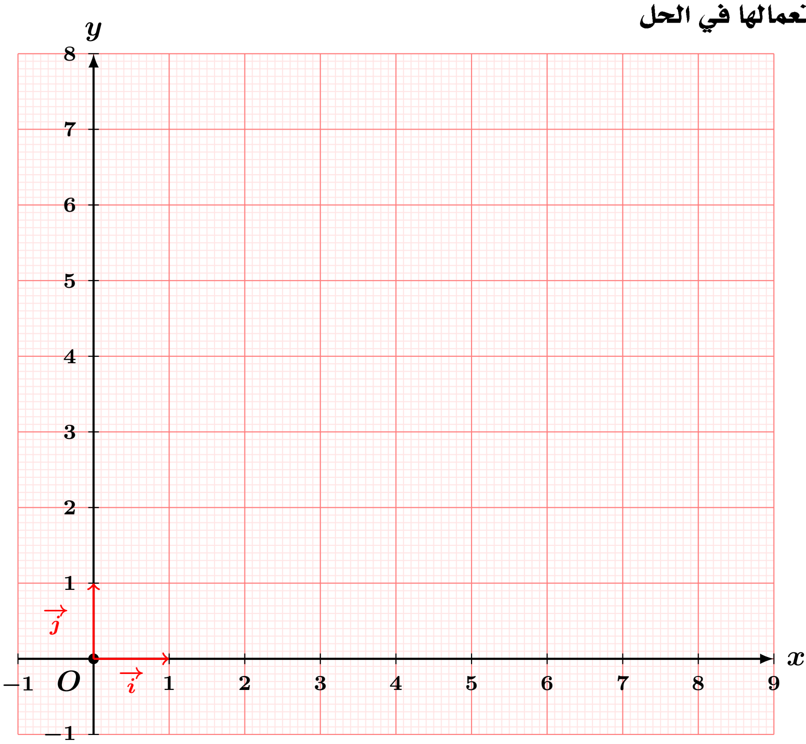
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n) ؟

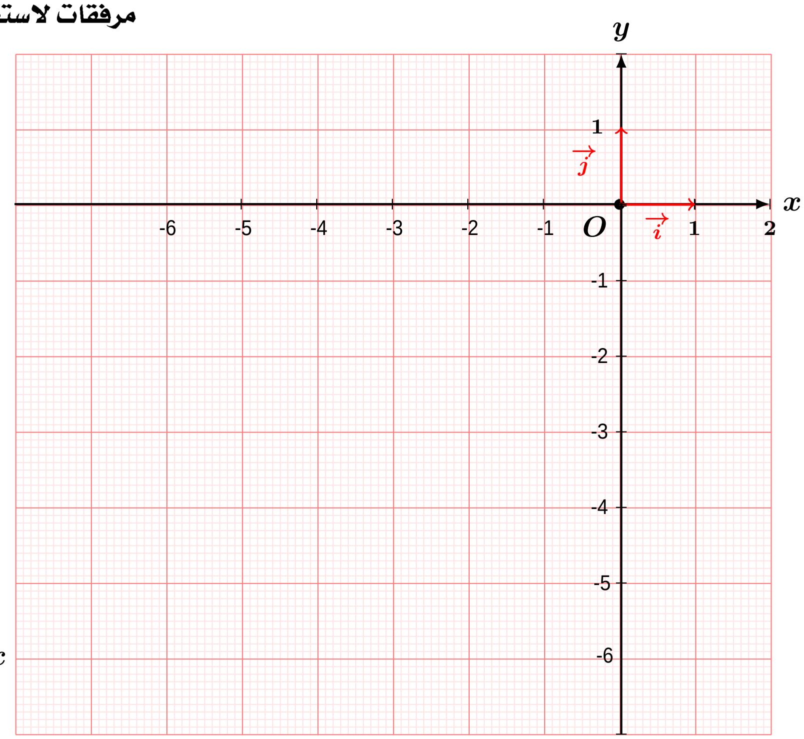
ج) تحقق أنّ : $u_{n+1}-\sqrt{3} \leqslant \dfrac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\left(u_n-\sqrt{3}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

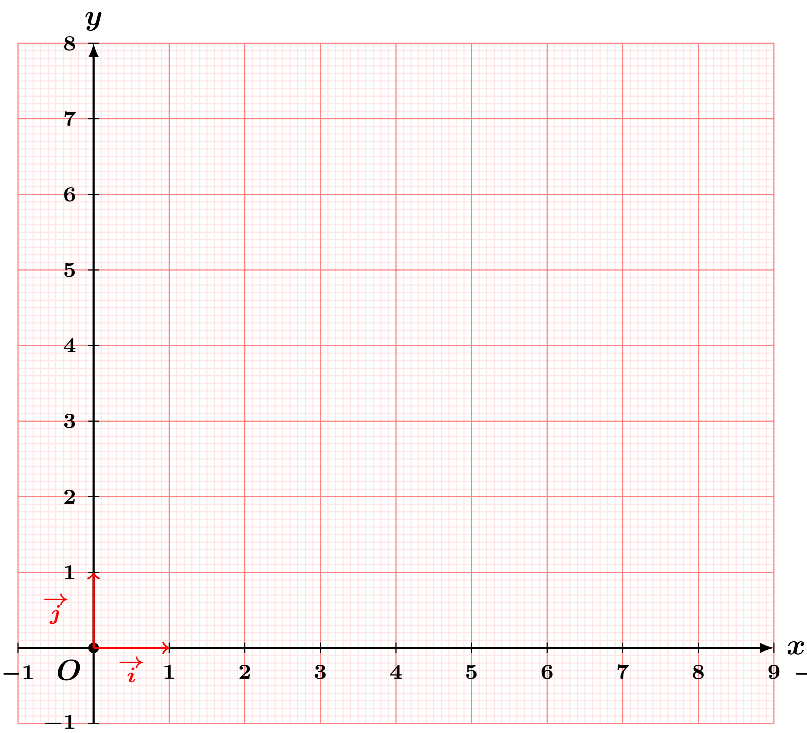
عيّن عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث : $\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| \leqslant k\left|u_n-\sqrt{3}\right|$

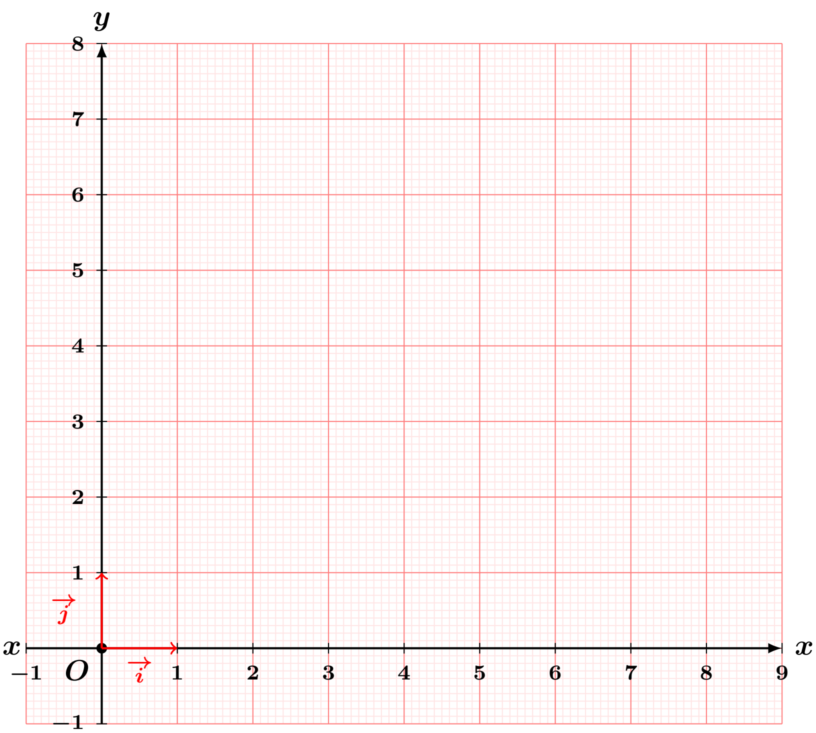
بيّن أنّه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_n-\sqrt{3}\right| \leqslant k^n\left|u_0-\sqrt{3}\right|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

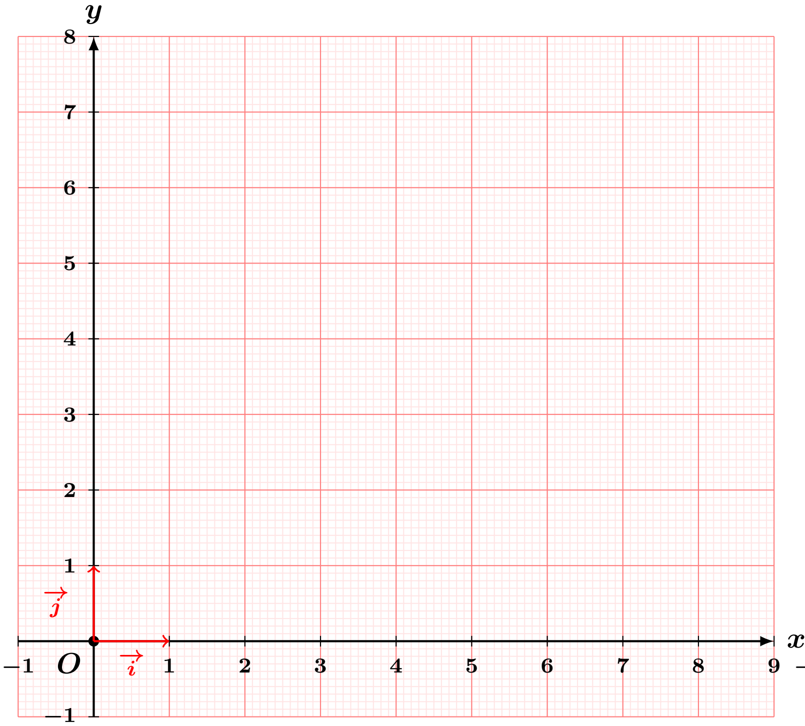
مرفقات لاستعمالها في الحل

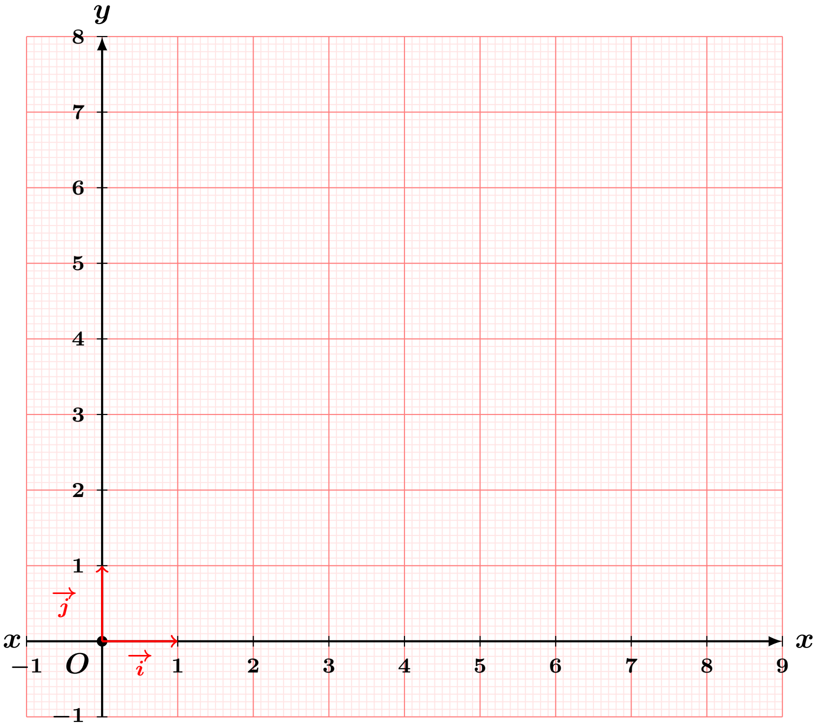


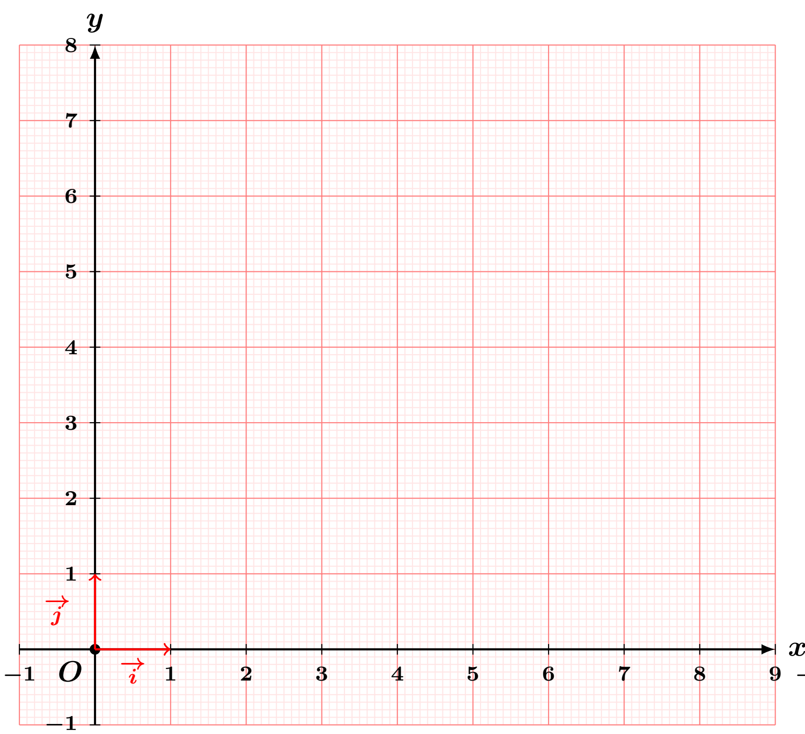


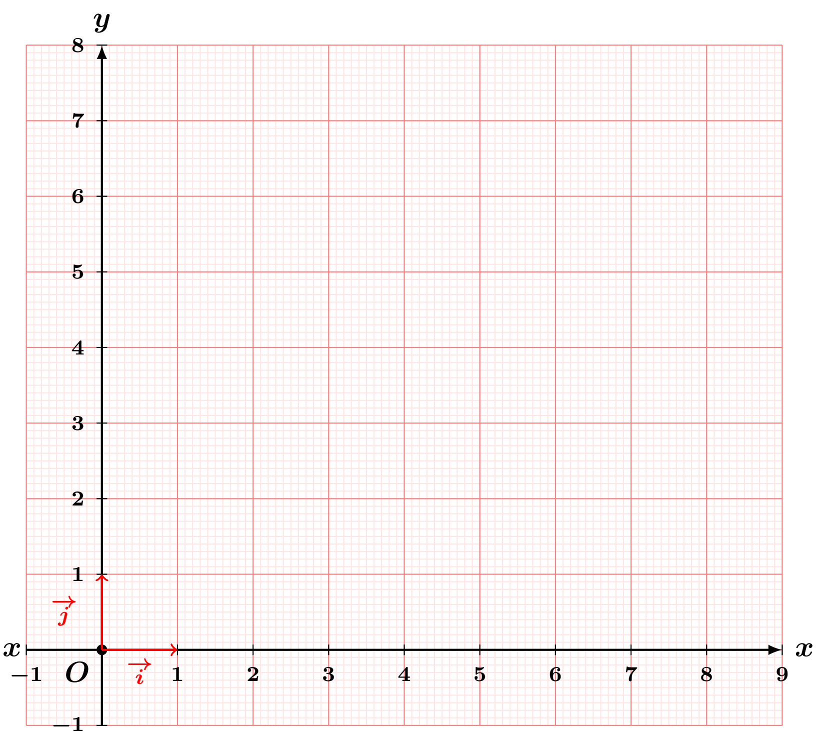





y
8
7
6
5
4
3
2
1
O
x
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
−1


y
8
7
6
5
4
3
2
1
O
x
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
−1


y
8
7
6
5
4
3
2
1
O
x
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
−1


y
8
7
6
5
4
3
2
1
O
x
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
−1

تمارين المستوى الرابع ★★★★

1 BAC شعبة علوم الطبيعة والحياة 1978 (النظام القديم) ★★★★

الانتقال الى الحل

- لتكن الأعداد الحقيقية الموجبة تماما a ؛ b ؛ c حدود متعاقبة من متتالية هندسية .

1 بين أن الأعداد $\ln a$ ؛ $\ln b$ ؛ $\ln c$ بهذا الترتيب حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

2 أحسب الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c علما أن: $\begin{cases} \ln abc = 21 \\ (\ln a)(\ln b)(\ln c) = -105 \end{cases}$.

2 مدرسة أشبال الأمة 2016 شعبة الرياضيات (04نقاط) ★★★★

الانتقال الى الحل

a و b عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$. (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـــ $u_0 = a$ ، $v_0 = b$ و من أجل كل طبيعي n

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1 أثبت من أجل كل طبيعي n أن $0 < u_n \le v_n$.

2 أ) بين من أجل كل طبيعي n أن $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. (يمكن استعمال النتيجة $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le 1$ حيث $x > 0$ و $y > 0$)

ب) استنتج أن $v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b - a)$ من أجل كل طبيعي n.

3 أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4 فيما يلي نضع $a = 2$ و $b = 5$

بواسطة آلة حاسبة احسب u_3 ثم استنتج قيمة مقربة بالنقصان إلى 10^{-3} للنهاية المشتركة للمتتاليتين.

3 الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد) ★★★★

الانتقال الى الحل

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = -1$ ، $u_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1 أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 أكتب النتائج على شكل كسر غير قابل للإختزال.

2 نعرف المتتاليتين (v_n) و (w_n) من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{و} \quad w_n = 2^n u_n$$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم عبر عن v_n بدلالة n.

ب) بين أن المتتالية (w_n) هي متتالية حسابية أساسها 3 ثم عبر عن w_n بدلالة n.

ت) استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3 أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \ge 2$ ، $\left(\frac{3}{2}\right)^n \ge n$.

ب) استنتج نهاية $\frac{n}{2^n}$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ ثم $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4 مدرسة أشبال الأمة 2019 شعبة علوم تجريبية (04نقاط) ★★★★

الانتقال الى الحل

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1 أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le n + 3$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

つづく

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل . هل هي متقاربة ؟ برّر.

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - n$

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) أحسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

3 نعتبر المتتالية (t_n) المعرّفة بـ : $t_n = \ln(v_n)$

أ) برهن أنّ المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أحسب المجموع : $S_n' = t_0 + t_1 + ... + t_n$.

5 BAC رياضيات 2020 الموضوع الثاني (05 نقاط) ★★★★

الانتقال إلى الحل

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases} \quad (\alpha \text{ عدد حقيقي})$$

المتتالية العددية (w_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = v_n - u_n$

1 أ . احسب w_0 ثمّ احسب w_1 بدلالة α.

ب. بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha-1)$.

جـ. اكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثمّ عيّن قيم α حتّى تكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

نفرض في كلّ ما يلي: $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

2 أ . أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و أنّ (v_n) متناقصة تماما.

ب. استنتج أنّ (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ.

3 بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n + v_n = 2$ ، واستنتج قيمة ℓ.

4 احسب بدلالة α المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2020}$.

6 BAC علوم تجريبية 2018 الموضوع الثاني (04 نقاط) ★★★★

الانتقال إلى الحل

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1 احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3.

2 بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3 (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n+1$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{u_n} = v_n$.

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4 احسب المجموعين S_n و T حيث:

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \quad \text{و} \quad T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \ldots + e^{u_{2018}}$$

7 مواضيع مقترحة للأستاذ (ثابت ابراهيم) ★★★★ الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر المتتاليتين العدديتين المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=-u_n+4v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=-2 \\ v_{n+1}=2u_n-3v_n \end{cases}$$

1 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n=u_n+v_n$

أ) برهن أنّ المتتالية (a_n) ثابتة.

ب) عبر عن الحد العام a_n .

ج) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=\sum_{i=0}^{i=n} a_i$

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $b_n=u_n-2v_n$.

أ) برهن أنّ المتتالية (b_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أحسب عبارة الحد العام b_n بدلالة n.

ج) أحسب بدلالة n المجموع: $S'_n=\sum_{i=0}^{i=n} b_i$.

د) استنتج عبارتي كل من u_n و v_n بدلالة n.

8 مدرسة أشبال الأمة 2016 شعبة علوم تجريبية (04.5 نقاط) ★★★★ الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=1$ و $u_1=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$u_{n+1}=2\alpha u_n+3\alpha^2 u_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[-\{0\}$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_{n+1}-3\alpha u_n$

1 أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α.

2 هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟

3 أحسب بدلالة α و n المجموع : $S_n=v_0+v_1+......+v_n$

4 عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{4}$

-استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.

5 في كل مايلي نضع $\alpha=-\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n=v_0\times v_1\times ....v_n$

أ/ بين أن : $\pi_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب/ عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n\le 3^{-44}$

1 مسابقة مفتش التعليم المتوسط 2019 (04 نقاط) ★★★★★ الانتقال إلى الحل

فيديو

لماذا نستعمل الحرف X للدلالة على المجهول في الرياضيات؟
▶fc.com/adel.maths17

$(U_n)_{n\in N^*}$ متتالية معرفة بحدها العام $U_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

1 احسب U_1 ، U_2 و U_3 .

2 بيّن أنّ المتتالية $(U_n)_{n\in N^*}$ ليست حسابية.

3 هل المتتالية $(U_n)_{n\in N^*}$ هندسية؟ برّر جوابك.

4 برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $0<U_n<1$.

5 أثبت أنّ المتتالية $(U_n)_{n\in N^*}$ متقاربة.

6 احسب المجموع S_{2019} حيث: $S_{2019}=U_1+U_2+....+U_{2019}$.

2 فقرة كلّ يوم سؤال بفكرة (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★ الانتقال إلى الحل

فيديو

طريقة رائعة ومفيدة جدا لحساب طول أي شيء عالي وانت واقف على الأرض.
▶fc.com/adel.maths17

نعتبر العدد A حيث : $A=3,2434343......$ (العدد 43 يتكرر لا نهاية من المرات).

نضع : $u_0=3,2$ ، $u_1=3,243$ ، $u_2=3,24343$ ، ...... ، $u_n=3,2\underbrace{4343.........43}_{n}$.

1 تحقق أنّ : $u_n=\dfrac{1}{10}\left(32+\dfrac{43}{100}+\dfrac{43}{100^2}+......+\dfrac{43}{100^n}\right)$.

2 أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{43}{100}+\dfrac{43}{100^2}+.......+\dfrac{43}{100^n}$.

3 إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

4 أكتب العدد A على شكل كسر .

3 مواضيع مقترحة (جيوخ العربي) ★★★★★ الانتقال إلى الحل

فيديو

أجمل أنشودة ممكن تسمعها حول الرياضيات / الإحصاء.
▶fc.com/adel.maths17

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعبارة التالية : $\begin{cases} u_0=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ u_{n+1}=\sqrt[3]{\dfrac{1-u_n^3}{7}}\ ,\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$، نضع : $v_n=8u_n^3-1$.

1 أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $0<u_n<1$.

ب- استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $-1<v_n<7$.

2 أ- أحسب v_0.

ب- بيّن أنّ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محدّدًا أساسها.

3 أ- أوجد عبارة v_n بدلالة n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ب- أحسب بدلالة n، المجموع : $S_n=\sum_{k=0}^{n+2020} v_k=v_0+v_1+\cdots+v_{n+2020}$.

4 سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★

الانتقال إلى الحل

نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

فيديو

طريقة رياضية لأخذ مربع من قطعة الشوكولاتة دون أن يلاحظ ذلك أحد...

▶fc.com/adel.maths17

1 نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) بيّن أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

جـ) عيّن أصغر عدد طبيعي p ، بحيث : إذا كان : $n \geq p$ ، فإن : $v_n < \dfrac{3}{4}$.

د) إستنتج أنّه إذا كان : $n \geq p$ فإنه يكون : $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$.

2 نضع من أجل $n \geq 5$: $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq (\dfrac{3}{4})^{n-5} \times u_5$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq \left[1 + \dfrac{3}{4} + (\dfrac{3}{4})^2 + ... + (\dfrac{3}{4})^{n-5}\right] \times u_5$.

جـ) إستنتج أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq 4u_5$.

3 بيّن أنّ المتتالية $(S_n)_{n\geq5}$ متزايدة ، ثمّ استنتج أنها متقاربة .

5 سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★

الانتقال إلى الحل

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ ، و من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

1 لتكن المتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $s_n = u_{n+1} + u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (s_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول .

ب) إستنتج عبارة s_n بدلالة n .

2 نضع : $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $t_n = v_{n+1} - v_n$.

❖) عبّر عن t_n بدلالة s_n .

3 عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n . (يمكن حساب المجموع : $t_0 + ... + t_{n-1}$ ، بطريقتين مختلفتين) .

❖) عيّن عند ئذ النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{u_n}{8^n})$.

6 سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★

الانتقال إلى الحل

نعرّف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$.

فيديو

رسوم متحركة جميلة...

فتيات القوة | باتركاب في مواجهة الرياضيات.

▶fc.com/adel.maths17

1 برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$u_{n+1} \leq 0{,}95 u_n$ ، إذا وافقط إذا كان : $(1 + \dfrac{1}{n})^{10} \leq 1{,}9$.

2 نعتبر الدالة f المعرّفة على $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^{10}$.

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم أحسب نهايتها عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّه يوجد عدد وحيد α من المجال $[1; +\infty[$ بحيث : $f(\alpha) = 1{,}9$.

ج) عيّن العدد الطبيعي n_0 ، بحيث يكون : $n_0 - 1 < \alpha < n_0$.

د) برهن أنّه من أجل كل $n \geq 16$ ، يكون : $(1 + \dfrac{1}{n})^{10} \leq 1{,}9$.

つづく

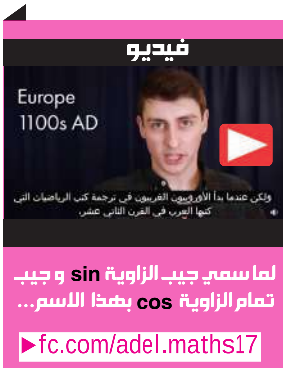
3 أ) عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) إبتداءا من الرتبة 16 .

ب) ماذا نستنتج بالنسبة لهذه المتتالية ؟ .

4 أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل $n \geq 16$ يكون : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$.

ب) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

7 مواضيع مقترحة (جيوخ العربي) ★★★★★ الحل — الانتقال



لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة بالصيغة التراجعية التالية :

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 تحقّق أنّ : $\omega^2 = \omega + 1$ ، $\frac{1}{\omega} = \omega - 1$، حيث : $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2 بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^n - (1-\omega)^n\right)$، واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

3 نعتبر المتتالية العددية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ بالعلاقة : $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

أ- أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، لدينا : $\omega^n\,(b_n - \omega)\,a_n = (-1)^n$.

ب- بيّن أنّ المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة، ثمّ أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

8 مسألة شاملة في المتتاليات (أحمد عبد الرحمان قوادري) ★★★★★ الحل — الانتقال

(I) (d_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأوّل d_0 و أساسها q' حيث :

$$(F) : \begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = -\frac{13}{27} \text{.........} (1) \\ d_0 \times d_1 \times d_2 = -\frac{1}{729} \text{.........} (2) \end{cases}$$

1 احسب d_0، d_1 و d_2، ثمّ استنتج الأساس q'.

2 اكتب d_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

3 عيّن أكبر عدد طبيعي n حتّى يكون : $d_n \prec -\frac{3}{10^3}$.

(II) a وسيط حقيقي موجب تماما .

f_a الدّالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; -a[\cup]-\frac{1}{a}; +\infty[$ كمايلي : $f_a(x) = \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x$.

1 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$.

(III) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = e^{f_a(v_n) - v_n} \end{cases}$$

1 برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \neq 0$.

2 عيّن قيمة a حتّى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

(IV) نفرض أنّ $a \neq 1$. b عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن $\frac{1}{a}$.

(w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \frac{v_n - b}{v_n + b}$.

1 أ - جد قيمة b حتّى تكون المتتالية (w_n) هندسية. يطلب تعيين كل من أساسها q، وحدّها الأول w_0 بدلالة a .

ب - من أجل قيمة b السابقة اكتب عبارة w_n، ثمّ استنتج عبارة v_n بدلالة كل من n و a .

つづく

ج - احسب كل من : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2 نضع في كلٍّ ممّا يلي $b=1$ و $a=3$.

أ - اكتب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

ب - اكتب بدلالة n المجموع s'_n حيث : $s'_n = \dfrac{1}{v_0+1} + \dfrac{1}{v_1+1} + \dfrac{1}{v_2+1} + ... + \dfrac{1}{v_n+1}$.

- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n$ ، ثمّ استنتج طبيعة المتتالية (s'_n) .

ج - اكتب بدلالة n المجموع s''_n حيث : $s''_n = \dfrac{1}{(v_0+1)^2} + \dfrac{1}{(v_1+1)^2} + \dfrac{1}{(v_2+1)^2} + ... + \dfrac{1}{(v_n+1)^2}$.

د - اكتب بدلالة كل من n و m المجموع h_n حيث : $h_n = w_0^m + w_1^m + w_2^m + ... + w_n^m$ مع m عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

ه - اكتب بدلالة n الجداء G_n حيث : $G_n = |w_0 \times w_1 \times w_2 \times .... \times w_n|$.

- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n$ ، ثمّ استنتج طبيعة المتتالية (G_n) .

و - اكتب بدلالة n الجداء E_n حيث : $E_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times e^{w_2} \times .... \times e^{w_n}$.

- ماهي طبيعة المتتالية (E_n) ؟ برّر إجابتك .

ي - اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = w_0^{2020} \times w_1^{2020} \times w_2^{2020} \times ..... \times w_n^{2020}$.

- بيّن أنّ المتتالية (P_n) متقاربة .

3 أ - تحقّق أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإنّ : $\dfrac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}} = \dfrac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1$.

ب - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ، ثمّ احسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

(V) نعتبر f_3 الدّالة العددية المعرفة على المجال $[1;4]$ كمايلي : $f_3(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{1+3x}\right) + x$.

ونسمّي (C_{f_3}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ حيث : $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 2cm$.

1 ادرس تغيّرات الدّالة f_3 على المجال $[1;4]$.

2 بيّن أنّ $\ln\left(\dfrac{3+x}{1+3x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3+9x}\right)$ ، ثمّ ادرس وضعية المنحنى (C_{f_3}) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ على المجال $[1;4]$.

3 مثّل بيانيا المنحنى (C_{f_3}) على المجال $[1;4]$.

3 هذا السؤال يتم حله فقط بعد التعرّف على الحساب التكاملي يُمكن تجنبه-

أ - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[1;4]$ فإنّ : $f'_3(x) \preceq f'_3(4)$.

ب - احسب $f'_3(4)$.

ج - بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 \preceq \dfrac{83}{91}(u_n - 1)$. (إرشاد : استعمل المتباينة $\int_1^{u_n} f'_3(x)\,dx \preceq \int_1^{u_n} f'_3(4)\,dx$) .

د - بيّن أنّه من أجل كل n عدد طبيعي : $0 \preceq u_n - 1 \preceq 2\left(\dfrac{83}{91}\right)^n$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4 برهن أنّه إذا كان $x \in [1;4]$ فإنّ : $f_3(x) \in [1;4]$.

(VI) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f_3(u_n)$.

1 أ - برّر وجود المتتالية (u_n) .

ب - باستعمال المنحنى (C_{f_3}) والمستقيم (Δ). مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل (دون حسابها ومبرزا خطوط الإنشاء) .

ج - ضع تخمينا حول اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

2 أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \preceq u_n \prec 4$.

ب - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \preceq u_n$ ، ثمّ استنتج إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج - أثبت أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثمّ أوجد نهايتها .

つづく

4 احسب $T_n \lim_{n\to+\infty}$ حيث :

$$T_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \ln\left(\frac{1+3u_k}{u_k+3}\right) = \ln\left(\frac{1+3u_0}{3+u_0}\right) + \ln\left(\frac{1+3u_1}{3+u_1}\right) + \ln\left(\frac{1+3u_2}{3+u_2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(\frac{1+3u_{n-1}}{3+u_{n-1}}\right)$$

(VII) نضع في هذا الجزء : $a=5$.

(L_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $L_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا : $L_{n+1}=2L_nf_5(L_n)-L_n^2$.

- نأخذ أنّ g الدّالة المعرفة على $[0;1]$ بـ : $g(x)=2x\ln\left(\frac{5+x}{1+5x}\right)+x^2$ متزايدة ، وأنّ $g(x)-x=0$ لمّا $x=1$.

1 برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $0\preceq L_n\preceq 1$.

2 أ - بيّن أنّه من أجل كل $x\in[0;1]$: $2\ln\left(\frac{5+x}{1+5x}\right)+x\succeq 1$.

ب - أثبت أنّ المتتالية (L_n) متزايدة (تذكّر أنّ حدود المتتالية (L_n) موجبة) .

ج - بيّن أنّ (L_n) متقاربة، ثمّ أوجد نهايتها .

3 بيّن أنّ المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان .

9 مسألة شاملة في المتتاليات (توامي عمر) ★★★★★

الانتقال الــى الحــــل

الجزء الأول : لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\alpha \quad (\alpha\neq 1) \\ u_{n+1}=\dfrac{8u_n-6}{u_n+1} \end{cases}$$

1 برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n\neq 1$.

2 حلى في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2-7x+6=0$

3 عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

الجزء الثاني : نفرض في كل ما يلي : $u_0=8$.

1 تحقق أن $u_n=8-\frac{14}{u_n+1}$، ثم برهن بالتراجع أن $u_n\geq 6$

2 أثبت أن : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-6)}{u_n+1}$ ،

- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3 أثبت أن (u_n) متقاربة نحو العدد ℓ وَ يحقق : $\ell^2-7\ell+6=0$

4 عين النهاية $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الجزء الثالث : نعتبر f دالةمعرفة $[1;8]$ بِـ: $f(x)=\frac{8x-6}{x+1}$

1 أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C_f) تمثيلها البياني .

2 بين أنه إذا كان $x\in[4;8]$ ، فإن $f(x)\in[4;8]$.

3 برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $6\leq u_n\leq 8$.

4 مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 وَ u_2.

5 أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

6 برهن بالتراجع على كل من n من $\mathbb{N}$ ، $u_n=1-\frac{5}{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}-1}$

ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الجزء الرابع : (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$

1 برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $4\leq v_n\leq 6$.

2 أثبت أن (v_n) متتالية متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

3 مثل على محور الفواصل الحدود v_0 ، v_1 وَ v_2 .

4 ما هو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (v_n) وَ تقاربها .

الجزء الخامس : نضع : $w_{n+1}=f(u_n)-f(v_n)$

1 أثبت من أجل $n\in\mathbb{N}$: $w_{n+1}=\frac{14(u_n-v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}$.

2 برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n\geq 0$.

3 بين أن : $u_{n+1}-v_{n+1}\leq\frac{14}{35}(u_n-v_n)$.

4 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-v_n\leq 4\left(\frac{14}{35}\right)^n$

- استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

つづく

الجزء السادس : (L_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$.

1 برهن أن (L_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

2 أوجد عبارة الحد العام L_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3 أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

4 أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = L_0 + L_1 + L_2 + ... + L_n$.

- استنتج بدلالة n المجموع :

$$S'_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + ... + \frac{1}{u_n - 1}$$

5 أحسب الجداء : $P_n = L_0^{2018} \times L_1^{2018} \times ... \times L_n^{2018}$.

الجزء السابع :

1 برهن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 6 = \dfrac{2\,(u_n - 6)}{u_n + 1}$.

2 عين عدداً حقيقياً k من المجال $]0; 1[$ بحيث :

$|u_{n+1} - 6| \leq k\,|u_n - 6|$.

3 بين من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $|u_n - 6| \leq 2\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

4 استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، يطلب تعيين نهايتها .

تمارين المستوى الأول ★

التمرين 01

مجلة المتتاليات العددية (قويسم ابراهيم الخليل)

❶ المتتالية (v_n): ⟵ ب/ هندسية

التعليل:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$$

❷ نهاية المتتالية (u_n): ⟵ ج/ $-\infty$

التعليل: لدينا: $v_n = v_0 q^n = -\frac{1}{2}(3)^n$ ولدينا:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2} \Rightarrow u_n = v_n - \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow u_n = -\frac{1}{2}(3)^n - \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow u_n = -\frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}(3^n + 1)\right) = -\infty$

❸ ⟵ ج/ $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left(1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \cdots + e^{n\ln 3}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(e^{0\ln 3} + e^{1\ln 3} + e^{2\ln 3} + \cdots + e^{n\ln 3}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(e^{\ln 3^0} + e^{\ln 3^1} + e^{\ln 3^2} + \cdots + e^{\ln 3^n}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}(3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}\right)$$
$$= -\frac{1}{-4}(1 - 3^{n+1})$$
$$= \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$

التمرين 02

مجلة العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1ـ حساب u_0:

نكتب الحدود u_1، u_2 و u_3 بدلالة الحد الأول u_0

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 5 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 10 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 15 \end{cases}$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$ تصبح: $u_0 + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34$

ومنه: $4u_0 = 34 - 30$ ويكون: $4u_0 = 4$ إذن: $\boxed{u_0 = 1}$.

つづく

تمارين المستوى الأول ★

2.تبيان أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 5n + 1$:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$، إذن: $\boxed{u_n = 1 + 5n}$.

3.تعيين العدد الطبيعي n بحيث، $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$:

- لدينا: $u_n = 5n + 1$ ومنه: $u_{n+1} = 5(n+1) + 1 = 5n + 6$
- لدينا: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$ معناه: $(5n+6) + (5n+1) - 8n = 4033$

ومنه: $7 + 2n = 4033$

وعليه: $2n = 4026$ إذن: $\boxed{n = 2013}$.

4.حساب المجموع، $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$:

لدينا: $u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10066$

ومنه: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013} = (2013 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{2013}}{2}\right) = \frac{2014}{2}(1 + 10066)$

وعليه: $S = 1007(10067) = 10137469$.

5.لدينا: المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة، $v_n = 2u_n + 1$.

أ) دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n):

ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$

لدينا: $v_n = 2u_n + 1$، ولدينا: $u_{n+1} = u_n + 5$ لأن (u_n) حسابية أساسها 5.

نجد: $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 5) + 1 = 2u_n + 11$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = (2u_n + 11) - (2u_n + 1) = 10 > \mathbf{0}$

إذن: (v_n) متزايدة تماما.

ب) حساب المجموع، $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{2013}$:

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{2013} = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \cdots + (2u_{2013} + 1)$

ومنه: $S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}) + 1(2013 - 0 + 1) = 2S + 2014$

إذن: $\boxed{S' = 20276951}$.

التمرين 03

مجلة المتتاليات العددية (ياحي رشيد)

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = ln u_n$.

1) خطأ التعليل نأخذ مثلا (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)_n$ واضح أن حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما و ان المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ لكن، $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} ln(u_n) = -\infty$ اذا (v_n) ليست متقاربة .

2) صحيح التعليل (u_n) متناقصة تعني أن $u_{n+1} < u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n ومنه $ln(u_{n+1}) < ln(u_n)$ أي $v_{n+1} < v_n$ وبالتالي (v_n) متناقصة.

つづく

تمارين المستوى الأول ★

3) صحيح التعليل إذا كانت (u_n) هندسية فإنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ حيث q هو أساس المتتالية (u_n) وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$v_{n+1}-v_n=ln(u_{n+1})-ln(u_n)=ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=ln(q)$$

وبالتالي (v_n) حسابية أساسها $r=ln(q)$

التمرين 04

مجلة العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: (u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r، حدها الأول u_1 و$u_3=7$.

1.أ) حساب بدلالة r الجدائين $T_1=u_1\times u_5$ و$T_2=u_2\times u_4$:

لدينا: $u_n=u_p+(n-p)r$

ومنه: $u_n=\boldsymbol{u_3}+(n-\boldsymbol{3})r$ وعليه: $\begin{cases} u_1=\boldsymbol{u_3}+(1-\boldsymbol{3})r=\boldsymbol{7}-2r \\ u_2=\boldsymbol{u_3}+(2-\boldsymbol{3})r=\boldsymbol{7}-r \\ u_4=\boldsymbol{u_3}+(4-\boldsymbol{3})r=\boldsymbol{7}+r \\ u_5=\boldsymbol{u_3}+(5-\boldsymbol{3})r=\boldsymbol{7}+2r \end{cases}$

وبالتالي: $\boldsymbol{T_1}=u_1\times u_5=(7-2r)(7+2r)=7^2-(2r)^2=\boldsymbol{49-4r^2}$

و $\boldsymbol{T_2}=u_2\times u_4=(7-r)(7+r)=7^2-(r)^2=\boldsymbol{49-r^2}$

ب) تعيين الأساس r بحيث $T_2-T_1=27$:

لدينا: $T_2-T_1=27$ تكافئ: $(49-r^2)-(49-4r^2)=27$

ومنه: $49-r^2-49+4r^2=27$

وعليه: $r^2=\frac{27}{3}$

أي: $r^2=9$

وبالتالي: $r=\sqrt{9}=3$ أو $r=-\sqrt{9}=-3$

وبمأن (u_n) حسابية متزايدة (أساسها موجب)، فإن: $\boxed{r=3}$.

2.بوضع $r=3$.

أ) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$، حدها الأول $u_1=\boldsymbol{7}-2(3)=1$

فإن: $u_n=u_1+(n-1)r$، بالتعويض نجد: $u_n=1+(n-1)(3)$ إذن: $\boxed{u_n=3n-2}$.

ب) $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ (n عدد طبيعي غير معدوم)

تبيان أن: $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$:

لدينا: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=(n-1+1)\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)=n\left(\frac{1+(3n-2)}{2}\right)=n\left(\frac{3n-1}{2}\right)$

ومنه: $S_n=\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$.

つづく

تمارين المستوى الأول

ج) إيجاد العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 145$:

$S_n = 145$ معناه: $\frac{3n^2-n}{2} = 145$

ومنه: $3n^2 - n - 290 = 0$

مميزها: $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290) = 1 + 3480 = 3481 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1+59}{6} = \frac{60}{6} = 10 \in \mathbb{N}$$

و $$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1-59}{6} = \frac{-29}{3} \notin \mathbb{N}$$

إذن: $\boxed{n = 10}$ ($S_{10} = 145$).

3.أ) كتابة الحد u_{n+5} بدلالة n:

لدينا: $u_n = 3n - 2$

ومنه: $u_{n+5} = 3(n+5) - 2 = 3n + 15 - 2 = 3n + 13$، إذن: $\boxed{u_{n+5} = 3n + 13}$.

ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$:

لدينا: $\frac{u_{n+1}}{n} = \frac{3n+13}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

ج) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا:

$\frac{u_{n+1}}{n} \in \mathbb{N}$ معناه: $3 + \frac{13}{n} \in \mathbb{N}$ ومنه: $\frac{13}{n} \in \mathbb{N}$ وعليه: $n \in D_{13}$ أي: $n \in \{1; 13\}$

(قيم n هي قواسم العدد 13)

إذن: $\boxed{n = 1}$ أو $\boxed{n = 13}$.

التمرين 05

جواليل أحمد أسامة + ياحي رشيد + بوعزة مصطفى

• لدينا $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ و $w_n = 4\times 5^n - 2n + 1$ نضع $v_n = -2n+1$ و $u_n = 4\times 5^n$ نلاحظ أن (v_n) متتالية حسابية و (u_n) هندسية أساسها 5 و حدها الأول $u_0 = 4$: و منه $S_n = 4\times\frac{5^{n+1}-1}{5-1} + \frac{n+1}{2}[1-2n+1]$ أي أن $S_n = 5^{n+1} - 1 + \frac{n+1}{2}[2-2n]$ إذن $S_n = 5^{n+1} - 1 + (n+1)(1-n)$ و منه $S_n = 5^{n+1} - n^2$ الإجابة الصحيحة هي ب).

• لدينا المتتالية (u_n) هندسية عبارة حدها العام $u_n = e^{-\frac{1}{2}+n}$ و منه $\ln u_n = -\frac{1}{2} + n$ إذن $(\ln u_n)$ متتالية حسابية

و $S_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$ أي أن $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ldots + \ln(u_n) = \frac{n+1}{2}[\ln(u_0) + \ln(u_n)]$ و منه

$S_n = \frac{n+1}{2}\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + n\right] = \frac{(n+1).(-1+n)}{2}$ إذن $S_n = \frac{n^2-1}{2}$ الإجابة الصحيحة هي أ).

つづく

تمارين المستوى الأول ★

• المتتالية الحسابية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ و أساسها $r = 2$ نضع $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times ... \times e^{u_n}$.

حساب عبارة P_n : $P_n = e^{u_0+u_1+...+u_n} = e^{\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)}$ و منه $P_n = e^{\frac{n+1}{2}(1+2n+1)}$ إذن $P_n = e^{(n+1)^2}$ و منه الإجابة الصحيحة هي ب)

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ و أساسها 4؛ لدينا: $v_1 = v_0 + 4 = 1 + 4 = 5$ و
ومنه: $v_n = v_0 + 4n = 1 + 4n$

$$v_0 + v_1 ... + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(5 + 1 + 4n) = \frac{n}{2}(6 + 4n)$$

ومنه: $\frac{n}{2}(6 + 4n) = 2015$ أي $4n^2 + 6n - 3030 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية. مميزها
$\Delta = 6^2 - 4 \times 4 \times (-4030) = 64516$ وبالتالي: المعادلة تقبل حلان هما:
$\frac{-6 - \sqrt{64516}}{2(4)} = \frac{-6 - 254}{8} = -32,5$ وهذا الحل مرفوض لأن n عدد طبيعي.
الحل الثاني هو: $\frac{-6 + \sqrt{64516}}{2(4)} = \frac{-6 + 254}{8} = 31$ وبالتالي الإجابة الصحيحة هي : أ) $n = 31$

• المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ و
$v_0 + v_1 + ... + v_n = [\ln 2 - \ln 1] + [\ln 3 - \ln 2] + ... + [\ln(n+2) - \ln(n+1)]$ يعني أن
$v_0 + v_1 + ... + v_n = \ln(n+2) - \ln(1) = \ln(n+2)$ إذن الإجابة الصحيحة هي ب)

• المتتالية الهندسية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما أساسها العدد الحقيقي q الموجب تماماً و الذي يختلف عن 1 : نضع $v_n = \ln(w_n)$
لدينا $v_{n+1} = \ln(w_{n+1}) = \ln(w_n . q)$ أي أن $v_{n+1} = \ln(w_n) + \ln(q)$ و منه $v_{n+1} = v_n + \ln(q)$ و منه (v_n) حسابية أساسها $\ln(q)$ إذن الإجابة الصحيحة هي ب)

• نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$
من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 2^{n+1} \times 3^{n-1+1}}{5 \times 2^n \times 3^{n-1}} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{2^n} \times 2 \times \cancel{3^n}}{\cancel{5} \times \cancel{2^n} \times \cancel{3^n} \times 3^{-1}} = 2 \times 3 = 6$$

وبالتالي الإجابة الصحيحة هي : ب) (u_n) هندسية أساسها 6

• الحد العام للمتتالية العددية المعرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$ هو أ)
لأن $u_0 = -3 + 6 = 3$ و $u_{n+1} = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6 = \frac{1}{2}\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right] + 3 = \frac{1}{2}u_n + 3$ محققة .

• a عدد حقيقي : a و $a+2$ و $a+6$ حدود متتابعة من متتالية هندسية يعني أن $(a+2)^2 = a.(a+6)$ أي أن $a^2 + 6a = a^2 + 4a + 4$ يكافئ أن $6a = 4a + 4$ أي أن $2a = 4$ و منه $a = 2$ الإجابة الصحيحة أ).

• β عدد حقيقي تكون الأعداد $e^\beta + 1$ و $e^\beta + 2$ و $2.e^\beta$ حدود متتابعة من متتالية هندسية يعني
$(e^\beta + 1)2e^\beta = (e^\beta + 2)^2$ يعني $2e^{2\beta} + 2e^\beta = e^{2\beta} + 4e^\beta + 4$ يكافئ $e^{2\beta} - 2e^\beta - 4 = 0$ بوضع $e^\beta = x$ تصبح
المعادلة $x^2 - 2x - 4 = 0$ نحسب المميز $\Delta = 20$ منه $x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$ مقبول و $x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}$ مرفوض
$e^\beta = 1 + \sqrt{5}$ و منه $\beta = \ln(1 + \sqrt{5})$ و منه الإجابة الصحيحة هي جـ)

つづく

تمارين المستوى الأول

(v_n) متتالية هندسية أساسها: $\boxed{q=\frac{v_{n+1}}{v_n}}$ ، $q=\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{3^{-2n}\times 3^{-2}}{3^{-2n}}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$.

التمرين 06

حلول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$

1) تبيان أن (u_n) متتالية هندسية:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=e^{\frac{1}{2}-(n+1)}=e^{\frac{1}{2}-n-1}=e^{\frac{1}{2}-n}\times e^{-1}=\frac{1}{e}u_n$

ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0=e^{\frac{1}{2}-0}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{2}-n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{e}\times\left(\frac{1}{e}\right)^n\right]=0$$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) حساب المجموع S_n :

$$S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=\sqrt{e}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}\right]=\frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right)$$

II) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\ln(u_n)$

1) كتابة v_n بدلالة n :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\ln(u_n)$ ومنه $v_n=\ln(u_n)=\ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right)=\frac{1}{2}-n$.

استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}-(n+1)-\left(\frac{1}{2}-n\right)=-1$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=-1$ و حدها الأول $v_0=\ln(u_0)=\ln\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2}$.

2) أ- حساب العدد P_n :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$P_n=\ln(u_0\times u_1\times u_2\times\ldots\times u_n)=\ln u_0+\ln u_1+\ldots+\ln u_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$$

ومنه $P_n=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)=\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(n+1)(1-n)}{2}=\frac{1-n^2}{2}$

つづく

تمارين المستوى الأول ★

بـ- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n+4n>0$.

$P_n+4n>0$ يكافئ $\frac{1-n^2}{2}+4n>0$ يكافئ $\frac{1+8n-n^2}{2}>0$ يكافئ $-\frac{1}{2}n^2+4n+\frac{1}{2}>0$

و لدينا : $-\frac{1}{2}n^2+4n+\frac{1}{2}>0$ يكافئ $n\in\left]4-\sqrt{17};4+\sqrt{17}\right[$ أي $n\in[0;8]$

و منه مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n+4n>0$ هي : $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

التمرين 07

دليل الأستاذ للسنة الثالثة ثانوي

1) $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+2ca-b^2+c^2$

بما أن $b^2=ac$ فإن $2b^2=2ac$ ، و منه $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

2) لدينا $\begin{cases}a+b+c=78\\a^2+b^2+c^2=3276\end{cases}$ معناه $\begin{cases}a+b+c=78\\(a+b+c)(a-b+c)=3276\end{cases}$ أي $\begin{cases}a+b+c=78\\a-b+c=42\end{cases}$

إذن $2b=78-42=36$ أي $b=18$.

$\begin{cases}a+c=60\\ac=18^2=324\end{cases}$ ؛ a و c هما حلا المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2-60x+324=0$. إذن

$(a;b;c)=(6;18;54)$ أو $(a;b;c)=(54;18;6)$.

التمرين 08

حلول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

1) $I=[1;2]$ ، $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- تبيان أن الدالة f متزايدة على I.

الدالة f قابلة للإشتقاق على I و $f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}$.

و منه من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على I.

بـ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على I و منه من أجل كل $x\in[1;2]$، $f(x)\in[f(1);f(2)]$

و لدينا : $f(2)=2$ و $f(1)=1$ ، إذن من أجل كل $x\in I$، $f(x)\in I$

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 2$ "

つづく

تمارين المستوى الأول ★

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ و منه $1\le u_0\le 2$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1\le u_n\le 2$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 2$.

لدينا حسب الفرض $1\le u_n\le 2$ و منه حسب السؤال (أ) $1\le f(u_n)\le 2$ أي: $1\le u_{n+1}\le 2$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 2$.

بـ- دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n=\frac{u_n^2-3u_n+2}{-u_n+4}=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$.

و بما أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 2$ فإن $u_n-1\ge 0$ و $u_n-2\le 0$ و $-u_n+4>0$

و بالتالي $u_{n+1}-u_n<0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ج المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}=u_n$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$، و نبرهن صحة $P(n+1)$

أي $u_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$.

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{u_n+2}{-u_n+4}=-1+\frac{6}{-u_n+4}=-1+\frac{6}{4-u_n}=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

و منه $P(n+1)$ صحيحة. • الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

つづく

تمارين المستوى الأول ★

بـ- $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} \right) = 1$ لأن : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$.

تمارين المستوى الثاني ★★

التمرين 01

العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي، $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$.

1ـأ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة **01**: من أجل $n = 0$

لديناً: $u_0 = 3 > -3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة **02**:

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > -3$ (فرضية التراجع)
- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} > -3}$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n > -3$

ومنه: $\frac{2}{3}u_n > -2$

وعليه: $\frac{2}{3}u_n - 1 > -2 - 1$

أي: $\boxed{u_{n+1} > -3}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n > -3$.

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n = \left(\frac{2}{3} - 1\right)u_n - 1 = -\frac{1}{3}u_n - 1$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n > -3$

ومنه: $-\frac{1}{3}u_n < 1$

وعليه: $-\frac{1}{3}u_n - 1 < 1 - 1$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$، إذن: (u_n) **متناقصة تماما.**

جـ) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) **متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل** ($u_n > -3$) **فإنها متقاربة.**

2ـلدينا: (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث، $v_0 = 6$ و $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18$

أ) تبيان أن، $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$:

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right] = \frac{v_0}{1-q}$

لأن بما أن (v_n) **متتالية هندسية متقاربة أساسها** q، فإن $-1 < q < 1$ وبالتالي: $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$.

ب) حساب الأساس q:

لدينا: $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18 \\ \lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{v_0}{1-q} = \frac{6}{1-q} \end{cases}$ ومنه: $\frac{6}{1-q} = 18$ وعليه: $1 - q = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ إذن: $\boxed{q = \frac{2}{3}}$

つづく

تمارين المستوى الثاني ★★

تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

جـ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_n = v_n - 3$:

نستعمل البرهان بالتراجع، نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = v_0 - 3 = 6 - 3 = 3$

إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n = v_n - 3$ (**فرضية التراجع**)
- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} = v_{n+1} - 3}$

البرهان: لدينا: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 = \frac{2}{3}(v_n - 3) - 1 = \frac{2}{3}v_n - 2 - 1 = v_{n+1} - 3$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n = v_n - 3$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n: لدينا: $u_n = v_n - 3$ ومنه: $\boxed{u_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}$.

التمرين 02

تمارين المراجعة النهائية (سعيد وزاني)

المعطيات :
- (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = u_n + 3n + 4$.
- (v_n) متتالية عددية معرفة بحدها العام : $v_n = 3n + 4$.

1. تبيان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول :

لدينا : $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 4 - (3n+4) = 3$.

إذن : (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول : $v_0 = 3(0) + 4 = 4$.

2. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = v_n$، فيكون : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$

$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + ... + (u_n - u_{n-1})$

$= (\cancel{u_1} + \cancel{u_2} + \cancel{u_3} + ... + \cancel{u_{n-1}} + u_n) - (u_0 + \cancel{u_1} + \cancel{u_2} + ... + \cancel{u_{n-1}})$ إذن : $S_n = u_n - u_0$.

3. استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $S_n = u_n - u_0$، فيكون : $S_n = u_0 + u_n$

لكن : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}[4 + 3(n-1) + 4] = \frac{1}{2}n(3n+5)$

فيكون : $u_n = u_0 + s_n = 2 + \frac{1}{2}n(3n+5) = \frac{1}{2}(3n^2 + 5n + 4)$.

つづく

تمارين المستوى الثاني ★★

4. تعيين رتبة الحد الذي قيمته 13 :

$u_n=13$ تكافئ : $\frac{1}{2}(3n^2+5n+4)=13$

$\Leftrightarrow 3n^2+5n-22=0$

$\Leftrightarrow (3n+11)(n-2)=0$ ، ومنه : $n=2$. إذن : الحد الذي قيمته 13 هو الحد الثالث.

التمرين 03

تمارين المراجعة النهائية (سعيد وزاني)

المعطيات : (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0=0$، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$.

.1 حساب $u_1;u_2$ و u_3 :

$n=0$: $u_1=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$. $n=1$: $u_2=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$. $n=1$: $u_3=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$.

I.2 حساب $w_0;w_1;w_2$ و w_3 حيث : $w_n=\frac{n}{n+1}$.

• $w_0=\frac{0}{1}=0$; $w_1=\frac{1}{2}$; $w_2=\frac{2}{3}$; $w_3=\frac{3}{4}$.

I.3 البرهان باستعمال التراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=w_n$.

نفرض $P(n)$ القضية " $u_n=w_n$ "، فيكون :

$n=0$: $u_0=w_0=0$.   إذن : $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة، أي أن : $u_n=w_n$ ثم نبرهن على أنها صحيحة من أجل المرتبة $n+1$ كذلك، أي أن : $u_{n+1}=w_{n+1}$.

لدينا : $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-w_n}=\frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{2(n+1)-n}=\frac{n+1}{n+2}=w_{n+1}$.   إذن : $P(n+1)$ صحيحة أيضا.

النتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=w_n$.

II.1 تبيان أن : $v_1+v_2+v_3+v_4=-\ln 5$، حيث $v_n=\ln\frac{n}{n+1}$:

$v_1+v_2+v_3+v_4=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+\ln\frac{4}{5}=\ln\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\right)=-\ln 5$.

II.2 حساب المجموع :

$$S_n=v_1+v_2+v_3+.....+v_n=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+.....+\ln\frac{n}{n+1}$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\ \cdots\ .\frac{n-1}{n}.\frac{n}{n+1}\right)=\ln\frac{1}{n+1}$$

إذن : $S_n=-\ln(n+1)$.

II.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=-(+\infty)=-\infty$.

التمرين 04

مجلة الرائد (بالعبيدي محمد العربي)

1) تبيان أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم حساب وحدّها الأول

(v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $v_{n+1}=\frac{1}{2}.v_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

つづく

تمارين المستوى الثاني ★★

لدينا: $v_n=\frac{1}{2}\ln u_n+\frac{1}{2}$ ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{2}\ln u_{n+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\ln\sqrt{\frac{u_n}{e}}+1)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln\frac{u_n}{e}+1)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln u_n-\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}v_n$

الحد الأول هو $v_0=\frac{1}{2}\ln u_0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln e^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2) كتابة v_n، ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

(v_n) هندسية أساسها q معناه $v_n=v_0.q^n$ وعليه $v_n=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا: $v_n=\frac{1}{2}\ln u_n+\frac{1}{2}$ ومنه: $\ln u_n=2v_n-1$ ومنه: $u_n=e^{2v_n-1}$ وعليه $u_n=e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n، ثم حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

$S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=\frac{3}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]=3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية.

$\lim\limits_{x\to+\infty} S_n=\lim\limits_{x\to+\infty} 3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=3$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$

4) إيجاد بدلالة n الجداء $P_n=u_0\times u_1\times..\times u_n$ ، ثم حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n$.

لدينا: $P_n=u_0\times u_1\times..\times u_n=e^{2v_0-1}\times e^{2v_1-1}\times..\times e^{2v_n-1}=e^{2(v_0+v_1+...+v_n)-(n+1)}=e^{2(S_n)-(n+1)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} P_n=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2(S_n)-(n+1)}=0$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-(n+1)}\right)=0$.

التمرين 05

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

لدينا $\begin{cases}\ln v_5+\ln v_3=8\ln 2\\ \ln v_5-\ln v_3=2\ln 2\end{cases}$.

1. إثبات أن $v_5=32$ و $v_3=8$: $\begin{cases}\ln v_5+\ln v_3=8\ln 2\\ \ln v_5-\ln v_3=2\ln 2\end{cases}$ بالجمع نجد $2\ln v_5=10\ln 2$ و منه $\ln v_5=5\ln 2$ و منه $\ln v_5=\ln 2^5$ أي أن $v_5=2^5$ إذن $v_5=32$.

$\begin{cases}\ln v_5+\ln v_3=8\ln 2\\ \ln v_5-\ln v_3=2\ln 2\end{cases}$ بالطرح نجد $2\ln v_3=6\ln 2$ يكافئ $\ln v_3=3\ln 2$ أي أن $\ln v_3=\ln\left(2^3\right)$ إذن $v_3=\left(2^3\right)$ أي أن $v_3=8$.

2. أ- إثبات أن $q=2$; $v_0=1$: $v_5=v_3.q^2$ يعني أن $q^2=\frac{v_5}{v_3}=\frac{32}{8}$ أي $q^2=4$ إذن $q=2$ لان حدود المتتالية موجبة .

لدينا $v_3=v_0\,q^3$ يعني أن $v_0=\frac{v_3}{q^3}=\frac{8}{2^3}=1$ صحيحة .

ب- كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\,q^n$ أي $v_n=2^n$.

ج- العدد 1024 حد من حدود المتتالية يعني أن $v_n=1024$ لها حل طبيعي أي $2^n=1024$ يعني أن $\ln\left(2^n\right)=\ln(1024)$ أي أن $n.\ln(2)=\ln(1024)$ و منه $n=\frac{\ln(1024)}{\ln 2}$ إذن $n=10$ و منه العدد 1024 حد من حدود هذه المتتالية .

つづく

تمارين المستوى الثاني ★★

3. لدينا $w_n = 2n-3+2^n$:

أ. التحقق : $w_n = 2n-3+2^n$ أي أن $w_n = 2n-3+v_n$ نضع $u_n = 2n-3$ و منه $w_n = u_n + v_n$

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ و حدها الأول $u_0=-3$ (لأنها تكتب على الشكل $u_n = u_0 + nr$ المطابقة نجد الأساس و الحد الأول).

ب. لدينا $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ و $w_n = u_n + v_n$ يعني أن $S_n = (u_0+v_0)+(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)$ أي أن

$S_n = [u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n]+[v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n]$ يعني أن $S_n = \frac{n+1}{2}(u_0+u_n)+v_0\cdot\left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right]$ و منه

$S_n = \frac{n+1}{2}(-3+2n-3)+\left[\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right]$ إذن $S_n = \frac{n+1}{2}(2n-6)+2^{n+1}-1$ أي أن $S_n = \frac{2(n+1)}{2}(n-3)+2^{n+1}-1$ و منه

$S_n = (n+1)(n-3)+2^{n+1}-1$ و هو المطلوب .

التمرين 06

العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3} \end{cases}$؛ حيث a وسيط حقيقي.

1.تعيين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه: $\boxed{u_0 = u_n = u_{n+1} = 3}$

ومنه: $3 = \left(\frac{2a+1}{3}\right)3 - \frac{2a+4}{3}$

وعليه: $\frac{6a+3-2a-4}{3} = 3$

ويكون: $4a-1=9$، وبالتالي: $4a-1=9$ إذن: $\boxed{a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}}$.

2.لدينا: $a \neq \frac{5}{2}$،

تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية:

(u_n) حسابية معناه: $\frac{2a+1}{3} = 1$ ومنه: $\boxed{a=1}$.

حساب u_n: أساس المتتالية الحسابية (u_n) هو: $r = -\frac{2(1)+4}{3} = -2$

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ إذن: $\boxed{u_n = 2n+3}$.

حساب مجموع n حدا الأولى من المتتالية:

لدينا: $\underbrace{u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}}_{\text{مجموع } n \text{ حدا الأولى}} = ((n-1)-0+1)\left(\frac{u_0+u_{n-1}}{2}\right) = n\left(\frac{3-2(n-1)+3}{2}\right)$

ومنه: $\underbrace{u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}}_{\text{مجموع } n \text{ حدا الأولى}} = n\left(\frac{-2n+8}{2}\right) = n(4-n)$

つづく

تمارين المستوى الثاني ★★

3تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية:

(u_n) هندسية معناه: $-\frac{2a+4}{3}=0$ ومنه: $\boxed{a=-2}$.

تعيين u_{50}: أساس المتتالية الهندسية (u_n) هو: $q=\frac{2(-2)+1}{3}=-1$

لدينا: $u_n=u_0\times q^n$ وبالتالي: $u_n=3(-1)^n$، إذن: $\boxed{u_{50}=3(-1)^{50}=3}$.

تعيين مجموع 50 حدا الأولى من المتتالية:

لدينا: $\underbrace{u_0+u_1+\cdots+u_{49}}_{\text{مجموع 50 حدا الأولى}}=u_0\left(\frac{1-q^{49-0+1}}{1-q}\right)=3\left(\frac{1-(-1)^{50}}{1-(-1)}\right)=0$

4لدينا: $a=4$ نجد: $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=3u_n-4\end{cases}$

البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، فإن $u_n=3^n+2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n=0$

لدينا: $u_0=3^0+2=3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n=3^n+2$ (فرضية التراجع)
- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1}=3^{n+1}+2}$

البرهان: لدينا: $u_{n+1}=3u_n-4=3(3^n+2)-4=3^1\times3^n+6-4=3^{n+1}+2$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n=3^n+2$.

تبيان أن $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}+4n+3)$:

لدينا: $u_0+u_1+\cdots+u_n=(3^0+2)+(3^1+2)+\cdots+(3^n+2)$

ومنه: $u_0+u_1+\cdots+u_n=(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^n)+2(n-0+1)$

وعليه: $u_0+u_1+\cdots+u_n=(1+3+3^2+\cdots+3^n)+2(n+1)$

ويكون: $u_0+u_1+\cdots+u_n=\left(\frac{1-3^{n-0+1}}{1-3}\right)+2(n+1)=\frac{3^{n+1}-1}{2}+2n+2$

وبالتالي: $u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1+4n+4)=\frac{1}{2}(3^{n+1}+4n+3)$

التمرين 07

حلول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=6\\ v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1\end{cases}$

1) حساب الحدّين u_1 و v_1:

$u_1=\frac{3}{4}u_0+1=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$ ، $v_1=\frac{3}{4}v_0+1=\frac{3}{4}\times6+1=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$

つづく

تمارين المستوى الثاني ★★

2) أ- كتابة $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}+1-u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}+1-\left(\frac{3}{4}u_n+1\right)=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$

ب- البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لنثبت أنه : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}\geq u_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\geq u_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و $u_1==\frac{7}{4}$ و منه $u_1>u_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_{n+1}\geq u_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $u_{n+1}\geq u_n$ و منه $u_{n+1}-u_n\geq 0$ و لدينا مما سبق $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$

و منه $u_{n+2}\geq u_{n+1}$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}\geq u_n$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

- البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما :

لنثبت أنه : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}\leq v_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}\leq v_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $v_0=6$ و $v_1==\frac{11}{2}=5{,}5$ و منه $v_1<v_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $v_{n+1}\leq v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $v_{n+2}\leq v_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $v_{n+1}\leq v_n$ و منه $v_{n+1}-v_n\leq 0$ و لدينا $v_{n+2}-v_{n+1}=\frac{3}{4}(v_{n+1}-v_n)$ و منه $v_{n+2}\leq v_{n+1}$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}\leq v_n$ و بالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=u_n-v_n$

تبيان أن المتتالية (w_n) هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1-\left(\frac{3}{4}v_n+1\right)=\frac{3}{4}(u_n-v_n)=\frac{3}{4}w_n$

و منه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ و حدها الأول $w_0=u_0-v_0=1-6=-5$.

- كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=w_0\times q^n$ و منه $w_n=-5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

つづく

تمارين المستوى الثاني ★★

4) تبيان أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

لدينا : المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

و $\lim_{n\to+\infty}\left(-5\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)=0$ $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}w_n=$ و منه المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

التمرين 08

جواليل أحمد أسامة (مجموعة المتميز في الرياضيات)

1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>\frac{1}{e}$

لدينا $u_0>\frac{1}{e}$ أي أن $\frac{5}{4e}>\frac{1}{e}$ محققة .

نفرض أن $u_n>\frac{1}{e}$ و لنبرهن أن $u_{n+1}>\frac{1}{e}$

الدالة المرفقة f حيث $f(x)=\frac{2x}{ex+1}$ مشتقاتها $f'(x)=\frac{2}{(ex+1)^2}$ و منه f متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ و

$f(u_n)>f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $u_{n+1}>\frac{\frac{2}{e}}{e\left(\frac{1}{e}\right)+1}$ أي أن $u_{n+1}>\frac{1}{e}$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>\frac{1}{e}$.

ب-إثبات أن $u_{n+1}-u_n=\frac{e.u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{e.u_n+1}$ لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{e.u_n+1}-u_n=\frac{u_n-e.u_n^2}{e.u_n+1}$

و منه $u_{n+1}-u_n=\frac{e.u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{e.u_n+1}$.

بما أن $u_n>\frac{1}{e}$ فإن إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ سالبة إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على الأعداد الطبيعية كما يلي $v_n=\frac{e.u_n}{e.u_n-1}$

إثبات أن (v_n) متتالية هندسية $v_{n+1}=\frac{e.u_{n+1}}{e.u_{n+1}-1}$ و منه $v_{n+1}=\frac{e.\frac{2u_n}{e.u_n+1}}{e\left(\frac{2u_n}{e.u_n+1}\right)-1}=\frac{2e.u_n}{2e.u_n-e.u_n-1}$ و منه

$v_{n+1}=\frac{2e.u_n}{e.u_n-1}=2v_n$ إذن المتتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول $v_0=\frac{e.u_0}{e.u_0-1}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-1}$ و منه $v_0=-5$.

عبارة حدها العام هي $v_n=-5\times 2^n$.

つづく

تمارين المستوى الثاني ★★

3) أ-التحقق $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ بتوحيد المقامات نجد $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$ محققة .

و منه نجد $v_n - 1 = \frac{1}{e.u_n - 1}$ بتبديل الطرفين نجد $e.u_n - 1 = \frac{1}{v_n - 1}$

بالتبسيط نجد $\frac{1}{e}\left(\frac{v_n}{v_n - 1}\right) = \frac{1}{e}\left[1 + \frac{1}{v_n - 1}\right] = u_n$. أي

أن $u_n = \frac{1}{e}\left(\frac{-5\times 2^n}{-5\times 2^n - 1}\right)$ و منه $u_n = \frac{1}{e}\left(\frac{5\times 2^n}{5\times 2^n + 1}\right)$ و هي عبارة الحد العام المطلوبة .

و منه $\lim u_n = \lim \frac{1}{e}\left(\frac{5\times 2^n}{5\times 2^n}\right) = \frac{1}{e}$.

ب-حساب المجموع : $S_n = -5\left[\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\right] = -5\left(2^{n+1} - 1\right)$.

تمارين المستوى الثالث ★★★

التمرين 01

حلول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$.

I) التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[-4;1]$ و $f'(x)=\dfrac{3(x+11)-(3x-16)}{(x+11)^2}=\dfrac{49}{(x+11)^2}$

لدينا : من أجل كل $x\in[-4;1]$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

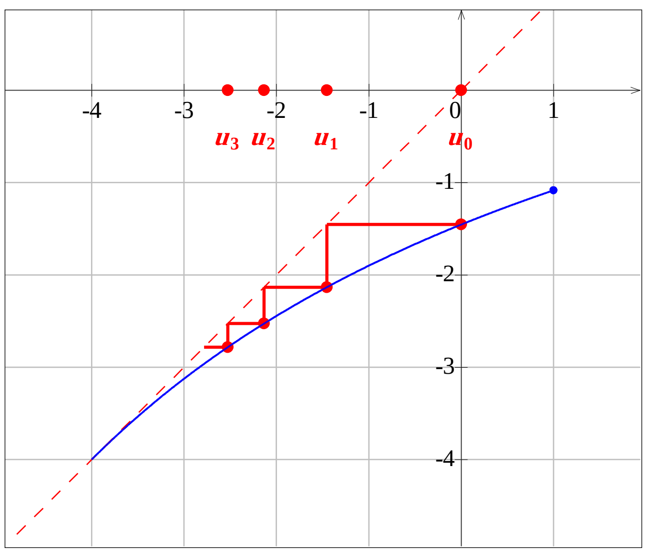
تبيان أنه من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$:

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ و بالتالي من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[f(-4);f(1)]$

أي : $f(x)\in\left[-4;-\dfrac{13}{12}\right]$ و لدينا $\left[-4;-\dfrac{13}{12}\right]\subset[-4;1]$ و منه : من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ ـ تمثيل الحدود :



التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد -4 .

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4\le u_n\le 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $-4\le u_n\le 0$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=0$ و منه $-4\le u_0\le 0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $-4\le u_n\le 0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-4\le u_{n+1}\le 0$.

لدينا حسب الفرض $-4\le u_n\le 0$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(-4)\le f(u_n)\le f(0)$

أي $-4\le u_{n+1}\le -\dfrac{16}{11}\le 1$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4\le u_n\le 0$.

つづく

- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n=\frac{3u_n-16-u_n(u_n+11)}{u_n+11}=\frac{-u_n^{\,2}-8u_n-16}{u_n+11}=\frac{-(u_n+4)^2}{u_n+11}$$

و منه : $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n\times u_n=1-4v_n$ أي $v_n=\dfrac{1}{u_n+4}$.

إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+4}=\frac{1}{\frac{3u_n-16}{u_n+11}+4}=\frac{1}{\frac{3u_n-16+4(u_n+11)}{u_n+11}}=\frac{u_n+11}{7u_n+28}=\frac{u_n+4+7}{7(u_n+4)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{u_n+4}=\frac{1}{7}+v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{7}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{1}{u_0+4}=\dfrac{1}{4}$.

- حساب المجموع S حيث : $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}$

لدينا : $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}=(1-4v_0)+(1-4v_1)+....+(1-4v_{2016})$

و منه : $S=2017\times 1-4(v_0+v_1+.....+v_{2016})=2017-4\left[\dfrac{2017}{2}(v_0+v_{2016})\right]$

أي : $S=2017-4\left[\dfrac{2017}{2}\left(\dfrac{1}{4}+288\right)\right]=-1161792$

التمرين 02

حلول تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا (خالد بخاخشة)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

1) تعيين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(u_n) متتالية ثابتة يعني : من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1}=u_n=u_0$

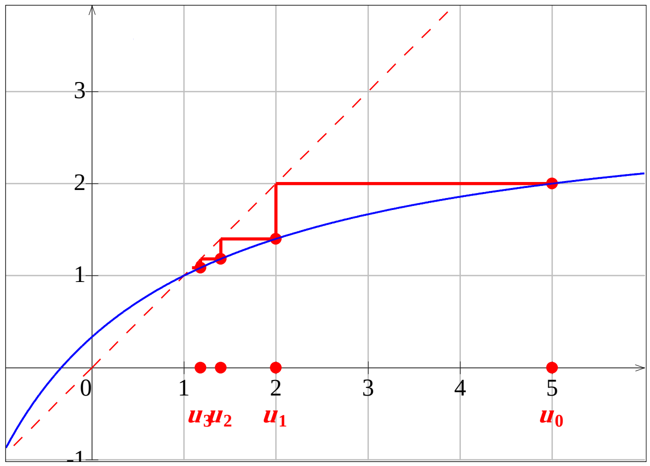
أي نحل المعادلة $f(\alpha)=\alpha$ و هذا يكافئ $\dfrac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$ يكافئ $\alpha^2=1$

و بما أن α عدد حقيقي موجب فإنه من أجل $\alpha=1$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

つづく

تمارين المستوى الثالث ★★★

2) أـ تمثيل الحدود :



بـ ـ التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد 1.

3) نعتبرالمتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي ب : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أـ تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1}=\frac{\frac{3u_n+1-(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{3u_n+1+(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{2u_n-2}{4u_n+4}=\frac{2(u_n-1)}{4(u_n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

بـ ـ كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ أي : $v_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه $v_n(u_n+1)=u_n-1$ و منه $v_nu_n-u_n=-v_n-1$ أي $u_n=\frac{v_n+1}{1-v_n}$

إذن : $u_n=\frac{v_n+1}{1-v_n}=\frac{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{1-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{3+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

つづく

تمارين المستوى الثالث ★★★

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)=1$$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

4) حساب المجموع : $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016}$.

$$S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016} = v_n\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right)$$

استنتاج المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + ... + \frac{1}{u_{n+2016}+1}$.

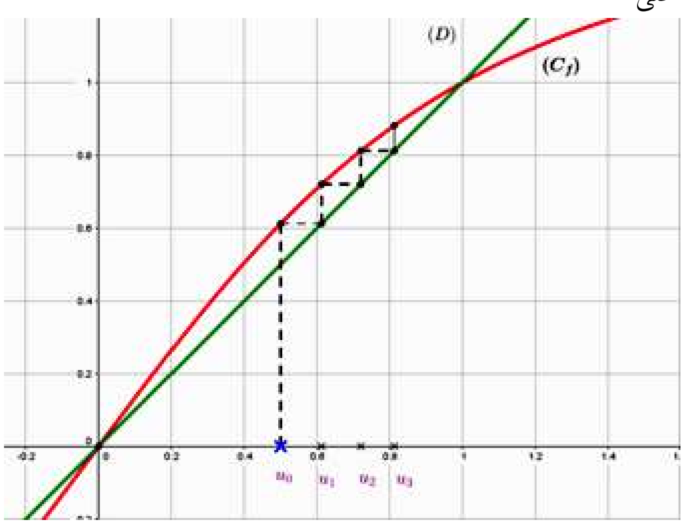
لدينا : من أجل كل عدد طبيعي ، $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه $v_n = \frac{u_n+1-2}{u_n+1}$ ومنه $v_n = 1-\frac{2}{u_n+1}$ أي $\frac{1}{u_n+1} = \frac{1-v_n}{2}$

$$S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + ... + \frac{1}{u_{n+2016}+1} = \frac{1-v_n}{2} + \frac{1-v_{n+1}}{2} + ... + \frac{1-v_{n+2016}}{2} = \frac{1}{2}(2017) - \frac{1}{2}S_n$$

التمرين 03

جواليل أحمد أسامة (مجموعة المتميز في الرياضيات)

1. أ–لدينا $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$ و f معرفة على $[0;+\infty[$



ب–التخمين المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة.

2. أ–البرهان بالتراجع أنه $\frac{1}{2} \le u_n < 1$

لدينا $\frac{1}{2} \le u_0 < 1$ محققة .

نفرض أن $\frac{1}{2} \le u_n < 1$ صحيحة و لنبرهن صحة $\frac{1}{2} \le u_{n+1} < 1$

$\frac{1}{2} \le u_n < 1$ و f دالة متزايدة و منه $f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(u_n) < f(1)$ أي أن $\frac{3}{2\sqrt{6}} \le u_{n+1} < 1$ أي $\frac{\sqrt{6}}{4} \le u_{n+1} < 1$ و $\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{6}}{4}$

و منه $\frac{1}{2} \le u_{n+1} < 1$ صحيحة و من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \le u_n < 1$.

つづく

تماين المستوى الثالث ★★★

ب- البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}}-u_n=u_n.\dfrac{\left(3-\sqrt{4u_n^2+5}\right)}{\sqrt{4u_n^2+5}}$ بالضرب في مرافق البسط نجد :

$u_{n+1}-u_n=u_n.\dfrac{\left(9-4u_n^2-5\right)}{\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)\sqrt{4u_n^2+5}}$ أي أن $u_{n+1}-u_n=u_n.\dfrac{\left(4-4u_n^2\right)}{\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)\sqrt{4u_n^2+5}}$ يعني

$u_{n+1}-u_n=4u_n.\dfrac{(1+u_n)(1-u_n)}{\left(3+\sqrt{4u_n^2+5}\right)\sqrt{4u_n^2+5}}$ بما أن $\dfrac{1}{2}\le u_n<1$ فإن الفرق موجب إذن المتتالية متزايدة .

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

3. ليكن $v_n=\dfrac{u_n^2}{1-u_n^2}$ البرهان أن المتتالية هندسية $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}^2}{1-u_{n+1}^2}$ أي أن $v_{n+1}=\dfrac{\left(\dfrac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}}\right)^2}{1-\left(\dfrac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}}\right)^2}=\dfrac{9u_n^2}{4u_n^2+5-9u_n^2}$

و منه $v_{n+1}=\dfrac{9u_n^2}{5-5u_n^2}=\dfrac{9}{5}\left(\dfrac{u_n^2}{1-u_n^2}\right)$ أي أن $v_{n+1}=\dfrac{9}{5}v_n$ إذن المتتالية هندسية أساسها $\dfrac{9}{5}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{u_0^2}{1-u_0^2}$

أي $v_0=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$ و منه $v_0=\dfrac{1}{3}$.

4. أ-كتابة عبارة الحد العام : $v_n=v_0\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$ أي $v_n=\dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$

استنتاج عبارة u_n : $v_n=\dfrac{u_n^2}{1-u_n^2}$ يعني أن $v_n-v_n.u_n^2=u_n^2$ و منه $(1+v_n).u_n^2=v_n$ أي أن $u_n^2=\dfrac{v_n}{1+v_n}$ بالتعويض نجد

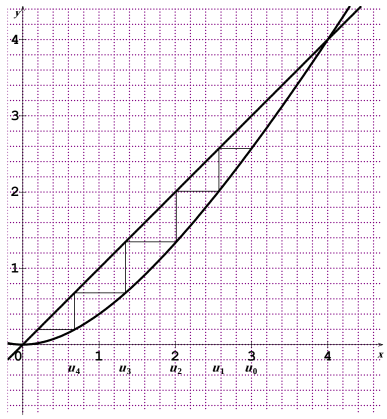
$u_n^2=\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}$ إذن $u_n=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}}$ لان المتتالية (u_n) موجبة (يمكن التبسيط أكثر $u_n=\sqrt{\dfrac{9^n}{3\times5^n+9^n}}$).

ب-حساب النهاية $\lim u_n=\lim\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}}=1$.

تمارين المستوى الثالث ★★★

التمرين 04

مجلة الرائد في الرياضيات (بالعبيدي محمد العربي)



1) تبيان ان الدالة f متزايدة تماما.

f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\frac{2x^2}{x+4}$

f متزايدة تماما معناه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)\succ 0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

: $f'(x)=\frac{4x(x+4)-2x^2}{(x+4)^2}=\frac{2x(x+8)}{(x+4)^2}$

$f'(x)\succ 0$ لأن $x\in[0;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما .

2-أ)تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 على حامل

ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

نخمن ان المتتالية متناقصة تماما ومتقاربة نحو 0

3) أ) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le 3$.

- التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون: $0\le u_0\le 3$ محققة لأن $u_0=3$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $0\le u_n\le 3$

ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $0\le u_{n+1}\le 3$

لدينا: $0\le u_n\le 3$ ومنه $f(0)\le f(u_n)\le f(3)$ لأن f متزايدة تماما ومنه: $0\le u_{n+1}\le\frac{18}{7}$

وعليه: $0\le u_{n+1}\le 3$ لأن $\frac{18}{7}\prec 3$ ومنه الخاصية $0\le u_n\le 3$ صحيحة .

ب)تبيّان أن المتتالية (u_n) متناقصة.

المتتالية (u_n) متناقصة معناه $u_{n+1}\le u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n^2}{u_n+4}-u_n=\frac{u_n^2-4u_n}{u_n+4}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط $u_n^2-4u_n$ لأن المقام موجب

$u_n^2-4u_n=0$ معناه $u_n=4$ أو $u_n=0$ وعليه اشارة $-u_n^2+2u_n+8$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	4	$+\infty$
اشارة الفرق	-	0	+
اتجاه التغير	(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما

بما أن $0\le u_n\le 3$ فإن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

ج)استنتاج أن (u_n) متقاربة.

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة تماما من الجواب 3-ب) ومحدودة من الأسفل من الجواب 3-أ).

4) أ) دراسة إشارة العدد $7u_{n+1}-6u_n$.

*لدينا: $7u_{n+1}-6u_n=\frac{14u_n^2}{u_n+4}-6u_n=\frac{8u_n(u_n-3)}{u_n+4}$

اشارة $7u_{n+1}-6u_n$ هي حسب اشارة البسط $u_n(u_n-3)$ لأن المقام موجب

$u_n(u_n-3)=0$ معناه $u_n=3$ أو $u_n=0$ وعليه اشارة $7u_{n+1}-6u_n$ تكون حسب الجول التالي

u_n	0	3	$+\infty$
اشارة $7u_{n+1}-6u_n$	-	0	+

من الجدول نستنتج أن $7u_{n+1}-6u_n\prec 0$ لأن $0\le u_n\le 3$.

* ستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_{n+1}\le\frac{6}{7}u_n$

つづく

تمارين المستوى الثالث ★★★

من الجواب السابق لدينا: $7u_{n+1}-6u_n \prec 0$ وتكافئ $u_{n+1} \prec \frac{6}{7}u_n$ ....(1) ولدينا: $0 \le u_{n+1} \le 3$ ....(2)

من المتباينتين (1) و (2) نستنتج أن : $0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$.

ب) البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

- التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون لدينا: $3\left(\frac{6}{7}\right)^0 = 3$ $0 \le u_0 \le 3$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $0 \le u_{n+1} \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

لدينا: $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ تكافئ $0 \le \frac{6}{7}u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$ وذلك بعد ضرب الطرفين في $\frac{6}{7}$ لكن $0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$ ومنه $0 \le u_{n+1} \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

ومنه الخاصية $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)$ من اجل كل عدد طبيعي n.

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

لدينا: $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ولدينا أيضا: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ حسب مبرهنة الحصر.

التمرين 05

العملاق في الرياضيات (بواب نورالدين)

1 أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1 = \frac{15}{64}$ و $u_2 = \frac{1695}{4096}$.

ب- رسم المنحني (p) و تمثيل النقط : انظر الشكل في نهاية الحل .

2 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$:

نسمي p_n الخاصية " $0 < u_n < 1$ "

التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $0 < u_0 < 1$ أي : $0 < \frac{1}{8} < 1$ و هي محققة . إذن : p_0 صحيحة .

نفرض أن p_n صحيحة أي : $0 < u_n < 1$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $0 < u_{n+1} < 1$

من فرضية التراجع $0 < u_n < 1$ ، وبإضافة العدد -1 نجد $-1 < u_n - 1 < 0$

ومنه : $0 < (u_n - 1)^2 < 1$ ، وبالضرب بالعدد -1 نجد $-1 < -(u_n-1)^2 < 0$

وبإضافة العدد $+1$ نجد $0 < -(u_n-1)^2 + 1 < 1$ ، وبملاحظة أن :

$u_{n+1} = (2-u_n)u_n = -(u_n-1)^2+1$ نستنتج أن : $0 < u_{n+1} < 1$. ومنه : p_{n+1} صحيحة .

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$.

ب- البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = (2-u_n) - u_n = (1-u_n)u_n$

ومن السؤال السابق وجدنا أن $0 < u_n < 1$ ومنه $[\, u_n > 0$ و $1 - u_n > 0 \,]$

نستنتج أن الجداء موجب تماما أي $(1-u_n)u_n > 0$ وبالتالي : $u_{n+1} - u_n > 0$

つづく

تمارين المستوى الثالث ★★★

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- الاستنتاج : من السؤال 3 الفرع -أ- نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى

ومن السؤال 3 الفرع - ب - وجدنا أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ،

وبالتالي نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3 أ- حساب v_0 و v_1 : $v_0=\frac{7}{8}$ ، $v_1=\frac{49}{64}$

ب- عبارة v_{n+1} بدلالة v_n :

لدينا : $v_{n+1}=1-u_{n+1}=1-(2-u_n)u_n=(1-u_n)^2$

إذن : $\boxed{v_{n+1}=v_n^2}$

استنتاج v_n بدلالة n :

لدينا : $v_{n+1}=v_n^2$ ومنه : $v_1=v_0^2=\left(\frac{7}{8}\right)^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^1}$

$$v_2=v_1^2=(v_0^2)^2=v_0^4=\left(\frac{7}{8}\right)^4=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^2}$$

$$v_3=v_2^2=(v_0^4)^2=v_0^8=\left(\frac{7}{8}\right)^8=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^3}$$

$$v_4=v_3^2=(v_0^8)^2=v_0^{16}=\left(\frac{7}{8}\right)^{16}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^4}$$

إذن : $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

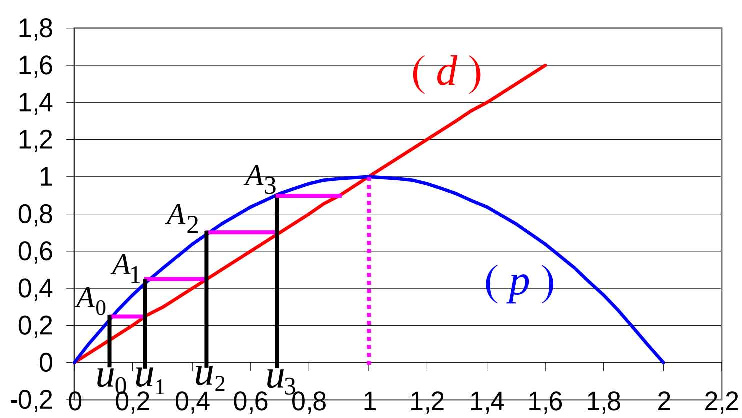
جـ- استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=1-u_n$ إذن : $u_n=1-v_n=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

د- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ و $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^p=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right)=1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$



التمرين 06

سلسلة تمارين محلولة في المتتاليات (مصطفاي عبد العزيز)

1) **تعيين إتجاه تغيّر الدالة** f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا $f'(x)=\dfrac{4(x+1)-4x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2) **دراسة وضعية** (C_f) **بالنسبة إلى المستقيم** (D).

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;+\infty[$.

$$f(x)-x=\frac{4x+1}{x+1}-x=\frac{4x+1-x^2-x}{x+1}=\frac{-x^2+3x+1}{(x+1)^2}=\frac{\left(-x+\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$، $\dfrac{\left(x+\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ مثل إشارة $\left(-x+\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

x	0	$\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) و (D) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$	(C_f) تحت (D)

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$.

1) أ) إنشاء على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3، v_0، v_1، v_2 و v_3.

ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) **و** (v_n).

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو العدد $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$.

لدينا $2\le u_0<\alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $2\le u_n<\alpha$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $2\le u_{n+1}<\alpha$.

$2\le u_n<\alpha$ معناه $f(2)\le f(u_n)<f(\alpha)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

بما أن $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(\alpha)=\alpha$ و $f(2)=3$ إذن $3\le u_{n+1}<\alpha$ أي $2\le u_{n+1}<\alpha$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n<\alpha$.

つづく

وكذلك لدينا $\alpha < v_0 \leq 5$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.
نفرض أن $\alpha < v_n \leq 5$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.
$\alpha < v_n \leq 5$ معناه $f(\alpha) < f(v_n) \leq f(5)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.
بما أن $v_{n+1} = f(v_n)$ و $f(\alpha)=\alpha$ و $f(5)=\frac{7}{2}$ إذن $\alpha < u_{n+1} \leq \frac{7}{2}$ أي $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.
ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n، $\alpha < v_n \leq 5$.

ب) استنتاج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) **و** (v_n).
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;\alpha[$، $f(x)-x>0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n،
$2 \leq u_n < \alpha$ فإن $f(u_n)-u_n>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة.
ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ لدينا $f(x)-x<0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n،
$\alpha < v_n \leq 5$ فإن $f(v_n)-v_n<0$ أي $v_{n+1}-v_n<0$ وعليه المتتالية (v_n) متناقصة.

3) **أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي** n، $v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

$$v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{4v_n+1}{v_n+1} - \frac{4u_n+1}{u_n+1} = \frac{4v_nu_n+4v_n+u_n+1-4v_nu_n-v_n-4u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{3v_n-3u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} = \frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq 2$ معناه $u_n+1 \geq 3$ و $v_n \geq 2$ لأن $\alpha < v_n \leq 5$ معناه $v_n+1 \geq 3$
إذن $(v_n+1)(u_n+1) \geq 9$ يكافئ $\frac{3}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{3}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n > u_n$

فإنّ $\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$ أي $v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

لدينا $v_0-u_0=5-2=3$ و $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ أي $v_0-u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $v_n-u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ونبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1}$ أي نبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

لدينا $v_n-u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ معناه $\frac{1}{3}(v_n-u_n) < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ أي $\frac{1}{3}(v_n-u_n) < \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ ولدينا حسب السؤال السابق

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$ ومنه $v_{n+1}-u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < \alpha$ و $v_n > \alpha$ ومنه $v_n > u_n$ أي $v_n - u_n > 0$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < v_n-u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

つづく

تمارين المستوى الثالث ★★★

جـ) استنتاج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ حسب النهايات بالمقارنة نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

تحديد نهاية كل من (u_n) **و** (v_n).

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية ℓ .

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$ إذن $\ell=f(\ell)$ وحسب ماسبق $\ell=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

التمرين 07

العملاق في الرياضيات (بواب نورالدين)

1) حساب $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$:

$$\lim_{x\underset{>}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\underset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{x\underset{>}{\to}1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

التفسير الهندسي لهذه النتيجة : المنحنى (c) يقبل على يمين النقطة ذات الفاصلة 1 نصف مماس يوازي محور التراتيب .

دراسة تغيّرات الدالة f :

- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

- من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ (الدالة f متزايدة تماما)

- جدول تغيرات الدالة f :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	3 $\nearrow$ $+\infty$

إنشاء المنحنى (c) :

تذكير : التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto g(x+\lambda)+\lambda'$

إذا كان C_g و C_f التمثيلين البيانيين في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتين g و f على الترتيب فإن C_f هو صورة C_g بالانسحاب الذي شعاعه $-\lambda\vec{i}+\lambda'\vec{j}$.

(λ و λ' عددان حقيقيان)

لدينا : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$ ومنه : $f(x)=g(x-1)+3$ حيث :

g هي الدالة ″ الجذر التربيعي ″

نستنتج أن المنحنى (c) هو صورة منحنى الدالة ″ الجذر التربيعي ″ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;3)$.

つづく

تمارين المستوى الثالث ★★★

2) أ- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل :
نطلق من الفاصلة $u_0 = 2$ ، ترتيب النقطة من المنحني (c) الموافق لهذه الفاصلة يعطينا u_1 . نقوم بنقل العدد u_1 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (D) . وبالتالي فإن u_2 هو ترتيب النقطة من المنحني (c) ذات الفاصلة u_1 . نقوم بنقل العدد u_2 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (D)

ب- وضع تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها :
المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (c) وَ (D) ، هذه الفاصلة توافق الحل l للمعادلة $f(x) = x$ ومنه : $l = 5$

3) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq 5$:
نسمي p_n الخاصية " $2 \leq u_n \leq 5$ "
التحقق من صحة p_0 :
لدينا : $2 \leq u_0 \leq 5$ أي : $2 \leq 2 \leq 5$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة
نفرض أن p_n صحيحة أي : $2 \leq u_n \leq 5$ ،
ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $2 \leq u_{n+1} \leq 5$
من فرضية التراجع : $2 \leq u_n \leq 5$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$
نستنتج أن: $f(2) \leq f(u_n) \leq f(5)$ أي : $4 \leq u_{n+1} \leq 5$ ومنه : $2 \leq u_{n+1} \leq 5$
وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة
طريقة أخرى : من فرضية التراجع : $2 \leq u_n \leq 5$ وبإضافة العدد -1 إلى الحدود الثلاثة نجد : $1 \leq u_n - 1 \leq 4$. وبما أن الدالة " الجذر التربيعي " متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ نستنتج أن : $1 \leq \sqrt{u_n - 1} \leq 2$ وبإضافة العدد 3 إلى الحدود الثلاثة نحصل على : $4 \leq 3 + \sqrt{u_n - 1} \leq 5$ أي : $4 \leq u_{n+1} \leq 5$ ومنه :
$2 \leq u_{n+1} \leq 5$ وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة
إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq 5$.

* البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$: نسمي p_n الخاصية " $u_{n+1} > u_n$ "
التحقق من صحة p_0 :
لدينا : $u_1 > u_0$ أي : $4 > 2$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة
نفرض صحة p_n أي : $u_{n+1} > u_n$ ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$
من فرضية التراجع : $u_{n+1} > u_n$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$
نستنتج أن : $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$
ومنه : p_{n+1} صحيحة .
إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$.

ب- استنتاج أن (u_n) متقاربة :
لدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} > u_n$ نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما
ولدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $2 \leq u_n \leq 5$ نستنتج أن (u_n) محدودة من الأعلى
نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . (هذا ما يؤكد صحة المخمّنة السابقة) .

つづく

تمارين المستوى الثالث ★★★

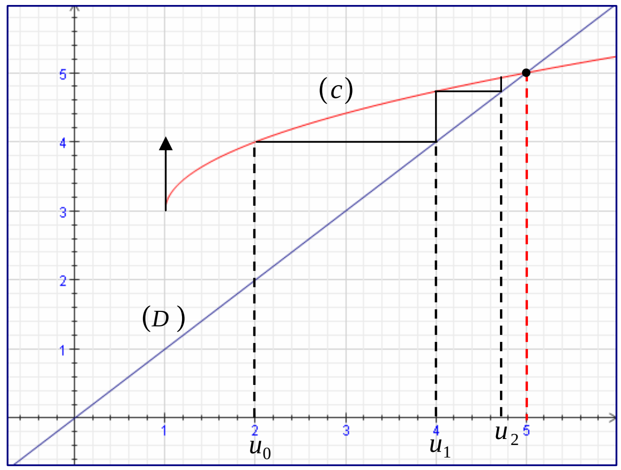
حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

نفرض أن (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l ومنه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

من العلاقة : $u_{n+1} = f(u_n)$ نستنتج أن : $l = 3+\sqrt{l-1}$ وبحل هذه المعادلة

نجد : $l = 5$.

إذن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 5$



التمرين 08

مجلة الرائد في الرياضيات (بالعبيدي محمد العربي)

1-أ- دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$.

اتجاه التغير: لدينا: $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$ ومنه $f'(x) = \dfrac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

$f'(x) \succ 0$ ومنه f متزايدة تماما على المجال $[0;2]$ وعليه جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	0	2
f'(x)	+	
f(x)	$\frac{3}{2}$ ↗	$\frac{7}{4}$

ب-إنشاء (C) وتمثيل الحدود u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل (انظر الجواب 2-ب)

جـ-البرهان أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ ان صورة المجال $[0;2]$ هي المجال $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$

ومنه $f(x) \in [0;2]$ لأن المجال $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$ محتوى في المجال $[0;2]$.

2- أ-تبرير وجود المتتالية (u_n) وحساب u_1 و u_2

المتتالية (u_n) موجودة لأنها معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

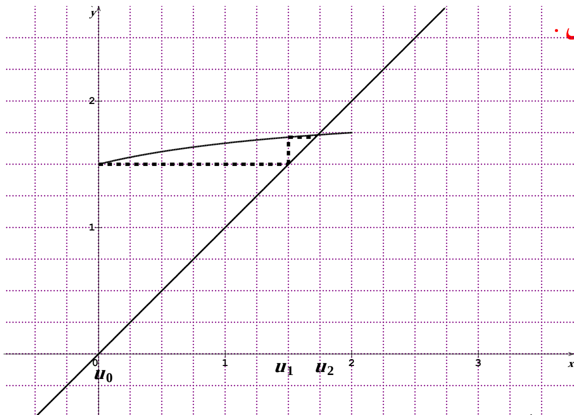
وجميع حدودها تنتمي للمجال $[0;2]$ وذلك حسب الجواب السابق 1-جـ)

نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = f(u_1) = f(\frac{3}{2}) = \frac{12}{7} \end{cases}$

تمارين المستوى الثالث ★★★

ب-إنشاء المنحنى (C) وتمثيل الحدود u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل.



ج-وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

من خلال قيم الحدود u_0، u_1 و u_2 أو تمثيلها نخمن أن المتتالية متزايدة ومتقاربة نحو نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم $(D): y=x$.

3-أ-البرهان بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0\le u_n\le\sqrt{3}$

من أجل n = 0 يكون لدينا: $0\le u_0\le\sqrt{3}$ محققة لأن $u_0=0$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le\sqrt{3}$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le\sqrt{3}$ صحيحة

ومنه: $f(0)\le f(u_n)\le f(\sqrt{3})$ لأن الدالة f متزايدة تماما في المجال $[0;2]$

ومنه: $\frac{3}{2}\le f(u_n)\le\sqrt{3}$ ومنه $0\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ لأن المجال $\left[\frac{3}{2};\sqrt{3}\right]$ محتوى في المجال $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

ب-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}\succ u_n$ والاستنتاج بالنسبة إلى (u_n)

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}\succ u_n$ معناه $u_{n+1}-u_n\succ 0$

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{2u_n+3}{u_n+2}-u_n=\frac{-u_n^2+3}{u_n+2}=\frac{-(u_n+\sqrt{3})(u_n-\sqrt{3})}{u_n+2}$$

$u_{n+1}-u_n\succ 0$ لأن البسط موجب تماما والمقام موجب تماما من أجل $0\le u_n\le\sqrt{3}$

ج- التحقق أن $(u_{n+1}-\sqrt{3})\le\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$.

لدينا: $(u_{n+1}-\sqrt{3})=\frac{2u_n+3}{u_n+2}-\sqrt{3}=\frac{(2-\sqrt{3})}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$

لدينا: $\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\prec 1$ لأن: $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\ \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\prec\frac{2-\sqrt{3}}{2}\prec 0$ ومنه: $(u_{n+1}-\sqrt{3})\le\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$

تعيين عددا حقيقيا k من المجال $]0;1[$ بحيث: $|u_{n+1}-\sqrt{3}|\le k|u_n-\sqrt{3}|$

من المتباينة $(u_{n+1}-\sqrt{3})\le\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ نجد: $|u_{n+1}-\sqrt{3}|\le k|u_n-\sqrt{3}|$ حيث: $k\le\left|\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\right|$

تبيان أنه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $|u_n-\sqrt{3}|\le k^n|u_0-\sqrt{3}|$ ثم استنتاج $\lim_{x\to+\infty}u_n$

من المتباينة: $|u_{n+1}-\sqrt{3}|\le k|u_n-\sqrt{3}|$

*لدينا: من أجل n=0 نجد: $|u_1-\sqrt{3}|\le k|u_0-\sqrt{3}|$ ومن أجل n=1 نجد: $|u_2-\sqrt{3}|\le k|u_1-\sqrt{3}|$

من أجل n=2 نجد: $|u_3-\sqrt{3}|\le k|u_2-\sqrt{3}|$..... ومن أجل n-1 نجد: $|u_n-\sqrt{3}|\le k|u_{n-1}-\sqrt{3}|$

بضرب هذه المساويات طرف لطرف نجد وبعد التبسيط نجد: $|u_n-\sqrt{3}|\le k^n|u_0-\sqrt{3}|$

* لدينا مماسبق أن $|u_n-\sqrt{3}|\le k^n|u_0-\sqrt{3}|$

لدينا: k من المجال $]0;1[$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}k^n=0$ وعليه $\lim_{x\to+\infty}|u_n-\sqrt{3}|=0$ أي $\lim_{x\to+\infty}u_n=\sqrt{3}$

تمارين المستوى الرابع ★★★★

التمرين 01

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

لدينا: a ؛ b ؛ c حدود متعاقبة من متتالية هندسية حيث $a>0$ و $b>0$ و $c>0$.

1. لدينا إذن: $b^2=a\times c$ ومنه $\ln(b^2)=\ln(a\times c)$ أي $2\ln b=\ln a+\ln c$.

وهذا يعني أن الأعداد: $\ln a$ ؛ $\ln b$ ؛ $\ln c$ هي حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

2. لدينا: $\ln(abc)=21$ تعني $\ln a+\ln b+\ln c=21$ ومنه $\ln b=7$.

بالتعويض نجد $\ln a+\ln c=14$. بوضع $\ln a=\alpha$ و $\ln c=\beta$ نجد $(\ln a)(\ln c)=-15$

$\begin{cases}\alpha+\beta=14\\ \alpha\beta=-15\end{cases}$ ومنه α و β هما حلا المعادلة: $x^2-14x-15=0$ ومنه:

$[\alpha=-1$ و $\beta=15]$ أي $a=e^{-1}$ و $c=e^{15}$ أو $[\alpha=15$ و $\beta=-1]$ أي $a=e^{15}$ و $c=e^{-1}$.

نستنتج هكذا أن:

$(a;b;c)=\left(\frac{1}{e};e^7;e^{15}\right)$ أو $(a;b;c)=\left(e^{15};e^7;\frac{1}{e}\right)$.

التمرين 02

مدرسة أشبال الأمة 2016 شعبة الرياضيات (04نقاط)

1- لدينا $u_0=a$ و $v_0=b$ موجبان تماما لنفرض أن $u_n>0$ و $v_n>0$ إذن $\sqrt{u_nv_n}>0$ و $\frac{u_n+v_n}{2}>0$

يعني $u_{n+1}>0$ و $v_{n+1}>0$ ومنه نستخلص المطلوب لدينا $a<b$ يعني $u_0<v_0$ لنفرض أن $u_n\le v_n$ إذن

$$(v_{n+1})^2-(u_{n+1})^2=\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2-(u_nv_n)=\frac{(u_n-v_n)^2}{2}>0$$

و بما أن $u_n>0$ و $v_n>0$ فإن $u_{n+1}\le v_{n+1}$ و منه نستخلص المطلوب.

من أجل كل طبيعي n

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-\sqrt{u_nv_n}=\frac{\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)}{\left(\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n}\right)}\times\frac{(u_n-v_n)}{2}$$

و منه حسب الارشاد

$$\frac{\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)}{\left(\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n}\right)}\times\frac{(u_n-v_n)}{2}<\frac{1}{2}(u_n-v_n)$$ يعني $$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$$

ب-لدينا $v_0-u_0\le\frac{1}{2^0}(b-a)$

نفرض أن $v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(v_0-u_0)$ حيث $(n\ge 0)$

つづく

تمارين المستوى الرابع ★★★★

من السؤال السابق نجد $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$

$$\le\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}(v_0-u_0)$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}(v_0-u_0)$$

3- كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n}=\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}}\ge1$ و منه (u_n) متزايدة على N.

من أجل كل طبيعي n : $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}\le0$

و منه (v_n) متناقصة على N.

بما أن من أجل كل طبيعي n أن $0<v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(b-a)$ و 0 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}(b-a)\right)$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان

4- $u_3=3,3289968$ إذن $l\approx3,328$

التمرين 03

الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

1) $u_2=\frac{5}{4}$, $u_3=1$, $u_4=\frac{11}{16}$, $u_5=\frac{7}{16}$

2) أ) $v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right)=\frac{1}{2}v_n$

إذن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

$v_0=u_1-\frac{u_0}{2}=\frac{3}{2}$ وبالتالي $v_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ب) $w_{n+1}-w_n=2^{n+1}u_{n+1}-2^nu_n=2^{n+1}\left(u_{n+1}-\frac{u_n}{2}\right)=2^{n+1}v_n$

$$=\frac{2^{n+1}\times3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}\times3=3$$

إذن المتتالية (w_n) هي متتالية حسابية أساسها 3 ، حدها الأول $w_0=-1$ و $w_n=3n-1$

ت) بما أن $w_n=2^nu_n$ نحصل على $u_n=\frac{w_n}{2^n}=\frac{3n-1}{2^n}$.

3) أ) لتكن $P(n)$ الخاصية : من أجل كل $n\ge2$ ، $\left(\frac{3}{2}\right)^n\ge n$.

- $P(2)$ صحيحة لأن $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\ge2$

つづく

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

• نفرض أن $P(n)$ صحيحة. لدينا $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{3}{2}\right)\geq n\times\left(\frac{3}{2}\right)$

ولكن $n\times\left(\frac{3}{2}\right)=n\left(1+\frac{1}{2}\right)=n+\frac{n}{2}\geq n+1$ لأن $n\geq 2$.

وبالتالي $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\geq n+1$ ومنه الخاصية $P(n)$: $\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\geq n$ صحيحة من أجل كل $n\geq 2$.

ب) نستطيع كتابة $\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\geq n$ على الشكل $0\leq n\leq\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$ بالقسمة على 2^n، نحصل

$0\leq\frac{n}{2^n}\leq\frac{3^n}{2^{2n}}$ أي $0\leq\frac{n}{2^n}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=0$ فحسب النهايات وعلاقة الترتيب فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(3\times\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)=3\times 0-0=0$$

التمرين 04

مدرسة أشبال الأمة 2019 شعبة علوم تجريبية (04نقاط)

أ- برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq n+3$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$، $u_0\leq 0+3$ صحيحة لأنّ $u_0=2$

نفرض صحّة الخاصيّة من أجل n أي: $u_n\leq n+3$

نبرهن صحّة الخاصيّة من أجل $n+1$، أي $u_{n+1}\leq n+4$:

لدينا $u_n\leq n+3$ (الفرضية) و عليه $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{2}{3}n+2$ و منه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq n+3$

أي $u_{n+1}\leq n+3$ ما يستلزم أنّ $u_{n+1}\leq n+4$

الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب- اتجاه تغيّر (u_n) : ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1=-\frac{1}{3}\left(u_n-(n+3)\right)$، بما أنّ $u_n\leq n+3$ فإنّ

$u_{n+1}-u_n\geq 0$ و عليه (u_n) متزايدة

ج- (u_n) متزايدة و حدّها الأوّل $u_0=2$ إذن هي محدودة من الأسفل بـ 2.

(u_n) غير متقاربة لأنّها ليست محدودة من الأعلى

2) أ- إثبات أنّ (v_n) هندسية أساسها q، معناه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=u_{n+1}-n-1=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$، فعلا (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و

حدّها الأوّل $v_0=2$

ب- عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n : $v_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{2^{n+1}}{3^n}$ و منه $u_n=v_n+n=\frac{2^{n+1}}{3^n}+n$

ج- حساب المجموع : $S_n=u_0+u_1+......+u_n$

$$S_n=v_0+v_1+......+v_n+1+2+......+n=\frac{n^2+n+12}{2}-\frac{2^{n+2}}{3^n}$$

つづく

تمارين المستوى الرابع ★★★★

3) أ- (t_n) متتالية حسابية أساسها r معناه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $t_{n+1}=t_n+r$

$t_{n+1}=\ln v_{n+1}=t_n+\ln\frac{2}{3}$ ، فعلا (t_n) متتالية حسابية أساسها $r=\ln\frac{2}{3}$ و حدّها الأوّل $v_0=\ln 2$

ب- حساب المجموع $S_n^{'}=t_0+t_1+.......+t_n$

$S_n^{'}=\frac{n+1}{2}\ln\frac{2^{n+2}}{3^n}$

التمرين 05

جواليل أحمد أسامة (مجموعة المتميز في الرياضيات)

لدينا $\begin{cases}u_0=-1\\u_{n+1}=3\alpha u_n+(1-3\alpha)v_n\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=3\\v_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n\end{cases}$ و $w_n=v_n-u_n$

1. أ.حساب $w_0=v_0-u_0=3+1=4$

و $w_1=v_1-u_1$ أي $w_1=3\alpha v_0+(1-3\alpha)u_0-3\alpha u_0-(1-3\alpha)v_0$ أي أن $w_1=9\alpha-(1-3\alpha)+3\alpha-3(1-3\alpha)$ إذن $w_1=24\alpha-4$.

ب.اثبات أن المتتالية (w_n) هندسية: $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n-3\alpha u_n-(1-3\alpha)v_n$ أي أن $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=3\alpha(v_n-u_n)+(1-3\alpha)(u_n-v_n)$ و منه $w_{n+1}=(6\alpha-1)(v_n-u_n)$ إذن $w_{n+1}=(6\alpha-1)w_n$ و منه المتتالية هندسية و أساسها $(6\alpha-1)$.

ج. كتابة عبارة الحد العام $w_n=w_0(6\alpha-1)^n$ أي أن $w_n=4.(6\alpha-1)^n$

تعيين قيم α حتى يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$ يكافئ أن $-1<(6\alpha-1)<1$ أي أن $0<6\alpha<2$ يعني $0<\alpha<\frac{2}{6}$ أي $0<\alpha<\frac{1}{3}$.

2. أ- إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة : $u_{n+1}-u_n=3\alpha u_n+(1-3\alpha)v_n-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=(3\alpha-1)u_n+(1-3\alpha)v_n=(1-3\alpha).(v_n-u_n)$ يعني $u_{n+1}-u_n=(1-3\alpha)w_n=4(1-3\alpha)(6\alpha-1)^n$ الفرق موجب و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

ب- إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة : $v_{n+1}-v_n=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n-v_n$ أي أن $v_{n+1}-v_n=(3\alpha-1)v_n+(1-3\alpha)u_n=-(1-3\alpha).(v_n-u_n)$ يعني $v_{n+1}-v_n=-(1-3\alpha)w_n=-4(1-3\alpha)(6\alpha-1)^n$ الفرق سالب و منه المتتالية (v_n) متناقصة.

ب . لدينا $w_n=v_n-u_n$ و $\lim w_n=0$ و المتتالية (v_n) متناقصة و (u_n) متزايدة و منه $\lim v_n=\lim u_n=l$

لدينا $v_{n+1}+u_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha).u_n+3\alpha u_n+(1-3\alpha).v_n=3\alpha(v_n+u_n)+(1-3\alpha)(v_n+u_n)$ أي أن

$v_{n+1}+u_{n+1}=(v_n+u_n)=v_0+u_0=3-1=2$ أي أن $(v_n+u_n)=2$ محققة .

$\lim v_n=\lim u_n=l$ و $v_n+u_n=2$ يعني أن $2l=2$ إذن $l=1$.

4. حساب المجموع $S=u_0+u_1+...+u_{2020}$ و $\begin{cases}v_n+u_n=2\\v_n-u_n=w_n\end{cases}$ بالطرح نجد $2u_n=2-w_n$ و منه $u_n=1-\frac{1}{2}w_n$ إذن

つづく

تمارين المستوى الرابع ★★★★

أي $S=\left(1-\frac{1}{2}w_0\right)+\left(1-\frac{1}{2}w_1\right)+...+\left(1-\frac{1}{2}w_{2020}\right)$ إذن $S=(n+1)-\frac{1}{2}[w_0+w_1+...+w_{2020}]$

إذن $S=(n+1)-\frac{1}{2}\times4\left[\frac{(6\alpha-1)^{2021}-1}{6\alpha-2}\right]$ $S=(n+1)-\left[\frac{(6\alpha-1)^{2021}-1}{3\alpha-1}\right]$

التمرين 06

كتابة الأستاذ (ب. لقمان + بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : (u_n) متتاليّة معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\end{cases}$

1) حساب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 : ----------

$u_1=u_0+\ln(3)=\ln(3)$ ، $u_2=u_1+\ln\left(\frac{5}{3}\right)=\ln(3)+\ln(5)-\ln(3)=\ln(5)$ ، $u_3=\ln(5)+\ln\left(\frac{7}{5}\right)=\ln(7)$

2) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ، ثم استنتاج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ----------

أي : $\frac{2n+3}{2n+1}-1>0$ ، لدينا : $\frac{2n+3}{2n+1}-1=\frac{2}{2n+1}$ ، نعلم أنّ : $\frac{2}{2n+1}>0$ ، ومنه : $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، و $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ، أي : $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>\ln(1)$ ، أي : $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>0$ ،

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=2n+1$:

أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، : $e^{u_n}=v_n$ ----------

نضع الخاصية : $P(n):e^{u_n}=v_n$.

- نتحقق من صحة $P(0)$ ، أي : $e^{u_0}=v_0$ ، و منه : $1=1$ ، إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$.
- نفرض صحة $P(n)$ ، أي : $e^{u_n}=v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي : $e^{u_{n+1}}=v_{n+1}$.

البرهان : لدينا فرضا أنّ : $e^{u_n}=v_n$ ، أي : $e^{u_{n+1}}=e^{u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي : $e^{u_{n+1}}=e^{u_n}\times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي :

$e^{u_{n+1}}=e^{u_n}\times\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، $e^{u_{n+1}}=v_n\times\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ، و منه : $e^{u_{n+1}}=v_{n+1}$.

إذن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة يستلزم $P(n)$ صحيحة ، أي : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $e^{u_n}=v_n$.

- **عبارة u_n بدلالة n :** لدينا $e^{u_n}=v_n$ ، أي : $u_n=\ln(v_n)$ ، و منه : $u_n=\ln(2n-1)$.
- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2n-1)=+\infty$.

4) حساب المجموعين S_n و T : ----------

- **حساب S_n :** $S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+...+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ ، أي : $S_n=\ln v_1-\ln v_0+\ln v_2-\ln v_1+...+\ln v_n-\ln v_{n-1}$

أي : $S_n=-\ln v_0+\ln v_n$ ، أي : $S_n=u_n=\ln(2n+1)$ ، و منه : $S_n=\ln(2n+1)$.

つづく

تمارين المستوى الرابع ★★★★★

- حساب T : $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + ... + e^{u_{2018}}$ ، أي : $T = v_{1439} + v_{1440} + ... + v_{2018}$ ، أي : $T = \frac{580}{2}\left(v_{1439} + v_{2018}\right)$

أي : $T = 290\left(2879 + 4037\right)$ ، و منه : $T = 2005640$.

التمرين 07

مواضيع مقترحة للأستاذ (ثابت ابراهيم)

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$

1) ولدينا أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = u_n + v_n$

أ) البرهان أنّ المتتالية (a_n) ثابتة:

(a_n) ثابتة يعني $a_{n+1} - a_n = 0$

لدينا : $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} + v_{n+1} - \left(u_n + v_n\right)$

أي $a_{n+1} - a_n = -u_n + 4v_n + 2u_n - 3v_n - u_n - v_n = 2u_n - 2u_n + 4v_n - 4v_n$

ومنه $a_{n+1} - a_n = 0$ أي (a_n)متتالية ثابتة

ب)التعبير عن الحد العام a_n :

(a_n)متتالية ثابتة يعني $a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 5 - 2 = 3$

أي من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = 3$

ج)حساب المجموع $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + ... + a_n = (n+1)a_0 = 3(n+1)$$

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $b_n = u_n - 2v_n$.

أ) البرهان أنّ المتتالية (b_n) هندسية :

(b_n) هندسية يعني $b_{n+1} = q \times b_n$

لدينا: $b_{n+1} = u_{n+1} - 2v_{n+1} = -u_n + 4v_n - 2\left(2u_n - 3v_n\right)$

أي $b_{n+1} = -u_n + 4v_n - 4u_n + 6v_n = -5u_n + 10v_n = -5\left(u_n - 2v_n\right)$

أي : $b_{n+1} = -5b_n$ ومنه المتتالية (b_n) هندسية أساسها $q = -5$

وحدها الأول $b_0 = u_0 - 2v_0 = 5 - 2(-2) = 9$

ب) حساب عبارة الحد العام b_n بدلالة n :

$$b_n = b_0 \times q^n = 9 \times (-5)^n$$

ج)حساب المجموع : $S'_n = \sum_{i=0}^{i=n} b_i$:

$S'_n = \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 9 \times \frac{1-(-5)^{n+1}}{1-(-5)} = \frac{9}{6} \times \left(1-(-5)^{n+1}\right)$ أي $S'_n = \frac{9}{6} \times \left(1 + 5(-5)^n\right)$

つづく

تمارين المستوى الرابع ★★★★

د) استنتاج عبارتي كل من u_n و v_n بدلالة n:

لدينا : $\begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = u_n - 2v_n \end{cases}$ ومنه $a_n - b_n = 3v_n$

أي $v_n = \frac{1}{3}(a_n - b_n) = \frac{1}{3}\left(3 - 9(-5)^n\right) = 1 - 3(-5)^n$ وبالتالي $v_n = 1 - 3(-5)^n$

ولدينا : $2a_n + b_n = 3u_n$

ومنه $u_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) = \frac{1}{3}\left(6 + 9(-5)^n\right)$

وبالتالي : $u_n = 2 + 3(-5)^n$

التمرين 08

مدرسة أشبال الأمة 2016 شعبة علوم تجريبية (04.5 نقاط)

-1- من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = 2\alpha u_{n+1} + 3\alpha^2 u_n - 3\alpha u_{n+1} = -\alpha(u_{n+1} - 3\alpha u_n) = -\alpha v_n$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ و حدها الأول $v_0 = 2 - 3\alpha$

-2- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = (2 - 3\alpha)(-\alpha)^n$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ لأن $(-1 \prec \alpha \prec 1$ و $\alpha \neq 0)$ ومنه (V_n) متقاربة

-3- $S_n = v_0 + v_1 + ...+ v_n = \dfrac{2 - 3\alpha}{1 + \alpha}\left(1 - (-\alpha)^{n+1}\right)$

- 4- $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{4}$ معناه $\dfrac{2 - 3\alpha}{1 + \alpha} = \dfrac{3}{4}$ أي $\alpha = \dfrac{1}{3}$

$$S_n = v_0 + v_1 + ...+ v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0 = \frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

معناه $u_{n+1} = \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{7}{4}$ أي (u_n) متقاربة

-5/أ- $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times ....v_n = 3 \times 3\left(\frac{1}{3}\right) \times ....3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

ب/ $\pi_n \leq 3^{-44}$ معناه $3^{-\frac{n^2-n-2}{2}} \leq 3^{-44}$ معناه $(n-10)(n+9) \geq 0$ و n عدد طبيعي نجد $n \geq 10$ ومنه أصغر عدد طبيعي هو $n = 10$

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 01

مسابقة مفتش التعليم المتوسط 2019 (04 نقاط)

1- $U_1=\frac{1}{2}$ ، $U_2=\frac{1}{6}$، $U_3=\frac{1}{12}$.

2- $U_2-U_1\neq U_3-U_2$.

3- $\frac{U_2}{U_1}\neq\frac{U_3}{U_2}$.

4- بالتراجع أو الدالة المرفقة.

5- بما أن $\lim_{n\to\infty}U_n=0$ فإن (U_n) متقاربة.

6- بملاحظة أن $U_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. فإن $S_{2019}=1-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}$

التمرين 02

فقرة كلّ يوم سؤال بفكرة (بلقاسم عبد الرزاق)

أفكار السؤال (مفاتيح الحل)

1 كيفية التعبير عن الكتابة العشرية الدورية لعدد بمجموع لحدود متتابعة من متتالية هندسية .

2 حساب مجموع لحدود متتابعة من متتالية هندسية .

3 تحويل الكتابة العشرية الدورية لعدد إلى الكتابة الكسرية له .

الحلّ

1 التحقق أن : $u_n=\frac{1}{10}\left(32+\frac{43}{100}+\frac{43}{100^2}+......+\frac{43}{100^n}\right)$

لدينا : $u_n=3,2\underbrace{4343.....43}_{n}$ أي : $u_n=3,2+\frac{43}{10^3}+\frac{43}{10^5}+\frac{43}{10^7}......+\frac{43}{10^{2n+1}}$ أي يصبح :

$u_n=\frac{32}{10}+\frac{43}{10^3}+\frac{43}{10^5}+......+\frac{43}{10^{2n+1}}$ أي : $u_n=\frac{1}{10}\left[32+\frac{43}{10^2}+\frac{43}{10^4}+......+\frac{43}{10^{2n}}\right]$

و منه نحصل على : $\boxed{u_n=\frac{1}{10}\left[32+\frac{43}{100}+\frac{43}{100^2}+......+\frac{43}{100^n}\right]}$ هو المطلوب .

2 حساب المجموع S_n :

لدينا : $S_n=\frac{43}{100}+\frac{43}{100^2}+.....+\frac{43}{100^n}$ أي : $S_n=43\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+.....+\frac{1}{100^n}\right)$ أي نجد :

$S_n=43\left[\frac{1}{100}\times\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}}\right]$ أي : $S_n=43\left[\frac{1}{100}\times\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{\frac{99}{100}}\right]$ أي : $S_n=43\times\frac{1}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$

و منه : $\boxed{S_n=\frac{43}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]}$.

つづく

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

3 إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n=\frac{1}{10}(32+S_n)$ أي : $u_n=\frac{1}{10}\left[32+\frac{43}{99}\left(1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right)\right]$

أي : $u_n=\frac{1}{10}\left[32+\frac{43}{99}-\frac{43}{99}\times\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$ أي نجد : $u_n=\frac{1}{10}\left[\frac{3211}{99}-\frac{43}{99}\times\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$

و منه يكون : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{10}\times\frac{3211}{99}$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{43}{99}\times\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]=0$ إذن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{3211}{990}}$.

4 نلاحظ أن نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$ هي العدد $\frac{3211}{990}$ و عليه يكون : $\boxed{A=\frac{3211}{990}}$.

تعـاليق :

الجواب الأول : في الخطوة : $u_n=\frac{32}{10}+\frac{43}{10^3}+\frac{43}{10^5}+\frac{43}{10^7}......+\frac{43}{10^{2n+1}}$.

نلاحظ أن قوة العشرة هي أعداد فردية لهذا تكتب على الشكل : $2n+1$.

الجواب الثاني : $\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+.....+\frac{1}{100^n}\right)$ هو مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{100}$ و حدها الأول $\frac{1}{100}$.

الجواب الرابع : بما أن العدد 43 يتكرر مالانهاية من المرات إذن العدد A يعتبر $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 03

صفحة منارة جيوخ العربي للرياضيات

أ- برهان بالتراجع أنّ : $\forall n\in\mathbb{N}: 0<u_n<1$:

. من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$، إذن : $0<u_0<1$.

. لنفترض صحة : $0<u_n<1$، ولنبيّن معا صحة العبارة : $0<u_{n+1}<1$.

لدينا : $0<u_n<1$، إذن : $-1<-u_n^3<0$، بالتالي : $\frac{1}{7}<\frac{1-u_n^3}{7}<0$، إذن : $0<\sqrt[3]{\frac{1-u_n^3}{7}}<\sqrt[3]{\frac{1}{7}}<1$.

وأخيرا، نجد أنّ : $0<u_{n+1}<1$.

فهذا نكون قد أثبتنا العبارة : $\forall n\in\mathbb{N}: 0<u_n<1$

ب- استنتاج أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: -1<v_n<7$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $0<u_n<1$، وهذا يستلزم أنّ $0<u_n^3<1$، وعليه : $-1<8u_n^3-1<7$.

وهذا يعني أنّ : $\forall n\in\mathbb{N}: -1<v_n<7$

2.أ- $v_0=8u_0^3-1=8\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^3-1=1$.

つづく

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

ب- تبيّن أنّ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $v_{n+1}=8u_{n+1}^3-1=8\left(\sqrt[3]{\frac{1-u_n^3}{7}}\right)^3-1=8\left(\frac{1-u_n^3}{7}\right)-1=-\frac{1}{7}v_n$،

ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية، وأساسها $q=-\frac{1}{7}$.

3.أ- من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $v_n=v_0\times q^n=\left(-\frac{1}{7}\right)^n$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $v_n=8u_n^3-1$، وهذا يستلزم أنّ $u_n=\sqrt[3]{\frac{v_n+1}{8}}$، وأخيرا، نجد أنّ :

$$\forall n\in\mathbb{N}: u_n=\frac{1}{2}\sqrt[3]{1+\left(-\frac{1}{7}\right)^n}$$

ب-

$$S_n=\sum_{k=0}^{n+2020}v_k=v_0\frac{1-q^{n+2021}}{1-q}=\frac{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^{n+2021}}{1+\frac{1}{7}}=\frac{7}{8}\left[1-\left(-\frac{1}{7}\right)^{n+2021}\right].$$

التمرين 04

سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : $u_n=\frac{n^2}{2^n}$ ، مع $n\in\mathbb{N}^*$.

1) لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) لنبيّن أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}$.

$v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{n^2}=\frac{1}{2}\times\frac{(n+1)^2}{n^2}$ أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\times\frac{(n+1)^2}{n^2}\right]=\frac{1}{2}$ ، لأنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$. و هو المطلوب .

ب) لنبيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ يكون : $v_n>\frac{1}{2}$. بما أنّ : $v_n=\frac{1}{2}\times\frac{(n+1)^2}{n^2}$ و نعلم أنّ : $\frac{(n+1)^2}{n^2}>1$

أي : $\frac{1}{2}\times\frac{(n+1)^2}{n^2}>\frac{1}{2}$ ، و منه : $v_n>\frac{1}{2}$.

ج) تعيين p ، بحيث يكون : $v_n<\frac{3}{4}$.

لدينا : $v_n<\frac{3}{4}$ ، أي : $\frac{1}{2}\times\frac{(n+1)^2}{n^2}<\frac{3}{4}$ ، و هذا يتحقق إذا كان : $\frac{(n+1)^2}{n^2}<\frac{3}{2}$ ، أي : $2(n+1)^2<3n^2$

つづく

أي: $2(n^2+2n+1)<3n^2$ ، أي: $-n^2+4n+2<0$

*) لندرس إشارة $-x^2+4x+2<0$ على $\mathbb{R}$: بعد دراسة الإشارة نلاحظ أنّه :

يكون : $-n^2+4n+2<0$ إذا كان : $n>2+\sqrt{6}$ ، أي : $n>4,44$ ، و منه : $n\geq 5$.

إذن : أصغر قيمة لـ n كي يكون $v_n<\frac{3}{4}$ هي : 5 . أي أنّ: $p=5$.

د) إذا كان : $p\geq 5$ أي : $n\geq 5$ فإنّ : $v_n<\frac{3}{4}$ ، أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{3}{4}$ ، و منه : $u_{n+1}<\frac{3}{4}u_n$.

2) لدينا : $S_n=u_5+u_6+....+u_n$.

أ) لنبرهن بالتراجع من أجل $n\geq 5$: $u_n\leq(\frac{3}{4})^{n-5}\times u_5$

*) لنتحقق من أجل $n=5$ ، أي : $u_5\leq(\frac{3}{4})^{5-5}\times u_5$ أي : $u_5\leq(\frac{3}{4})^{0}\times u_5$ ، و منه : $u_5\leq u_5$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n\leq(\frac{3}{4})^{n-5}\times u_5$ ، و لنثبت أنّ : $u_{n+1}\leq(\frac{3}{4})^{n-4}\times u_5$.

لدينا: $u_n\leq(\frac{3}{4})^{n-5}\times u_5$ ، أي: $\frac{3}{4}u_n\leq\frac{3}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-5}\times u_5$ أي : $\frac{3}{4}u_n\leq(\frac{3}{4})^{n-4}\times u_5$ ، و نعلم أنّ : $u_{n+1}<\frac{3}{4}u_n$

إذن : $u_{n+1}\leq(\frac{3}{4})^{n-4}\times u_5$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل $n\geq 5$ يكون : $u_n\leq(\frac{3}{4})^{n-5}\times u_5$

ب) لدينا : $S_n=u_5+u_6+....+u_n$

، و حسب السؤال (أ) يصبح : $\begin{cases} u_5\leq(\frac{3}{4})^{5-5}\times u_5 \\ u_6\leq(\frac{3}{4})^{6-5}\times u_5 \\ u_7\leq(\frac{3}{4})^{7-5}\times u_5 \\ \vdots \\ u_n\leq(\frac{3}{4})^{n-5}\times u_5 \end{cases}$ بالجمع نجد : $S_n\leq\left[(\frac{3}{4})^0+(\frac{3}{4})^1+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]\times u_5$

و منه : $S_n\leq\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]\times u_5$ ، و هو المطلوب .

ج) أولا لنحسب المجموع : $\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]$ نلاحظ أنّ المجموع لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ و حدها الأول

つづく

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

هو 1 ، و عدد حدودها هو : $n-4$ ، أي :

$$\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]=1\times\frac{1-(\frac{3}{4})^{n-4}}{1-\frac{3}{4}}=4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]$$

نعلم أنّ : $1-(\frac{3}{4})^{n-4}<1$ أي : $4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]<4$ ، و منه : $4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]u_5<4u_5$.

نعلم أنّ : $S_n\le\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]\times u_5$ أي : $S_n\le4\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]\times u_5$ ،

إذن : $S_n\le4u_5$ ، و هو المطلوب .

3) لنبيّن أنّ المتتالية (S_n) متزايدة :

$$S_{n+1}-S_n=(u_5+u_6+...+u_n)-(u_5+u_6+...+u_{n+1})$$

و منه : $S_{n+1}-S_n=u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$.

نلاحظ أنّ : $S_{n+1}-S_n>0$ ، إذن : المتتالية (S_n) متزايدة من أجل كل $n\ge5$.

*) المتتالية (S_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ $4u_5$ إذن : فستكون متقاربة .

التمرين 05

سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : $u_0=0$ ، $u_1=1$ و $u_{n+1}=7u_n+8u_{n-1}$

1) لدينا : $s_n=u_{n+1}+u_n$.

أ) لنبيّن أنّ المتتالية (s_n) هندسية :

$$s_{n+1}=u_{n+2}+u_{n+1}=7u_{n+1}+8u_n+u_{n+1}=8u_{n+1}+8u_n=8(u_{n+1}+u_n)$$

و منه : $s_{n+1}=8s_n$ ، إذن المتتالية (s_n) هندسية ،

أساسها 8 ، و حدها الأول : $s_0=u_1+u_0=1$.

ب) عبارة s_n بدلالة n :

$s_n=s_0\times q^n$ ، و منه : $s_n=8^n$.

2) لدينا : $v_n=(-1)^n\times u_n$ و $t_n=v_{n+1}-v_n$

*) التعبير عن t_n بدلالة s_n :

$$t_n=v_{n+1}-v_n=(-1)^{n+1}\times u_{n+1}-(-1)^n\times u_n=(-1)^n\left[-1\times u_{n+1}-u_n\right]=(-1)^n\times(-u_{n+1}-u_n)$$

$$=-(-1)^n\times s_n=-(-1)^n\times8^n$$

و منه : $t_n=-(-8)^n$.

يتبع

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

3) لنحسب المجموع : $t_0+t_1+\dots+t_{n-1}$ بطريقتين :

الطريقة الأولى :

$$=-(-8)^0+(-(-8)^1)+\dots+(-(-8)^{n-1})$$
$$=-\left[1+(-8)+(-8)^2+\dots+(-8)^{n-1}\right]$$

نلاحظ أنّ المجموع لمتتالية هندسية أساسها (-8) و حدها الأول هو : 1 ، و عدد حدودها هو : n حد .

$t_0+t_1+\dots+t_{n-1}=-\dfrac{(-8)^n-1}{-8-1}=-\dfrac{(-8)^n-1}{-9}$ و منه : $t_0+t_1+\dots+t_{n-1}=\dfrac{(-8)^n-1}{9}$.

الطريقة الثانية :

لدينا : $t_n=v_{n+1}-v_n$ ، أي : $\begin{cases} t_0=v_1-v_0 \\ t_1=t_2-v_1 \\ t_2=v_3-v_2 \\ \vdots \\ t_{n-1}=v_n-v_{n-1}\end{cases}$ بالجمع نجد : $t_0+t_1+\dots+t_{n-1}=v_n-v_0$

و بما أنّ : $v_0=(-1)^0\times u_0=0$ ، فسيكون : $v_n=\dfrac{(-8)^n-1}{9}$.

*) كتابة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=(-1)^n\times u_n$ ، أي : $u_n=\dfrac{v_n}{(-1)^n}=\dfrac{\frac{(-8)^n-1}{9}}{(-1)^n}$. و منه : $u_n=\dfrac{(-8)^n-1}{9\times(-1)^n}$.

*) حساب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{8^n}\right)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{8^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(-8)^n-1}{9\times(-1)^n}}{8^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-8)^n-1}{9\times(-1)^n(8)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-8)^n-1}{9\times(-8)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{9\times(-8)^n}\right]$$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{8^n}\right)=\dfrac{1}{9}$ ، لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{9\times(-8)^n}\right]=0$.

التمرين 06

سلسلة تمارين في المتتاليات (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : $u_n=\dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1) **البرهان :** لدينا $u_{n+1}\le 0{,}95u_n$ معناه أنّ : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\le 0{,}95$ لأنّ : $(u_n>0)$ وَ $(u_{n+1}>0)$ ،

أي : $\dfrac{\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{2^n}}\le 0{,}95$ أي : $\dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\times\dfrac{2^n}{n^{10}}\le 0{,}95$ أي : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\times\dfrac{1}{2}\le 0{,}95$ ، ومنه : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\le 1{,}9$

つづく

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

2) f الدالة المعرّفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=(1+\frac{1}{x})^{10}$

أ) إتجاه التغيّر : $f'(x)=10\times(1+\frac{1}{x})^{9}\times(-\frac{1}{x^2})$ ،

نلاحظ أنّ : $f'(x)<0$ على $]1;+\infty[$ ، و منه الدالة f متناقصة .

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	1024 ↘ 1

ب) الدالة f مستمرة و رتيبة على $]1;+\infty[$ ، وَ صورة المجال $]1;+\infty[$ هي $]1;1024[$ ،

وَ $1,9\in]1;1024[$ ، ومنه المعادلة $f(\alpha)=1,9$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $\alpha\in]1;+\infty[$.

ج) بالحاسبة نجد : $15<\alpha<16$ ، أي : $(n_0=16)$.

د) البرهان : من أجل $n\geq 16$ يكون : $f(n)\leq f(16)$ (لأنّ الدالة f متناقصة) ، أي : $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq f(16)$

و لدينا : $f(16)<1,9$ ، و منه : $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq 1,9$.

3) أ) من أجل $n\geq 16$ لدينا : $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq 1,9$ معناه أنّ : $u_{n+1}\leq 0,95u_n$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 0,95<1$ ،

و منه فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

ب) بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة وَ محدودة من الأسفل بـ 0 لأنّ : $(u_n>0)$ ، ومنه فإنها **متقاربة** .

4) إثبات أنّ : $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ، من أجل $n\geq 16$: (نستعمل البرهان بالتراجع) .

✓ تحقّق من أجل $n=16$: $0\leq u_{16}\leq(0,95)^{16-16}\times u_{16}$ ، ومنه : $0\leq u_{16}\leq u_{16}$ ، **محقّقة** .

✓ نفرض صحة : $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$.

✓ و نثبت صحة : $0\leq u_{n+1}\leq(0,95)^{n+1-16}\times u_{16}$ أي : $0\leq u_{n+1}\leq(0,95)^{n-15}\times u_{16}$.

البرهان : لدينا فرضا : $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ، أي : $0\leq 0,95\times u_n\leq 0,95\times(0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ،

أي : $0\leq 0,95u_n\leq(0,95)^{n-15}\times u_{16}$ ، وَ لدينا : $u_{n+1}\leq 0,95u_n$ ، ومنه : $0\leq u_{n+1}\leq(0,95)^{n-15}\times u_{16}$.

إذن من أجل كل $n\geq 16$: $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$

❖ إستنتاج نهاية (u_n) : $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0$ ، لأنّ : $\lim_{n\to+\infty}(0,95)^{n-16}=0$ (حسب خاصية النهايات بالحصر) .

التمرين 07

صفحة منارة جيوخ العربي للرياضيات

1. التحقّق أنّ : $\omega^2 = \omega + 1$ و $\frac{1}{\omega} = \omega - 1$:

لدينا وضوحا أنّ :
$$\omega^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} + \frac{4}{4} = \omega + 1$$

ولدينا أيضا :
$$\omega^2 = \omega + 1 \Longrightarrow \omega\left(\omega - 1\right) = 1$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\omega} = \omega - 1 \ , \qquad \omega \neq 0$$

2. تبيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^n - (1-\omega)^n\right)$:

■ تخمين :

فإذا استفدنا من السؤال السابق، نجد :
$$\left|\begin{array}{l} \omega^2 = \omega + 1 \\ \omega^3 = \omega^2\omega = \left(\omega+1\right)\omega = \omega^2 + \omega = \omega + 1 + \omega = 2\omega + 1 \\ \omega^4 = \omega^3\omega = \left(2\omega+1\right)\omega = 2\omega^2 + \omega = 2\left(\omega+1\right) + \omega = 3\omega + 2 \\ \omega^5 = \omega^4\omega = \left(3\omega+2\right)\omega = 3\omega^2 + 2\omega = 3\left(\omega+1\right) + 2\omega = 5\omega + 3 \\ \vdots \end{array}\right.$$

وهكذا ... نواصل بنفس الفكرة السابقة، فنتحصل على :
$$\omega^n = a_n\omega + a_{n-1} \quad (\mathcal{R})$$

حيث $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرّفة بالعلاقة التراجعية :
$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \end{cases}$$

■ نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات العلاقة $(\mathcal{R})$:

. لنختبر العبارة $(\mathcal{R})$، من أجل $n = 2$. لدينا :
$$\omega^2 = a_2\omega + a_1 = \Big(\underbrace{a_1 + a_0}_{=1}\Big)\omega + a_1 = \omega + 1$$

ومنه العلاقة $(\mathcal{R})$ محقّقة من أجل $n = 2$. لنفترض أنّ العلاقة $(\mathcal{R})$ صحيحة من أجل n، ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$.

أوّلا، لدينا من فرضية التراجع $(\mathcal{R})$.

ثانيا، لنضرب العلاقة $(\mathcal{R})$ في ω، فنتحصّل على :
$$\omega^{n+1} = a_n\omega^2 + a_{n-1}\omega = a_n\left(\omega+1\right) + a_{n-1}\omega = \Big(\underbrace{a_n + a_{n-1}}_{=a_{n+1}}\Big)\omega + a_n \ = a_{n+1}\omega + a_n$$

つづく

وهذا يكافئ بدوره العبارة : $\omega^{n+1} = a_{n+1}\omega + a_n$

وأخيرا، يكتمل البرهان.

■ **تخمين :**

فإذا استفدنا من السؤال الأوّل، نجد :

$$\begin{aligned}
&\omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \omega - 1\\
&\omega^{-2} = \omega^{-1}\omega^{-1} = (\omega-1)(\omega-1) = -\omega+2\\
&\omega^{-3} = \omega^{-2}\omega^{-1} = (-\omega+2)\,\omega^{-1} = 2\omega-3\\
&\omega^{-4} = \omega^{-3}\omega^{-1} = (2\omega-3)\,\omega^{-1} = -3\omega+5\\
&\vdots
\end{aligned}$$

وهكذا ... نواصل بنفس الفكرة السابقة، فنتحصل على :

$$\omega^{-n} = (-1)^n\left(a_{n+1} - a_n\omega\right) \qquad (\mathcal{Z})$$

حيث $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرّفة بالعلاقة التراجعية :

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1\\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\end{cases}$$

■ يمكن إثبات العلاقة $(\mathcal{Z})$ بنفس إثبات العلاقة $(\mathcal{R})$، لهذا الغرض يُترك الإثبات للطالب.

. نضرب العلاقة $(\mathcal{Z})$ في $(-1)^n$، فنجد : $(\mathcal{Q}) \quad (-1)^n\omega^{-n} = a_{n+1} - a_n\omega$

بطرح المعادلة $(\mathcal{Q})$ من $(\mathcal{R})$، فنجد :

$$\begin{aligned}
\omega^n - (-1)^n\omega^{-n} &= a_n\omega + a_{n-1} - (a_{n+1} - a_n\omega)\\
&= 2a_n\omega + a_{n-1} - a_{n+1}\\
&= 2a_n\omega + a_{n-1} - (a_n + a_{n-1})\\
&= (2\omega - 1)\,a_n\\
&= \sqrt{5}a_n
\end{aligned}$$

ومنه، نستنتج أنّ : $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^n - (-1)^n\omega^{-n}\right)$

وبادخال النهاية، نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^n - (-1)^n\omega^{-n}\right) = +\infty$

.3 إثبات أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، لدينا : $\omega^n(b_n - \omega)\,a_n = (-1)^n$ **:**

أوّلا، نستفيد من العلاقة $(\mathcal{Z})$.

ثانيا، لمّا كان n من $\mathbb{N}^*$، لدينا : $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$، استنتجنا أنّ : $\omega^{-n} = (-1)^n(a_nb_n - a_n\omega) = (-1)^na_n(b_n - \omega)$

وعليه، بعد نضرب فهذه الأخيرة في $(-1)^n\omega^n$، نجد : $(-1)^n = \omega^n(b_n - \omega)\,a_n$

つづく

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

من أجل كل $n \geq 1$، لدينا : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$، بقسمة الطرفين على a_{n+1}، فنتحصّل : $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

وهذا يعني أنّ : $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$ (لأنّ : $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$).

بادخال النهاية على الطرفين هذه الأخيرة، فنجد : $\lim_{n \to +\infty} b_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$.

نضع : $\lim_{n \to +\infty} b_n = l$ ، ومنه : $l = 1 + \frac{1}{l}$، بعبارة أخرى : $l^2 = l + 1$.

وهي معادلة من الدرجة الثانية مجهولها l، وبما أنّ : $\omega > 0$، فإنّ : $l = \omega$.

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 08

كتابة الأستاذ: أحمد عبد الرحمان قوادري

الجزء الأول

1 حساب d_0 ، d_1 و d_2 ثمّ استنتاج الأساس q'

لدينا بما أنّ المتتالية (d_n) هندسية فإنّ : $d_1^2 = d_0 \times d_2$ بالتعويض في المعادلة (2) نجد : $d_1^3 = -\frac{1}{729}$ إذن $\boxed{d_1 = -\frac{1}{9}}$.

الجملة (F) تصبح تكافئ : $\begin{cases} d_0 + d_2 = -\frac{10}{27} \\ d_0 \times d_2 = \frac{1}{81} \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} d_0 = -\frac{10}{27} - d_2 ..... (3) \\ d_0 \times d_2 = \frac{1}{81} ..... (4) \end{cases}$ بتعويض المعادلة (3) في (4) نجد :

$\left(-\frac{10}{27} - d_2\right) d_2 = \frac{1}{81}$ يكافئ : $-d_2^2 - \frac{10}{27}d_2 - \frac{1}{81} = 0$ ، بحل هذه الأخيرة نجد حلولها هي : $d_2 = -\frac{1}{3}$ و $d_2 = -\frac{1}{27}$ وبما أنّ المتتالية (d_n) متزايدة فإنّ $\boxed{d_2 = -\frac{1}{27}}$ وبالتعويض في المعادلة (3) تحصل على $\boxed{d_0 = -\frac{1}{3}}$.

أساس المتتالية (d_n) هو : $\boxed{q' = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_0} = \frac{1}{3}}$.

2 كتابة d_n بدلالة n ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$

المتتالية (d_n) هندسية ومنه : $d_n = d_0(q')^n$ إذن : $d_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 0$ لأنّ : $-1 \prec \frac{1}{3} \prec 1$.

3 تعيين أكبر عدد طبيعي n حتّى يكون : $d_n \prec -\frac{3}{10^3}$

لدينا : $d_n \prec -\frac{3}{10^3}$ يكافئ : $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \prec -\frac{3}{10^3}$ يكافئ : $\left(\frac{1}{3}\right)^n \succ \frac{9}{10^3}$ أي $\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \succ \ln\left(\frac{9}{10^3}\right)$ معناه $n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \succ \ln\left(\frac{9}{10^3}\right)$

ومنه $n \prec \dfrac{\ln\left(\frac{9}{10^3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ أي $n \prec 4.2877$ من هنا نجد أنّ أكبر عدد طبيعي n يحقّق $d_n \prec -\frac{3}{10^3}$ هو : $\boxed{n = 4}$.

الجزء الثاني

1 حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + \lim_{x\to-\infty} x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + \lim_{x\to+\infty} x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

الجزء الثالث

لدينا : $\boxed{v_{n+1} = e^{f_a(v_n) - v_n} = e^{\ln\left(\frac{a+v_n}{1+av_n}\right) + v_n - v_n} = e^{\ln\left(\frac{a+v_n}{1+av_n}\right)}}$ ومنه : $\boxed{v_{n+1} = \frac{a+v_n}{1+av_n}}$.

1 البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \neq 0$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = a$ ونعلم أنّ $a \neq 0$ ومنه $v_0 \neq 0$ إذن الخاصية " $v_n \neq 0$ " محقّقة من أجل $n = 0$.
- نفرض أنّ $v_n \neq 0$ ونبرهن أنّ $v_{n+1} \neq 0$.

لدينا من الفرض : $v_n \neq 0$ يكافئ $v_n + a \neq a$ و $a \neq 0$ إذن $v_n + a \neq 0 ......(*)$ هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا : $av_n \neq 0$ أي $av_n + 1 \neq 1$ يكافئ $\frac{1}{1+av_n} \neq 1 ......(**)$ بضرب $(*)$ في $(**)$ طرف بطرف نجد أنّ $v_{n+1} \neq 0$.

إذن حسب البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \neq 0$.

2 ✍ تعيين قيمة a حتّى تكون المتتالية (v_n) ثابتة

المتتالية (v_n) ثابتة معناه $v_{n+1} = v_n = v_0 = a$ وعليه بالتعويض نجد : $a = \dfrac{a+a}{1+a\cdot a}$ يكافئ $a\left(1+a^2\right) = 2a$ أي $a^3 - a = 0$ معناه : $a\left(a^2-1\right) = 0$ حلول هذه المعادلة الأخيرة هي : $s = \{-1;0;1\}$ وبما أنّ $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإنّ قيمة a حتّى تكون المتتالية (v_n) هي : $a = 1$.

الجزء الرابع

1 ✍ إيجاد قيمة b حتّى تكون المتتالية (w_n) هندسية مع تعيين كل من أساسها q وحدّها الأول w_0 بدلالة a

بما أنّ $1 - ba \neq 0$ فإنّه لدينا :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}-b}{v_{n+1}+b} = \frac{\dfrac{a+v_n}{1+av_n} - b}{\dfrac{a+v_n}{1+av_n} + b} = \frac{\dfrac{a+v_n-b-bav_n}{1+av_n}}{\dfrac{a+v_n+b+bav_n}{1+av_n}} = \frac{(1-ba)\,v_n + (a-b)}{(1+ba)\,v_n + (a+b)} = \frac{1-ba}{1+ba}\cdot\frac{v_n + \dfrac{a-b}{1-ba}}{v_n + \dfrac{a+b}{1+ba}}$$

ومنه حتّى تكون المتتالية (w_n) هندسية يجب أن يكون : $\begin{cases} \dfrac{a-b}{1-ba} = -b \\ \dfrac{a+b}{1+ba} = b \end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases} a-b = -b+b^2a \\ a+b = b+b^2a \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} a\left(b^2-1\right) = 0 \\ a\left(b^2-1\right) = 0 \end{cases}$

بما أنّ $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإنّ : $b^2 - 1 = 0$ حلولها هي : $b = 1$ و $b = -1$ وبما أنّ b عدد حقيقي موجب تماما فإنّ $b = 1$.

إذن من أجل $b = 1$ نجد : $w_{n+1} = \dfrac{1-a}{1+a}\cdot\dfrac{v_n + \dfrac{a-1}{1-a}}{v_n + \dfrac{a+1}{1+a}} = \dfrac{1-a}{1+a}\cdot\dfrac{v_n - 1}{v_n + 1} = \dfrac{1-a}{1+a}\cdot w_n$.

وعليه من أجل $b = 1$ (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1-a}{1+a}$ وحدّها الأوّل $w_0 = \dfrac{v_0-1}{v_0+1} = \dfrac{a-1}{a+1}$.

✍ من أجل قيمة b السابقة كتابة عبارة w_n ثمّ استنتاج عبارة v_n بدلالة كل من n و a

- (w_n) هندسية معناه : $w_n = w_0 \times q^n$ وعليه : $w_n = \dfrac{a-1}{a+1}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^n = -\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^n$ ومنه $w_n = -\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}$
- لدينا : $w_n = \dfrac{v_n-1}{v_n+1}$ يكافئ : $w_n\left(v_n+1\right) = v_n - 1$ أي : $w_n\cdot v_n + w_n = v_n - 1$ معناه : $w_n + 1 = v_n\left(1 - w_n\right)$ ومنه : $v_n = \dfrac{1+w_n}{1-w_n}$ بتعويض عبارة w_n في المعادلة الأخيرة نجد : $v_n = \dfrac{1 + \left(-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)}{1 - \left(-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)}$ إذن : $v_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}{1 + \left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}$ و.ه.م .

✍ حساب كل من : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

لدينا : $1 + a \prec 1 - a \prec (1+a) -$ وعليه : $-1 \prec \dfrac{1-a}{1+a} \prec 1$ (واضح أنّ $1 + a$ عدد حقيقي موجب تمامًا) ، ومنه :

- $$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right) = -\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1} = 0$$
- $$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1 - \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}{1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

2 - نضع في كلّ ممّا يلي $b = 1$ و $a = 3$.

✍ كتابة بدلالة n المجموع s_n من أجل $a = 3$ لدينا : $w_0 = \dfrac{1}{2}$ و $q = -\dfrac{1}{2}$.

$$s_n = w_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \dfrac{1}{3}$ لأنّ : $-1 \prec -\dfrac{1}{2} \prec 1$.

كتابة s'_n بدلالة n

لدينا : $w_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n + 1}$ يكافئ : $w_n = \dfrac{v_n - 1 + 1 - 1}{v_n + 1} = \dfrac{v_n + 1 - 2}{v_n + 1} = \dfrac{v_n + 1}{v_n + 1} - \dfrac{2}{v_n + 1} = 1 - \dfrac{2}{v_n + 1}$ ومنه :

$\dfrac{2}{v_n + 1} = 1 - w_n$ إذن : $\dfrac{1}{v_n + 1} = \dfrac{1}{2}(1 - w_n)$ وبالتالي :

$$s'_n = \frac{1}{v_0+1} + \frac{1}{v_1+1} + \frac{1}{v_2+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{v_n+1} = \frac{1}{2}(1-w_0) + \frac{1}{2}(1-w_1) + \frac{1}{2}(1-w_2) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}(1-w_n)$$
$$= \frac{1}{2}\left((1-w_0) + (1-w_1) + (1-w_2) + \ldots\ldots + (1-w_n)\right) = \frac{1}{2}\left(1+1+1+\ldots\ldots+1 - (w_0 + w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_n)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left((n+1) - s_n\right) = \frac{1}{2}\left((n+1) - \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ومنه : $s'_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

- **حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} s'_n$ ، ثمّ استنتاج طبيعة المتتالية (s'_n)**

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} s'_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{6}\right) - \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}\right) = +\infty$.

ومنه المتتالية (s'_n) متباعدة .

كتابة s''_n بدلالة n

وجدنا في السؤال السابق : $\dfrac{1}{v_n + 1} = \dfrac{1}{2}(1 - w_n)$ وبتربيع الطرفين نجد : $\left(\dfrac{1}{v_n + 1}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}(1 - w_n)\right)^2$ إذن :

$\dfrac{1}{(v_n + 1)^2} = \dfrac{1}{4}(1 - w_n)^2$ ومنه : $\dfrac{1}{(v_n + 1)^2} = \dfrac{1}{4}(1 - 2w_n + w_n^2)$ إذن :

$$s''_n = \frac{1}{(v_0+1)^2} + \frac{1}{(v_1+1)^2} + \frac{1}{(v_2+1)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(v_n+1)^2}$$
$$= \frac{1}{4}(1 - 2w_0 + w_0^2) + \frac{1}{4}(1 - 2w_1 + w_1^2) + \frac{1}{4}(1 - 2w_2 + w_2^2) + \ldots\ldots + \frac{1}{4}(1 - 2w_n + w_n^2)$$
$$= \frac{1}{4}(1 - 2w_0 + w_0^2 + 1 - 2w_1 + w_1^2 + 1 - 2w_2 + w_2^2 + \ldots\ldots + 1 - 2w_n + w_n^2)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1+1+1+\ldots\ldots+1 - 2(w_0 + w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_n) + (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \ldots\ldots + w_n^2)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1) - 2s_n + (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \ldots\ldots + w_n^2)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1) - 2s_n + \left((w_0 q^0)^2 + (w_0 q^1)^2 + (w_0 q^2)^2 + \ldots\ldots + (w_0 q^n)^2\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1) - 2s_n + w_0^2 (q^0)^2 + w_0^2 (q^1)^2 + w_0^2 (q^2)^2 + \ldots\ldots + w_0^2 (q^n)^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1) - 2s_n + w_0^2\left(q^0 + q^{2(1)} + q^{2(2)} + \ldots\ldots + q^{2(n)}\right)\right) = \frac{1}{4}\left((n+1) - 2s_n + w_0^2\left(\frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1) - 2\left(\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1) - \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1) - \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1) - \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \frac{1}{3}\right)$$

ومنه $s''_n = \dfrac{n}{4} - \dfrac{1}{12}\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{1}{6}$.

كتابة بدلالة كل من n و m المجموع h_n

لدينا : $w_n^m=(w_0q^n)^m=w_0^m(q^n)^m=w_0^m\cdot q^{n(m)}=w_0^m\cdot(q^m)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^n$

ومنه المتتالية (w_n^m) هندسية أساسها هو : $q^m=\left(-\frac{1}{2}\right)^m$ وحدّها الأول هو : $w_0^m=\left(\frac{1}{2}\right)^m$ وعليه :

$$h_n=w_0^m\left(\frac{1-(q^m)^{n+1}}{1-q^m}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1-\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^m}\right)=\frac{1^m}{2^m}\left(\frac{1-\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^{n+1}}{1-\frac{(-1)^m}{2^m}}\right)$$
$$=\frac{1}{2^m}\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{\frac{2^m-(-1)^m}{2^m}}\right)=\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{2^m-(-1)^m}\right)$$

ومنه $h_n=\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{2^m-(-1)^m}\right)$ حيث m عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . (لاحظ أنّه لمّا $m=1$ يُصبح $h_n=s_n$) .

كتابة بدلالة n الجداء G_n

لدينا : $\ln G_n=\ln|w_0\times w_1\times w_2\times ....\times w_n|=\ln|w_0|+\ln|w_1|+\ln|w_2|+.........+\ln|w_n|$ هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا : $\ln|w_n|=\ln|w_0\cdot q^n|=\ln|w_0|+\ln|q^n|=\ln|w_0|+n\ln|q|$ إذن المتتالية $(\ln|w_n|)$ حسابية أساسها هو : $r=\ln|q|=\ln\left|-\frac{1}{2}\right|=\ln\left|\frac{1}{2}\right|=-\ln 2$ وحدها الأول هو : $\ln|w_0|=\ln\left|\frac{1}{2}\right|=-\ln 2$ إذن :

$$\ln G_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln|w_0|+\ln|w_n|)=\left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln|w_0|+\ln|w_0|+n\ln|q|)=\left(\frac{n+1}{2}\right)(2\ln|w_0|+n\ln|q|)$$
$$=(n+1)\left(\ln|w_0|+\frac{n}{2}\ln|q|\right)=(n+1)\left(-\ln(2)-\frac{n\ln(2)}{2}\right)=-(n+1)\ln(2)\left(1+\frac{n}{2}\right)$$

وعليه : $G_n=e^{-(n+1)\ln(2)\left(1+\frac{n}{2}\right)}$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n$ ، ثمّ استنتاج طبيعة المتتالية (G_n)

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-(n+1)\ln(2)\left(1+\frac{n}{2}\right)}=0$ لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}-(n+1)\ln(2)\left(1+\frac{n}{2}\right)=-\infty$ ومنه المتتالية (G_n) متقاربة .

كتابة بدلالة n الجداء E_n

$$E_n=e^{w_0}\times e^{w_1}\times e^{w_2}\times ....\times e^{w_n}=e^{w_0+w_1+w_2+.........+w_n}=e^{s_n}=e^{\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

- طبيعة المتتالية (E_n) مع تبرير الإجابة

إنّ المتتالية (E_n) متقاربة ، التبرير : $\lim\limits_{n\to+\infty}E_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}=e^{\frac{1}{3}}$ لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$.

كتابة بدلالة n الجداء P_n

$$P_n=w_0^{2020}\times w_1^{2020}\times w_2^{2020}\times .....\times w_n^{2020}=(w_0q^0)^{2020}\times(w_0q^1)^{2020}\times(w_0q^2)^{2020}\times .....\times(w_0q^n)^{2020}$$
$$=w_0^{2020}\cdot(q^0)^{2020}\times w_0^{2020}\cdot(q^1)^{2020}\times w_0^{2020}\cdot(q^2)^{2020}\times .....\times w_0^{2020}\cdot(q^n)^{2020}$$
$$=w_0^{2020}\cdot w_0^{2020}\cdot w_0^{2020}\cdot .....\cdot w_0^{2020}\times q^{2020(0)}\cdot q^{2020(1)}\cdot q^{2020(2)}\cdot .....\cdot q^{2020(n)}$$
$$=(w_0^{2020})^{n+1}\times q^{2020(0+1+2+.....+n)}=w_0^{2020(n+1)}\times q^{2020\left(\frac{n+1}{2}\right)(0+n)}=w_0^{2020(n+1)}\times q^{1010n(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{1010n(n+1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1010n(n+1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)+1010n(n+1)}$$

ومنه : $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1010(n+1)(2+n)}$.

- تبيين أنّ المتتالية (P_n) متقاربة

لدينا $\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1010(n+1)(2+n)} = 0$ وبالتالي المتتالية (P_n) متقاربة .

3 التحقّق أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإنّ : $\frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1 = \frac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$

$$\frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1 = \frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - \left(\frac{1+\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}\right) = \frac{2-1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}} = \frac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$$

البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ثمّ حساب من جديد $\lim_{n\to+\infty} v_n$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{0+1}} - 1 = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 4 - 1 = 3 = v_0$ ومنه الخاصية " $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ " محقّقة

من أجل $n = 0$.

- نفرض أنّ : $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ونبرهن أنّ : $v_{n+1} = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} - 1$.

$$v_{n+1} = \frac{3+v_n}{1+3v_n} = \frac{3+\left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right)}{1+3\left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right)} = \frac{2+\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}{-2+\frac{6}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}} = \frac{2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+2}{-2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+6}$$

$$= \frac{4+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{4-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{4\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{4\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} - 1$$

إذن حسب البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$.

ولدينا : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right) = 1$ لأنّ : $-1 \prec -\frac{1}{2} \prec 1$.

الجـزء الخامس

1 دراسة تغيّرات الدّالة f_3 على المجال $[1;4]$

المشتقة

الدّالة f_3 معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1;4]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f_3{}'(x) = \frac{\frac{1+3x-3(3+x)}{(1+3x)^2}}{\frac{3+x}{1+3x}} + 1 = \frac{-8}{(3+x)(1+3x)} + 1 = \frac{-8+3+9x+x+3x^2}{(3+x)(1+3x)} = \frac{3x^2+10x-5}{(3+x)(1+3x)}$$

إشارة $f_3{}'(x)$ من إشارة $3x^2+10x-5$ لأنّ : $(3+x)(1+3x)$ موجب تماما على المجال $[1;4]$.

لنحل المعادلة التالية : $3x^2+10x-5=0$ مميزها هو $\Delta = b^2-4ac = 100+60 = 160$ وعليه : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{160}$ إذن حلولها هي :
$x_1=\frac{-10-\sqrt{160}}{6}$ و $x_2=\frac{-10+\sqrt{160}}{6}$. وتكون إشارة كثير الحدود $A(x)=3x^2+10x-5$ كالتالي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لكن : $x\in[1;4]$ و $x_2\prec 1$ ومنه : $f_3{}'(x)\succ 0$ إذن الدّالة f_3 متزايدة تماما على المجال $[1;4]$. ويكون جدول تغيّراتها كمايلي :

x	1	4
$f_3{}'(x)$	$+$	
$f_3(x)$	1 ↗	$\ln\left(\frac{7}{13}\right)+4$

2 تبيين أنّ $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right)=\ln\left(\frac{1+3x}{3+9x}+\frac{8}{3+9x}\right)=\ln\left(\frac{9+3x}{3+9x}\right)=\ln\left(\frac{3(3+x)}{3(1+3x)}\right)=\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)$$

دراسة وضعية المنحنى (C_{f_3}) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ على $[1;4]$

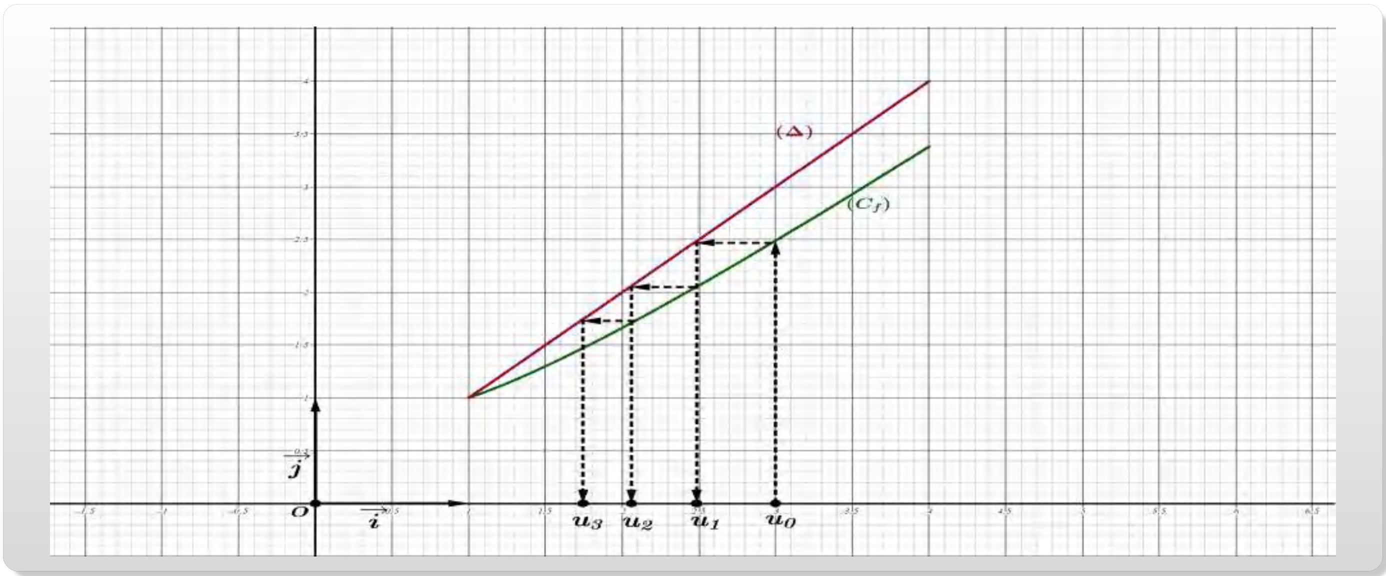
لدينا : $f_3(x)-y=f_3(x)-x=\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right)$.

دراسة إشارة $f_3(x)-y$

$f_3(x)-y=0$ معناه : $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)=0$ أي : $\frac{3+x}{1+3x}=1$ معناه : $3+x=1+3x$ ومنه : $x=1$.

لمّا $x\succ 1$ يكافئ : $9x\succ 9$ معناه : $9x+3\succ 12$ أي : $\frac{1}{9x+3}\prec\frac{1}{12}$ يكافئ : $\frac{1}{3}+\frac{1}{9x+3}\prec\frac{5}{12}$ وعليه : $\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right)\prec\ln\left(\frac{5}{12}\right)$
ومنه : $f_3(x)-y\prec 0$.
- لمّا $x\in]1;4]$ المنحنى (C_{f_3}) يقع تحت المستقيم (Δ) و يتقاطعان في النقطة $(1;1)$.

3 إنشاء المنحنى (C_{f_3}) على المجال $[1;4]$



إنشاء المنحنى (C_{f_3}) وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

4 برهان أنّه إذا كان $x \in [1;4]$ فإنّ : $f_3(x) \in [1;4]$

لدينا : $x \in [1;4]$ معناه : $1 \preceq x \preceq 4$ بما أنّ الدّالة f_3 متزايدة فإنّ : $f_3(1) \preceq f_3(x) \preceq f_3(4)$ يكافئ : $1 \preceq f_3(x) \preceq \ln\left(\frac{7}{13}\right)+4$ بما أنّ :

$\ln\left(\frac{7}{13}\right)+4 \prec 4$ فإنّ : $1 \preceq f_3(x) \preceq 4$ ومنه : $f_3(x) \in [1;4]$.

الجزء السادس

1 تبرير وجود المتتالية (u_n)

لدينا من السؤال 4 في الجزء الخامس فإنّ : $u_n \in [1;4]$ وعليه المتتالية (u_n) موجودة .

تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ممثّلة في الرسم السابق .

وضع تخمين حول اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال البيان نلاحظ أنّ حدود المتتالية (u_n) تتناقص وبالتالي نُخمّن أنّها متناقصة كما نلاحظ أنّها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى (C_{f_3}) مع المنصف الأول (المستقيم (Δ)) وعليه نُخمّن أنّها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 1 .

2 البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \preceq u_n \prec 4$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=3$ ونعلم أنّ : $1 \preceq 3 \prec 4$ ومنه : $1 \preceq u_0 \prec 4$ ومنه الخاصية " $1 \preceq u_n \prec 4$ " محقّقة من أجل $n=0$.
- نفرض أنّ : $1 \preceq u_n \prec 4$ ونبرهن أنّ : $1 \preceq u_{n+1} \prec 4$.

لدينا من الفرض : $1 \preceq u_n \prec 4$ بما أنّ الدّالة f_3 متزايدة فإنّ : $f_3(1) \preceq f_3(u_n) \prec f_3(4)$ يكافئ : $1 \preceq u_{n+1} \prec \ln\left(\frac{7}{13}\right)+4$ بما أنّ :

$\ln\left(\frac{7}{13}\right)+4 \prec 4$ فإنّ : $1 \preceq u_{n+1} \prec 4$.

إذن حسب البرهان بالترجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $1 \preceq u_n \prec 4$.

تبيين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \preceq u_n$ ثمّ استنتاج إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n)

وجدنا ممّا سبق أنّه من أجل كل x من المجال $[1;4]$ فإنّ : $f_3(x)-x \preceq 0$ وعليه بما أنّ : $1 \preceq u_n \prec 4$ فإنّ : $f_3(u_n)-u_n \preceq 0$ أي : $f_3(u_n) \preceq u_n$

إذن : $u_{n+1} \preceq u_n$ هذا ما يبيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

إثبات أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \preceq u_n \prec 4$ معناه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1 وبما أنها متناقصة فإنّها متقاربة نحو 1 .

إيجاد نهاية المتتالية (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ حيث l عدد حقيقي .

إيجاد l

لدينا : $f_3(l)=l$ يكافئ : $\ln\left(\frac{3+l}{1+3l}\right)+l=l$ أي : $\ln\left(\frac{3+l}{1+3l}\right)=0$ معناه : $\frac{3+l}{1+3l}=1$ وبالتالي : $3+l=1+3l$ ومنه : $l=1$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

3 تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $[1;4]$ فإنّ : $f_3'(x) \preceq f_3'(4)$

الدّالة f_3' معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1;4]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f_3''(x)=\frac{(6x+10)(3+x)(1+3x)-(6x+10)(3x^2+10x-5)}{(3+x)^2(1+3x)^2}=\frac{(6x+10)\left[3x^2+10x+3-\left(3x^2+10x-5\right)\right]}{(3+x)^2(1+3x)^2}$$

ومنه : $\boxed{f_3''(x)=\frac{16(3x+5)}{(3+x)^2(1+3x)^2}}$ ، واضح أنّه من أجل كل x من المجال : $[1;4]$ فإنّ : $f_3''(x) \succ 0$ ومنه الدّالة f_3' متزايدة تماما على $[1;4]$.

لدينا : $x \preceq 4$ وعليه بما أنّ الدّالة f_3' متزايدة تماما على المجال $[1;4]$ فإنّ : $f_3'(x) \preceq f_3'(4)$ و.ه.م .

حساب $f_3'(4)$

$$f_3'(4)=\frac{3(4)^2+10(4)-5}{(3+4)(1+3(4))}=\frac{3(16)+40-5}{(7)(13)}=\frac{83}{91}$$

✍ تبيين أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}-1 \preceq \dfrac{83}{91}(u_n - 1)$

لدينا : $f_3{}'(x) \preceq f_3{}'(4)$ وبما أنّ الدّالة f_3' مستمرة فإنّها تقبل المكاملة على المجال $[1;4]$ وبما أنّ : $1 \preceq u_n \prec 4$ فإنّ : $\int_1^{u_n} f_3{}'(x)\,dx \preceq \int_1^{u_n} f_3{}'(4)\,dx$

يكافئ : $\int_1^{u_n} f_3{}'(x)\,dx \preceq f_3{}'(4)\int_1^{u_n} dx$ معناه : $[f_3(x)+c_1]_1^{u_n} \preceq f_3{}'(4)\,[x+c_2]_1^{u_n}$ - حيث c_1 و c_2 عددين حقيقين -

وعليه : $f_3(u_n) - f_3(1) \preceq f_3{}'(4)(u_n-1)$ ومنه : $u_{n+1}-1 \preceq \dfrac{83}{91}(u_n-1)$ و.هـ.م .

✍ تبيين أنّه من أجل كل n عدد طبيعي : $0 \preceq u_n - 1 \preceq 2\left(\dfrac{83}{91}\right)^n$

باستعمال المتباينة السابقة - $u_{n+1}-1 \preceq \dfrac{83}{91}(u_n-1)$ - لدينا :

$$\begin{aligned}
n=0 \quad &: \quad u_1 - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_0-1)\\
n=1 \quad &: \quad u_2 - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_1-1)\\
n=2 \quad &: \quad u_3 - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_2-1)\\
&\vdots\\
n=n-2 \quad &: \quad u_{n-1} - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_{n-2}-1)\\
n=n-1 \quad &: \quad u_n - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_{n-1}-1)
\end{aligned}$$

بضرب المتباينات طرف بطرف نجد :

$$(u_1-1)(u_2-1)(u_3-1)\,.........\,(u_{n-1}-1)(u_n-1) \preceq \left(\frac{83}{91}\right)^n (u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)\,.........\,(u_{n-2}-1)(u_{n-1}-1)$$

إذن بعد الاختزالات نجد : $(u_n-1) \preceq \left(\dfrac{83}{91}\right)^n (u_0-1)$ يكافئ : $u_n - 1 \preceq \left(\dfrac{83}{91}\right)^n (3-1)$ ومنه : $u_n - 1 \preceq 2\left(\dfrac{83}{91}\right)^n$ هذا من جهة

ومن جهة أخرى لدينا : $1 \preceq u_n$ وعليه : $0 \preceq u_n - 1$ إذن نجد : $0 \preceq u_n - 1 \preceq 2\left(\dfrac{83}{91}\right)^n$ و.هـ.م .

✍ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا : $0 \preceq u_n - 1 \preceq 2\left(\dfrac{83}{91}\right)^n$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{83}{91}\right)^n = 0$ لأنّ : $-1 \prec \dfrac{83}{91} \prec 1$ إذن حسب النّهايات بالحصر نتحصّل على :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-1)=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4 ✍ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

لدينا : $f_3(u_k) = \ln\left(\dfrac{3+u_k}{1+3u_k}\right)+u_k$ يكافئ : $-\ln\left(\dfrac{3+u_k}{1+3u_k}\right) = u_k - f_3(u_k)$ ومنه : $\ln\left(\dfrac{1+3u_k}{3+u_k}\right) = u_k - u_{k+1}$ إذن :

$$\begin{aligned}
T_n &= \ln\left(\frac{1+3u_0}{3+u_0}\right)+\ln\left(\frac{1+3u_1}{3+u_1}\right)+\ln\left(\frac{1+3u_2}{3+u_2}\right)+\,...............\,+\ln\left(\frac{1+3u_{n-1}}{3+u_{n-1}}\right)\\
&= (u_0-u_1)+(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+\,...............\,+(u_{n-2}-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_n)\\
&= u_0 - u_n
\end{aligned}$$

ومنه : $T_n = 3 - u_n$. وعليه : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n) = 3 - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3-1=2$.

الجزء السابع

لدينا : $L_{n+1} = 2L_n f_5(L_n) - L_n^2 = 2L_n\left(\ln\left(\dfrac{5+L_n}{1+5L_n}\right)+L_n\right) - L_n^2 = 2L_n\cdot\ln\left(\dfrac{5+L_n}{1+5L_n}\right)+2L_n^2 - L_n^2 = 2L_n\cdot\ln\left(\dfrac{5+L_n}{1+5L_n}\right)+L_n^2$

وعليه نلاحظ أنّ : $L_{n+1} = g(L_n)$.

1 ✍ البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $0 \preceq L_n \preceq 1$

- من أجل $n=0$ لدينا : $L_0 = \dfrac{1}{5}$ ونعلم أنّ : $0 \preceq \dfrac{1}{5} \preceq 1$ وعليه : $0 \preceq L_0 \preceq 1$ إذن الخاصية " $0 \preceq L_n \preceq 1$ " محقّقة من أجل $n=0$.

• نفرض أنّ : $1 \preceq L_n \preceq 0$ ونبرهن أنّ : $1 \preceq L_{n+1} \preceq 0$.
لدينا من الفرض : $1 \preceq L_n \preceq 0$ بما أنّ الدّالة g متزايدة فإنّ : $g(1) \preceq g(L_n) \preceq g(0)$ وعليه : $1 \preceq L_{n+1} \preceq 0$.
إذن حسب البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $1 \preceq L_n \preceq 0$.

2 تبيين أنّه من أجل كل $x \in [0;1]$: $2\ln\left(\dfrac{5+x}{1+5x}\right) + x \succeq 1$

نضع من أجل كل x من المجال : $[0;1]$: $h(x) = 2\ln\left(\dfrac{5+x}{1+5x}\right) + x$.
الدّالة h معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;1]$ ودالتها المشتقة هي :

$$h'(x) = 2\left(\frac{\dfrac{1+5x-5(5+x)}{(1+5x)^2}}{\dfrac{5+x}{1+5x}}\right) + 1 = 2\left(\frac{-24}{(1+5x)(5+x)}\right) + 1 = \frac{5x^2+26x-43}{(1+5x)(5+x)}$$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $5x^2+26x-43$ لأنّ : $(1+5x)(5+x)$ موجب تماما على المجال $[0;1]$.
لنحل المعادلة التالية : $5x^2+26x-43 = 0$ مميزها هو $\Delta = b^2-4ac = 676+860 = 1536$ وعليه : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1536}$ إذن حلولها هي :
$x_1 = \dfrac{-13-8\sqrt{6}}{5}$ و $x_2 = \dfrac{-13+8\sqrt{6}}{5}$. وتكون إشارة كثير الحدود $B(x) = 3x^2+10x-5$ كالتالي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لكن : $x \in [0;1]$ و $x_2 \succ 1$ و $x_1 \prec 0$ ومنه : $h'(x) \prec 0$ إذن الدّالة h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$.
وعليه لمّا : $x \preceq 1$ وبما أنّ الدّالة h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$ فإنّ : $h(x) \succeq h(1)$ أي : $h(x) \succeq 1$ ومنه : $2\ln\left(\dfrac{5+x}{1+5x}\right) + x \succeq 1$ و.هـ.م .

إثبات أنّ المتتالية (L_n) متزايدة

بما أنّ حدود المتتالية (L_n) موجبة فإنّ :
$\dfrac{L_{n+1}}{L_n} = \dfrac{2L_n f_5(L_n) - L_n^2}{L_n} = 2f_5(L_n) - L_n = 2\left(\ln\left(\dfrac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + L_n\right) - L_n = 2\ln\left(\dfrac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + L_n$ ومن السؤال السابق
وجدنا أنّه من أجل كل x من المجال $[0;1]$ فإنّ : $2\ln\left(\dfrac{5+x}{1+5x}\right) + x \succeq 1$ وبما أنّ : $1 \preceq L_n \preceq 0$ فإنّ : $2\ln\left(\dfrac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + L_n \succeq 1$ وعليه :
$\dfrac{L_{n+1}}{L_n} \succeq 1$ ومنه : $L_{n+1} \succeq L_n$ إذن : $L_{n+1} - L_n \succeq 0$ لنجد في الأخير أنّ المتتالية (L_n) متزايدة و.هـ.م .

تبين أنّ (L_n) متقاربة ثمّ إيجاد نهايتها

وجدنا أنّ : $1 \preceq L_n \preceq 0$ هذا معناه أنّ المتتالية (L_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 وبما أنّها متزايدة فهي متقاربة نحو 1 .
<u>إيجاد نهاية المتتالية (L_n)</u>
بما أنّ (L_n) متقاربة فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \lim\limits_{n\to+\infty} L_{n+1} = l_1$ حيث l_1 عدد حقيقي .
لدينا : $l_1 = g(l_1)$ أي : $g(l_1) - l_1 = 0$ ومنه حسب ماهو مُعطى $g(x) - x = 0$ لمّا $x = 1$ نجد أنّ : $l_1 = 1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 1$.

3 تبيين أنّ المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان

وجدنا ممّا سبق أنّ :
• المتتالية (u_n) متناقصة بينما المتتالية (L_n) متزايدة .
• $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 1$.
إذن المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان .

تمارين المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 09

كتابة الأستاذ: توامي عمر

الجزء الأول: لدينا (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \quad ; \quad \alpha \neq 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$

1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $p(n) : u_n \neq 1$

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \alpha \neq 1$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \neq 1$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \neq 1$.

يكفي إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1$ يستلزم $u_n = 1$

لدينا $u_{n+1} = 1$ منه : $\dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} = 1$ و منه : $8u_n - 6 = u_n + 1$ و منه : $8u_n - u_n = 6 + 1$ أي : $7u_n = 7$ إذن : $u_n = 1$

إذن إذا كان $u_n \neq 1$ فإن $u_{n+1} \neq 1$ أي $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $\boxed{u_n \neq 1}$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية $x^2 - 7x + 6 = 0$:

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac$ منه : $\Delta = 49 - 24 = 25$ ، إذن للمعادلة حلان مختلفان هما :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{2} = 6$$

3) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

(u_n) متتالية ثابتة يعني من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$

من العلاقة : $u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1}$ نجد : $\alpha = \dfrac{8\alpha - 6}{\alpha + 1}$ منه : $\alpha(\alpha + 1) = 8\alpha - 6$ و منه : $\alpha^2 + \alpha = 8\alpha - 6$

أي : $\alpha^2 - 7\alpha + 6 = 0$ و هي المعادلة السابقة ، و عليه : $\boxed{\alpha = 6}$ (مقبول) أو $\alpha = 1$ (مرفوض لأن $\alpha \neq 1$)

.

الجزء الثاني : نفرض في كل ما يلي : $u_0 = 8$.

1) لنتحقق أن : $u_n = 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}$

لدينا : $\dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} = \dfrac{8u_n + 8 - 14}{u_n + 1} = \dfrac{8(u_n + 1) - 14}{u_n + 1} = 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}$ منه : $\boxed{u_n = 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}}$.

- لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $p(n) : u_n \geq 6$

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 8 > 6$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \neq 1$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \geq 6$.

لدينا حسب فرضية التراجع أن : $u_n \geq 6$ منه : $u_n + 1 \geq 7$ و منه : $\dfrac{1}{7} \leq \dfrac{1}{u_n + 1}$ و منه : $\dfrac{-14}{7} \geq \dfrac{-14}{u_n + 1}$

و منه : $8 - 2 \geq 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}$ أي : $u_{n+1} \geq 6$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{u_n \geq 6}$.

2) إثبات أن : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 6)}{u_n + 1}$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} - u_n = \dfrac{8u_n - 6 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \dfrac{8u_n - 6 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \dfrac{-(u_n^2 - 7u_n + 6)}{u_n + 1}$

إذن : $\boxed{u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 6)}{u_n + 1}}$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):

بما أن $u_n \geq 6$ فإن $u_n - 6 \geq 0$ وَ $-(u_n - 1) < 6$ وَ $u_n + 1 > 0$

إذن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ و بالتالي $\boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$.

3) إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة :

بما أن $u_n \geq 6$ فإن (u_n) متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة فهي متقاربة و تقترب نحو العدد الحقيقي ℓ

منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

لدينا : $u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1}$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1}$ و منه : $\ell = \dfrac{8\ell - 6}{\ell + 1}$ تكافئ : $\ell^2 + \ell = 8\ell - 6$

تكافئ : $\boxed{\ell^2 - 7\ell + 6 = 0}$.

4) تعيين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا : $\ell^2 - 7\ell + 6 = 0$ من أجل $\ell = 1$ أو $\ell = 6$

بما أن $u_n \geq 6$ فإن $\ell = 6$ و عليه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$.

الجزء الثالث : لدينا من أجل $x \in [1; 8]$: $f(x) = \dfrac{8x - 6}{x + 1}$

1) دراسة تغيرات الدالة f :

من أجل كل $x \in [1; 8]$: $f'(x) = \dfrac{8(x+1) - 1(8x - 6)}{(x+1)^2} = \dfrac{8 + 6}{(x+1)^2} = \dfrac{14}{(x+1)^2} > 0$

منه f دالة متزايدة تماماً على المجال $[1; 8]$.

x	1	8
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$1 \nearrow$	$\frac{58}{9}$

2) لنبين أنه إذا كان $x \in [4; 8]$، فإن $f(x) \in [4; 8]$.

لدينا : $x \in [4; 8]$ وَ f دالة متزايدة تماماً ، منه : $f(x) \in [f(4); f(8)]$ و منه : $f(x) \in \left[\dfrac{26}{4}; \dfrac{58}{9}\right]$

بما أن : $\left[\dfrac{26}{5}; \dfrac{58}{9}\right] \subset [4; 8]$ فإن : $\boxed{f(x) \in [4; 8]}$.

3) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $p(n) : 6 \leq u_n \leq 8$.

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 8$ منه : $6 \leq u_0 \leq 8$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $6 \leq u_n \leq 8$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $6 \leq u_{n+1} \leq 8$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $6 \leq u_n \leq 8$ وَ f دالة متزايدة تماماً ، منه : $f(6) \leq f(u_n) \leq f(8)$ أي : $6 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{58}{9}$

و بما أن $\dfrac{58}{6} \leq 8$ فإن: $6 \leq u_{n+1} \leq 8$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $\boxed{6 \leq u_n \leq 8}$.

الجزء الرابع: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) معرفة كما يلي : $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $p(n) : 4 \leq v_n \leq 6$

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = 4$ منه : $4 \leq v_0 \leq 6$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $4 \leq v_n \leq 6$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $4 \leq v_{n+1} \leq 6$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $4 \leq v_n \leq 6$ وَ f دالة متزايدة تماماً ، منه : $f(4) \leq f(v_n) \leq f(6)$ أي : $\frac{26}{5} \leq u_{n+1} \leq 6$

و بما أن $\frac{26}{5} \geq 4$ فإن : $4 \leq v_{n+1} \leq 6$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $\boxed{4 \leq v_n \leq 6}$.

2) إثبات أن (v_n) متتالية متزايدة :

لدينا : $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n = \frac{8v_n - 6}{v_n + 1} - v_n = \frac{-(v_n - 1)(v_n - 6)}{v_n + 1}$

بما أن $4 \leq v_n \leq 6$ فإن $v_n - 6 \leq 0$ وَ $-(v_n - 1) < 6$ وَ $v_n + 1 > 0$

إذن : $v_{n+1} - v_n \geq 0$ و بالتالي $\boxed{\text{المتتالية } (v_n) \text{ متزايدة}}$.

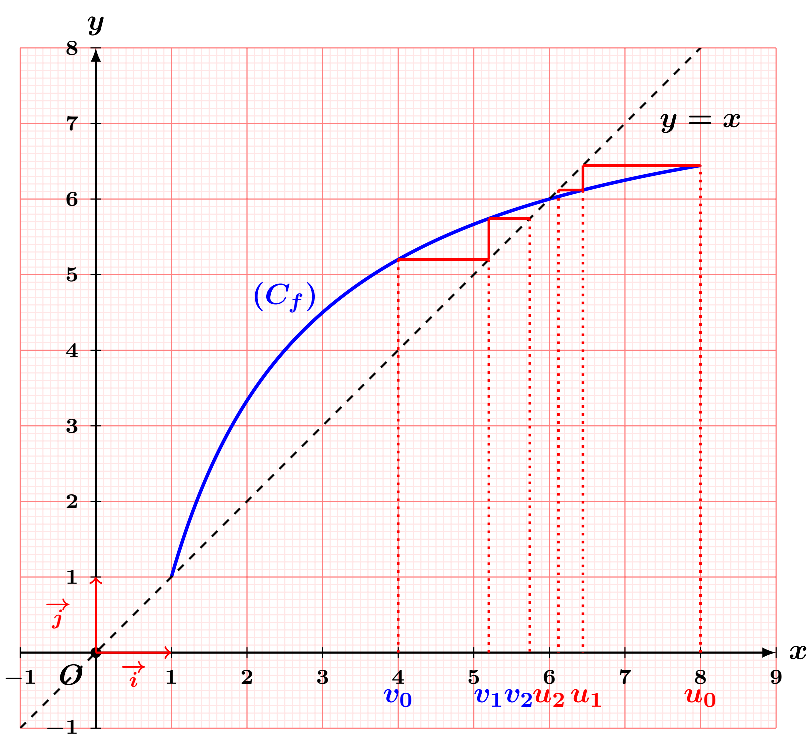
الاستنتاج : بما أن $4 \leq v_n$ فإن (v_n) متتالية محدودة من الأسفل و متزايدة فهي متقاربة و تقترب نحو العدد الحقيقي ℓ' .

3) تمثيل على محور الفواصل الحدود v_0 ، v_1 وَ v_2 : أنظر الشكل أدناه .

4) التخمين :

من الشكل نلاحظ أن : $v_0 < v_1 < v_2$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة متناقصة و تقترب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ أي :

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell' = 6}$.



الجزء الخامس: لدينا المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_{n+1} = f(u_n) - f(v_n)$

1) لنثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = \dfrac{14(u_n - v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}$

لدينا : $w_{n+1} = f(u_n) - f(v_n) = \dfrac{8u_n - 6}{u_n+1} - \dfrac{8v_n+1}{v_n+1} = \dfrac{(8u_n-6)(v_n+1) - (8v_n+1)(u_n+1)}{(u_n+1)(v_n+1)}$

$$= \frac{(8u_nv_n + 8u_n - 6v_n - 6) - (8v_nu_n + 8v_n - 6u_n - 6)}{(u_n+1)(v_n+1)} = \frac{+8u_n - 6v_n - 8v_n + 6u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$$

$$= \frac{14u_n - 14v_n}{(u_n+1)(v_n+1)} = \frac{14(u_n - v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{w_{n+1} = \dfrac{14(u_n - v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}}$.

2) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n \geq 0$

لدينا : $w_{n+1} = f(u_n) - f(v_n)$ منه : $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$ أي : $w_n = u_n - v_n$

✓لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $w_0 = u_0 - v_0 = 8 - 4 = 4 \geq 0$ إذن $p(0)$ محققة .

✓نفرض صحة $p(n)$ أي : $w_n \geq 0$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $w_{n+1} \geq 0$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $w_n \geq 0$ أي $v_n - u_n \geq 0$ منه : $14(v_n - u_n) \geq 0$

نقسم الطرفين على العدد $(u_n+1)(v_n+1)$ الموجب تماماً فنجد : $\dfrac{14(u_n - v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)} \geq 0$ و بالتالي : $w_{n+1} \geq 0$

أي $p(n+1)$ صحيحة ، إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{w_n \geq 0}$.

3) لنبين من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{14}{35}(u_n - v_n)$

لدينا : $\begin{cases} u_n \geq 6 \\ v_n \geq 4 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_n + 1 \geq 7 \\ v_n + 1 \geq 5 \end{cases}$ و منه : $(u_n+1)(v_n+1) \geq 35$ أي : $\dfrac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \dfrac{1}{35}$

نضرب طرفي المتباينة بالعدد الموجب $14(u_n - v_n)$ فنجد : $\dfrac{u_n - v_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \dfrac{14}{35}(u_n - v_n)$

إذن : $\boxed{u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{14}{35}(u_n - v_n)}$.

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - v_n \leq 4\left(\dfrac{14}{35}\right)^n$

لدينا : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$ منه :
$$\begin{cases} u_1 - v_1 \leq \dfrac{14}{35}(u_0 - v_0) \\ u_2 - v_2 \leq \dfrac{14}{35}(u_1 - v_1) \\ u_3 - v_3 \leq \dfrac{14}{35}(u_4 - v_4) \\ \quad\vdots \\ u_n - v_n \leq \dfrac{14}{35}(u_{n-1} - v_{n-1}) \end{cases}$$

بضرب المتباينات طرفاً لطرف نجد : $u_n - v_n \leq \left(\dfrac{14}{35}\right)^n (u_0 - v_0)$.

و بما أن : $u_0 - v_0 = 8 - 4 = 4$ فإن : $\boxed{u_n - v_n \leq 4\left(\frac{14}{35}\right)^n}$.

الاستنتاج : بما أن (u_n) متتالية متناقصة وَ (v_n) متتالية متزايدة وَ $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن $\boxed{\text{المتتاليتان } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متجاورتان}}$.

الجزء السادس : لدينا المتتالية (L_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$

1) لنبرهن أن (L_n) متتالية هندسية :

لدينا : $L_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 6}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{\dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 6}{\dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 1} = \dfrac{\dfrac{8u_n - 6 - 6(u_n + 1)}{u_n + 1}}{\dfrac{8u_n - 6 - (u_n + 1)}{u_n + 1}} = \dfrac{8u_n - 6 - 6(u_n + 1)}{8u_n - 6 - (u_n + 1)} = \dfrac{2u_n - 12}{7u_n - 7}$

منه : $L_{n+1} = \dfrac{2}{7}\left(\dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}\right) = \dfrac{2}{7}L_n$

إذن (L_n) متتالية هندسية متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \dfrac{2}{7}}$ و حدها الأول $L_0 = \dfrac{u_0 - 6}{u_0 - 1} = \dfrac{8 - 6}{8 - 1}$ أي : $\boxed{L_0 = \dfrac{2}{7}}$.

2) إيجاد عبارة الحد العام L_n بدلالة n :

لدينا : $L_n = L_0 \times q^n$ منه : $L_n = \dfrac{2}{7} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$ إذن : $\boxed{L_n = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1}}$.

- استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$ منه : $L_n(u_n - 1) = u_n - 6$ تكافئ : $L_n u_n - L_n = u_n - 6$ تكافئ : $L_n u_n - u_n = L_n - 6$

تكافئ : $u_n(L_n - 1) = L_n - 6$ تكافئ : $u_n = \dfrac{L_n - 6}{L_n - 1}$ إذن : $\boxed{u_n = \dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 6}{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 1}}$.

3) حساب النهايات :

✓ بما أن $-1 < \dfrac{2}{7} < 1$ فإن : $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1} = 0$ منه : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} L_n = 0}$ ، نستنتج أن (L_n) متتالية متقاربة نحو 0 .

✓ وَ : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 6}{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 1} = \dfrac{-6}{-1} = 6$ منه : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 6}$ ، نستنتج أن (u_n) متتالية متقاربة نحو 6 .

4) حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا : $S_n = L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ منه : $S_n = L_0\left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$

و منه : $\dfrac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{\frac{5}{7}} \times \dfrac{2}{7} = S_n = \dfrac{2}{7}\left(\dfrac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}}\right)$ إذن : $\boxed{S_n = \dfrac{2}{5}\left(1 - \left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1}\right)}$.

- استنتاج المجموع S'_n :

لدينا : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$ منه : $L_n = \dfrac{u_n - 1 - 5}{u_n - 1}$ ومنه : $L_n = 1 - \dfrac{5}{u_n - 1}$ ومنه : $L_n - 1 = -\dfrac{5}{u_n - 1}$

أي : $\dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1 - L_n}{5}$

و لدينا : $S_n{}' = \dfrac{1}{u_0 - 1} + \dfrac{1}{u_1 - 1} + \dfrac{1}{u_2 - 1} + \ldots + \dfrac{1}{u_n - 1}$ منه : $S_n{}' = \dfrac{1 - L_0}{5} + \dfrac{1 - L_1}{5} + \ldots + \dfrac{1 - L_n}{5}$

و منه : $S_n{}' = \dfrac{1 + 1 + \ldots + 1 - (L_0 + L_1 + \ldots + L_n)}{5}$ أي: $S_n{}' = \dfrac{n + 1 - S_n}{5}$

إذن : $\boxed{S_n{}' = \dfrac{n + 1 - \dfrac{2}{5}\left(1 - \left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1}\right)}{5}}$.

5) حساب بدلالة الجداء P_n :

لدينا : $P_n = L_0^{2018} \times L_1^{2018} \times L_2^{2018} \times \ldots \times L_n^{2018}$

تكافئ : $P_n = L_0^{2018} \times (L_0 q)^{2018} \times \left(L_0 q^2\right)^{2018} \times \ldots \times (L_0 q^n)^{2018}$

تكافئ : $P_n = L_0^{2018} \times L_0^{2018} q^{2018} \times L_0^{2018} q^{2 \times 2018} \times \ldots \times L_0^{2018} q^{n \times 2018}$

تكافئ : $P_n = L_0^{2018} \times L_0^{2018} \times L_0^{2018} \times \ldots \times L_0^{2018} \times q^{2018 + 2 \times 2018 + \ldots + n \times 2018}$

تكافئ : $P_n = \left(L_0^{2018}\right)^{n+1} \times q^{2018(1 + 2 + \ldots + n)}$ تكافئ: $P_n = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{2018(n+1)} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^{2018 \times \frac{n}{2}(1+n)}$

تكافئ : $P_n = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{2018(n+1)} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^{1009(n+1)}$ إذن : $\boxed{P_n = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{3027(n+1)}}$.

الجزء السابع:

1) لنبرهن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 6 = \dfrac{2\left(u_n - 6\right)}{u_n + 1}$

لدينا : $\dfrac{2u_n - 12}{u_n + 1} = \dfrac{8u_n - 6 - 6u_n - 6}{u_n + 1} = \dfrac{8u_n - 6 - 6\left(u_n + 1\right)}{u_n + 1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 6 = u_{n+1} - 6$

منه : $\boxed{u_{n+1} - 6 = \dfrac{2\left(u_n - 6\right)}{u_n + 1}}$.

2) تعيين العدد الحقيقي k من المجال $]0;1[$ بحيث : $|u_{n+1} - 6| \leq k\,|u_n - 6|$

لدينا : $u_{n+1} - 6 = \dfrac{2\left(u_n - 6\right)}{u_n + 1}$ منه : $|u_{n+1} - 6| = \dfrac{2}{u_n + 1}\,|u_n - 6|$ ....(1)

و لدينا : $u_n \geq 6$ منه : $u_n + 1 \geq 7$ و منه : $\dfrac{1}{u_n + 1} \leq \dfrac{1}{7}$ نضرب الطرفين بالعدد الموجب $2\,|u_n - 6|$

نجد : $\dfrac{2}{u_n + 1}\,|u_n - 6| \leq \dfrac{2}{7}\,|u_n - 6|$ ....(2)

بتعويض (1) في (2) نجد : $|u_{n+1} - 6| \leq \dfrac{2}{7}\,|u_n - 6|$ و عليه : $\boxed{k = q = \dfrac{2}{7}}$.

3) لنبين من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $|u_n - 6| \leq 2\left(\frac{2}{7}\right)^n$

لدينا : $|u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7}|u_n - 6|$ منه :

$$\begin{cases} |u_1 - 6| \leq \frac{2}{7}|u_0 - 6| \\ |u_2 - 6| \leq \frac{2}{7}|u_1 - 6| \\ |u_3 - 6| \leq \frac{2}{7}|u_2 - 6| \\ \vdots \\ |u_n - 6| \leq \frac{2}{7}|u_{n-1} - 6| \end{cases}$$

بضرب المتباينات طرفاً لطرف نجد : $|u_n - 6| \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n |u_0 - 6|$

و بما أن : $u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$ فإن : $\boxed{|u_n - 6| \leq 2\left(\frac{2}{7}\right)^n}$.

4) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، يطلب تعيين نهايتها .

لدينا : $|u_n - 6| \leq 2\left(\frac{2}{7}\right)^n$ منه : $\lim_{n\to+\infty} |u_n - 6| \leq \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{2}{7}\right)^n$ و منه : $\lim_{n\to+\infty} |u_n - 6| \leq 0$

أي : $\lim_{n\to+\infty} (u_n - 6) = 0$ إذن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 6}$ ، أي (u_n) متتالية متقاربة و تقترب نحو 6 .