العبقري في الرياضيات

طبعة 2021

المتتاليات العددية

الثالثة ثانوي

الشعب: آداب وفلسفة؛

آداب ولغات أ.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية)

الدروس // الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

دروس: حول المتتاليات العددية // التحضير الجيد للبكالوريا // الشعبة: 03 آ وف؛ لغ أ.

❶ عموميات على المتتاليات العددية:

① تعريف متتالية عددية:

تعريف:

متتالية u هي دالة تُرفق بكل عدد طبيعي n، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 مُعطى، العدد (u_n).

ترميز:

- نرمز إلى **صورة العدد الطبيعي** n بالمتتالية u بـ u_n بدلاً من $u(n)$.
- نرمز إلى المتتالية u بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$، إذا كانت معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.
- نرمز إلى المتتالية u بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n)، إذا كانت معرّفة على $\mathbb{N}$.
- يسمى u_n **الحد العام** للمتتالية u ويسمى u_{n_0} **حدّها الأوّل.**
- إذا كانت **المتتالية (u_n) معرّفة على** $\mathbb{N}$ نرمز إلى **حدّها الأوّل** بالرمز u_0.
- إذا كانت **المتتالية (u_n) معرّفة على** $\mathbb{N}^*$ نرمز إلى **حدّها الأوّل** بالرمز u_1.

ملاحظة:

لابد من **التمييز بين متتالية (u_n)** وَ بين **حدّها العام u_n** الذي هو **عدد حقيقي.**

② طُرق توليد متتالية:

أ)توليد متتالية بالحد العام:

تعريف:

يمكن تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ بوضع من أجل كل عدد طبيعي n مع $n\geq n_0$، $\boxed{u_n=f(n)}$ حيث f دالة معرّفة على $[n_0;+\infty[$.

مثال:(● من بكالوريا 2008 الموضوع I)

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=3n+1$.

1/حساب u_0، u_1، u_2:

طريقة:

العلاقة $u_n=3n+1$، **تسمح من حساب قيمة كل الحدود** ومن أجل ذلك **يكفي تعويض n** على التوالي بـِ 0، 1، 2، ...

إذن: $u_0=3\times(0)+1=0+1=1$، $u_1=3\times(1)+1=3+1=4$، $u_2=3\times(2)+1=6+1=7$.

ب)توليد متتالية بعلاقة تراجعية:

تعريف:

يُمكن **تعريف متتالية بالتراجع** وذلك بإعطاء:

- ❑ **قيمة الحد الأوّل.**
- ❑ **علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية.**

مثال:(● من بكالوريا 2008 الموضوع II)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأول $u_1=7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1}=2u_n+1$.

1)حساب u_2، u_3، u_4:

لدينا: $\begin{cases}u_1=7\\u_{n+1}=2u_n+1\end{cases}$.

طريقة:

تسمح العلاقة $u_{n+1}=2u_n+1$، **بحساب قيمة الحد** u_{n+1}، إذا **عُلمت قيمة الحد الذي يسبقه** u_n.

- ❍ معرفة قيمة u_0 تسمح من حساب قيمة u_1.
- ❍ معرفة قيمة u_1 تسمح من حساب قيمة u_2.
- ❍ معرفة قيمة u_9 تسمح من حساب قيمة u_{10}، و هكذا ...

إذن:

$u_2=2u_1+1=2\times(7)+1=14+1=15$،

$u_3=2u_2+1=2\times(15)+1=30+1=31$،

$u_4=2u_3+1=2\times(31)+1=62+1=63$.

تمرين محلول 01 ص 33:

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=-3n^2+1$.

1.أحسب u_0، u_1، u_2 و u_{20}.

2.أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1}، u_{2n}، u_{3n+2}.

الحل:

لاحظ أنّ: المتتالية (u_n) معرّفة بحدّها العام u_n لأنّه: أُعطيَ حدّها العام u_n بدلالة n.

1.حساب u_0، u_1، u_2 و u_{20}:

بالتعويض نجد:

✪ $u_0=-3(0)^2+1$
$=-3(0)+1=0+1=1$

✪ $u_1=-3(1)^2+1$
$=-3(1)+1=-3+1=-2$

✪ $u_2=-3(2)^2+1$
$=-3(4)+1=-12+1=-11$

✪ $u_{20}=-3(20)^2+1$
$=-3(400)+1$
$=-1200+1=-1199$

2.كتابة بدلالة n الحدود u_{n+1}، u_{2n}، u_{3n+2}:

بالتعويض نجد:

✪ $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1$
$=-3(n^2+2n+1)+1$
$=-3n^2-6n-3+1$
$=-3n^2-6n-2$

✪ $u_{2n}=-3(2n)^2+1$
$=-3(4n^2)+1=-12n^2+1$

✪ $u_{3n+2}=-3(3n+2)^2+1$
$=-3(9n^2+12n+4)+1$
$=-27n^2-36n-12+1$
$=-27n^2-36n-11$

تمرين محلول 02 ص33:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=-2u_n+1$.

1.أحسب u_1، u_2، u_3.

الحل:

لاحظ أنّ: المتتالية (u_n) معرّفة بالتراجع

لأنّه: أعطيت قيمة حدّها الأوّل $u_0=2$، وعلاقة تراجعية $u_{n+1}=-2u_n+1$.

1.حساب u_1، u_2، u_3:

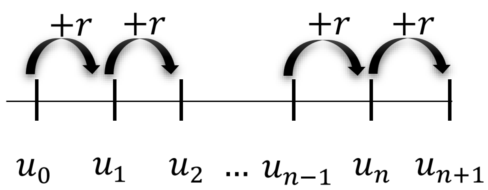
$u_1=-2u_0+1=-2(2)+1=-4+1=-3$،
$u_2=-2u_1+1=-2(-3)+1=6+1=7$،
$u_3=-2u_2+1=-2(7)+1=-14+1=-13$.

تمرين محلول 03 ص33 (عمل منزلي)

❷ المتتاليات الحسابية:

① تعريف:

نقول أنّ المتتالية (u_n) **متتالية حسابية** حدّها الأول u_0 وأساسها r (r عدد حقيقي) **إذا وفقط إذا كان** من أجل كل عدد طبيعي n: $\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$.



② عبارة الحد العام:

خاصية 01:

إذا كانت (u_n) **متتالية حسابية** أساسها r، فإنّه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $\boxed{u_n=u_p+(n-p)r}$.

حالات خاصة:

$\boxed{u_n=u_0+nr}$ و $\boxed{u_n=u_1+(n-1)r}$.

③ مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

خاصية 02:

إذا كانت (u_n) **متتالية حسابية**، فإنّ:

$$\boxed{S=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)}$$

بصفة عامة:

$$\boxed{S=(\text{عدد الحدود})\left(\frac{\text{الحد الأوّل}+\text{الحد الأخير}}{2}\right)}$$

حيث:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأوّل + **1**

④ خاصية الوسط الحسابي:

خاصية 03:

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $\boxed{a+c=2b}$.

يسمى العدد b **الوسط الحسابي** للعددين a و c.

مثال: (● حل تمارين البكالوريا)

حسابية معرّفة بحدّها العام.

التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01//
الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=3n+1$.

1/احسب u_0، u_1، u_2.

2/بيّن أنّ (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. عيّن اتجاه تغيّر (u_n).

3/تحقّق أنّ العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟

4/احسب المجموع: $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{669}$.

حسابية معرّفة بحدّين مختلفين.

التمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01//
الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

I) (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدين :
$u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.
1-عيّن أساسها وحدّها الأول u_0.
2-أكتب u_n بدلالة n.
3-بيّن أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n).
4-أحسب المجموع S: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$.

حسابية معرّفة بحد وعلاقة.

التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01//
الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.
1) أ-أحسب الأساس r للمتتالية (u_n).
ب-أحسب الحد العاشر.
2) أكتب عبارة u_n بدلالة n.
3) بيّن أنّ العدد (-2008) هو حداً من حدود (u_n). محدّدا رتبته.
4) أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$.

حسابية معرّفة بعلاقة يُوظف فيها الوسط الحسابي.

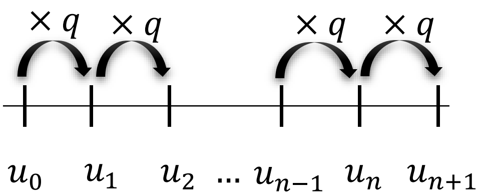
التمرين 27: (06 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 01//
الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_0 وأساسها r حيث:
$u_2 - u_0 = 4$ و $u_1 + u_3 = 16$.
1) احسب الحدّ u_2، ثمّ الحدّ u_0 واستنتج الأساس r للمتتالية (u_n).
2) أ. بيّن أنّ الحدّ العام للمتتالية (u_n) معرّف بـ:
$u_n = 4 + 2n$.
ب. حدّد مع التّبرير اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).
3) بيّن أنّ العدد 2020 حدّ من حدود المتتالية (u_n)، محدّداً رُتبته.
4) احسب المجموع S المعرّف بـ:
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{1008}$.

❸ المتتالية الهندسية:

① تعريف:

نقول أنّ المتتالية (u_n) **متتالية هندسية** حدّها الأوّل u_0 وأساسها q (q عدد حقيقي)
إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n:
$\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$.



② عبارة الحد العام:

خاصية 01:
إذا كانت (u_n) **متتالية هندسية** أساسها q، فإنّه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.

حالات خاصة:

$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$ وَ $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$.

③ مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

خاصية 02:
إذا كانت (u_n) **متتالية هندسية** أساسها q يختلف عن 1 فإنّ:

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)}$$

بصفة عامة:

$$\boxed{S = \text{الحد الأوّل}\left(\frac{1-\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}}\right)}$$

حيث:
1 + دليل الحد الأوّل − دليل الحد الأخير = عدد الحدود

حالة خاصة:
إذا كان $q = 1$، فإنّ:
$$\boxed{S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0}$$

④ خاصية الوسط الهندسي:

خاصية 03:
تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $\boxed{a \times c = b^2}$.
يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و b.

مثال: (● حل تمارين البكالوريا)

هندسية معرّفة بحدّها العام.

التمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01//
الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

II)نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ :
$v_n = 2 \times 8^n$.
1-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0.
2-أحسب بدلالة n المجموع S': $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

هندسية معرّفة بحدّين مختلفين

التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02//
الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ وأساسها **موجب**.
1-عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 **إذا علمت** أنّ:
$u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.
2-تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 18 \times 2^n$.
3-أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$، ثمّ استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$.

هندسية معرّفة بحدّين مختلفين

التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02//
الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، أساسها q وحدّها الأوّل u_0 حيث:
$u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.
1.أ-أحسب الأساس والحدّ الأوّل للمتتالية (u_n).
ب-استنتج أنّ عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي:
$u_n = 3 \times 2^n$.
2.أ-علماً أنّ $2^8 = 256$؛ بيّن أنّ العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n).
ب-أحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$.

هندسية معرّفة بملاقة يُوظف فيها الوسط الحسابي.

التمرين 28: (06 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 02//
الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل u_1، حدودها موجبة تماما حيث: $u_3 \times u_5 = 2916$.
1)احسب الحد u_4.
2)علما أنّ $u_3 = 18$، تحقّق أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 3.
3)احسب الحدّ الأوّل u_1، ثمّ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
4)عيّن رتبة الحدّ الذي قيمته 1458. (لاحظ أنّ: $3^6 = 729$)
5)احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

❹ المتتالية الرتيبة:

① اتجاه تغيّر متتالية عددية:

تعاريف:

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$.
- ❑ القول عن (u_n) أنّها **متزايدة** يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{u_{n+1} \geq u_n}$.
- ❑ القول عن (u_n) أنّها **متناقصة** يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$.
- ❑ القول عن (u_n) أنّها **ثابتة** يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{u_{n+1} = u_n}$.
- ❑ القول عن (u_n) أنّها **رتيبة** يعني أنّها **إما متزايدة وإما متناقصة**.

ملاحظات:

- ❍ تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.
- ❍ توجد **متتاليات ليست متزايدة وليست متناقصة.** نقول عنها أنّها **غير رتيبة** ونذكر على سبيل المثال المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها العام $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
- ❍ تكون المتتالية (u_n) **ثابتة** إذا وفقط إذا وُجِد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{u_n = k}$.

② اتجاه تغيّر متتالية حسابية:

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$، حدّها الأوّل u_0 وأساسها r.
لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \boldsymbol{r}$ ومنه:
- ☜ إذا كان $\boldsymbol{r}$ **سالبا تماما** $(r < 0)$، فإنّ المتتالية **متناقصة تماما**.
- ☜ إذا كان $\boldsymbol{r}$ **موجبا تماما** $(r > 0)$، فإنّ المتتالية **متزايدة تماما**.
- ☜ إذا كان $\boldsymbol{r}$ **معدوما** $(r = 0)$، فإنّ المتتالية **ثابتة**.

③ اتجاه تغيّر متتالية هندسية:

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$، حدّها الأوّل u_0 وأساسها q.

نعلم أنّ: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$.
نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^n \times (q-1)}$$

ومنه:

● إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$، فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة.
● إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$، فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة.
● إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$، فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة.
● إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$، فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة.
● إذا كان $q = 1$، فإنّ المتتالية (u_n) ثابتة.
● إذا كان $q = 0$، تكون كل حدود المتتالية (u_n) معدومة ابتداءً من الحد الثاني.
● إذا كان $q < 0$، فإنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأنّ q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة ومنه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

يُمكن تلخيص ذلك في جدول:

إذا كان	$0 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$	$q \leq 0$
$u_0 > 0$	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) متزايدة تماما	(u_n) ثابتة	(u_n) غير رتيبة
$u_0 < 0$	(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) ثابتة	(u_n) غير رتيبة

تمرين محلول 01 ص 37:

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:
$u_n = n^2 - n$.
1. أحسب $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n.
2. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

طريقة:

لدراسة اتجاه تغيّر متتالية (u_n)، لا يكفي المقارنة بين u_0 و u_1 أو بين u_2 و u_3 أو ... وإنّما يجب المقارنة بين u_{n+1} و u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

الحل:

1. **حساب** $u_{n+1} - u_n$ **من أجل كل عدد طبيعي** n:
لدينا: $u_n = n^2 - n$،
ومنه:
$$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = (n^2 + 2n + 1) - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$$
وعليه:
$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + n) - (n^2 - n) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$$

2. **استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية** (u_n):
بمأنّ: $u_{n+1} - u_n = 2n \geq 0$، فإنّ: (u_n) متزايدة تماما.

تمرين محلول 03 ص 37:

لتكن (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.
1. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل.
2. ما هو اتجاه تغيّر المتتالية (v_n)؟

الحل:

1. **تبيّان أنّ المتتالية** (v_n) **هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل:**
نُبين أنّ حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ **عدد ثابت.**
لدينا: $v_{n+1} = \frac{3^{(n+1)}}{2^{(n+1)+1}} = \frac{3^n \times 3^1}{2^{n+1} \times 2^1} = \frac{3^n}{2^{n+1}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} v_n$.
إذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{2}$، وحدّها الأوّل
$v_0 = \frac{3^0}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}$.

2. **دراسة اتجاه تغيّر المتتالية** (v_n):
بما أنّ: $q = \frac{3}{2} > 1$ و $v_0 = \frac{1}{2} > 0$، فإنّ المتتالية (v_n) متزايدة تماماً.

ط2) ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$:
لدينا: $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 0$،
إذن: **المتتالية** (v_n) **متزايدة تماماً.**

5 المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$:

($a \neq 0$ و $b \neq 0$)

تمرين محلول ص 39:

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = \alpha$
وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2$.
أ) نفرض $\alpha = 3$.
اثبت أنّ المتتالية (u_n) ثابتة ثمّ أحسب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.
1. أثبت أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.
2. أحسب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

4.ما هو اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)؟

الحل:

لدينا: $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$.

أ) بفرض $\alpha = 3$، ومنه: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$.

المتتالية (u_n) ثابتة **معناه** $u_0 = u_1 = u_{n-1} = u_n = 3$

حساب بدلالة n، **المجموع** $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n،

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 = 3(n+1)$

ب) بفرض $\alpha = 2$، ومنه: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$.

ولدينا: (v_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n

بالعلاقة: $\boxed{v_n = u_n - 3}$.

1.**إثبات أنّ المتتالية** (v_n) **متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل:**

نكتب v_{n+1} **بدلالة** v_n:

1.لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$
$$= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$$
$$= \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

إذن: المتتالية (v_n) متتالية **هندسية**، أساسها $\boxed{q = \frac{1}{3}}$

وحدّها الأوّل $\boxed{v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1}$.

2.**حساب** v_n **بدلالة** n **ثمّ استنتاج** u_n **بدلالة** n:

- **لدينا:** $\boxed{v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
- **لدينا:** $v_n = u_n - 3$

ومنه: $\boxed{u_n = v_n + 3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}$.

3.**حساب بدلالة** n، **المجموع** $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + \cdots + (v_n + 3)$$
$$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (3 + 3 + \cdots + 3)$$
$$= v_0\left(\frac{1 - q^{n-0+1}}{1-q}\right) + 3(n - 0 + 1)$$
$$= -1\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + 3(n+1)$$

ومنه: $S = -\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) + 3(n+1)$

$$= -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$$

4.**دراسة اتجاه تغيّر المتتالية** (u_n):

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3\right] - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right]$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$
$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3} + 1\right)$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن: المتتالية (u_n) **متزايدة تماما**.

مثال:(● حل لتمارين البكالوريا)

التمرين 02: (06 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02//

الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1)أحسب u_2، u_3، u_4.

2)من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نُعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ-أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1.

ب-اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

ج-نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$، احسب S_n بدلالة n.

د-عيّن n علما أنّ $S_n = 1016$.

الحمد لله.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية)

الملخص // الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

ملخص: حول المتتاليات العددية // التحضير الجيد للبكالوريا // الشعبة: 03 آوف؛ لغ أ.

عموميات

❶ دراسة اتجاه تغير متتالية (u_n):

لدراسة اتجاه تغيّر متتالية (u_n)؛

➢ ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

نكون أمام ثلاث (03) حالات بعد حساب الفرق

$u_{n+1}-u_n>0$ (الفرق موجب تماما)	$u_{n+1}-u_n<0$ (الفرق سالب تماما)	$u_{n+1}-u_n=0$ (الفرق معدوم)

الاستنتاج:

(u_n) متزايدة تماماً.	(u_n) متناقصة تماماً.	(u_n) ثابتة.

المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية حسابية.

1) طريقة إثبات أنّ المتتالية (u_n) حسابية:

يكفي أن نُثبت أنّ:

① الفرق $u_{n+1}-u_n$ عدد ثابت

أي: $\boxed{u_{n+1}-u_n=r}$.

② أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n

نجد: $\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$.

حيث: r عدد حقيقي، يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n).

2) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية:

(كتابة u_n بدلالة n)؛ u_n يسمى الحد العام.

في حالة u_0 هو الحد الأوّل:

② $u_n = u_0 + nr$ ($p = 0$)

بصفة عامة:

① $u_n = u_p + (n-p)r$

علاقة تربط بين حدين مختلفين.

في حالة u_1 هو الحد الأوّل:

③ $u_n = u_1 + (n-1)r$ ($p = 1$)

تُستعمل العلاقة ①، إذا كانت (u_n) **حسابية ومعرّفة بحدين مختلفين**

وباستعمال العلاقة نقوم **بحساب الأساس** نجد: $r = \frac{u_n - u_p}{n-p}$.

ملاحظة:

هذه العلاقات ①؛ ②؛ ③ يُمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى في التمرين.

3) مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

بصفة عامة:

$$\text{المجموع} = (\text{عدد الحدود})\left(\frac{\text{الحد الأخير}+\text{الحد الأوّل}}{2}\right)$$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

حيث: $1 +$ دليل الحد الأوّل − دليل الحد الأخير = عدد الحدود.

4) خاصة الوسط الحسابي:

تكون الأعداد الحقيقية a، b وَ c بهذا الترتيب **حدوداً متتابعة من متتالية حسابية** إذا وفقط إذا كان

$a + c = 2b$ أو $b = \frac{a+c}{2}$.

مثال: $u_1 + u_2 + u_3 = 2u_2 + u_2 = 3u_2$.

المتتالية الهندسية

(u_n) متتالية هندسية.

1) طريقة إثبات أنّ المتتالية (u_n) هندسية:

يكفي أن نُثبت أنّ:

① الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت أي: $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = q}$.

② أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد: $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$.

حيث: q عدد حقيقي، يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n).

2) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية:

(كتابة u_n بدلالة n)؛ u_n يسمى الحد العام.

في حالة u_0 هو الحد الأوّل: ② $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$ ($p = 0$)

بصفة عامة: ① $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

في حالة u_1 هو الحد الأوّل: ③ $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ ($p = 1$)

علاقة تربط بين حدين مختلفين.

تُستعمل العلاقة ①، إذا كانت (u_n) هندسية ومعرّفة بحدين مختلفين وباستعمال العلاقة نقوم بحساب الأساس نجد: $\boxed{q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}}$.

- إذا كان $\frac{u_n}{u_p} > 0$ ، $q^2 = \frac{u_n}{u_p}$، فإنّ: $q = \sqrt{\frac{u_n}{u_p}}$ أو $q = -\sqrt{\frac{u_n}{u_p}}$.
- إذا كان $n - p \neq 2$، نقوم: بتحليل العدد $\frac{u_n}{u_p}$ إلى جداء عوامل أولية.

ملاحظة:

هذه العلاقات ①؛ ②؛ ③ يُمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى في التمرين.

3) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

بصفة عامة:

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأوّل})\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$

أو

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأوّل})\left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}}-1}{q-1}\right)$$

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

حيث: $1 +$ دليل الحد الأوّل − دليل الحد الأخير = عدد الحدود.

4) خاصة الوسط الهندسي:

تكون الأعداد الحقيقية a، b وَ c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$\boxed{a \times c = b^2}$$

مثال: $u_1 \times u_2 \times u_3 = u_2{}^2 \times u_2 = u_2{}^3$.

اتجاه تغيّر متتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ⊰

في حالة (u_n) حسابية:

بمأنّ: $u_{n+1} - u_n = r$

فإنّ: اتجاه التغيّر، حسب إشارة أساسها r.

⌫ $r > 0$، متزايدة تماماً.

⌫ $r < 0$، متناقصة تماماً.

⌫ $r = 0$، ثابتة.

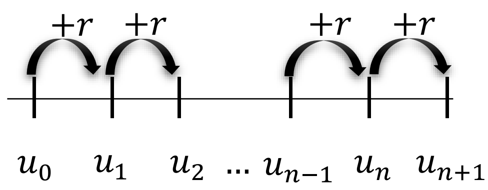
في حالة (u_n) هندسية:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ⊰

جمع الأستاذ: بوعزة مصطفى.

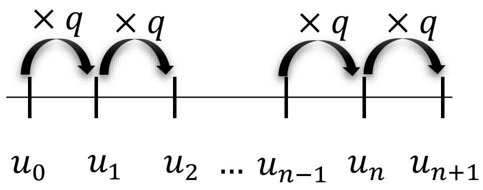
المتتالية (u_n)

حسابية



$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ حيث r عدد حقيقي
r يسمى **أساس** المتتالية **الحسابية** (u_n).

هندسية



$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$ حيث q عدد حقيقي
q يسمى **أساس** المتتالية **الهندسية** (u_n).

كيفَ نبين أن

حسابية:

الطريقة 01:

نُبين أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n **نجد:**
$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

هندسية:

الطريقة 01:

نُبين أنّ الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n **نجد:**
$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$.

عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

حسابية:

إذا أعطي u_0:

$\boxed{u_n = u_0 + nr}$.

إذا أعطي u_1:

$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$.

من أجل عددين طبيعيين n و p.

$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية حسابية.

هندسية:

إذا أعطي u_0:

$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$.

إذا أعطي u_1:

$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$.

من أجل عددين طبيعيين n و p.

$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية هندسية.

كتابة u_n بدلالة n

هذه العلاقات يُمكن استعمالها وذلك بتعويض u_n **بأي** حد مُعطى

مجموع حدود متتابعة من متتالية

حسابية — بصفة عامة:

$$\text{المجموع} = (\text{عدد الحدود})\left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right)$$

هندسية — بصفة عامة:

$$\text{المجموع} = \text{الحد الأول}\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)$$

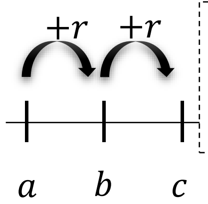
1 + دليل الحد الأوّل − دليل الحد الأخير = عدد الحدود

خاصية الوسط

الوسط الحسابي:

تكون a، b و c **ثلاث حدود متتابعة** من متتالية **حسابية** إذا وفقط إذا كان

$\boxed{a + c = 2b}$

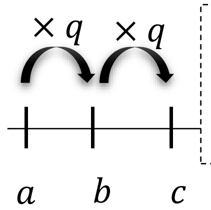


$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

الوسط الهندسي:

تكون a، b و c **ثلاث حدود متتابعة** من متتالية **هندسية** إذا وفقط إذا كان

$\boxed{a \times c = b^2}$



$$\begin{cases} a = \frac{b}{q} \\ c = qb \end{cases}$$

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية في البكالوريا)
تمارين // الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

تمارين البكالوريا: حول المتتاليات العددية // التحضير الجيد للبكالوريا // الشعبة: 03 آ

نجاحك بيدك

التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/ أحسب u_0، u_1، u_2.

2/ بيّن أنّ (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. عيّن اتجاه تغيّر (u_n).

3/ تحقّق أنّ العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟

4/ أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$.

التمرين 02: (06 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) أحسب u_2، u_3، u_4.

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نُعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ- أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1.

ب- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

ج- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$، احسب S_n بدلالة n.

د- عيّن n علماً أنّ $S_n = 1016$.

التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1) أ- أحسب الأساس r للمتتالية (u_n).

ب- أحسب الحد العاشر.

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) بيّن أنّ العدد (-2008) هو حداً من حدود (u_n). محدّدا رتبته.

4) أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$.

التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ وأساسها **موجب**.

1- عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 **إذا علمت** أنّ: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2- تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 18 \times 2^n$.

3- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$، ثمّ استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$.

التمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

I) (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1-عيّن أساسها وحدّها الأول u_0.

2-أكتب u_n بدلالة n.

3-بيّن أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n).

4-أحسب المجموع S: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$.

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$.

1-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0.

2-أحسب بدلالة n المجموع S': $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، أساسها q وحدّها الأوّل u_0 حيث:

$u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.

1.أ-أحسب الأساس و الحدّ الأوّل للمتتالية (u_n).

ب-استنتج أنّ عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي: $u_n = 3 \times 2^n$.

2.أ-علماً أنّ $2^8 = 256$؛ بيّن أنّ العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n).

ب-أحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$.

3.(v_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

أ-أحسب: v_1، v_2، v_3.

ب-برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3 \times 2^n + 1$.

جـ-أحسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$.

التمرين 07: (06 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

أ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول u_0 بحيث: $u_0 + u_3 = 28$.

1.احسب u_0، ثمّ اكتب الحد العام u_n بدلالة n.

2.احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

ب) (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $v_n = 1 - 5n$.

1.بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها ثمّ استنتج اتجاه تغيّرها.

2.احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$.

ج) نعتبر المتتالية (k_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $k_n = 1 + 3^n - 5n$.

-تحقّق أنّ: $k_n = u_n + v_n$ ثمّ احسب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$.

التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام: $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.

عيّن في كلّ حالة من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

		اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1	(u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية	لا حسابية و لا هندسية
2	الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92	-88
3	المجموع $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - n$	$-n^2 - 1$

4	متتالية هندسية أساسها (v_n)	$\frac{1}{9}$	9	-9
5	المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة

التمرين 09: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a، b، c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.

1.أ) احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r.

ب) علماً أنّ: $a \times c = -16$

-عيّن الأساس r ثم استنتج a و c.

2.(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

أ) عبّر عن الحدّ العام u_n بدلالة n.

ب) احسب u_{15} ثم استنتج المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$.

3.(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$

-احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$.

التمرين 10: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r، حدّها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1.أ) احسب بدلالة r الجداءئين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

ب) عيّن الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

2.نضع $r = 3$.

أ) اكتب عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

بيّن أنّ: $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$.

ج) جِد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.

3.أ) اكتب الحدّ u_{n+5} بدلالة n.

ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$.

ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا.

التمرين 11: (06 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1-أ) عبّر عن v_n بدلالة n.

ب) احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n).

2-نضع، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n.

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

ج) أثبت بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

التمرين 12: (06 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1- احسب u_0.

2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 5n + 1$.

3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

4- أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$.

5- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 1$.

أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n).

ب) أحسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{2013}$.

التمرين 13: (06 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في كلّ حالة من الحالات الأربعة الآتية، مع التّعليل:

1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها $u_2 = 1$.

الحد العام للمتتالية (u_n) هو:

أ) $u_n = 1 + 3n$ ب) $u_n = 7 + 3n$ جـ) $u_n = -5 + 3n$.

2) n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يساوي:

أ) $\frac{n^2+n}{2}$ ب) $\frac{n(n-1)}{2}$ جـ) $\frac{n^2+1}{2}$.

3) x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x - 2$، x، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

أ) $x = 3$ ب) $x = 5$ جـ) $x = -2$.

4) (v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:

أ) 2 ب) 3 جـ) 6.

التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $v_{n+1} = 5v_n + 4$.

1) احسب: v_1، v_2 و v_3.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_n = v_n + 1$

أ- بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = 2$.

ب- اكتب u_n بدلالة n واستنتج v_n بدلالة n.

جـ- حلّل العدد 1250 إلى جداء عوامل أوليّة واستنتج أنّه حد من حدود المتتالية (u_n).

3) أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

ب- احسب بدلالة n المجموع S_n' حيث: $S_n' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

التمرين 15: (07 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) المتتالية الهندسية التي حدّها الأوّل u_0 وأساسها q حيث: $u_0 = 2$ و $q = 3$.

1) احسب u_1 و u_2.

2) اكتب u_n بدلالة n؛ ثمّ استنتج u_5.

3) عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

4) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$.

ب) استنتج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$.

5) أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3، 3^2، 3^3 و 3^4.

ب) استنتج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$؛ $3^{4k} \equiv 1[5]$.

6)عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين 16: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_1 وأساسها r حيث: $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

1)أ) بيّن أنّ: $u_1 + u_3 = 1$.

ب) عيّن الحدّ الأوّل u_1؛ ثمّ استنتج أنّ $r = -\frac{5}{2}$.

2)اكتب u_n بدلالة n.

3)أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$.

4)n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$.

أ) تحقّق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

التمرين 17: (07 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجلّ عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$.

1)احسب u_0، u_1، u_2 و u_3.

2)بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية وعيّن أساسها.

3)ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

4)بيّن أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.

5)أ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

ب) عيّن العدد n بحيث يكون: $S_n = 328$.

التمرين 18: (06 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدّها الأول u_0 وتُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

1)احسب الحد الأوّل u_0.

2)اكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3)عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4)احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$.

5)نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' بحيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49}$.

التمرين 19: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) المتتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1)بيّن أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأول هو 5.

2)اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثمّ استنتج قيمة حدّها السابع.

3)أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

ب) استنتج قيمة المجموع S' حيث $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$.

التمرين 20: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1) عيّن الأساس r للمتتالية (u_n).

2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.

3) اثبت أنّ العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ما هي رتبته؟

4) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 21: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 وأساسها r.

1) احسب الحد u_4 علما أنّ: $u_3 + u_5 = 20$.

2) احسب الحد u_5 علما أنّ: $2u_4 - u_5 = 7$.

3) استنتج قيمة r واحسب u_0.

4) تحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3n - 2$.

5) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

6) جِد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

التمرين 22: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

في كل حالة من الحالات الأربع الآتية أقتُرحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، يُطلب تحديدها مع التعليل.

1) الحد السّادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدّها الأول 1 هو:

أ) -17 ب) -14 جـ) -11.

2) مجموع 100 حدٍ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول هو 1 وأساسها 3 هو:

أ) $\frac{3^{101}-1}{2}$ ب) $\frac{1-3^{100}}{2}$ جـ) $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3) نضع من أجل كل عدد حقيقي x: $a = 2x + 2$، $b = 6x - 3$، $c = 4x$.

الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:

أ) $x = \frac{4}{3}$ ب) $x = 0$ جـ) $x = \frac{3}{4}$.

4) المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية:

أ) حسابية أساسها 1 ب) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ جـ) لا حسابية ولا هندسية.

التمرين 23: (06 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$

المتتالية (u_n): أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما ج) ليست رتيبة.

2) (v_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ) $v_n = 3 \times 2^n$ ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ ج) $v_n = 2 \times 3^n$.

المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ يُساوي:

أ) $3(2^n - 1)$ ب) $(2^n - 1)$ ج) $2(3^n - 1)$.

3) الاحتمالات.

التمرين 24: (06 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$.

1)بيّن أنّ $u_1 = 24$، ثمّ استنتج قيمة u_0.

2)بيّن أنّ $q = 4$، ثمّ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3)أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:$u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

4)احسب 4^4، ثم تحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.

5)احسب بدلالة n المجموع:$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين 25: (06 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$.

1)بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1.

2)عيّن رتبة الحد الذي قيمته 575.

3)احسب قيمة المجموع S حيث:$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{1440}$.

4)(v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:$v_n = 4^{5u_n+6}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع:$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

التمرين 26: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول u_0 وأساسها r.

1)علماً أنّ: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$، عيّن u_1.

2)علماً أنّ: $2u_0 - 3u_1 = -10$، عيّن الحد الأول u_0، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n).

3)اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

4)أ) عيّن قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.

ب) أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n).

5)أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

6)عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون:$S_n = 96$.

التمرين 27: (06 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_0 وأساسها r حيث: $u_2 - u_0 = 4$ وَ $u_1 + u_3 = 16$.

1)احسب الحدّ u_2، ثمّ الحدّ u_0 واستنتج الأساس r للمتتالية (u_n).

2)أ. بيّن أنّ الحدّ العام للمتتالية (u_n) معرّف بـ:$u_n = 4 + 2n$.

ب. حدّد مع التّبرير اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3)بيّن أنّ العدد 2020 حدّ من حدود المتتالية (u_n)، محدّداً رُتبته.

4)احسب المجموع S المعرّف بـ:$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{1008}$.

التمرين 28: (06 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل u_1، حدودها موجبة تماما حيث: $u_3 \times u_5 = 2916$.

1)احسب الحد u_4.

2)علما أنّ $u_3 = 18$، تحقّق أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 3.

3)احسب الحدّ الأوّل u_1، ثمّ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

4)عيّن رتبة الحدّ الذي قيمته 1458. (لاحظ أنّ: $3^6 = 729$)

5)احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

الحمد لله.

جمع الأستاذ بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية في البكالوريا)

حلول // الشعبة: الثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

حلول تمارين البكالوريا: حول المتتاليات العددية// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 03 آ

نجاحك بيدك

حل التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/حساب u_0، u_1، u_2:

- $u_0 = 3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$؛
- $u_1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$؛
- $u_2 = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$.

2/تبيان أنّ (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها: (نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت)

لدينا: $u_n = 3n + 1$ ومنه: $u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 3 + 1 = 3n + 4$

وعليه الفرق يكون كالتالي: $u_{n+1} - u_n = (3n+4) - (3n+1) = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$

إذن: (u_n) حسابية أساسها 3.

تعيين اتجاه تغيّر (u_n):

بمأنّ: (u_n) حسابية أساسها موجب تماما $(3 > 0)$، فإنّها: متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3/التحقّق أنّ العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n):

نضع: $\boxed{u_n = 2008}$ نجد: $3n + 1 = 2008$

ومنه: $3n = 2008 - 1$ أي: $n = \frac{2007}{3} = 669 \in \mathbb{N}$ $(u_{669} = 2008)$

إذن: 2008 حد من حدود المتتالية (u_n)، **رتبته**: $669 + 1 = 670$ لأنّ الحد الأوّل هو u_0.

4/حساب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{669} = (669 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{669}}{2}\right) = 670\left(\frac{1+2008}{2}\right)$

ومنه: $S = 670\left(\frac{2009}{2}\right) = 670(1004{,}5) = 673015$.

حل التمرين 02: (06 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية معرّفة بـ: $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

1)حساب u_2، u_3 وu_4:

- $u_2 = 2u_1 + 1 = 2(7) + 1 = 15$.
- $u_3 = 2u_2 + 1 = 2(15) + 1 = 31$.
- $u_4 = 2u_3 + 1 = 2(31) + 1 = 63$.

2)(v_n) متتالية معرّفة كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ/اثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1:

ط01) نُبين أنّ الحاصل $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت.

لدينا: $v_n = u_n + 1$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$

وعليه: $\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(u_n+1)}{u_n+1} = 2}$.

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = u_1 + 1 = 7 + 1 = 8$.

ب-كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

بمأنّ: (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدّها الأول $v_1 = 8$، فإنّ: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

بالتعويض نجد: $\boxed{v_n = 8 \times 2^{n-1}}$.

استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = u_n + 1$ ومنه: $\boxed{u_n = v_n - 1 = 8 \times 2^{n-1} - 1}$.

جـ- $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$، حساب S_n بدلالة n:

لدينا: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right) = 8\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = \frac{8}{-1}(1-2^n)$

إذن: $\boxed{S_n = 8(2^n - 1)}$.

د-تعيين n علماً أنّ $S_n = 1016$:

$S_n = 1016$ معناه: $8(2^n - 1) = 1016$

ومنه: $2^n - 1 = \frac{1016}{8}$

أي: $2^n - 1 = 127$

وعليه: $2^n = 128 = 2^7$ (لأنّ $128 = 2^7$)

إذن: $\boxed{n = 7}$ $(S_7 = 1016)$.

حل التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1) أ-حساب الأساس r للمتتالية (u_n): (نكتب كل من u_2 و u_5 بدلالة الحد الأول u_1 المُعطى)

حسب العلاقة $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$، نجد: $\begin{cases} u_2 = u_1 + (2-1)r = 2 + r \\ u_5 = u_1 + (5-1)r = 2 + 4r \end{cases}$

العلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$ تُصبح: $(2 + r) - 2(2 + 4r) = 19$

ومنه: $2 + r - 4 - 8r = 19$

وعليه: $-7r = 21$ إذن: $\boxed{r = \frac{21}{-7} = -3}$.

ب-حساب الحد العاشر:

بمأنّ الحد الأوّل هو u_1، إذن الحد العاشر هو

$$u_{10} = u_1 + (10-1)r = u_1 + 9r = 2 + 9(-3) = 2 - 27 = -25$$

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$ ومنه: $u_n = 2 + (n-1)(-3)$ إذن: $\boxed{u_n = -3n + 5}$.

3) تبيان أنّ العدد (-2008) هو حدّ من حدود (u_n):

نضع: $\boxed{u_n = -2008}$ نجد: $-3n + 5 = -2008$

ومنه: $-3n = -2008 - 5$

أي: $(u_{671} = -2008)\ n = \frac{-2013}{-3} = 671 \in \mathbb{N}$

إذن: (-2008) حد من حدود المتتالية (u_n)، رتبته: 671 لأنّ الحد الأوّل هو u_1.

4) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$:

لدينا: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671} = (671 - 1 + 1)\left(\frac{u_1+u_{671}}{2}\right) = 671\left(\frac{2+(-2008)}{2}\right)$

ومنه: $S = 671\left(\frac{-2006}{2}\right) = 671(-1003) = -673013$.

حل التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية **هندسية** معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها **موجب** $(q > 0)$

1ـ تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدّها الأول u_0 علماً أنّ $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$:

لـديناً: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ومنه: $u_5 = u_3 \times q^{5-3}$

وعليه: $576 = 144 \times q^2$

ومنه: $q^2 = \frac{576}{144} = 4$

أي: $q = \sqrt{4} = 2 > 0$ (مقبول) أو $q = -\sqrt{4} = -2$ (مرفوض)

إذن: $\boxed{q = 2}$.

تعيين الحد الأول u_0:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_3 = u_0 \times q^3$ إذن: $\boxed{u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{144}{2^3} = \frac{144}{8} = 18}$.

أو: $u_5 = u_0 \times q^5$ نجد: $\boxed{u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{576}{2^5} = \frac{576}{32} = 18}$.

2ـ التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 18 \times 2^n$:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{u_n = 18 \times 2^n}$.

3ـ حساب بدلالة n المجموع، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) = 18\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = \frac{18}{-1}(1 - 2^{n+1})$

ومنه: $S_n = -18(1 - 2^{n+1}) = 18(2^{n+1} - 1)$.

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث، $S_n = 1134$:

$S_n = 1134$ معناه: $18(2^{n+1} - 1) = 1134$

ومنه: $2^{n+1} - 1 = \frac{1134}{18}$

أي: $2^{n+1} - 1 = 63$

ومنه: $2^{n+1} = 64 = 2^6$

وعليه: $n + 1 = 6$، إذن: $\boxed{n = 5}$ $(S_5 = 1134)$.

حل التمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

I) لدينا: (u_n) متتالية **حسابية** معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10} = 31$ وَ $u_{15} = 46$.

1ـ تعيين أساس المتتالية (u_n):

لدينا: $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$، ومنه: $u_{15} = u_{10} + (15 - 10)r$

وعليه: $46 = 31 + 5r$ وبالتالي: $5r = 46 - 31$ إذن: $\boxed{r = \frac{15}{5} = 3}$.

الطريقة 02: $r = \frac{u_n - u_p}{n-p} = \frac{u_{15} - u_{10}}{15-10} = \frac{46-31}{5} = \frac{15}{5} = 3$.

تعيين الحدّ الأول u_0:

لدينا: $\boxed{u_n = u_0 + nr}$ ومنه: $u_{10} = u_0 + 10r$

وعليه: $u_0 = u_{10} - 10r = 31 - 10(3) = 31 - 30 = 1$

أو $\boxed{u_n = u_0 + nr}$ ومنه: $u_{15} = u_0 + 15r$

وعليه: $u_0 = u_{15} - 15r = 46 - 15(3) = 46 - 45 = 1$

2ـكتابة u_n بدلالة n: (عبارة الحد العام)

لدينا: $u_n = u_0 + nr$، إذن: $\boxed{u_n = 1 + 3n}$.

3ـتبيان أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n):

نضع: $u_n = 6028$ نجد: $6028 = 1 + 3n$

ومنه: $6027 = 3n$ وبالتالي: $n = \frac{6027}{3} = 2009 \in \mathbb{N}$ $(u_{2009} = 6028)$

إذن: العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).

4ـحساب المجموع S، $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009} = (2009 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{2009}}{2}\right) = (2010)\left(\frac{1+6028}{2}\right)$

ومنه: $S = (2010)\left(\frac{6029}{2}\right) = (2010)(3014{,}5) = 6059145$.

II) لدينا: (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$.

1ـتبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0:

نُبين أنّ حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت:

لدينا: $v_n = 2 \times 8^n$ ومنه: $v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1}$ وبالتالي: $8 = \frac{8^n \times 8^1}{8^n} = \frac{8^{n+1}}{8^n} = \frac{2\times 8^{n+1}}{2 \times 8^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$

إذن: (v_n) هندسية، أساسها $\boxed{q = 8}$ وحدّها الأوّل $v_0 = 2 \times 8^0 = 2 \times 1 = 2$.

2ـحساب بدلالة n المجموع S'، $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$:

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1 - q^{n-0+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1 - 8^{n+1}}{1-8}\right) = \frac{2}{-7}(1 - 8^{n+1})$

ومنه: $S' = \frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$.

حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية **هندسية** معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، أساسها q وحدّها الأول u_0 حيث:

$u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.

1.أـحساب الأساس والحدّ الأوّل للمتتالية (u_n):

نعلم أنّ $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ومنه: $u_4 = u_1 \times q^{4-1}$

ويكون: $48 = 6 \times q^3$

وعليه: $q^3 = \frac{48}{6} = 8$ (وبما أنّ $8 = 2^3$ فإنّ $q^3 = 2^3$) إذن: $\boxed{q = 2}$.

حساب الحد الأوّل u_0:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_1 = u_0 \times q^1$ ويكون: $\boxed{u_0 = \frac{u_1}{q^1} = \frac{6}{2} = 3}$.

أو: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_4 = u_0 \times q^4$ ويكون: $\boxed{u_0 = \frac{u_4}{q^4} = \frac{48}{16} = 3}$.

بـ.استنتاج أنّ عبارة الحدّ العام لـ (u_n) هي، $u_n = 3 \times 2^n$:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$، إذن: $\boxed{u_n = 3 \times 2^n}$.

2.علماً أنّ $2^8 = 256$؛ تبيّان أنّ العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n):

نضع: $u_n = 768$ نجد: $3 \times 2^n = 768$

ومنه: $2^n = \frac{768}{3} = 256$

وعليه: $2^n = 2^8$ (لأنّ $2^8 = 256$)

وبالتالي: $\boxed{n = 8 \in \mathbb{N}}$ ($u_8 = 768$)، إذن: 768 حدّ من حدود المتتالية (u_n).

بـ.حساب المجموع S حيث، $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = u_0\left(\frac{1-q^{7-0+1}}{1-q}\right) = 3\left(\frac{1-2^8}{1-2}\right) = \frac{3}{-1}(1-256)$

ومنه: $S = -3(-255) = 765$.

3.لدينا: (v_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases}$.

أ.حساب v_1، v_2 و v_3:

- $v_1 = 2v_0 - 1 = 2(4) - 1 = 7$.
- $v_2 = 2v_1 - 1 = 2(7) - 1 = 13$.
- $v_3 = 2v_2 - 1 = 2(13) - 1 = 25$.

بـ.البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 3 \times 2^n + 1$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: (من أجل $n = 0$)، لدينا: $v_0 = 3 \times 2^0 + 1 = 3(1) + 1 = 4$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1}$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1}$

البرهان: لدينا:

$$v_{n+1} = 2v_n - 1 = 2(3 \times 2^n + 1) - 1 = 2^1 \times 3 \times 2^n + 2 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: حسب **مبدأ الاستدلال بالتراجع** من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1}$.

جـ.حساب المجموع S' حيث، $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$:

نلاحظ أنّ $\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1 = u_n + 1}$

ومنه: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7 = (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_7 + 1)$

وعليه: $S' = (u_0 + u_1 + \cdots + u_7) + 8 = S + 8 = 765 + 8 = 773$.

حل التمرين 07: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

أ) لدينا: (u_n) متتالية **هندسية** أساسها 3 وحدّها الأول u_0 بحيث، $u_0 + u_3 = 28$.

1. حساب u_0:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_3 = u_0 \times q^3 = u_0 \times 3^3 = 27u_0$

العلاقة $u_0 + u_3 = 28$ تُصبح $u_0 + 27u_0 = 28$ ومنه: $28u_0 = 28$ إذن: $\boxed{u_0 = 1}$.

كتابة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$، إذن: $\boxed{u_n = 3^n}$.

2. حساب المجموع، $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$:

لدينا: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = u_0\left(\frac{1-q^{9-0+1}}{1-q}\right) = 1\left(\frac{1-3^{10}}{1-3}\right) = 1\left(\frac{1-3^{10}}{-2}\right)$

ومنه: $S_1 = \frac{1}{-2}(1-3^{10}) = \frac{1}{2}(3^{10}-1) = \frac{1}{2}(59048) = 29524$.

ب) لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام، $v_n = 1 - 5n$.

1. تبيّان أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها: (نُبين أنّ الفرق $v_{n+1} - v_n$ عدد ثابت)

لدينا: $v_n = 1 - 5n$ ومنه: $v_{n+1} = 1 - 5(n+1) = 1 - 5n - 5 = -4 - 5n$

وعليه: $v_{n+1} - v_n = (-4-5n) - (1-5n) = -4 - 5n - 1 + 5n = -5$

أي: $\boxed{v_{n+1} = v_n - 5}$

إذن: (v_n) متتالية **حسابية** أساسها $\boxed{r = -5}$.

استنتاج اتجاه تغيّرها:

بمأنّ (v_n) **حسابية** أساسها $(r = -5 < 0)$ **سالب تماما** فإنّها **متناقصة تماما** على $\mathbb{N}$.

2. حساب المجموع، $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$:

لدينا: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9 = (9-0+1)\left(\frac{v_0+v_9}{2}\right) = 10\left(\frac{1-44}{2}\right) = \frac{10}{2}(1-44)$

ومنه: $S_2 = 5(-43) = -215$.

(**ملاحظة:** $v_9 = 1 - 5(9) = 1 - 45 = -44$)

ج) لدينا: المتتالية (k_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام، $k_n = 1 + 3^n - 5n$.

التحقق أنّ، $k_n = u_n + v_n$:

لدينا: $\begin{cases} u_n = 3^n \\ v_n = 1 - 5n \end{cases}$، ومنه: $k_n = 1 + 3^n - 5n = 3^n + (1-5n) = u_n + v_n$

حساب المجموع، $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$:

لدينا: $k_n = u_n + v_n$

ومنه: $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9 = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_9 + v_9)$

وعليه: $S = (u_0 + u_1 + \cdots + u_9) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_9) = S_1 + S_2$

إذن: $S = 29524 - 215 = 29309$.

حل التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ بحديّهما العام، $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.

(**نلاحظ أنّ** $v_n = 3^{u_n}$)

تعيين الاقتراح الصحيح مع التعليل:

1) لدينا: $u_n = -2n$ ومنه: $u_{n+1} = -2(n+1) = -2n - 2$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (-2n-2) - (-2n) = -2n - 2 + 2n = -2$

إذن: (u_n) هي متتالية **حسابية**.

2) بمأنّ (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$، فحدّها **الأول** هو u_0، وبالتالي: حدها الخامس والأربعون هو:
$$\boxed{u_{44} = -2(44) = -88}.$$
3) حسب السؤال **1)** لدينا: (u_n) متتالية **حسابية**،
إذن: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{0+(-2n)}{2}\right)$
ومنه: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{-2n}{2}\right) = (n+1)(-n) = -n^2 - n$
4) (v_n) متتالية **هندسية** أساسها: $\boxed{q = \frac{v_{n+1}}{v_n}}$،
لدينا: $v_n = 3^{-2n}$ ومنه: $v_{n+1} = 3^{-2(n+1)} = 3^{-2n-2} = 3^{-2n+(-2)} = 3^{-2n} \times 3^{-2}$
بالتعويض نجد: $q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-2n} \times 3^{-2}}{3^{-2n}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.
5) المتتالية (v_n) **متزايدة تماما**، **لأنّ:**
$v_{n+1} - v_n = (3^{-2n} \times 3^{-2}) - (3^{-2n}) = 3^{-2n}(3^{-2} - 1) = 3^{-2n}\left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{-8}{9} \times 3^{-2n} < 0$.

حل التمرين 09: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: a، b، c **ثلاثة حدود متتابعة** لمتتالية **حسابية متزايدة** أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.

1.أ) حساب b:

حسب خاصية **الوسط الحسابي** لدينا: $a + c = 2b$.

$a + b + c = 9$ تُصبح $2b + b = 9$ ومنه: $3b = 9$ إذن: $\boxed{b = 3}$.

توضيح $a \xrightarrow{+r} b \xrightarrow{+r} c$

كتابة a وc بدلالة r:

لدينا: $\begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$، إذن: $\boxed{\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}}$.

ب) علماً أنّ: $a \times c = -16$ **تعيين الأساس r:**

لدينا مما سبق: $a = 3 - r$ وَ $c = 3 + r$.

$a \times c = -16$ تُكافئ: $(3 - r) \times (3 + r) = -16$

ومنه: $3^2 - r^2 = -16$

وعليه: $-r^2 = -25$

ويكون: $r^2 = 25$

وبالتالي: $r = \sqrt{25} = 5$ **أو** $r = -\sqrt{25} = -5$ **(مرفوض)**

إذن: $\boxed{r = 5}$ (لأنّ المتتالية **حسابية متزايدة**)

استنتاج a وc:

لدينا: $\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}$ و $r = 5$ إذن: $\boxed{\begin{cases} a = -2 \\ c = 8 \end{cases}}$.

2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

نلاحظ أنّ $\begin{cases} u_0 = -2 = a \\ 5 = r \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} u_1 = b = 3 \\ u_2 = c = 8 \end{cases}$

أ) التعبير عن الحدّ العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$، إذن: $\boxed{u_n = -2 + 5n}$.

ب) حساب u_{15}:

لدينا: $u_{15} = -2 + 5(15) = -2 + 75 = 73$.

استنتاج المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15} = (15 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{15}}{2}\right) = 16\left(\frac{-2+73}{2}\right)$

ومنه: $S = 16(35{,}5) = 568$.

3.لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$.

حساب المجموع $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$:

لدينا: $8v_n - u_n = 0$ ومنه: $v_n = \frac{1}{8}u_n$

وبالتالي: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15} = \frac{1}{8}u_0 + \frac{1}{8}u_1 + \cdots + \frac{1}{8}u_{15}$

ومنه: $S' = \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}) = \frac{1}{8}S = \frac{1}{8}(568) = 71$.

حل التمرين 10: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية **حسابية متزايدة**، أساسها r، **حدّها الأول** u_1 و $u_3 = 7$.

1.أ) حساب بدلالة r الجداءئين $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$:

لدينا: $u_n = u_p + (n-p)r$

ومنه: $u_n = u_3 + (n-3)r$ وعليه:
$$\begin{cases} u_1 = u_3 + (1-3)r = 7 - 2r \\ u_2 = u_3 + (2-3)r = 7 - r \\ u_4 = u_3 + (4-3)r = 7 + r \\ u_5 = u_3 + (5-3)r = 7 + 2r \end{cases}$$

وبالتالي: $T_1 = u_1 \times u_5 = (7-2r)(7+2r) = 7^2 - (2r)^2 = 49 - 4r^2$

وَ $T_2 = u_2 \times u_4 = (7-r)(7+r) = 7^2 - (r)^2 = 49 - r^2$

ب) تعيّين الأساس r بحيث $T_2 - T_1 = 27$:

لدينا: $T_2 - T_1 = 27$ تُكافئ: $(49 - r^2) - (49 - 4r^2) = 27$

ومنه: $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$

وعليه: $r^2 = \frac{27}{3}$

أي: $r^2 = 9$

وبالتالي: $r = \sqrt{9} = 3$ أو $r = -\sqrt{9} = -3$

وبمأنّ (u_n) **حسابية متزايدة (أساسها موجب)**، فإنّ: $\boxed{r = 3}$.

2.بوضع $r = 3$.

أ) كتابة عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n:

لدينا: (u_n) متتالية **حسابية**، أساسها $r = 3$، **حدّها الأول** $u_1 = 7 - 2(3) = 1$

فإنّ: $u_n = u_1 + (n-1)r$، بالتعويض نجد: $u_n = 1 + (n-1)(3)$ إذن: $\boxed{u_n = 3n - 2}$.

ب) $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ **(n عدد طبيعي غير معدوم)**

تبيّان أنّ، $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$:

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n - 1 + 1)\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) = n\left(\frac{1 + (3n-2)}{2}\right) = n\left(\frac{3n-1}{2}\right)$

ومنه: $S_n = \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$.

ج) إيجاد العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 145$:

$S_n = 145$ معناه: $\frac{3n^2-n}{2} = 145$

ومنه: $3n^2 - n - 290 = 0$

مميزها: $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290) = 1 + 3480 = 3481 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1+59}{6} = \frac{60}{6} = 10 \in \mathbb{N}$$

و $$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1-59}{6} = \frac{-29}{3} \notin \mathbb{N}$$

إذن: $\boxed{n = 10}$ ($S_{10} = 145$).

3.أ) كتابة الحدّ u_{n+5} بدلالة n:

لدينا: $u_n = 3n - 2$

ومنه: $u_{n+5} = 3(n+5) - 2 = 3n + 15 - 2 = 3n + 13$، إذن: $\boxed{u_{n+5} = 3n + 13}$.

ب) التحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$:

لدينا: $\frac{u_{n+1}}{n} = \frac{3n+13}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n} = 3 + \frac{13}{n}$.

ج) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا:

$\frac{u_{n+1}}{n} \in \mathbb{N}$ معناه: $3 + \frac{13}{n} \in \mathbb{N}$

ومنه: $\frac{13}{n} \in \mathbb{N}$

وعليه: $n \in D_{13}$ أي: $n \in \{1; 13\}$ (قيم n هي قواسم العدد 13)

إذن: $\boxed{n = 1}$ أو $\boxed{n = 13}$.

حل التمرين 11: (06 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (v_n) متتالية **هندسية** حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1.أ) التعبير عن v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$، إذن: $\boxed{v_n = 2 \times 3^n}$.

ب) حساب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$:

لدينا: $v_n = 2 \times 3^n$ ومنه: $v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1$

وعليه: $v_{n+1} - v_n = (6 \times 3^n) - (2 \times 3^n) = 4 \times 3^n$

إذن: $\boxed{v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n}$.

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n):

بمأنّ: $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n > 0$، فإنّ: (v_n) **متزايدة تماماً** على $\mathbb{N}$.

2. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$، n **عدد طبيعي غير معدوم.**

أ) حساب بدلالة n المجموع S_n:

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right) = \frac{2}{-2}(1-3^n)$

ومنه: $S_n = -(1-3^n) = 3^n - 1$.

ب) تعيّين قيمة العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 80$:

$S_n = 80$ معناه: $3^n - 1 = 80$

ومنه: $3^n = 81$ (لدينا: $81 = 3^4$)

أي: $3^n = 3^4$، إذن: $\boxed{n = 4}$ ($S_4 = 80$)

ج) اثبات بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2:

نسمي هذه الخاصية بـ$P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ و 0 يقبل القسمة على 2، إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 $(3^n - 1 = 2k)$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2 $(3^{n+1} - 1 = 2k')$.

البرهان:

لدينا: $3^{n+1} - 1 = 3^n \times 3^1 - 1 = (2k+1) \times 3 - 1 = 6k + 3 - 1 = 6k + 2$

ومنه: $3^{n+1} - 1 = 2(3k+1) = 2k'$ (**حيث** $k' = 3k + 1$)

بالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

حل التمرين 12: (06 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية **حسابية** حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث، $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1ـحساب u_0:

نكتب الحدود u_1، u_2 و u_3 بدلالة الحد الأول u_0

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 5 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 10 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 15 \end{cases}$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$ تُصبح: $u_0 + (u_0+5) + (u_0+10) + (u_0+15) = 34$

ومنه: $4u_0 = 34 - 30$

ويكون: $4u_0 = 4$

إذن: $\boxed{u_0 = 1}$.

2ـتبيّان أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 5n + 1$:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$، إذن: $\boxed{u_n = 1 + 5n}$.

3ـتعيّين العدد الطبيعي n بحيث، $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$:

- لدينا: $u_n = 5n + 1$ ومنه: $u_{n+1} = 5(n+1) + 1 = 5n + 6$
- لدينا: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$ معناه: $(5n+6) + (5n+1) - 8n = 4033$

ومنه: $7 + 2n = 4033$

وعليه: $2n = 4026$ إذن: $\boxed{n = 2013}$.

4ـحساب المجموع، $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$:

لدينا: $u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10066$

ومنه: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013} = (2013 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{2013}}{2}\right) = \frac{2014}{2}(1 + 10066)$

وعليه: $S = 1007(10067) = 10137469$.

5ـلدينا: المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة، $v_n = 2u_n + 1$.

أ) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (v_n): (ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$)

لدينا: $v_n = 2u_n + 1$، ولدينا: $u_{n+1} = u_n + 5$ لأنّ (u_n) حسابية أساسها 5.
نجد: $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 5) + 1 = 2u_n + 11$
ومنه: $v_{n+1} - v_n = (2u_n + 11) - (2u_n + 1) = 10 > \mathbf{0}$
إذن: (v_n) **متزايدة تماما**.

ب) حساب المجموع، $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{2013}$:
لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{2013} = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \cdots + (2u_{2013} + 1)$
ومنه: $S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}) + 1(2013 - 0 + 1) = 2S + 2014$
إذن: $\boxed{S' = 20276951}$.

حل التمرين 13: (06 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

تعيين الاقتراح الصّحيح، مع التّعليل:

1) (u_n) متتالية **حسابية** أساسها 3 وحدّها $u_2 = 1$.
الحد العام للمتتالية (u_n) هو:
الطريقة 01: $u_n = u_2 + (n-2)r = 1 + (n-2)(3) = 1 + 3n - 6 = -5 + 3n$
إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح جـ) $u_n = -5 + 3n$.
الطريقة 02:
- في حالة: $u_n = 1 + 3n$، نجد: $u_2 = 1 + 3(2) = 7 \neq 1$.
- في حالة: $u_n = 7 + 3n$، نجد: $u_2 = 7 + 3(2) = 13 \neq 1$.
- في حالة: $u_n = -5 + 3n$، نجد: $u_2 = -5 + 3(2) = 1$.

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح جـ) $u_n = -5 + 3n$.

2) n عدد طبيعي،
المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ هو عبارة عن مجموع n حد من متتالية حسابية حدّها الأول يساوي 1 وأساسها 1 لتكن هذه المتتالية (u_n) نضع: $u_1 = 1$ نجد: $u_n = n$
ومنه: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = (n - 1 + 1)\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right)$
وعليه: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n\left(\frac{1+n}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$
إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح أ) $\frac{n^2+n}{2}$.

3) x عدد حقيقي.
الأعداد $x - 2$، x، $x + 1$ بهذا الترتيب **حدودا متعاقبة** لمتتالية **هندسية**، معناه: $(x-2) \times (x+1) = x^2$
ومنه: $x^2 + x - 2x - 2 = x^2$
وعليه: $-x - 2 = 0$
وبالتالي: $\boxed{x = -2}$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح جـ) $x = -2$.

4) (v_n) متتالية **هندسية** معرّفة على $\mathbb{N}$، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$.
أساس المتتالية (v_n) هو:
الطريقة 01: $q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\times3^{(n+1)+1}}{2\times3^{n+1}} = \frac{2\times3^{n+1}\times3^1}{2\times3^{n+1}} = 3$
إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح ب) 3.
الطريقة 02: لدينا: $v_n = 2 \times 3^{n+1}$، ومنه: $v_{n+1} = 2 \times 3^{(n+1)+1} = 2 \times 3^{(n+1)} \times 3^1 = v_n \times 3$

أي: $\boxed{v_{n+1} = 3v_n}$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح ب) 3.

حل التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (v_n) المتتالية العددية المعرّفة بما يلي، $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 5v_n + 4 \end{cases}$.

1) حساب v_1، v_2 و v_3:

- $v_1 = 5v_0 + 4 = 5(1) + 4 = 5 + 4 = 9$.
- $v_2 = 5v_1 + 4 = 5(9) + 4 = 45 + 4 = 49$.
- $v_3 = 5v_2 + 4 = 5(49) + 4 = 245 + 4 = 249$.

2) لدينا: $u_n = v_n + 1$.

أ- تبيان أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = 2$:

ط01) نُبين أنّ الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت.

لدينا: $u_n = v_n + 1$ ومنه: $u_{n+1} = v_{n+1} + 1 = (5v_n + 4) + 1 = 5v_n + 5 = 5(v_n + 1)$

وعليه: $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5(v_n+1)}{v_n+1} = 5}$.

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = v_0 + 1 = 1 + 1 = 2$.

ب- كتابة u_n بدلالة n:

(u_n) **هندسية** أساسها 5 وحدّها الأول $u_0 = 2$، **عبارة الحد العام** هي: $u_n = u_0 \times q^n$،

بالتعويض نجد: $\boxed{u_n = 2 \times 5^n}$.

استنتاج v_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = v_n + 1$ و $u_n = 2 \times 5^n$ إذن: $\boxed{v_n = u_n - 1 = 2 \times 5^n - 1}$.

جـ- تحليل العدد 1250 إلى جداء عوامل أوليّة:

1250	2
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

إذن: $\boxed{1250 = 2 \times 5^4}$.

استنتاج أنّ 1250 حد من حدود المتتالية (u_n):

نضع: $u_n = 1250$ نجد: $2 \times 5^n = 2 \times 5^4$

أي: $\boxed{n = 4 \in \mathbb{N}}$ $(u_4 = 1250)$

إذن: 1250 حد من حدود المتتالية (u_n).

3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-5^n}{1-5}\right) = \frac{2}{-4}(1-5^n)$

إذن: $\boxed{S_n = \frac{1}{2}(5^n - 1)}$.

ب- حساب بدلالة n المجموع S_n'، $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$:

لدينا: $u_n = v_n + 1$ ومنه: $v_n = u_n - 1$

وعليه: $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \cdots + (u_{n-1} - 1)$

ويكون: $S'_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) - 1[(n-1) - 0 + 1] = S_n - n$

إذن: $\boxed{S'_n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n}$.

حل التمرين 15: (07 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية **هندسية** حدّها الأوّل u_0 وأساسها q حيث، $u_0 = 2$ وَ $q = 3$.

1) حساب u_1 و u_2:

بمأنّ (u_n) متتالية **هندسية** فإنّ: $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$

وبالتالي: $u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = 6$ وَ $u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = 18$.

2) كتابة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{u_n = 2 \times 3^n}$.

استنتاج u_5: $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$.

3) تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n): (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_n = 2 \times 3^n$ ومنه: $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (6 \times 3^n) - (2 \times 3^n) = 4 \times 3^n > 0$

إذن: (u_n) متزايدة تماما.

4) أ) حسب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right)$

ومنه: $S_n = \frac{2}{-2}(1-3^n) = -(1-3^n) = 3^n - 1$.

ب) استنتج قيمة المجموع، $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$:

لدينا: $2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = 3^6 - 1 = 728$

5) أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3، 3^2، 3^3 و 3^4:

لدينا: $\boxed{3 \equiv 3[5]}$، إذن: باقي قسمة 3 على 5 هــو 3.

$\boxed{3^2 \equiv 4[5]}$، إذن: باقي قسمة 3^2 على 5 هو 4.

$\boxed{3^3 \equiv 2[5]}$، إذن: باقي قسمة 3^3 على 5 هو 2.

$\boxed{3^4 \equiv 1[5]}$، إذن: باقي قسمة 3^4 على 5 هو 1.

ب) استنتاج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$، $3^{4k} \equiv 1[5]$:

لدينا: $3^4 \equiv 1[5]$ ومنه: $(3^4)^k \equiv (1)^k[5]$ $(k \in \mathbb{N})$ وعليه: $\boxed{3^{4k} \equiv 1[5]}$.

6) تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5:

$3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5 معناه: $3^n - 1 \equiv 0[5]$

ومنه: $3^n \equiv 1[5]$

وَحسب نتيجة السؤال 5) ب)، فإنّ: $\boxed{n = 4k}$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

حل التمرين 16: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية **حسابية** حدّها الأوّل u_1 وأساسها r حيث، $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

1) أ) تبيان أنّ $u_1 + u_3 = 1$:

حسب خاصية الوسط الحسابي، $u_1 + u_3 = 2u_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

ب) تعيين الحدّ الأوّل u_1، ثمّ استنتاج أنّ $r = -\frac{5}{2}$:

لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases}$، بالجمع طرفاً لطرف نجد: $(u_1 - u_3) + (u_1 + u_3) = 5 + 1$

ومنه: $2u_1 = 6$ وعليه: $\boxed{u_1 = \frac{6}{2} = 3}$.

استنتاج أنّ $r = -\frac{5}{2}$: لدينا: $r = u_2 - u_1 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2}$.

2) كتابة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_p + (n-p)r$ ومنه: $u_n = u_1 + (n-1)r$

بالتعويض نجد: $u_n = 3 + (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$

وبالتالي: $u_n = -\frac{5}{2}n + 3 + \frac{5}{2}$ إذن: $\boxed{u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}}$.

3) أ) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n-1+1)\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right) = (n)\left(\frac{3+\left(-\frac{5}{2}n+\frac{11}{2}\right)}{2}\right)$

ومنه: $S_n = \frac{n}{2}\left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(-\frac{5}{2}n + \frac{17}{2}\right) = \frac{-5n^2+17n}{4}$.

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$:

$S_n = -\frac{657}{2}$ معناه: $\frac{-5n^2+17n}{4} = -\frac{657}{2}$

ومنه: $2(-5n^2 + 17n) = 4(-657)$

وعليه: $-10n^2 + 34n + 2628 = 0$

مميزها: $\Delta = (34)^2 - 4(-10)(2628) = 1156 + 105120 = 106276 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34+\sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34+326}{-20} = \frac{292}{-20} = \frac{-146}{10} \notin \mathbb{N}$$

وَ $$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34-\sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34-326}{-20} = \frac{-360}{-20} = 18 \in \mathbb{N}$$

إذن: $\boxed{n = 18}$ ($S_{18} = -\frac{657}{2}$).

4) n عدد طبيعي غير معدوم، $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$.

أ) التحقق أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$، $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$:

لدينا: $(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n = -5n^2 - n + 18$

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$، $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n = 1$،

الطرف الأول: $T_1 = 1u_1 = u_1 = 3$

الطرف الثاني: $\frac{1}{6}(\mathbf{1})((\mathbf{1})+1)(14-5(\mathbf{1})) = \frac{2(9)}{6} = 3$، إذن: $P(1)$ **صحيحة**.

المرحلة 02:

- **نفرض صحة الخاصية** $P(n)$ أي: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن صحة الخاصية** $P(n+1)$ أي: $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

البرهان: لدينا:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + (n+1)u_{n+1} \\ &= \underbrace{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n}_{T_n} + (n+1)u_{n+1} \\ &= T_n + (n+1)u_{n+1} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)u_{n+1} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)\left(-\frac{5}{2}n+3\right) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + (-15n+18)] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18) \end{aligned}$$

حسب السؤال أ) نجد: $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** لكل n من $\mathbb{N}^*$، $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

حل التمرين 17: (07 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n-2$.

1) حساب u_0، u_1، u_2 و u_3:

- $u_0 = 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2$
- $u_1 = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$
- $u_2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$
- $u_3 = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$

2) تبيان أنّ المتتالية (u_n) **حسابية وتعيين أساسها:** (نُبين أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت)

لدينا: $u_n = 3n-2$ ومنه: $u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = 3n + 1$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (3n+1) - (3n-2) = 3n + 1 - 3n + 2 = 3$

إذن: (u_n) حسابية، أساسها $r = 3$.

3) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

بمـأنّ (u_n) حسابية أساسها موجب تماماً $(r = 3 > 0)$ فـإنّها متزايدة تماما.

4) تبيان أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) **وتعيين رتبته:**

نضع: $u_n = 1954$ نجد: $3n - 2 = 1954$

ومنه: $3n = 1956$

وعليه: $n = \frac{1956}{3} = 652 \in \mathbb{N}$ $(u_{652} = 1954)$

إذن: 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n)، **رتبته:** 653 (**لأنّ** الحد الأوّل هو u_0)

5) أ) حساب بدلالة n **المجموع،** $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n-0+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{-2+(3n-2)}{2}\right)$

ومنه: $S_n = (n+1)\left(\frac{3n-4}{2}\right) = \frac{(n+1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2-n-4}{2}$.

ب) تعيين العدد n بحيث يكون $S_n = 328$:

$S_n = 328$ معناه: $\frac{3n^2-n-4}{2} = 328$

ومنه: $3n^2 - n - 4 = 2(328)$

وعليه: $3n^2 - n - 660 = 0$

مميزها: $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-660) = 1 + 7920 = 7921 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1+89}{6} = \frac{90}{6} = 15 \in \mathbb{N}$$

و $$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1-89}{6} = \frac{-88}{6} = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$$

إذن: $\boxed{n = 15}$ ($S_{15} = 328$).

حل التمرين 18: (06 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية **حسابية**، **أساسها** 3 وحدّها **الأول u_0** وتُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

1) حساب الحد الأوّل u_0:

نكتب u_1؛ u_2 و u_3 بدلالة u_0

لـديـنا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\begin{cases} u_1 = u_0 + (1)r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + (2)r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + (3)r = u_0 + 9 \end{cases}$

العلاقة $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$، تُصبح: $u_0 + (u_0+3) + (u_0+6) + (u_0+9) = 10$

ومنــه: $4u_0 + 18 = 10$

وعليه: $4u_0 = -8$ إذن: $\boxed{u_0 = \frac{-8}{4} = -2}$.

2) كتابة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\boxed{u_n = -2 + 3n}$.

3) تعيين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$:

$u_n = 145$ تُكـافئ: $-2 + 3n = 145$

ومنه: $3n = 147$ وعليه: $\boxed{n = \frac{147}{3} = 49}$ ($u_{49} = 145$)

4) حساب المجموع S بحيث، $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49} = (49 - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_{49}}{2}\right) = (50)\left(\frac{-2+145}{2}\right)$

ومنه: $S = (50)\left(\frac{143}{2}\right) = (50)(71{,}5) = 3575$.

5) لدينا: (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

حساب المجموع S' بحيث، $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49}$:

لدينا: $v_n = 2u_n + 3$،

ومنه: $S' = (2u_0 + 3) + (2u_1 + 3) + \cdots + (2u_{49} + 3)$

وعليه: $S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}) + 3(94 - 0 + 1)$

وبالتالي: $S' = 2S + 3(50) = 2(3575) + 150 = 7300$.

حل التمرين 19: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية **هندسية حدودها موجبة تماما**، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1) تبيان أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأول هو 5:

لدينا: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ومنه: $u_3 = u_1 \times q^{3-1}$

وعليه: $320 = 20 \times q^2$

ويكون: $q^2 = \frac{320}{20} = 16$

وبالتالي: $\boxed{q = \sqrt{16} = 4}$ أو $\boxed{q = -\sqrt{16} = -4}$ **(مرفوض)**

إذن: $\boxed{q = 4}$ لأنّها حدود (u_n) **موجبة تماما**.

2) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n:

بمــأنّ (u_n) **هندسية** معرفة على $\mathbb{N}$ فــإنّ حدّها الأوّل هو: $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{20}{4} = 5$.

وبالتالي: $u_n = u_0 \times q^n$ إذن: $\boxed{u_n = 5 \times 4^n}$.

استنتاج قيمة حدّها السابع:

الحد السابع هو: $u_6 = 5 \times 4^6 = 5(4096) = 20480$.

3) أ) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) = 5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right) = \frac{5}{-3}(1 - 4^{n+1})$

ومنه: $S = \frac{5}{3}(4^{n+1} - 1)$.

ب) استنتاج قيمة المجموع S' حيث: $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$:

حسب السؤال السابق أ) نجد: $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6 = \frac{5}{3}(4^{6+1} - 1) = \frac{5}{3}(4^7 - 1)$

ومنه: $S' = \frac{5}{3}(16384 - 1) = \frac{5}{3}(16383) = 27305$.

حل التمرين 20: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية **حسابية** معرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ **بحدّها الأوّل** $\boldsymbol{u_0 = -5}$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1) تعيين الأساس r للمتتالية (u_n):

نكتب u_3 و u_7 بدلالة u_0

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\begin{cases} u_3 = u_0 + (3)r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + (7)r = -5 + 7r \end{cases}$

بالتعويض في العلاقة $u_3 + u_7 = 50$ نجد: $(-5 + 3r) + (-5 + 7r) = 50$

ومنه: $10r - 10 = 50$

وعليه: $10r = 60$ إذن: $\boxed{r = \frac{60}{10} = 6}$.

2) تبيان أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\boxed{u_n = -5 + 6n}$.

3) إثبات أنّ العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، مع تعيين رتبته:

نضع: $u_n = 2017$ نجد: $-5 + 6n = 2017$

ومنه: $6n = 2022$

وبالتالي: $\boxed{n = \frac{2022}{6} = 337 \in \mathbb{N}}$ $(u_{337} = 2017)$

إذن: العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، **رتبته:** 338 لأنّ الحد الأوّل هو u_0.

4) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{-5+(-5+6n)}{2}\right)$

ومنه: $S = (n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right) = (n+1)(-5+3n)$.

حل التمرين 21: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية **حسابية** معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها **الأول** u_0 وأساسها r.

1) حساب الحد u_4 علما أنّ $u_3 + u_5 = 20$:

حسب **خاصية الوسط الحسابي**، لدينا: $\boxed{u_3 + u_5 = 2u_4}$

العلاقة $u_3 + u_5 = 20$ تُصبح: $2u_4 = 20$ إذن: $\boxed{u_4 = \frac{20}{2} = 10}$.

2) حساب الحد u_5 علما أنّ $2u_4 - u_5 = 7$:

$2u_4 - u_5 = 7$ تُكافئ: $2(10) - u_5 = 7$

ومنه: $-u_5 = 7 - 20$ وعليه: $-u_5 = -13$ إذن: $\boxed{u_5 = 13}$.

3) استنتاج قيمة r وحساب u_0:

بمأنّ (u_n) متتالية **حسابية**، ولدينا: $u_4 = 10$؛ $u_5 = 13$ **إذن:** $\boxed{r = u_5 - u_4 = 13 - 10 = 3}$.

حساب u_0:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_4 = u_0 + 4r$، وعليه: $10 = u_0 + 4(3)$ إذن: $\boxed{u_0 = 10 - 12 = -2}$.

4) التحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3n - 2$:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\boxed{u_n = -2 + 3n}$.

5) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{-2+(3n-2)}{2}\right)$

ومنه: $S_n = (n+1)\left(\frac{3n-4}{2}\right) = \frac{(n+1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2-n-4}{2}$.

6) إيجاد العدد الطبيعي n حيث، $S_n = 33$:

$S_n = 33$ معناه: $\frac{3n^2-n-4}{2} = 33$

ومنه: $3n^2 - n - 4 = 2(33)$

وعليه: $3n^2 - n - 70 = 0$

مميزها: $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-70) = 1 + 840 = 841 > \mathbf{0}$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1+29}{6} = \frac{30}{6} = 5 \in \mathbb{N}$$

و $$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1-29}{6} = \frac{-28}{6} = \frac{-14}{3} \notin \mathbb{N}$$

إذن: $\boxed{n = 5}$ $(S_5 = 33)$.

حل التمرين 22: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

تعيين الاقتراح الصحيح مع التعليل:

1) الحد السّادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدّها الأول 1 هو: **ب)** -14 .

التبرير:

- **الطريقة 01:** إذا كان: $\boxed{u_0 = 1}$ هو **الحد الأوّل** للمتتالية **الحسابية** التي أساسها $\boxed{r = -3}$

فإنّ: حدّها **السادس** هو u_5 وبالتالي: $\boxed{u_5 = u_0 + 5r = 1 + 5(-3) = -14}$.

- **الطريقة 02:** إذا كان: $\boxed{u_1 = 1}$ هو **الحد الأوّل** للمتتالية **الحسابية** التي أساسها $\boxed{r = -3}$

فإنّ: حدّها **السادس** هو u_6 وبالتالي: $\boxed{u_6 = u_1 + (6-1)r = 1 + 5(-3) = -14}$.

2) مجموع 100 حدٍ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول هو 1 وأساسها 3 هو: **جـ)** $\frac{3^{100}-1}{2}$.

لأنّ: $\frac{3^{100}-1}{2} = \left(\frac{1-3^{100}}{-2}\right) = 1\left(\frac{1-3^{100}}{1-3}\right) = \left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$ الحد الأول = المجموع

3) لدينا: $a = 2x + 2$، $b = 6x - 3$، $c = 4x$.

الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية **حسابية** عندما يكون: أ) $x = \frac{4}{3}$

التبرير:

بمأنّ: الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية **حسابية**

فإنّ: **حسب خاصية الوسط الحسابي** $\boxed{a + c = 2b}$ ومنه: $(2x + 2) + (4x) = 2(6x - 3)$

وعليه: $6x + 2 = 12x - 6$،

وبالتالي: $-6x = -8$ إذن: $\boxed{x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}}$.

4) المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية: **جـ)**

لا حسابية ولا هندسية.

لأنّ: **العلاقة** $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$، **ليست من الشكل** $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ **وليست من الشكل** $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$.

حل التمرين 23: (06 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$

المتتالية (u_n): أ) متزايدة تماما، **لمعرفة اتجاه تغيّر متتالية ندرس إشارة الفرق** $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$

لدينا: $u_n = n^2 - 1$، ومنه: $u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 1^2 + 2(n)(1) - 1 = n^2 + 2n$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n) - (n^2 - 1) = 2n + 1 > 0$،

إذن: المتتالية (u_n) **متزايدة تماما**.

2) (v_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$،

عبارة الحد العام للمتتالية $(\boldsymbol{v_n})$ هي: **ب)** $v_n = 3 \times 2^{n-1}$، لأنّ: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.

المجموع $\boldsymbol{S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n}$ يُساوي: أ) $3(2^n - 1)$،

لأنّ: $3(2^n - 1) = 3\left(\frac{1-2^n}{-1}\right) = 3\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = v_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right) = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = S_n$.

3) **الاحتمالات.**

حل التمرين 24: (06 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية **هندسية حدودها موجبة تماما**، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:
$u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$.

1) تبيان أنّ $u_1 = 24$:

حسب **خاصية الوسط الهندسي**، لدينا: $u_0 \times u_2 = {u_1}^2$

ومنه: $u_0 \times u_2 = 576$

تُصبح: ${u_1}^2 = 576$

وعليه: $\boxed{u_1 = \sqrt{576} = 24}$ أو $\boxed{u_1 = -\sqrt{576} = -24}$ **(مرفوض)**

إذن: $\boxed{u_1 = 24}$ لأنّ حدود (u_n) **موجبة تماما**.

استنتاج قيمة u_0: لدينا: $u_0 + u_1 = 30$ ومنه: $u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24 = 6$.

2) تبيان أنّ $q = 4$: لدينا: $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$.

كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{u_n = 6 \times 4^n}$.

3) إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$:

لدينا: $u_n = 6 \times 4^n$ ومنه: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1} = 6 \times 4^n \times 4^1$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (24 \times 4^n) - (6 \times 4^n) = 18 \times 4^n$

استنتاج اتجاه تغيُّر المتتالية (u_n):

بما أنّ $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0$، فإنّ (u_n) **متزايدة تماما**.

4) حساب 4^4: $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$.

التحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته:

نضع: $u_n = 1536$ نجد: $6 \times 4^n = 1536$

ومنه: $4^n = \frac{1536}{6}$

أي: $4^n = 256$

وعليه: $4^n = 4^4$ (لأنّ $4^4 = 256$)

إذن: $\boxed{n = 4}$ ($u_4 = 1536$)، **رتبته:** 5 لأنّ الحد الأوّل هو u_0.

5) حساب بدلالة n المجموع، $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right) = 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right) = \frac{24}{-3}(1-4^n)$

ومنه: $S_n = -8(1-4^n) = 8(4^n+1)$.

حل التمرين 25: (06 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة **على** $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$.

1) تبيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1:

نُبين أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت $\frac{2}{5}$.

لدينا: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$، ومنه: $u_{n+1} = \frac{2}{5}(n+1) - 1 = \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} - 1 = \frac{2}{5}n + \frac{2-5}{5} = \frac{2}{5}n - \frac{3}{5}$

وعليه: $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{2}{5}n-\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{2}{5}n-1\right)=\frac{2}{5}n-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}n+1=-\frac{3}{5}+1=\frac{-3+5}{5}$

وبالتالي: $\boxed{u_{n+1}-u_n=\frac{2}{5}}$،

إذن: المتتالية (u_n) **حسابية** أساسها $\frac{2}{5}$، وحدّها الأول $\frac{-3}{5}=\frac{2-5}{5}=1-\frac{2}{5}=1-(1)\frac{2}{5}=u_1$.

2) تعيين رتبة الحد الذي قيمته 575:

نضع: $u_n=575$ نجد: $\frac{2}{5}n-1=575$

ومنه: $\frac{2}{5}n=576$

وعليه: $2n=5(576)$

أي: $2n=2880$ وبالتالي: $n=\frac{2880}{2}=1440\in\mathbb{N}$ $(u_{1440}=575)$

إذن: رتبة الحد الذي قيمته 575 هي 1440 لأنّ الحد الاوّل هو u_1.

3) حساب قيمة المجموع S حيث $S=u_1+u_2+\cdots+u_{1440}$:

لدينا: $S=u_1+u_2+\cdots+u_{1440}=(1440-1+1)\left(\frac{u_1+u_{1440}}{2}\right)=(1440)\left(\frac{\frac{-3}{5}+575}{2}\right)$

ومنه: $S=\frac{1440}{2}\left(\frac{-3}{5}+575\right)=720\left(\frac{-3+5(575)}{5}\right)=720\left(\frac{-3+2875}{5}\right)=720\left(\frac{2872}{5}\right)$

وعليه: $S=720(574{,}4)=413568$.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n=4^{5u_n+6}$.

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1:

(نُبين أنّ حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت)

لدينا: $v_n=4^{5u_n+6}$ ومنه: $v_{n+1}=4^{5u_{n+1}+6}$

وبمأنّ (u_n) **حسابية** فـإنّ $u_{n+1}=u_n+r$، أي: $\boxed{u_{n+1}=u_n+\frac{2}{5}}$.

وعليه: $v_{n+1}=4^{5u_{n+1}+6}=4^{5\left(u_n+\frac{2}{5}\right)+6}=4^{5u_n+2+6}=4^{(5u_n+6)+2}=4^{5u_n+6}\times4^2$

وبالتالي: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{4^{5u_n+6}\times4^2}{4^{5u_n+6}}=4^2=16$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q=16}$، وحدّها الأول

$v_1=4^{5u_1+6}=4^{5\left(\frac{-3}{5}\right)+6}=4^{-3+6}=4^3=64$ **لأنّها** معرّفة على $\mathbb{N}^*$.

ب) حساب بدلالة n المجموع $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$:

لدينا: $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n=v_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right)=64\left(\frac{1-16^n}{1-16}\right)=\frac{64}{-15}(1-16^n)$

إذن: $\boxed{S_n=\frac{64}{15}(16^n-1)}$.

حل التمرين 26: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) المتتالية **الحسابية** التي حدّها الأول u_0 وأساسها r.

1) علماً أنّ: $u_0+u_1+u_2=6$، تعيين u_1:

حسب **خاصية الوسط الحسابي** لدينا: $\boxed{u_0+u_2=2u_1}$،

العلاقة $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ تُصبح: $u_1 + 2u_1 = 6$ ومنه: $3u_1 = 6$ إذن: $\boxed{u_1 = \frac{6}{3} = 2}$.

2) علماً أنّ: $2u_0 - 3u_1 = -10$، تعيين الحد الأول u_0، ثم استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n):

$2u_0 - 3u_1 = -10$ تُكافئ: $2u_0 - 3(2) = -10$

ومنه: $2u_0 = -10 + 6$ أي: $2u_0 = -4$ إذن: $\boxed{u_0 = \frac{-4}{2} = -2}$.

استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n):

بمأنّ (u_n) حسابية؛ ولدينا: $u_1 = 2$، $u_0 = -2$ فـإنّ $\boxed{r = u_1 - u_0 = 2 - (-2) = 4}$.

3) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\boxed{u_n = -2 + 4n}$.

4) أ) تعيين قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$:

نضع: $u_n = 2018$ نجد: $-2 + 4n = 2018$

ومنه: $4n = 2020$ وبالتالي: $\boxed{n = \frac{2020}{4} = 505 \in \mathbb{N}}$ $(u_{505} = 2018)$

ب) حساب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n):

بمـأنّ الحد الأوّل هو u_0 فـإنّ الحد الخامس عشر هو: $\boxed{u_{14} = -2 + 4(14) = 54}$.

5) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$

ومنه: $S_n = (n+1)\left(\frac{-2+(-2+4n)}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{-4+4n}{2}\right) = (n+1)(2n-2)$.

6) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون، $S_n = 96$:

$S_n = 96$ معناه: $(n+1)(2n-2) = 96$

ومنه: $2n^2 - 2n + 2n - 2 = 96$

وعليه: $2n^2 = 98$

أي: $n^2 = 49$

وبالتالي: $n = \sqrt{49} = 7$ أو $n = -\sqrt{49} = -7$ (مرفوض)

إذن: $\boxed{n = 7}$ $(S_7 = 96)$.

حل التمرين 27: (06 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، حدّها الأوّل u_0، وأساسها r حيث: $\begin{cases} u_2 - u_0 = 4 \\ u_1 + u_3 = 16 \end{cases}$.

1) حساب الحدّ u_2:

حسب خاصية الوسط الحسابي، $u_1 + u_3 = 2u_2$ وبالتعويض في العلاقة: $\underbrace{u_1 + u_3}_{2u_2} = 16$

نجد: $2u_2 = 16$

ومنه: $u_2 = \frac{16}{2} = 8$؛ إذن: $\boxed{u_2 = 8}$

حساب الحدّ u_0:

لدينا: $\begin{cases} u_2 - u_0 = 4 \\ u_2 = 8 \end{cases}$، ومنه: $8 - u_0 = 4$ وعليه: $-u_0 = -4$ إذن: $\boxed{u_0 = 4}$.

استنتاج الأساس r للمتتالية (u_n):

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_2 = 8 \end{cases}$، بالتعويض في العلاقة: $u_n = u_0 + nr$

نجد: $u_2 = u_0 + 2r$

وعليه: $8 = 4 + 2r$

وبالتالي: $2r = 4$ إذن: $\boxed{r = 2}$.

2) أ. تبيان أنّ الحدّ العام للمتتالية (u_n) معرّف بـ $u_n = 4 + 2n$:

بمأنّ: (u_n) **متتالية حسابية، حدّها الأوّل $u_0 = 4$، وَأساسها $r = 2$**؛ فإنّ: $u_n = u_0 + nr$

وبالتعويض نجد: $\boxed{u_n = 4 + 2n}$ (و هو المطلوب).

ب. تحديد مع التّبرير اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لتحديد **اتجاه تغيّر** متتالية (u_n) **بصفة عامة**؛ ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$،

وبمأنّ: (u_n) **حسابية** فإن: $u_{n+1} - u_n = r = 2 > 0$ إذن: المتتالية (u_n) **متزايدة تماما**.

3) تبيان أنّ العدد 2020 حدّ من حدود المتتالية (u_n)، محدّداً رُتبته:

نضع: $\boxed{u_n = 2020}$ نجد: $4 + 2n = 2020$

ومنه: $2n = 2020 - 4$

أي: $n = \frac{2016}{2} = 1008 \in \mathbb{N}$ $(u_{1008} = 2020)$

إذن: 2020 حد من حدود المتتالية (u_n)، **رتبته:** 1009 لأنّ الحد الأوّل هو u_0.

4) حساب المجموع S المعرّف بـ $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{1008}$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{1008} = (1008 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{1008}}{2}\right) = 1009\left(\frac{4+2020}{2}\right)$

ومنه: $S = 1009\left(\frac{2024}{2}\right) = 1009(1012) = 1021108$.

حل التمرين 28: (06 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية، **حدّها الأوّل u_1، حدودها موجبة تماما** حيث: $u_3 \times u_5 = 2916$.

1) حساب الحد u_4:

حسب **خاصية الوسط الهندسي**، $u_3 \times u_5 = {u_4}^2$

وبالتعويض في العلاقة: $\underbrace{u_3 \times u_5}_{{u_4}^2} = 2916$،

نجد: ${u_4}^2 = 2916$

وعليه: $\boxed{u_4 = \sqrt{2916} = 54}$ أو $\boxed{u_4 = -\sqrt{2916} = -54}$ **(مرفوض)**

إذن: $\boxed{u_4 = 54}$ لأنّ حدود (u_n) **موجبة تماما**.

2) علما أنّ $u_3 = 18$، التحقّق أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 3:

بمأنّ: (u_n) **متتالية هندسية**، ولدينا: $\begin{cases} u_3 = 18 \\ u_4 = 54 \end{cases}$؛ فإن **أساسها** هو: $\boxed{q = \frac{u_4}{u_3} = \frac{54}{18} = 3}$.

3) حساب الحدّ الأوّل u_1، ثمّ كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

بمأنّ: (u_n) **متتالية هندسية، حدّها الأوّل u_1، وَأساسها $q = 3$**؛ فإنّ: $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$

☐ ولدينا من جهة أخرى: $u_3 = 18$، بالتعويض نجد: $u_3 = u_1 \times q^{3-1}$

أي: $18 = u_1 \times 3^2$

وهذا يعني: $9u_1 = 18$ إذن: $\boxed{u_1 = \frac{18}{9} = 2}$.

☐ **أو** ولدينا من جهة أخرى: $u_4 = 54$، بالتعويض نجد: $u_4 = u_1 \times q^{4-1}$

أي: $54 = u_1 \times 3^3$

وهذا يعني: $27u_1 = 54$ إذن: $\boxed{u_1 = \frac{54}{27} = 2}$.

كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

بالتعويض في: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ نجد: $\boxed{u_n = 2 \times 3^{n-1}}$.

4) تعيين رتبة الحدّ الذي قيمته 1458: (بملاحظة: $729 = 3^6$)

نضع: $u_n = 1458$ نجد: $2 \times 3^{n-1} = 1458$

ومنه: $3^{n-1} = \frac{1458}{2}$

أي: $3^{n-1} = 729$

وعليه: $3^{n-1} = 3^6$ (لأنّ $3^6 = 729$)

وبالتالي: $n - 1 = 6$

إذن: $\boxed{n = 7}$ ($u_7 = 1458$)، **رتبته:** 7 لأنّ الحد الأوّل هو u_1.

5) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right) = \frac{2}{-2}(1-3^n)$

ومنه: $S_n = -(1-3^n) = 3^n + 1$.

الحمد لله.

جمع الأستاذ بوعزة مصطفى.