الباب 03

تجدون في هذا الملف

1 الدرس
2 تطبيقات محلولة
3 مسائل ★☆☆☆☆
4 مسائل ★★☆☆☆
5 مسائل ★★★☆☆
6 مسائل ★★★★☆
7 مسائل ★★★★★
8 حلول المسائل

الأستاذ: عبد الحفيظي عادل

الدوال الأسية

لهذه الدوال تطبيقات واسعة ، فالدوال الأسية تستعمل على سبيل المثال للتعبير عن النمو والاضمحلال بمرور الزمن ، مثل النمو السكاني غير المحدود أو اضمحلال المواد المشعة. أما الدوال اللوغاريتمية فهي أساس مقياس ريختر للزلازل وأساس قياس نسبة الأحماض في السوائل (مقياس PH). للدوال الأسية واللوغاريتمية أيضا دور أساس في الدراسات المالية ، خصوصا في قواعد حساب الفوائد المركبة ومعرفة القيم المستقبلية.

1 تعريف الدالة الأسية :

تعريف: الدالة الأسية f هي الدالة الوحيدة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق : [1]

$f'=f$ و $f(0)=1$ ونكتب $f(x)=\exp(x)$ أو $f(x)=e^x$

خواص: x و y عددان حقيقيان و $n\in\mathbb{Z}$

$e^0=1$ ، $e^1=e\approx 2,71$ ، $e^{x+y}=e^x\times e^y$ ، $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ ، $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$

$e^{nx}=(e^x)^n$ ، $e^x>0$ ، $\ln e^x=x$ ومن أجل كل $x>0$: $e^{\ln x}=x$

$e^x=e^y$ يعني $x=y$ ، $e^x\le e^y$ يعني $x\le y$ ، $e^x\ge e^y$ يعني $x\ge y$

دراسة تغيرات الدالة الأسية:

1 **مجموعة التعريف لدينا :** $f(x)=e^x$ و هي معرفة على $\mathbb{R}$ إذن $D_f=]-\infty;+\infty[$

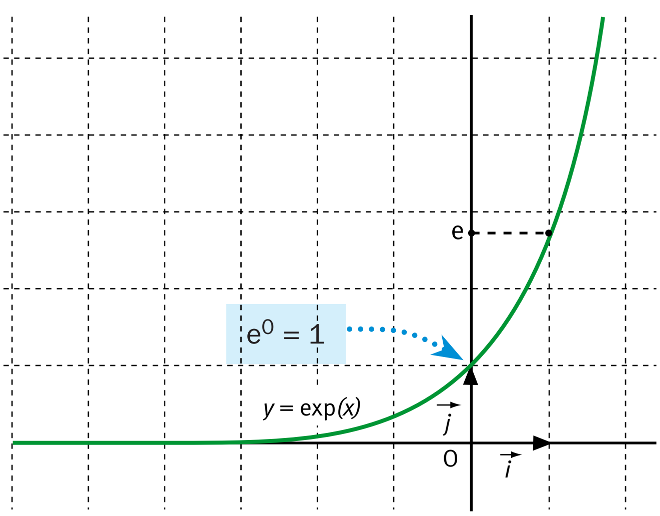
2 **النهايات :** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

3 **إتجاه التغير : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :** $f'(x)=e^x>0$ و بالتالي f **متزايدة تماما على** $\mathbb{R}$.

4 **جدول التغيرات :** [2]

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)=\exp(x)$		$+$		$+$	
$\exp(x)=e^x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5 **التمثيل البياني :**



تطبيق 01: **بسط العبارات التالية :** [3]

الانتقال الى الحل

1) $(e^x)^4\times e^{-3x}$ (2) $\dfrac{e^{3x+4}}{e^{3x+2}}$ (3) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}}$ (4) $e^{2x}+e^{-2x}-(e^x-e^{-x})^2$

الحل:

....

....

....

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)
[2] : © Cned – Académie en ligne
[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

تطبيق 02: **حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :** [3]

الانتقال الــى الحـــل

1) $e^{-2x} = 1$ 3) $e^{x^2+9} = e^{6x}$ 5) $e^{x} - 3e^{-x} + 2 = 0$

2) $e^{3x-8} = \dfrac{1}{e^{2}}$ 4) $e^{2x} + 5e^{x} - 6 = 0$

الحل:

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

تطبيق 03: **حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :** [3]

الانتقال الـى الحـل

1) $e^x > -2$ 2) $(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ 3) $e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0$

الحل:

2 مجموعة تعريف دالة أسية:

مبرهنة: نضع $f(x) = e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية
مجموعة تعريف الدالة f هي نفسها مجموعة تعريف الدالة u إذن $D_f = D_u$ [1]

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)
[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

تطبيق 04: **عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة** [4]

الانتقال الى الحل

1) $f(x)=\sqrt{e^{x}+e^{-x}}$
3) $f(x)=\sin xe^{\cos x}$
5) $f(x)=\sqrt{e^{x}-1}$
7) $f(x)=\left(x^{2}-4x+5\right)e^{x}$
2) $f(x)=\dfrac{e^{x}+x}{e^{x}-1}$
4) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$
6) $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$
8) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}-1}$

الحل:

3 مشتقة دالة أسية :

مبرهنة: نضع $f(x)=e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية . [1]
إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I و بالتالي : $f'(x)=u'(x)\,e^{u(x)}$.

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

تطبيق 05: أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة [4]

الانتقال الــى الحــــل

1) $f(x)=e^{2x}-e^{-x}$

2) $f(x)=xe^{x-1}$

3) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

5) $f(x)=\sqrt{e^{x}-1}$

6) $f(x)=\sin xe^{\cos x}$

7) $f(x)=\left(x^{2}-4x+5\right)e^{x}$

8) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}-1}$

الحل:

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

4 النهايات الشهيرة :

مبرهنة:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0^+ \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} x e^x=0^- \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$ [1]

ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=\begin{cases}0^+ : \text{زوجي } n\\ 0^- : \text{فردي } n\end{cases} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$

■ إزالة حالات عدم التعيين:

إزالة حالات عدم التعيين في الدالة الأسية

حالة $(0)(\infty)$

لإزالتها ننشر (فك الأقواس) ونستفيد من المبرهنة :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=\begin{cases}0^+ : \text{زوجي } n\\ 0^- : \text{فردي } n\end{cases}$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية :

$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x$

حالة عدم التعيين من الشكل $(0)(-\infty)$

$f(x)=(x-1)e^x$

$=xe^x-e^x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-0=0$

حيث أن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$

حالة $\frac{0}{0}$

نغير شكل الدالة f ونستفيد من المبرهنة :

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية :

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{3x}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{2x}-1}{x}$

نعدل بين x و 3 ثم نضرب البسط والمقام بالعدد (2)

$f(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}$

$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{2}{3}(1)=\frac{2}{3}$

حيث أن :

$\lim x\to0\,\frac{e^x-1}{x}=1$

حالة $\frac{\infty}{\infty}$

نفرق الكسر إذا كان المقام حد واحد.

نخرج عامل مشترك مناسب من البسط والمقام إذا كان المقام أكثر من حد .

ونستفيد من المبرهنات :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty ، \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

مثال توضيحي 1: حساب النهاية :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x)=\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0} f(x)=+\infty-0=+\infty$

حيث أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

مثال توضيحي 2: حساب النهاية :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x-1}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x)=\frac{x-1}{e^x-1}$ ، نخرج x كعامل مشترك من البسط ، و e^x من المقام ، ومنه:

$$f(x)=\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{x}{e^x}\left[\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\left[\frac{1-0}{1-0}\right]=0$$

حيث أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

حالة $+\infty-\infty$

إخراج عامل مشترك مناسب عادة:

e^x عندما $x\to+\infty$

ويمكن e^{2x} أو e^{3x} أو ...

e^{-x} عندما $x\to-\infty$

ويمكن e^{-2x} أو ...

ونستفيد من المبرهنات :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ،

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=\begin{cases}0^+ : \text{زوجي } n\\ 0^- : \text{فردي } n\end{cases}$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية : $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}+x$

حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$.

$f(x)=e^{-x}+x$

$=e^{-x}\left[1+\frac{x}{e^{-x}}\right]$

(أخرجنا e^{-x} لأن $x\to-\infty$)

$=e^{-x}\left[1+xe^x\right]$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty[1+0]=+\infty$

حيث أن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)

تطبيق 06: أحسب النهايات التالية : [3] [4]

الانتقال الــى الحــل

1) $\lim_{x \to +\infty} (3x-1)e^{-x}$

2) $\lim_{x \to +\infty} \left(3e^{x} - 7x\right)$

3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^{3}}}$

4) $\lim_{x \to -\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right)$

5) $\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\cos x$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x}$

7) $\lim_{x \to 0} xe^{\frac{1}{x}}$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

5 المعادلات التفاضلية :

تعريف:

- **المعادلة التفاضلية هي معادلة المجهول فيها دالة نرمز إليها غالبا بالرمز y ، z ، ...**
- **كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى .** [1]
- **حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. و التي تحقق : $f'(x) = af(x) + b$**

■ حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay$

مبرهنة:

a عدد حقيقي غير معدوم

حلول المعادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto c\,e^{ax}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

تطبيق 07: [5] الانتقال الــى الحـــل

- f_1 حلٌ للمعادلة التفاضلية $y' = y$ و الذي يحقق $f_1(0) = -3$. عيّن عبارة f_1

الحل:

....

....

....

....

■ حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

مبرهنة:

a وَ b عددان حقيقيان مع a غير معدوم

حلول المعادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto c\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

تطبيق 08: [5] الانتقال الــى الحـــل

- f_1 حلٌ للمعادلة التفاضلية $y' = 2y + 4$ و الذي يحقق $f_1(0) = 3$. عيّن عبارة f_1

الحل:

....

....

....

....

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)

[5] : مجلة الدالة الأسية (محمد سراي)

6 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

الانتقال إلـــى الحـــل

أجب ب "صح ✓" أو " خطأ ✗": [4]

1 $e^{-3}<0$ ☐

2 $e^{-5}=-e^{5}$ ☐

3 $\sqrt{e^{2x}}=e^{x}$ ☐

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$ ☐

5 الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto e^{3x}$ هي $x\mapsto e^{3x}$ ☐

6 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ ☐

7 إذا كان $x\geq 2$ فإن $e^{x}\geq e^{2}$ ☐

8 إذا كان $x\leq 0$ فإن $e^{x}\leq 0$ ☐

9 من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}.e^{-x}=1$ ☐

10 إشارة : $(x-1)e^{x}$ هي نفس إشارة $x-1$ ☐

11 من أجل $x<1$: $e^{x-1}<0$ ☐

12 $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{x}=0$ ☐

13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ex}{x^{3}}=+\infty$ ☐

14 $e^{x}-e=e^{x-1}$ ☐

15 $e^{2x}-2e^{x}+1=\left(e^{x}-1\right)^{2}$ ☐

16 التمثيل البياني للدالة $x\mapsto e^{x}$ يقطع محور الفواصل. ☐

17 الدالة : $x\mapsto e^{-1}x+3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ☐

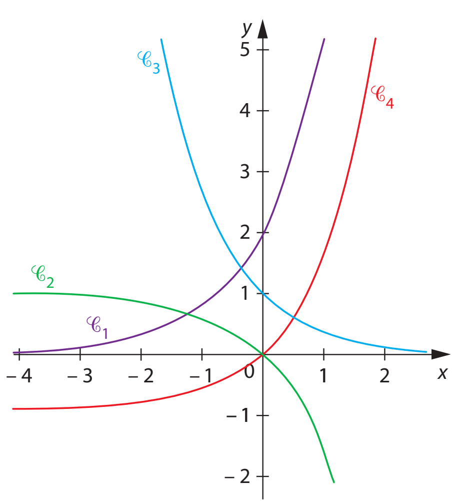
18 ليس للمتراجحة $e^{x^{2}-4x}<0$ حل في $\mathbb{R}$ ☐

19 الدالة : $x\mapsto e^{x^{2}-4}$ هي حل للمعادلة : $y'=y$ ☐

20 $e^{-\frac{1}{2}}<1$ ☐

صل بما يناسب: [6]

$f:x\mapsto 2e^{x}$	$(\mathscr{C}_1)$
$k:x\mapsto e^{-x}$	$(\mathscr{C}_2)$
$g:x\mapsto 1-e^{x}$	$(\mathscr{C}_3)$
$l:x\mapsto e^{x}-1$	$(\mathscr{C}_4)$



[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[6] : MATH'x TS SPÉCIFIQUE

تطبيق 01: [3]

1 $\left(e^{x}\right)^{4}\times e^{-3x}=e^{4x}\times e^{-3x}=e^{4x-3x}=e^{x}$

2 $\dfrac{e^{3x+4}}{e^{3x+2}}=e^{3x+4}\times e^{-(3x+2)}=e^{3x+4}\times e^{-3x-2}=e^{3x+4-3x-2}=e^{2}$

3 $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{-x}}=e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=e^{2x}+e^{x-x}=e^{2x}+1$

4 $e^{2x}+e^{-2x}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}=e^{2x}+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2e^{x}\times e^{-x}+e^{-2x}\right)=2$

تطبيق 02: [3]

1 $e^{-2x}=1$ تكافئ $e^{-2x}=e^{0}$ أي $-2x=0$ ومنه $x=0$ إذن $S=\{0\}$.

2 $\dfrac{1}{e^{2}}=e^{3x-8}$ تكافئ $e^{3x-8}=e^{-2}$ ومنه $3x-8=-2$ وبالتالي $S=\{2\}$.

3 $e^{6x}=e^{x^{2}+9}$ تكافئ $x^{2}+9=6x$ تكافئ $x^{2}-6x+9=0$ ومنه $S=\{3\}$

4 $e^{2x}+5e^{x}-6=0$ تكافئ $\left(e^{x}\right)^{2}+5\left(e^{x}\right)-6=0$ ، بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+5X-6=0$ نحل هذه المعادلة باستعمال المميز نجد $X=1$ أو $X=-6$

ومنه $e^{2x}+5e^{x}-6=0$ تكافئ $e^{x}=1$ أو $e^{x}=-6$ (حالة مرفوضة لأن $e^{x}>0$).

إذن فقط لدينا $e^{x}=1$ ومنه $x=0$ وأخيرا $S=\{0\}$.

5 $e^{x}-3e^{-x}+2=0$ تكافئ $e^{x}-\dfrac{3}{e^{x}}+2=0$ تكافئ $e^{2x}+2e^{x}-3=0$

بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+2X-3=0$ نحل هذه المعادلة باستعمال المميز نجد

$X=1$ أو $X=-3$ ومنه $e^{x}-3e^{-x}+2=0$ تكافئ $e^{x}=1$ أو $e^{x}=-3$

(حالة مرفوضة لأن $e^{x}>0$). إذن فقط لدينا $e^{x}=1$ ومنه $x=0$ وأخيرا $S=\{0\}$.

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

تطبيق 03: [3]

1 $e^x > -2$ دوما محققة لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x > 0$ وبالتالي $S = \mathbb{R}$.

2 $(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$. لدينا دوما $e^x + 3 > 0$ وبالتالي $(e^x - 1)(e^x + 3)$ لها نفس إشارة $e^x - 1$.
$(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ تكافئ $e^x - 1 < 0$ تكافئ $e^x < 1$ تكافئ $e^x < e^0$ تكافئ $x < 0$ وأخيرا $S =]-\infty\ ,\ 0[$.

3 $e^x - 5e^{-x} + 4 \le 0$ تكافئ $e^x - \dfrac{5}{e^x} + 4 \le 0$ تكافئ $e^{2x} + 4e^x - 5 \le 0$
بوضع $e^x = X$ نحصل على $X^2 + 4X - 5 \le 0$ ومنه $(X - 1)(X + 5) \le 0$ وهذه تكافئ
$(e^x - 1)(e^x + 5) \le 0$ لدينا دوما $e^x + 5 > 0$ وبالتالي $(e^x - 1)(e^x + 5)$ لها نفس إشارة $e^x - 1$.
$(e^x - 1)(e^x + 5) \le 0$ تكافئ $e^x - 1 \le 0$ تكافئ $e^x \le 1$ تكافئ $e^x \le e^0$ تكافئ $x \le 0$ وأخيرا $S =]-\infty\ ,\ 0]$.

تطبيق 04: [4]

1 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$ ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} \ge 0\}$
و هي محققة دوما لأن $e^x > 0$ و $e^{-x} > 0$ ، $D_f = \mathbb{R}$

2 لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x - 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$

3 لدينا : $f(x) = \sin x . e^{\cos x}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

4 لدينا : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$

5 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ حيث : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \ge 0\}$
ومنه : $e^x - 1 \ge 0$ وعليه : $e^x \ge 1$ وبالتالي : $x \ge 0$ إذن : $D_f = [0;+\infty[$

6 لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

7 لدينا : $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ حيث : $D_f = \mathbb{R}$

8 لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}\{-1;1\}$.

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

تطبيق 05: [4]

1. $f'(x)=2e^{2x}+e^{-x}$.

2. $f'(x)=1.e^{x-1}+xe^{x-1}$ ومنه : $f'(x)=(1+x)e^{x-1}$

3. $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

4. $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

5. $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$

6. $f'(x)=\cos x.e^{\cos x}+\sin x(-\sin x)e^{\cos x}$ ومنه : $f'(x)=e^{\cos x}\left(\cos x-\sin^2 x\right)$

وعليه : $f'(x)=e^{\cos x}\left[\cos x-\left(1-\cos^2 x\right)\right]$ وبالتالي : $f'(x)=\left(\cos^2 x+\cos x-1\right)e^{\cos x}$

7. $f'(x)=(2x-4)e^{3x}+\left(x^2-4x+5\right)e^x$ وعليه : $f'(x)=\left(2x-4+x^2-4x+5\right)e^x$

ومنه : $f'(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x$

8. $f'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2-1\right)-2x.e^x}{\left(x^2-1\right)^2}$ ومنه : $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-2x-1\right)e^x}{\left(x^2-1\right)^2}$

تطبيق 06: [3] [4]

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)=3(0)-0=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3e^x-7x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3\dfrac{e^x}{x}-7\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3e^x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

つづく

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)$

نضع $X=\dfrac{1}{x}$ عندما $x\to-\infty$ فإن $X\to0$ نستعمل النهاية الشهيرة $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$ نحصل على

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$.

5 من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1\le\cos x\le1$ نضرب في العدد الحقيقي الموجب تماما e^{-x}

نحصل على $-e^{-x}\le e^{-x}\cos x\le e^{-x}$ أي $-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ وبالتالي حسب مبرهنة النهايات والحصر تكون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

6 من أجل $x\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$: $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\dfrac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{\sin x}=e^{-x}\times\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)}{x}\times\dfrac{x}{\sin x}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to0}e^{-x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2\times1=2$ لأن $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$.

لدينا كذلك $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

وبالتالي $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left[e^{-x}\times\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)}{x}\times\dfrac{x}{\sin x}\right]=1\times2\times1=2$

7 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}xe^{\frac{1}{x}}=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ (نضع : $\dfrac{1}{x}=t$)

8 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\times\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2$

تطبيق 07: [5]

• $y'=y$ معناه $y(x)=C'e^x$

لدينا إذن: $f_1(x)=C'e^x$ و $f_1(0)=-3$ و بالتالي : $\boxed{f_1(x)=-3e^x}$.

تطبيق 08:

• $y'=2y+4$ معناه $y(x)=Ce^{2x}-2$

لدينا إذن: $f_1(x)=Ce^{2x}-2$ و $f_1(0)=3$ و بالتالي : $\boxed{f_1(x)=5e^{2x}-2}$.

6 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

أجب ب "صح" أو " خطأ": [4]

1 $e^{-3} < 0$ ✗

2 $e^{-5} = -e^{5}$ ✗

3 $\sqrt{e^{2x}} = e^{x}$ ✓

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ ✓

5 الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{3x}$ هي $x \mapsto e^{3x}$
✗

6 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ ✓

7 إذا كان $x \geq 2$ فإن $e^{x} \geq e^{2}$ ✓

8 إذا كان $x \leq 0$ فإن $e^{x} \leq 0$ ✗

9 من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}.e^{-x} = 1$
✓

10 إشارة : $(x-1)e^{x}$ هي نفس إشارة $x-1$
✓

11 من أجل $x < 1$: $e^{x-1} < 0$ ✗

12 $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = 0$ ✗

13 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ex}{x^{3}} = +\infty$ ✗

14 $e^{x} - e = e^{x-1}$ ✗

15 $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = \left(e^{x} - 1\right)^{2}$ ✓

16 التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{x}$ يقطع محور الفواصل.
✗

17 الدالة : $x \mapsto e^{-1}x + 3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
✓

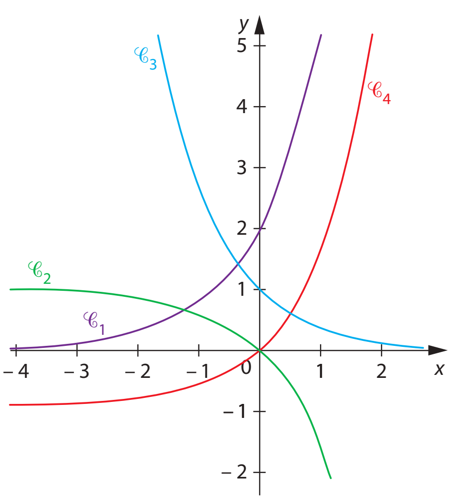
18 ليس للمتراجحة $e^{x^{2}-4x} < 0$ حل في $\mathbb{R}$ ✗

19 الدالة : $x \mapsto e^{x^{2}-4}$ هي حل للمعادلة : $y' = y$ ✗

20 $e^{-\frac{1}{2}} < 1$ ✓

صل بما يناسب: [6]

- $f : x \mapsto 2e^{x}$ → $(\mathscr{C}_1)$
- $k : x \mapsto e^{-x}$ → $(\mathscr{C}_3)$
- $g : x \mapsto 1 - e^{x}$ → $(\mathscr{C}_2)$
- $l : x \mapsto e^{x} - 1$ → $(\mathscr{C}_4)$



[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[6] : MATH'x TS SPÉCIFIQUE

1 سلسلة الدوال الأسية (مصطفاي عبد العزيز)

الانتقال الى الحل

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3. حدّد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).
4. بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)+f(-x)=2$ وفسّر النتيجة هندسيا.
5. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.
6. احسب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل ثم ارسم كلا من (T) و (C_f).
7. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^{x}=m+1$

2 الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

الانتقال الى الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $1cm$.

1. بين أن الدالة f فردية. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟
2. أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x+1-\dfrac{2}{e^{-x}+1}$

   ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.
3. أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^{x}+1}$

   ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

   ج) حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ).
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
5. عين معادلة لـــ (d) مماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.
6. أرسم (d) ، (Δ) ، (Δ') و (C) حيث (Δ') هو المستقيم المقارب للمنحني (C) عند $-\infty$.

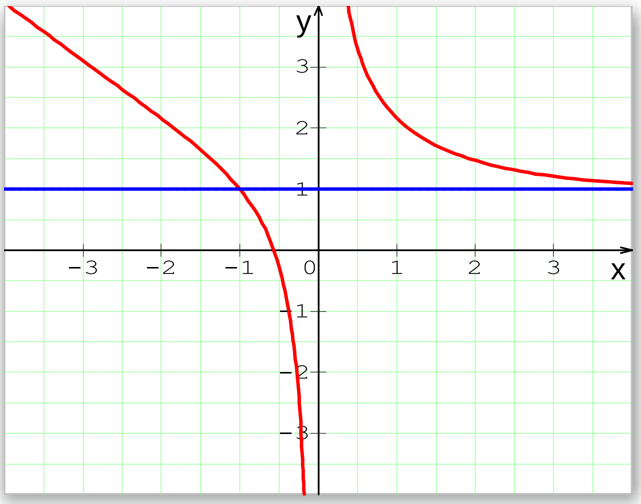
3 الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات ★

الانتقال الــى الحـــل

الجزء A :

المنحنى $(\mathcal{C})$ في الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

محور التراتيب و المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقاربان للمنحنى $(\mathcal{C})$.



1 اقرأ بيانيا نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

2 حل بيانيا كل من : أ) $f(x)=1$ ؛ ب) $f(x)>1$

الجزء B :

نقبل أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-1}$

1 أ- تحقق أن : $f(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$

ب- نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ، جد من جديد إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 أ- ادرس ، حسب قيم x إشارة (e^x-1)

ب- حل المترجحة $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}>1$

3 بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=0$. ماذا تستنتج ؟

4 ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=-x$.

4 BAC علوم تجريبية 2011 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★

الانتقال الــى الحـــل

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ثمّ أدرس إشارتها.

جـ- شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

2 أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ ، تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3 أ- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$.

ب- أثبت أن: $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات) .

5 BAC علوم تجريبية 2016 الدورة الاستدراكية الموضوع الثاني (06 نقاط) ★ الانتقال الى الحل

I - لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^{x}-x^{2}-x$.

1 أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب) بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$.

جـ) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2 بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II - لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^{2}e^{x}}{e^{x}-x}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i,j)$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{x e^{x} g(x)}{(e^{x}-x)^{2}}$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).

جـ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2 أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha^{2}+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^{2}\right]$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا .

جـ) أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha)\approx 0.29$)

1 BAC علوم تجريبية 2008 الموضوع الأول (07,5 نقط) ★★

الانتقال الحل

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.
حيث a و b عددان حقيقيان.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.
عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.
(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1. بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)
2. أدرس تغيّرات الدالة g، ثم أنشئ جدول تغيراتها.
3. بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها.
4. أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.
5. أرسم (C_g).
6. H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان
- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي: $k(x)=g(x^2)$
باستعمال مشتقة دالة مركبة، عيّن اتجاه تغيّر الدالة k ثم شكل جدول تغيّراتها.

2 BAC علوم تجريبية 2019 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

الانتقال الحل

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$
$(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2} \quad \text{و} \quad g(x)=e^{x}-ex$$

1. أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g.
ب) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f .
3. احسب كلاً من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
4. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ على $\mathbb{R}$.
5. ارسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يُعطى $e^2-2e\approx 2$)
6. احسب بالسنتمتر المربّع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$.
7. h الدالة المعرّفة على المجال $[-2\,;\,2]$ كما يلي: $h(x)=\frac{1}{2}ex^{2}-e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.
ب) من أجل $x\in[0\,;\,2]$ احسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من $(\mathscr{C}_f)$ ثم ارسمه.

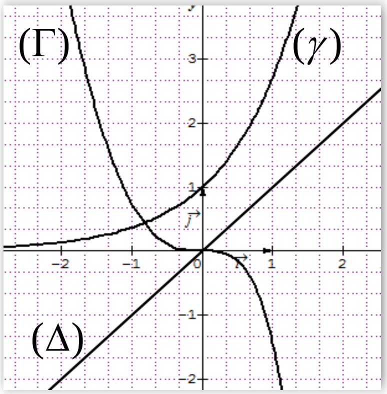
3 BAC علوم تجريبية 2020 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

الانتقال إلى الحل

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

في الشّكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثِّل للدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x^2+2x-2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x\mapsto e^x$.



بقراءة بيانية:

1 برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-x>0$

2 حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$ علما أنّ $g(0)=0$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1 بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسِّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

2 أ . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكِّل جدول تغيّراتها.

3 أ . اكتب معادلة لـ(T) المماس للمنحنى (C_f) في النّقطة A ذات الفاصلة 0.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x يكون: $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$.

جـ. استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$، ماذا تمثّل النقطة A بالنسبة إلى (C_f)؟

4 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$، ثم تحقق أنّ: $-0.6\langle\alpha\langle-0.5$.

5 أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f).

4 BAC علوم تجريبية 2017 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

الانتقال إلى الحل

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i,j)$.

1 بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثمّ احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3 اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1 بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x)\geq 0$، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T).

2 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

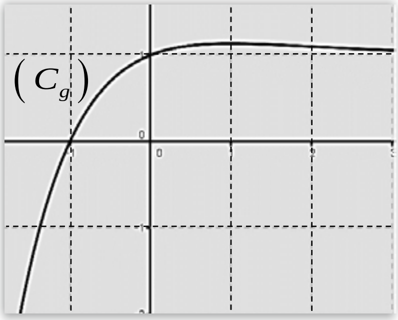
3 أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

4 F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

تحقّق أنّ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، ثمّ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

5 BAC علوم تجريبية 2021 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★ الانتقال إلى الحل



I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+xe^{-x-1}$، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)

1 احسب $g(-1)$.

2 بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 تحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x)=x[1-(1+\frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثمّ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2 أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3 أ. احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$

جـ. بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4 أ. بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث: $0,3<\alpha<0,4$ و $-1,9<\beta<-1,8$

ب. ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

5 الدّالة العددية h معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x)=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$

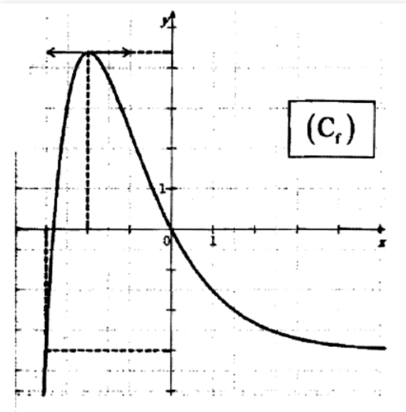
جـ. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

1 BAC تسيير واقتصاد 2009 الموضوع الثاني (05 نقاط) ★★★

الانتقال الـى الحـل

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = (x+a)e^{-x} + b$

حيث a وb عددان حقيقيان وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

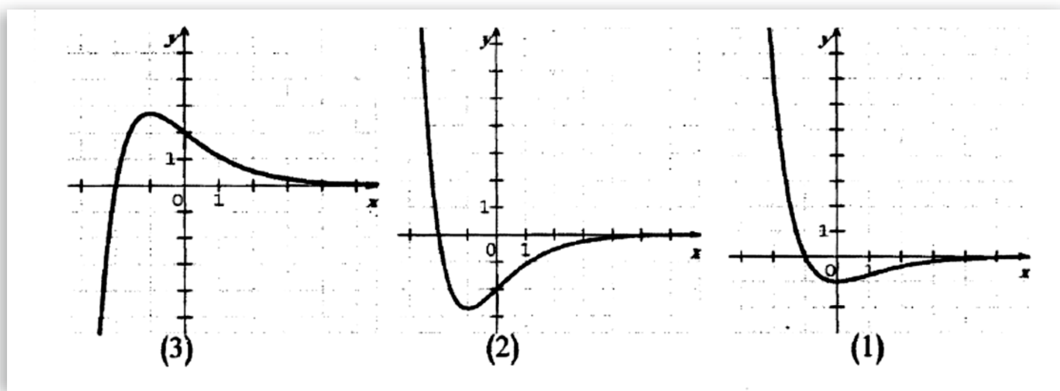


1 بقراءة بيانية للمنحنى (C_f):

أ) عيِّن $f(-3)$، $f(0)$، $f'(-2)$.

ب) عيِّن حسب قيم x إشارة $f'(x)$.

ج) من بين المنحنيات الثلاثة (1)، (2)، (3)، عيِّن، مع التبرير، المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f.



2 أ) بيِّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) = (x+3)e^{-x} - 3$.

ب) شكِّل جدول تغيرات الدالة f.

جـ) بيِّن أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له.

د) بيِّن أن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α محصور بين 1,50 و1,52.

3 نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = (-x-4)e^{-x}$ وليكن I العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^{0} f(x)dx$.

أ) احسب $F'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) أعطِ تفسيرا بيانيا للعدد I مُبرِرا الحصر التالي $4{,}5 < I < 5$ بإعتبارات بيانية مَحضة.

جـ) احسب العدد I.

2 BAC علوم تجريبية 2013 الموضوع الأول (06.5 نقاط) ★★★

الانتقال الـى الحـل

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2 أحسب $f'(x)$. بيِّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$، ثم شكِّل جدول تغيراتها.

3 بيِّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

つづく

4 أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5 عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1 أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 أ- تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$، ثم بيّن أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب- إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

جـ- تحقق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$، معادلة للمستقيم (T).

3 BAC رياضيات 2017 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★

الانتقال إلى الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i,j)$.

1 أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلة له.

ب) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$

ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

2 اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3 h الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$.

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0;+\infty[$.

4 ارسم المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.

5 نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $f(x)=m(x-2)$ ... (E)

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

6 g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيّرات الدالة g .

4 BAC رياضيات 2010 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★

الانتقال إلى الحل

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$.

1 ادرس تغيّرات الدالة g .

2 بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2{,}82<\alpha<2{,}83$.

3 استنتج أشارة $g(x)$ حسب قيَم x .

つづく

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1};\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$، اكتب معادلة لِـ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ عند المبدأ O.

2 أ ـ بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$ ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب ـ بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$.

جـ ـ تحقق أنّ $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ثمّ عيّن حصرا له.

د ـ أنشئ جدول تغيّرات الدالة f.

3 احسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لِـ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C})$ منحني الدالة $x\mapsto -x^3$

بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ وفسّر النتيجة هندسيا.

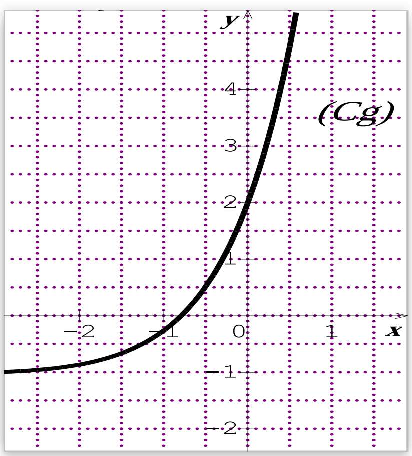
4 أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_f)$.

5 BAC تقني رياضي 2019 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★

الانتقال الــى الحـــل

I) g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+3)e^x-1$

و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل.



بقراءة بيانية

أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.

ب) استنتج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left]-1;\dfrac{-1}{2}\right[$

بحيث $g(\alpha)=0$ ثم تحقّق أنّ: $-0{,}8<\alpha<-0{,}7$.

جـ) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)(e^x-1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3 أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ ثم استنتج انّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

جـ) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ).

つづく

4 ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha)\approx -0.7$)

5 احسب $f(x)-g(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6 h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدّالة h زوجية .

ب) تأكد أنّه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإنّ : $h(x)=f(x-2)+1$.

جـ) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h) على المجال $[-3;3]$.

1 تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين) ★★★★

الانتقال الــى الحـــل

- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;0[\,U\,]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+\dfrac{2\,e^{-x}-1}{1-e^{-x}}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x)=2e^{2x}-5e^{x}+2$.

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$.

2 حلل $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني :

1 بين انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا : $f(-x)+f(x)=-3$ ؛ ماذا تستنتج بيانيا ؟

2 أ)- بين انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا : $f(x)=2x+\dfrac{2-e^{x}}{e^{x}-1}$

- أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-2x$.

ب)- أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2x$.

جـ)- حدد إشارة $(1-e^{-x})$ على $\mathbb{R}$ ثم أوجد $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$.

د)- استنتج أن (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة من بينها مقاربين مائلين (Δ') و (Δ)

- يطلب معادلة كل منهم .

3 أ)- برهن انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-1)^2}$.

ب)- استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

4 أرسم كل من المنحنى (C_f) و المقاربات .

5 α عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول الحقيقي x حيث

$$(-2-\ln\alpha)e^{-x}+1+\ln\alpha=0\quad\to(1)$$

- أوجد قيم α التي من أجلها المعادلة (1) لاتقبل حلا في $\mathbb{R}$.

أ)- بيانيا   ب)- حسابيا .

2 BAC رياضيات 2018 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★★ الانتقال الى الحل

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1 بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ،

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2 بيَن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.9<\alpha<1$ ،

و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

2 بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)=-1$ (يمكن وضع $t=-\dfrac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3 h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\dfrac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

ب) تَحقّق أن $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4 ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f). (نأخذ $f(\alpha)\approx 1.73$).

5 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=\dfrac{n}{n+1}f\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{n^2}{n+1}$.

أ) اكتب u_n بدلالة n ثم بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right).$$

3 BAC رياضيات 2016 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★★ الانتقال الى الحل

I) φ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2 بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاّ α يختلف عن 1 ثم تحقّق أنّ: $2{,}79<\alpha<2{,}80$.

3 استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

つづく

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i,j)$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2 بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3 ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4 أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

جـ) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)\,dt$.

د) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

III) **1** احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

2 برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

3 (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع : u_k+u_{k+1}.

ب) استنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1+u_2+...+u_{2n}$.

4 BAC رياضيات 2017 الدورة الاستثنائية الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★ الحــــل الانتقال

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$.

I) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني .

1 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3 أثبت أنّ المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما، احسب $f(-2)$ ، ثمّ ارسم المنحنى (C).

II) ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدّالة f_m المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_m(x)=(x^2+mx+1)\,e^{-x}$

وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1 أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثييها.

2 ادرس اتجاه تغير الدّالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدّالة f_m قيمتين حدّيتين يطلب تعيينهما.

3 M_m نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m=1-m$.

أثبت أنّه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإنّ M_m تنتمي إلى منحن يطلب تعيين معادلة له.

4 ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث $m\neq 2$، الوضعية النّسبية للمنحنيين (C) و (C_m).

5 احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C) و (C_3) والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$، ثمّ احسب : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.

2 احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).

3 أ) احسب $f_k'(x)$، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

4 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثم أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

2 أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1{,}28<\alpha<-1{,}27$.

ب) عيّن قيّم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

3 g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثمّ استنتج دالة أصلية لِـg على $\mathbb{R}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

1 تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين) ★★★★★

الانتقال الى الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2\ e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

(نأخذ $1cm$ وحدة الطول على محور الفواصل و $2cm$ وحدة الطول على محور التراتيب) .

1 برهن ان الدالة f تقبل الصفر كنهاية عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$. (يمكنك استبدال المتغير بوضع $t=\frac{1}{2}(x-1)^2$)

2 برهن ان f تقبل الاشتقاق على IR و من اجل كل x من IR لدينا : $f'(x)=x(x+1)(2-x)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

3 اوجد إشارة $f'(x)$ على IR ، ثم استنتج اتجاه تغير f .

4 شكل جدول تغيرات الدالة f .

5 أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة من $(\mathcal{C}_f)$ ذات الفاصلة $(+1)$.

6 برهن ان $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ثلاثة مماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) تشمل مبدأ المعلم ؛ يطلب تحديد :

أ) إحداثيتي نقطة التماس لكل واحد منهم (القيم تكون مضبوطة) .

ب) معامل توجيه لكل مماس (القيم تكون مضبوطة) . ثم أكتب معادلة لكل من (d_1) ، (d_2) و (d_3) .

7 أرسم كل من المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) في المعلم السابق .

8 m عدد حقيقي ، نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y=m\,x$.

أ) برهن ان (d_m) يشمل نقطة ثابتة يطلب إحداثياها .

ب) بقراءة بيانية ، اوجد قيم m الحقيقية التي من اجلها المستقيم (d_m) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في ثلاث نقاط متمايزة .

2 تمارين مقترحة (ساعد أحمد) ★★★★★

الانتقال الى الحل

أولا : g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(4-2x)e^x-4$.

1 أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2 بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1{,}5<\alpha<1{,}6$.

3 استنتج إشارة $g(x)$.

ثانيا: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 بين أن المنحني (C_f) يقبل عند $-\infty$ و عند $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$.

2 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

3 استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

つづく

4 أحسب $f(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

5 بين أن $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6 أنشئ المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f).

ثالثا: أ) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $2x-2=(e^x-2x)m$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $2x-2=(e^x-2x)(m+2)$

رابعا: 1 لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x)=-f(x)$

أ) أحسب $F'(x)$ بدلالة $f'(x)$ واستنتج إشارة $F'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة F وانشئ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

2 لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$

* أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $h'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

3 لتكن u الدالة المعرفة كما يلي : $u(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة u .

ب) أحسب $u'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $u'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة u .

4 لتكن v الدالة المعرفة كما يلي : $v(x)=\sqrt{f(x)}$

أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة v.

ب) أحسب $v'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $v'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة v.

5 لتكن s الدالة المعرفة كما يلي : $s(x)=\ln f(x)$

أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة s .

ب) أحسب $s'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $s'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة s .

6 لتكن t الدالة المعرفة كما يلي : $t(x)=e^{f(x)}$

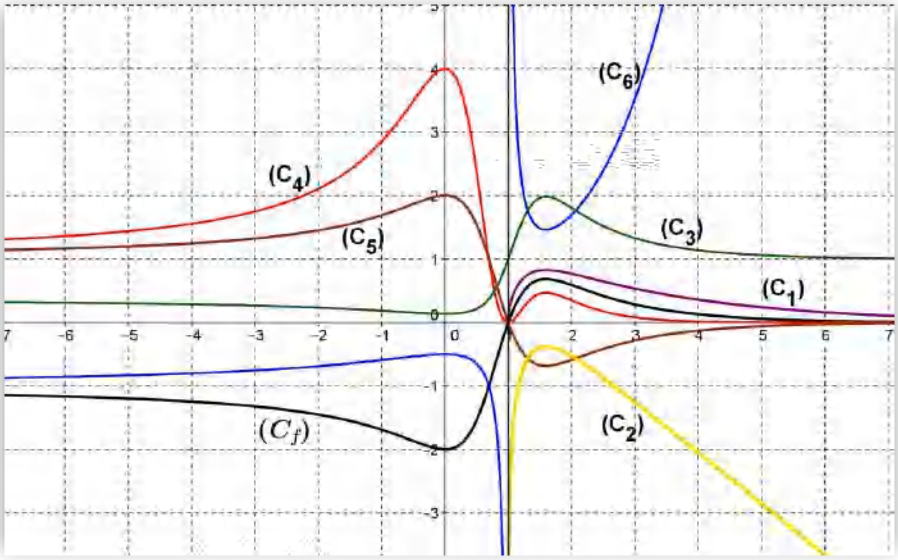
أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة t .

ب) أحسب $t'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $t'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة t .

つづく

خامسا : أرفق كل دالة بتمثيلها البياني

المنحنى	(C_1)	(C_2)	(C_3)	(C_4)	(C_5)	(C_6)
هو التمثيل البياني للدالة.........						



3 تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى) ★★★★★ الانتقال الـى الحـــل

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لتكن الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x)=x^n e^{-x}$.

وليكن (C_n) تمثيلها البياني في معلم م . م . تعطى التمثيلات (C_1) و (C_2) و (C_3) في الشكل المرفق .

الجزء الأول : في الشكل المعطى مثلنا المنحنى (C_k) حيث k عدد طبيعي غير معدوم ورسمنا مماسا له (T_k) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ورسمنا المنحنى (C_3) و المستقيم (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{4}{5};0\right)$.

1 أ) عين نهايات الدالة f_1 عند $-\infty$ و $+\infty$

ب) ادرس تغيرات الدالة f_1 ثم حدد تغيراتها

ج) باستعمال المنحنى برر ان k هو عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2

2 أ) برهن انه من اجل $n \succ 1$ فان كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة O ونقطة أخرى يطلب تعيين احداثياتها

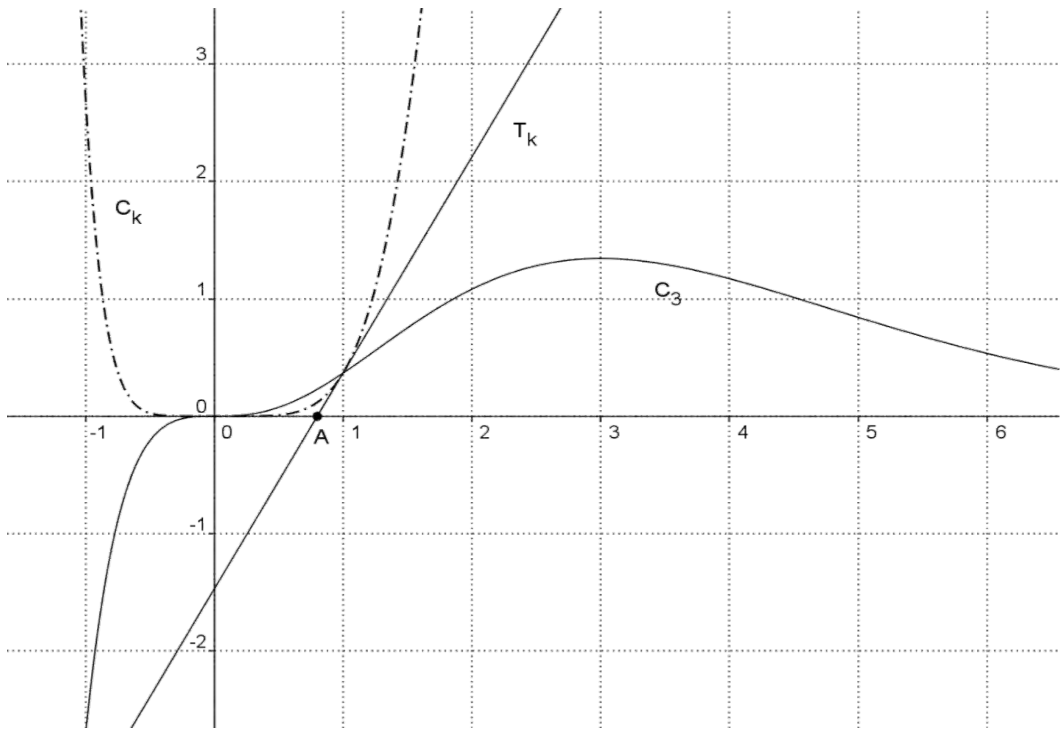
ب) تحقق انه من اجل $n \geq 2$ ومن اجل كل حقيقي x فان : $f'_n(x)=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

3 في الشكل المعطى يبدو ان الدالة f_3 تقبل قيمة حدية كبرى عندما $x=3$. تحقق من هذا التخمين بواسطة البرهان على ذلك .

4 أ) برهن ان المستقيم (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الاحداثيات $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)$

ب) استنتج من خلال معطيات التمرين قيمة العدد الصحيح k

つづく

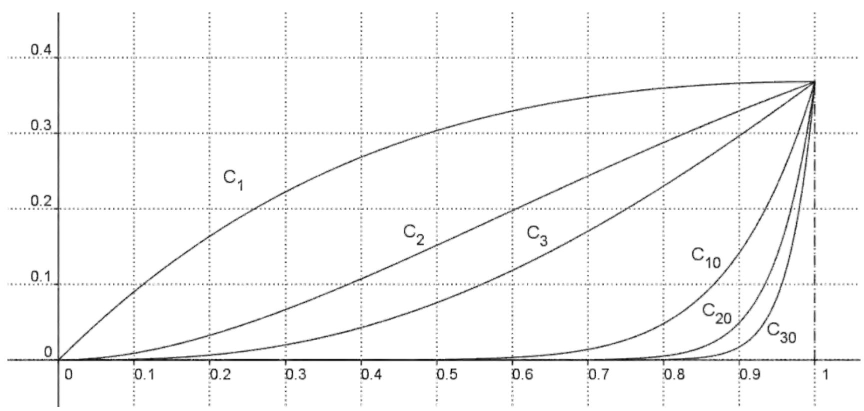


الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1 احسب (I_1)

2 في الشكل المقابل مثلنا الأجزاء من المنحنيات (C_1)و (C_2) و (C_3)و (C_{10})و (C_{20}) و (C_{30}) في $[0,1]$



أ) بين بذكر تخمين مناسب حول اتجاه تغير المتتالية (I_n)

ب) برهن هذا التخمين

ج) استنتج ان المتتالية (I_n) متقاربة

د) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

الجزء الأول :

نعتبر الدالة f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_\alpha(x)=e^{2x}-2\alpha e^{x}+3$.
وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 عين حسب قيم الوسيط الحقيقي α عدد القيم الحدية للدالة f_α

2 نسمي ω_α النقطة الحدية في حالة وجودها :

أ) عين بدلالة α إحداثيي النقطة ω_α .

ب) عين مجموعة النقط ω_α لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

الجزء الثاني :

نضع في كل ما يأتي : $\alpha=1$، و لتكن f_1 الدالة التي نريد دراستها و (C_1) تمثيلها البياني .

1 أدرس تغيرات الدالة f_1 ، و المستقيمات المقاربة .

2 عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.

3 أنشئ كلا من (T) و (C_1) .

4 (D_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ : $y=mx+3-m\ln 2$ ، حيث m وسيط حقيقي .

أ) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياها .

ب) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) .

5 نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=-e^{2x}+2e^{x}+3$ ، و (C') منحناها البياني :

أ) أكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$ ، ثم بين أن (C') و المنحني (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم (d) يطلب تحديد معادلته .

ب) أنشئ المنحني (C') في المعلم السابق .

6 أ) أحسب بـ cm^2 ، $\delta(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C') و المستقيمين :

$x=ln2$, $x=\lambda$, $\lambda<0$.

ب) أحسب نهاية $\delta(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $-\infty$.

ج) α عدد حقيقي أكبر تماماً من $ln2$.

- جد قيمة α حتى تكون مساحة الحيز المحدود بالمنحنيين (C_1) و (C') و المستقيمين :

$x=\alpha$, $x=ln2$ تساوي نهاية $\delta(\lambda)$ ، لما λ يؤول إلى $-\infty$.

في كل المسألة ، نعتبر المستوي منسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.
نرفق بكل عدد حقيقي α الدالة العددية f_α للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f_\alpha(x) = (x-\alpha)^2 e^x$ وَ (C_α) تمثيلها البياني .

الجزء الأول: نعتبر في هذا الجزء من أجل $\alpha = 0$ الدالة f_0 المعرفة بـ: $f_0(x) = x^2e^x$

1. احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_0(x)}{x}$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً .
2. أ-اثبت أن الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f'_0(x)$.
ب-استنتج إتجاه تغيرالدالة f_0 .
3. شكل جدول تغيرات الدالة f_0 ثم استنتج مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$.
4. أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$ لدينا : $0 < \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-x-2}$.
5. أثبت أن (C_0) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها .
6. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_0) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
7. ليكن x_0 عدد حقيقي ، نعتبر (T) المماس للمنحنى (C_0) في النقطة ذات الفاصلة x_0 .
أ- هل يمكن تعيين x_0 حتى يكون (T) يوازي حامل محور الفواصل ؟
ب- هل يمكن تعيين x_0 حتى يكون (T) عمودي على المستقيم (Δ) ؟
8. أرسم كل من (Δ) وَ المنحنى (C_f) .
9. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $2\ln|x| + x - \ln(m) = 0$.

الجزء الثاني: نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $f_0^{(1)}$ ، $f_0^{(2)}$ ، $f_0^{(3)}$ ، .... ، $f_0^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f_0 .

1. احسب كل من $f_0^{(1)}(x)$ ، $f_0^{(2)}(x)$ ، $f_0^{(3)}(x)$.
2. برهن بالتراجع من أجل كل $n \geq 1$: $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ حيث a_n وَ b_n عددان حقيقيان يطلب تعينهما .
3. تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ b_{n+1} = b_n + a_n \end{cases}$
4. اثبت أن (a_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r .
5. بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون : $b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

الجزء الثالث: لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x) = |x|\sqrt{e^x}$ وَ (C_k) تمثيلها البياني .

1. اكتب $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة . ادرس استمرارية الدالة k عند 0 .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة k على يمين و على يسار 0 ، فسر النتيجة هندسياً .
3. اكتب معادلتي المماسين لـ (C_k) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
4. بين أنه يمكن اعتبار الدالة k كمركب دالتين عدديتين إحداهما الدالة f_0 .
5. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أن : $2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x)\sqrt{f_0(x)}$.
6. استنتج اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

つづく

7 احسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{k(x)}{x}$ ، فسر النتيجة هندسياً .

8 ارسم (C_k) بيان الدالة h في معلم آخر .

9 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $|x|\sqrt{e^x} + x - m = 0$.

الجزء الرابع : نعتبر الآن α عدد حقيقي كيفي .

1 احسب $\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x)$ وَ $\lim_{x \to -\infty} f_\alpha(x)$.

2 اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'_\alpha(x) = (2 + x - \alpha)(x - \alpha)e^x$.

3 ادرس اتجاه تغير الدالة f_α ثم شكل جدول تغيراتها .

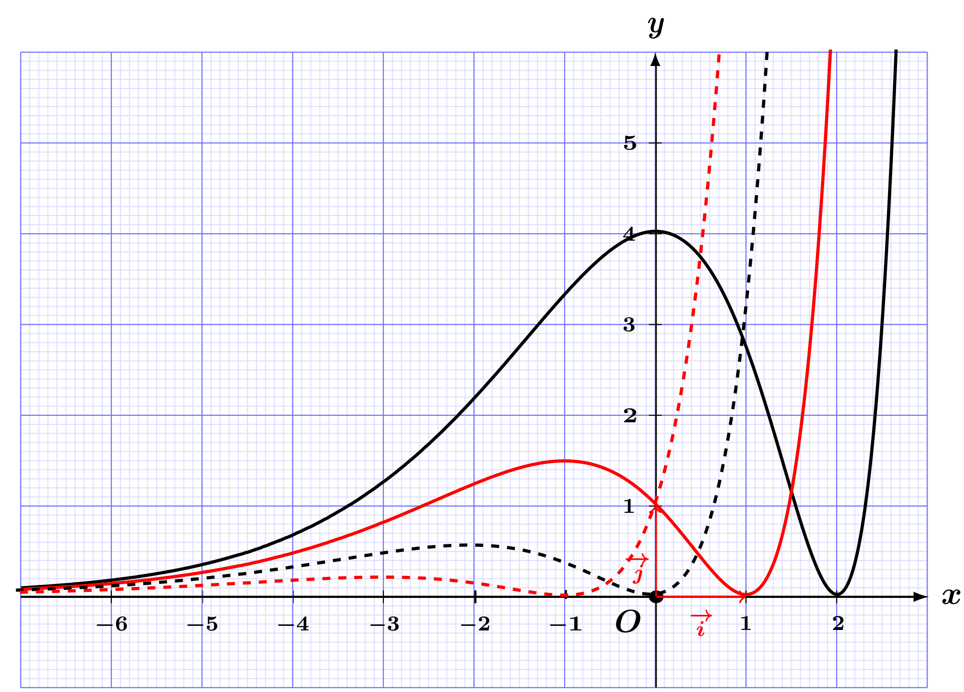
4 احسب من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''_\alpha(x)$ وَ $f'''_\alpha(x)$.

5 بين بالتراجع على العدد الطبيعي n الغير معدوم أن : $f_\alpha^{(n)}(x) = \left[(x + n - \alpha)^2 - n\right]e^x$
حيث $f_\alpha^{(n)}$ هي الدالة المشتقة النونية للدالة f_α على $\mathbb{R}$.

6 بين أن كل المنحنيات (C_α) تقبل نقطتي انعطاف فاصلتهما x_1 وَ x_2 يطلب تعيينهما .

7 كيف نختار قيمة α حتى يكون $x_1 < 0 < x_2$.

8 إليك الشكل الموالي الذي يشتمل على أربع منحنيات موافقة لأربع قيم مختلفة للوسيط α .
- تعرف على هذه القيم الأربعة مع التعليل .



مسائل المستوى الأول ★

التمرين 01

سلسلة الدوال الأسية (مصطفاي عبد العزيز)

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=-1$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(3+e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(3+e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)}=\dfrac{3}{1}=3$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x)=\frac{3e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(3e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(3\left(e^x+1\right)-\left(3e^x-1\right)\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(3e^x+3-3e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)>0$ لأنّ $4e^x>0$ و $\left(e^x+1\right)^2>0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

3. تحديد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$.

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$.

つづく

4. تبيين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)+f(-x)=2$.

$$f(x)+f(-x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{e^{-x}\left(3-e^x\right)}{e^{-x}\left(1+e^x\right)}=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{3-e^x}{1+e^x}=\frac{2e^x+2}{e^x+1}=2$$

تفسير النتيجة هندسيا.

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا $f(x)+f(-x)=2$ معناه $f(-x)=2-f(x)$ أي $f(2\times0-x)=2\times1-f(x)$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5. تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.

(T) معامل توجيهه 1 معناه $f'(x)=1$.

لنحل المعادلة $f'(x)=1$

$f'(x)=1$ معناه $\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=1$ ويكافئ $4e^x=e^{2x}+2e^x+1$ ويكافئ $e^{2x}-2e^x+1=0$ ويكافئ $\left(e^x-1\right)^2=0$

أي $x=0$ وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0.

كتابة معادلة المماس (T).

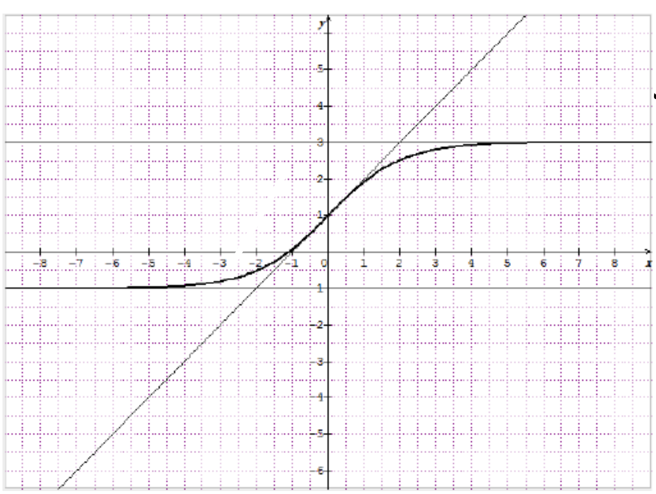
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x+1$

6. حساب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{3e^x-1}{e^x+1}=0$ وتكافئ $3e^x-1=0$ وتكافئ $e^x=\frac{1}{3}$ أي $x=-\ln3$

إذن $(C_f)\cap(Ox)=\{B(-\ln3;0)\}$

رسم كلا من (T) و (C_f).



7. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^x=m+1$

$(3-m)e^x=m+1$ يكافئ $3e^x-me^x=m+1$

يكافئ $3e^x-1=m\left(e^x+1\right)$ أي $f(x)=m$

إذا كان $m\le-1$ أو $m\ge3$ فإن المعادلة لاتقبل حلا.

إذا كان $-1<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

إذا كان $1<m<3$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا و وحيدا معدوما.

مسائل المستوى الأول ★

التمرين 02

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)+f(-x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}-x+1-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}=2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}$$ أي

$$f(x)+f(-x)=2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{2}{1+e^x}=\frac{2e^x+2-2e^x-2}{1+e^x}=0$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا إذن $f(x)+f(-x)=0$

أي $f(-x)=-f(x)$ و منه f فردية.

f فردية إذن المبدأ O للمعلم مركز تناظر (C).

2. أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)=x+1-\frac{\frac{2}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{-x}}+1}=x+1-\frac{\frac{2}{e^{-x}}}{\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}}=x+1-\frac{2}{e^{-x}+1}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{cases}$

3. أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x-1+2-\frac{2e^x}{e^x+1}=x-1+\frac{2(e^x+1)-2e^x}{e^x+1}$$

أي $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$.

ب) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)=+\infty$

إذن (C) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x-1$.

ج) $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$ إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f(x)-(x-1)>0$، نستنتج أن (C) يقع فوق (Δ).

4. لدينا $f(x)=x-1+2\dfrac{1}{e^x+1}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0\end{cases}$

つづく

- $f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ ، تذكر أن مشتقة الدالة $\dfrac{1}{u}$ هي $-\dfrac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)^2-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)>0$.

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

5.معادلة للمماس (d): $y=f'(0)(x-0)-f(0)$

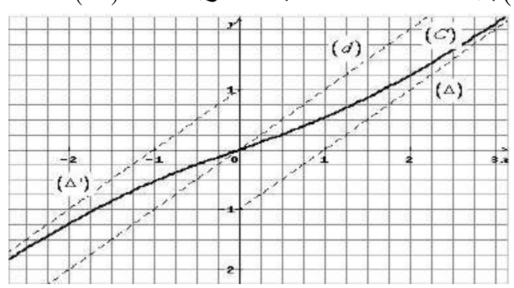
أي $y=1(x-0)-0$ أي $y=x$.

6. معادلة لـــ: (Δ'):

لدينا $f(x)=x+1-\dfrac{2}{e^{-x}+1}$ (انظر السؤال 2. أ)).

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+1\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}+1}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=$

إذن (C)يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ') معادلته $y=x+1$.



.7

أ)تذكر أن Lnu هي دالة أصلية للدالة $\dfrac{u'}{u}$ ، u هي دالة موجبة تماما على مجال I و تقبل الاشتقاق على I .

إذن $x\mapsto Ln\left(e^x+1\right)$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$

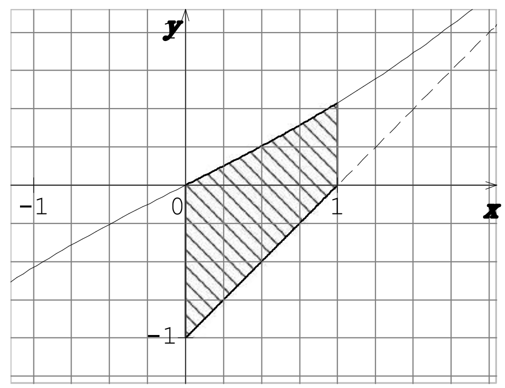
و الدالة $x\mapsto F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-2Ln\left(e^x+1\right)$ هي دالة أصلية للدالة

つづく

مسائل المستوى الأول ★

$x \mapsto f(x) = x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) نسمي S مساحة الشطح المطلوب.



$$S=\int_0^1\left[f(x)-(x-1)\right]dx=\left[F(x)-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_0^1$$

أي $S=\left[\dfrac{x^2}{2}+x-2Ln\left(e^x+1\right)-\dfrac{x^2}{2}+x\right]_0^1$

أي $S=\left[2x-2Ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=2\left[x-Ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1$

أي $S=2\left[Lne^x-Ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=2\left[Ln\dfrac{e^x}{e^x+1}\right]_0^1=2\left[Ln\dfrac{e}{e+1}-Ln\dfrac{1}{2}\right]$

أي $S=2\left[Ln\dfrac{\left(\frac{e}{e+1}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]=2Ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$ إذن $S\simeq 0,76\ cm^2$.

التمرين 03

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

الجزء A :

1. * محور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$.

* المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

つづく

.2

أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع $(\mathscr{C})$ في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{1}{2}$

إذن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا هو $-\frac{1}{2}$.

ب)الفواصل x لنقط $(\mathscr{C})$ التي تقع فوق المستقيم الذي معادلته $y=1$ هي كل الأعداد الحقيقية من المجموعة $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $f(x)>1$ هي: $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

الجزء B :

.1

أ) $f(x)=\dfrac{e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}$ أي $f(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$.

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

.2

أ)إشارة e^x-1

- $e^x-1>0$ يكافئ $e^x>1$ و يكافئ $e^x>e^0$ و يكافئ $x>0$.
- $e^x-1>0$ يكافئ $x<0$.

ب)حل المترجحة $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}>1$

$\dfrac{e^x+x}{e^x-1}>1$ تكافئ $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}-1>0$ و تكافئ $\dfrac{e^x+x-(e^x-1)}{e^x-1}>0$

أي $\dfrac{e^x+x-e^x+1}{e^x-1}>0$ أي $\dfrac{x+1}{e^x-1}>0$

لنعين إشارة $\dfrac{x+1}{e^x-1}$ باستعمال جدول:

$x+1\geq 0$ يكافئ $x\geq -1$ و $x+1\leq 0$ يكافئ $x\leq -1$

درسنا سابقا (السؤال 2. أ)) إشارة e^x-1.

つづく

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{e^x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

.3

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+x}{e^x-1}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+x+x\left(e^x-1\right)}{e^x-1}\right]$$

أي $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{e^x+x+xe^x-x}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}\right]$

إذن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=0$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\end{cases}$.

نستنتج أن المنحنى الذي يمثل الدالة f يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=-x$.

.4 $f(x)+x=\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}=\dfrac{(x+1)e^x}{e^x-1}$

إشارة $f(x)+x$ هي إشارة $\dfrac{x+1}{e^x-1}$ (السؤال 2.ب))

- عندما $x\in\left]-\infty;-1\right[$ أو $x\in\left]0;+\infty\right[$ يكون $(\mathscr{C})$ فوق (Δ).
- عندما $x\in\left]-1;0\right[$ أو $x\in\left]0;+\infty\right[$ يكون $(\mathscr{C})$ تحت (Δ).

التمرين 04

مجلة Top Maths في الدوال الأسية

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$.

1) أ-حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-ex-1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-ex-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x}-e-\dfrac{1}{x}\right)\right]=+\infty$

ب-حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-e$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^x-e=0$ تكافئ $e^x=e$ تكافئ $x=1$.

つづく

مسائل المستوى الأول ★

من أجل $x \in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x \le e$ أي $f'(x) \le 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x \in [1;+\infty[$ ، يكون $e^x \ge e$ أي $f'(x) \ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)-(-ex-1)] = \lim\limits_{x \to -\infty}[e^x - ex - 1 - (-ex-1)]$.

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

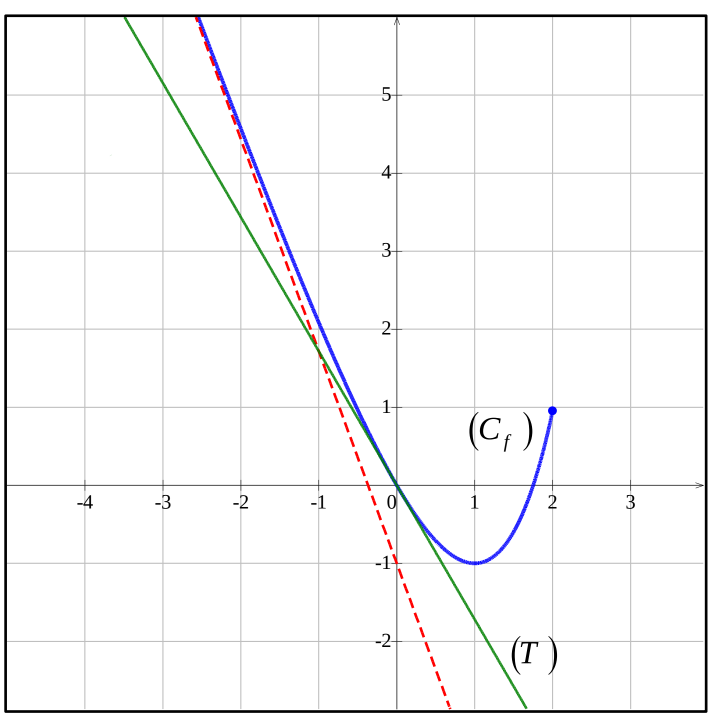
لديناً : $(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T): y = (1-e)x$.

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset [1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1.75) \approx -0,002 \\ f(1.76) \approx 0,02 \end{cases}$

أي $f(1,75) \times f(1,76) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75 < \alpha < 1.76$

د ـ الرسم :



つづく

3) أـ حساب، بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A(\alpha)=-\int_0^{\alpha} f(x)dx=-\int_0^{\alpha}\left(e^x-ex-1\right)dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^2-\alpha\right)$$

ب ـ إثبات أنّ: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

لدينا: $f(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ وبالتالي:

$$A(\alpha)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

التمرين 05

مجلة Top Maths في الدوال الأسية

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أـ الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=2e^x-2x-1$

دراسة إتجاه تغيّر الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g''(x)=2e^x-2=2\left(e^x-1\right)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

بـ ـ تبيان أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدّية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

جـ ـ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-x^2-x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2e^x}{x^2}-1-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

つづく

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38<\alpha<-1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38)\approx -0,02 \\ g(-1,37)\approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38)\times g(-1,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

1) أ- حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=0$ ، لأن: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^x)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x)=+\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty$.

بـ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f'(x)=\frac{(2xe^x+x^2e^x)(e^x-x)-(e^x-1)x^2e^x}{(e^x-x)^2}=\frac{xe^x\left[(2+x)(e^x-x)-x(e^x-1)\right]}{(e^x-x)^2}=\frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$$

جـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ- تبيان أن: $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

つづく

مسائل المستوى الأول ★

لدينا: $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}=\frac{\alpha^2-\alpha}{2}$ و منه $f(\alpha)=\frac{\alpha^2e^{\alpha}}{e^{\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha\right)}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$

أي: $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

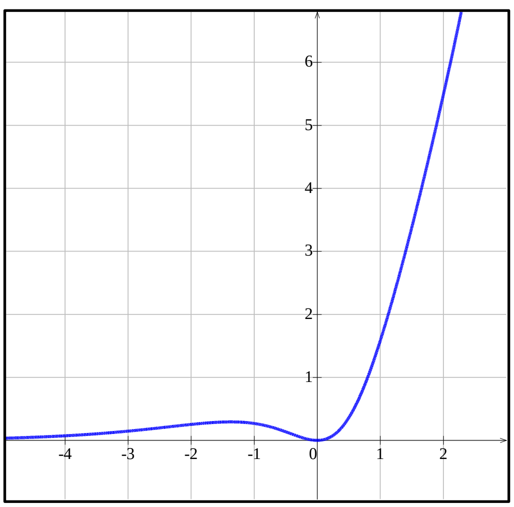
لدينا: $-1,38<\alpha<-1,37$ يكافئ $\begin{cases}-0,76<2\alpha+2<-0,74\\ (-1,37)^2<\alpha^2<(-1,38)^2\\ -2,38<\alpha-1<-2,37\\ -\frac{2}{2,37}<\frac{2}{\alpha-1}<-\frac{2}{2,38}\end{cases}$ و منه $0,27<f(\alpha)<0,32$.

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^2}}\right)=0$

التفسير البياني: المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل

للدالة "مربع" $(x\mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ- الرسم:



مسائل المستوى الثاني ★★

التمرين 01

علوم تجريبية 2008 الموضوع الأول (07,5 نقط)

I) f دالة معرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ ، (C_f) منحنى f

النقطة A تنتمي إلى (C_f) تعني : $f(-1)=1$ أي $(-a+b)e^{1}+1=1$ *

معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند A يساوي e− تعني أن $f'(-1)=-e$. **

f' ترمز للدالة المشتقة للدالة f . من أجل x من المجال $]-2,+\infty[$:

$f'(x)=(a)\times e^{-x}+(ax+b)\times\left(-e^{-x}\right)+0=(-ax-b+a)\times e^{-x}$ و $f'(-1)=(a-b+a)e^{1}=(2a-b)e$

من المعادلتين * و** نستنتج أن $(-a+b)=$ و $(2a-b)=-1$ و بالتالي $a=-1$ و $b=-1$

II) g دالة معرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1=f(x)$

أ) $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)+1=0+0+1=1$. التفسير البياني : المستقيم الذي معادلته y = 1 مقارب للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g

ب) دراسة تغيرات الدالة g : $g(-2)=(2-1)e^{2}+1=e^{2}+1$ *

* الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$ و $g'(x)=f'(x)=x\times e^{-x}$

إشارة g' هي إشارة x نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-2,0]$

* جدول تغيرات الدالة g

x	-2		0		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	e^2+1	↘	0	↗	1

جـ) المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف :

الدالة المشتقة g' تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$ و $g''(x)=1\times e^{-x}+x\times\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$

المشتقة الثانية g'' تنعدم عند 1 مع تغيير إشارتها نستنتج أن النقطة التي فاصلتها 1 من المنحنى (C_g)

نقطة انعطاف. إحداثيتي I هما $I(1,g(1))$ أي $I\left(1,-2e^{-1}+1\right)$

د) معادلة المماس عند النقطة I : $y=g'(1)(x-1)+g(1)=e^{-1}(x-1)+1-2e^{-1}$ إي $y=e^{-1}x+1-3e^{-1}$

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$

الدالة H قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$ و $H'(x)=(\alpha x+\beta)\times\left(-e^{-x}\right)+\alpha\times e^{-x}=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$

حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto g(x)-1$ على المجال $]-2,+\infty[$ يجب : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2,+\infty[$: $H'(x)=g(x)-1$ أي $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$

بالمطابقة نجد : $\alpha=1$ و $\beta=-2$

بما أن $g(x)=g(x)-1+1=H'(x)+1$ فإن الدوال الأصلية للدالة g على المجال $]-2,+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto H(x)+x+b$ حيث b عدد حقيقي

البحث عن الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0 : $H(0)+0+b=0$ أي $(0-2)e^{0}+b=0$ أي $b=2$

الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0 هي الدالة : $x\mapsto(x-2)e^{-x}+x+2$.

つづく

III) k الدالة العددية المعرفة على $]-2\,,+\infty[$ كما يلي : $k(x)=g(x^2)$

الدالة k مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]-2\,,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على هذا المجال .

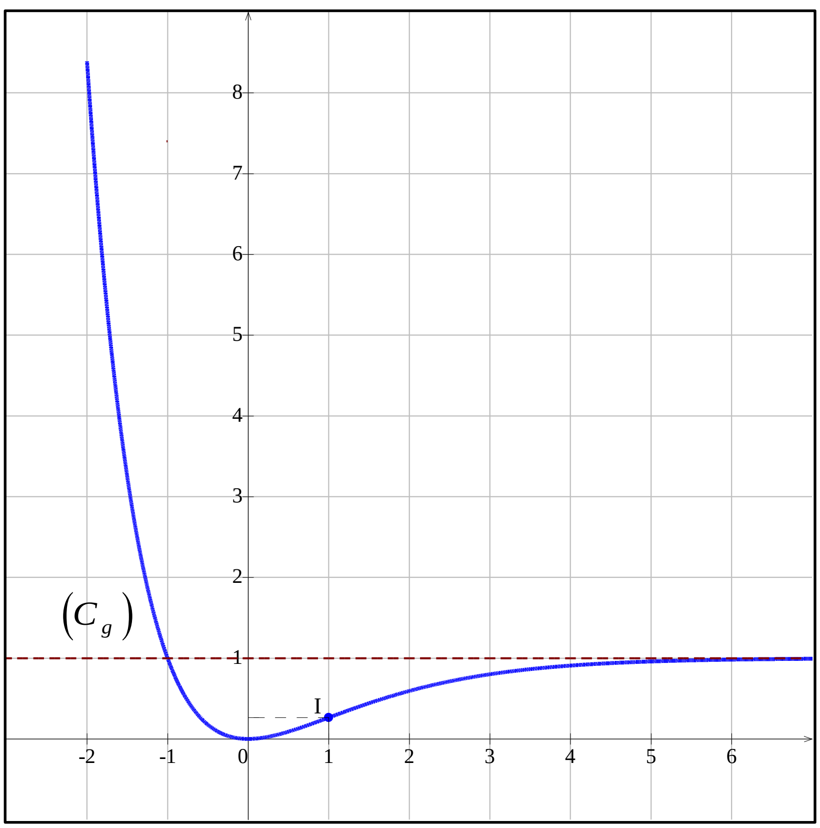
و من اجل كل عدد حقيقي x من $]-2\,,+\infty[$: $k'(x)=2x\times g'(x^2)=2x\times\left(x^2\times e^{-x^2}\right)=2x^3\times e^{-x^2}$

إشارة المشتقة $k'(x)$ هي إشارة x إذا الدالة k لها نفس اتجاه تغير الدالة g .

نستنتج جدول تغيراتها :

x	2		0		$+\infty$
$k'(x)$		-	0	+	
$k(x)$	$-5e^{-4}+1$	↘	0	↗	$+\infty$

هـ) رسم المنحنى (C_g)



مسائل المستوى الثاني ★★

التمرين 02

مجموعة الرياضيات الجزائرية (جمال بورنان)

1) أ) الدالة g تقبل الاشتقاق على IR حيث $g'(x)=e^x-e$

* $g'(x)=0$ ومنه $e^x=e$ نجد x=1

* $g'(x)>0$ أي $e^x>e^1$ نجد $x>1$. اذن الدالة g متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

* $g'(x)<0$ أي $e^x<e^1$ نجد $x<1$. اذن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;1]$.

ب) من خلال اتجاه تغير g نستنتج انها تقبل قيمة حدية صغرى و هي 0 ومتناقصة على $]-\infty;1]$ ثم متزايدة على $[1;+\infty[$
اذن نستنتج ان المنحني دوما فوق محور الفواصل ومنه فالدالة موجبة دوما.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على IR حيث $f'(x)=e^x-ex=g(x)\geq 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=0-(+\infty)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)=+\infty$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

4) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين أي ندرس إشارة الفرق:

$f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-e^x+ex=-\frac{1}{2}ex^2+ex=\frac{e}{2}x(-x+2)$ واشارته من إشارة الجداء $x(-x+2)$.

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
ex		-	0	+		+	
$-x+2$		+		+	0	-	
$x(-x+2)$		-	0	+	0	-	

من خلال الجدول يتضح لنا ان (C_f) يكون فوق (C_g) في المجال $]0;2[$ وتحته في كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ويتقاطعان عند 0 و 2 .

6) حساب المساحة S:

$$S=\int_0^2\left(f(x)-g(x)\right)dx=f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-e^x+ex=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx$$

つづく

$$=-\frac{1}{2}e\int_0^2 x^2dx+e\int_0^2 xdx=-\frac{1}{2}e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+e\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=-\frac{1}{2}e\left[\frac{8}{3}\right]+e[2]=\frac{-4e}{3}+2e=\frac{2e}{3}ua$$

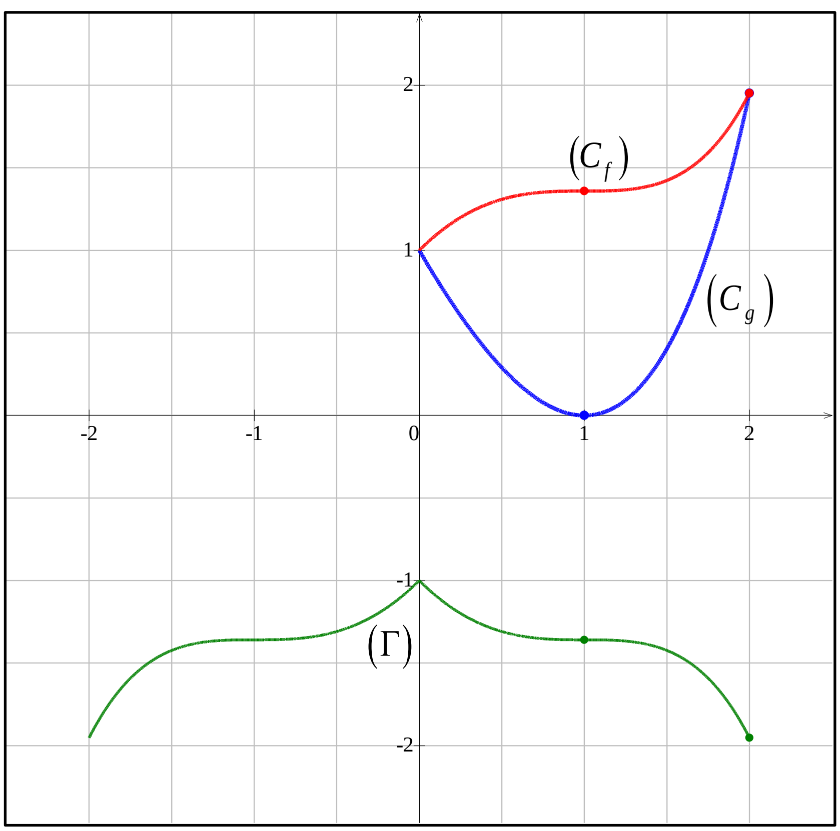
ووحدة المساحة هي $ua=2\times 2=4cm^2$ وعليه نجد $\boxed{S=\frac{2e}{3}\times 4=\frac{8e}{3}cm^2}$.

7) أ) الدالة h معرفة على $[-2;2]$ وهو مجال متناظر بالنسبة للصفر أي مهما كان $x\in[-2;2]$ فان $-x\in[-2;2]$.

$h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$ وعليه فان الدالة h زوجية.

ب) من اجل $x\in[0;2]$ نجد $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$ أي $h(x)=-f(x)$ وعليه فان المنحني (Γ) الممثل للدالة h هو نظيرالمنحني (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $[0;2]$ ، اما الجزء الاخر من المنحني (Γ) في المجال $[-2;0]$ هو نظير الجزء (Γ) من المجال $[0;2]$ بالنسبة لمحور التراتيب لان الدالة h زوجية

الرسم:



مسائل المستوى الثاني ★★

التمرين 03

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

I – ... $g(x)=2x^2+2x-2x.e^x$ و $(\Delta): y=x$ و $(\gamma): y=e^x$

1. بما أن (γ) يقع فوق المستقيم (Δ) و لا يتقاطعان فإن $e^x-x>0$.

2. إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

II – لدينا $f(x)=-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}$:

1. إثبات النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1+\dfrac{2.e^x}{e^x}\right]=1$ باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}\right]=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2.e^x}{e^x-x}\right]=-0$. باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مقارب للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$

2. أ–إثبات عبارة المشتقة $f'(x)=\dfrac{2.e^x(e^x-x)-(e^x-1)2e^x}{(e^x-x)^2}$ أي $f'(x)=\dfrac{2e^x.(1-x)}{(e^x-x)^2}$ و هو المطلوب .

ب–إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	$-1+\dfrac{2e}{e-1}$	↘	1

3. أ– معادلة المماس (T) :

$y=f'(0).x+f(0)$ أي أن $y=2x+1$.

ب–إثبات مساواة : $f(x)-(2x+1)=-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}-2x-1=-2x-2+\dfrac{2e^x}{e^x-x}=\dfrac{(-2x-2).(e^x-x)+2e^x}{e^x-x}$

أي $f(x)-(2x+1)=\dfrac{-2xe^x+2x^2-2e^x+2x+2e^x}{e^x-x}$ أي $f(x)-(2x+1)=\dfrac{-2xe^x+2x^2+2x}{e^x-x}$

إذن $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$ و هو المطلوب .

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

ج-استنتاج الوضعية :

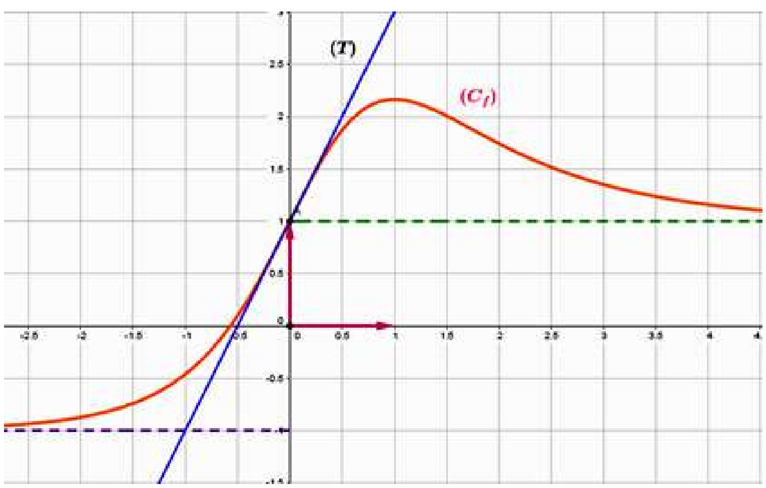
$f(x)-y=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$ إشارتها من إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		+	0	—	
الوضعية	(C_f) يقع فوق (T)		(C_f) يقطع (T)		(C_f) يقع تحت (T)

و منه النقطة A هي نقطة الانعطاف لأن المماس (T) اخترق المنحنى (C_f) .

4. مبرهنة القيم المتوسطة $f(-0,5)=0,096$ و $f(-0,6)=-0,04$ بما أن الدالة مستمرة و متزايدة على المجال $]-\infty;1]$
فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-0,6<\alpha<-0,5$

5. إنشاء المستقيمين المقاربين و المماس (T) و المنحنى (C_f):



التمرين 04

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

ا) لدينا الدالة f معرفة $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) إثبات ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-x^2e^{1-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)e\right]=2$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)\right]=0$ بالتزايد المقارن

التفسير الهندسي من ما سبق نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته $y=2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2-x^2e^{1-x}\right]=-\infty$.

2) أ) إثبات عبارة المشتقة : لدينا $f'(x)=-2xe^{1-x}-x^2\left(-e^{1-x}\right)$ و منه $f'(x)=x^2e^{1-x}-2xe^{1-x}$ إذن $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$ محققة .

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة f : بما أن $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$ اشارتها من اشارة $x(x-2)$
و هو كثير حدود ينعدم عند 0 و 2

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
اشارة $x(x-2)$		+	0	—	0	+	

و منه الدالة متزايدة على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ متناقصة على المجال $[0\,;\,2]$.
جدول تغيراتها

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	—	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-\frac{4}{e}$	↗	2

3) كتابة معادلة المماس (T) : هي من الشكل $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و $f(1)=1$ و $f'(1)=-1$ و منه
$y=-(x-1)+1$ أي $(T):\ y=-x+2$

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) ندرس تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}$ لدينا $h'(x)=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-1)e^{1-x}$ إشارتها من إشارة $(x-1)$

و منه h متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ ومنه h تقبل قيمة حدية صغرى هي $h(1)=0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)\geq 0$.

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(T):\ y=-x+2$ نحسب الفرق $f(x)-y=2-x^2e^{1-x}+x-2$

و منه $f(x)-y=x-x^2e^{1-x}=x\left(1-xe^{1-x}\right)=x.h(x)$ اشارته من إشارة x لان $h(x)\geq 0$

و منه (C_f) يقع فوق (T) على المجال $]0;+\infty[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty;0[$.

2) إثبات أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}7<\alpha<-0{,}6$
لدينا الدالة f مستمرة و متزايدة $[-0{,}7\,;\,-0{,}6]$ و $f(-0{,}6)=0{,}22$; $f(-0{,}7)=-0{,}68$ فحسب
مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}7<\alpha<-0{,}6$.

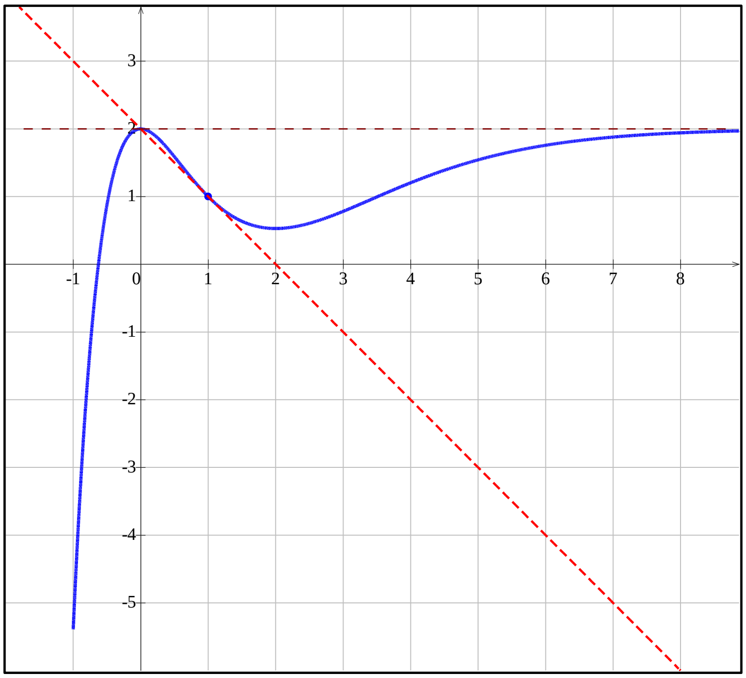
4) لدينا $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$
التحقق : $F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$ أي ان $F'(x)=2-x^2.e^{1-x}=f(x)$ و منه الدالة F دالة أصلية للدالة f .

حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور التراتيب و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$; $x=1$
هي $A=\int_0^1 f(x)dx=\left[2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}\right]_0^1=(7-2e)u.a$

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

إنشاء المنحنى (C_f) و المماس (T):



التمرين 05

علوم تجريبية 2021 الموضوع الثاني (07 نقاط)

I) 1/ $g(-1)=0$.

2/ إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1/ لدينا $f(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$ و منه $f(x)=x\left[1-\frac{x+1}{x}e^{-x-1}\right]$ و منه $f(x)=x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2/ أ) $f'(x)=1-e^{-x-1}+(x+1)e^{-x-1}$ و منه $f'(x)=1+xe^{-x-1}$ أي $f'(x)=g(x)$.

ب) إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ و منه $f'(x)>0$ من أجل $x\in]-1;+\infty[$ و منه f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

$f'(x)<0$ من أجل $x\in]-\infty,-1[$ و منه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-1[$.

つづく

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$+\infty$

3/ أ) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(-(x+1)e^{-x-1})=0$ ، و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

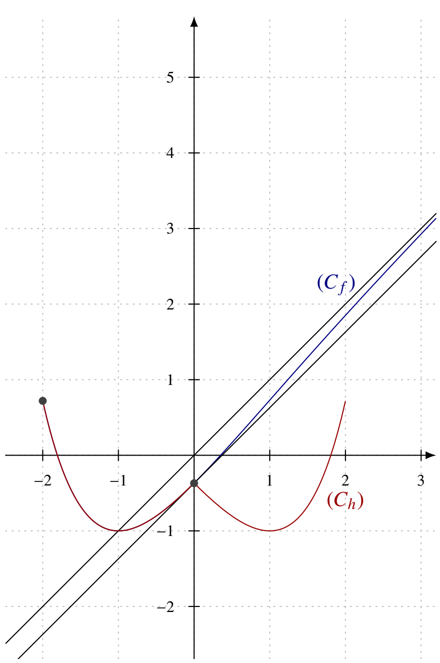
ب) ندرس إشارة $-(x+1)e^{-x+1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-(x+1)e^{-x-1}$		$+$	0	$-$	

و منه وضعية (C_f) و (Δ) كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;-1)$	(C_f) تحت (Δ)	

ج) نحل المعادلة $f'(x)=1$ أي $g(x)=1$ أي $1+xe^{-x-1}=1$ و منه $xe^{-x-1}=0$ و منه $x=0$ و منه (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 يوازي (Δ) معادلته $y=x+f(0)$ أي $y=x-\frac{1}{e}$.



4/ أ) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$ و بالأخص المجال $[0.3,0.4]$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-1[$ و بالأخص المجال $[-1.9,-1.8]$ و لدينا $f(0.3)\times f(0.4)<0$ و أيضا $f(-1.9)\times f(-1.8)<0$ و منه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث $0.3<\alpha<0.4$ و $-1.9<\beta<-1.8$.

5/ أ) من أجل $x\in[-2,2]$ فإنّ $-x\in[-2,2]$ و $h(-x)=-|-x|+(|-x|-1)e^{|-x|-1}$ و منه $h(-x)=h(x)$ لأنّ $|x|=|-x|$ و منه h زوجية .

من أجل $x\in[-2,0]$ لدينا $|x|=-x$ و منه $h(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$ أي $h(x)=f(x)$.

ج) على المجال $[-2,0]$ (C_h) ينطبق على (C_f) ، ثمّ نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لنتحصل على الجزء الباقي من (C_h)

مسائل المستوى الثالث ★★★

التمرين 01

مجلة العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: $f(x) = (x+a)e^{-x} + b$ و$D_f = \mathbb{R}$، حيث a وb عددان حقيقيان.

1) بقراءة بيانية للمنحنى (C_f)،

أ) تعيين $f(-3)$، $f(0)$، $f'(-2)$:

من البيان لدينا: $\boxed{f(-3) = -3}$؛ $\boxed{f(0) = 0}$

و $\boxed{f'(-2) = 0}$ (المماس عند النقطة ذات الفاصلة (**2-**) موازي لمحور الفواصل).

ب) تعيين حسب قيم x إشارة $f'(x)$:

من البيان لدينا: f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-2; +\infty[$ إذن:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

ج) المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f هو المنحنى (2) لأن:

- من أجل $x \in]-\infty; -2]$، المنحنى (**2**) يقع فوق محور الفواصل أي: $\boxed{f'(x) \geq 0}$.
- ومن أجل $x \in [-2; +\infty[$، المنحنى (**2**) يقع تحت محور الفواصل أي: $\boxed{f'(x) \leq 0}$.

2) أ) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) = (x+3)e^{-x} - 3$:

من **1** أ)، لدينا: $\begin{cases} f(-3) = -3 \\ f(0) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$ بحيث $f'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x+a) = (1-x-a)e^{-x}$

ومنه: $\begin{cases} (-3+a)e^{-(-3)} + b = -3 \\ (0+a)e^{-0} + b = 0 \\ (1-(-2)-a)e^{-(-2)} = 0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} (-3+a)e^{3} + b = -3 \quad ...(1) \\ a + b = 0 \quad ....(2) \\ (3-a)e^{2} = 0 \quad ....(3) \end{cases}$

من (3) نجد: $\boxed{a = 3}$، وبالتعويض في (2) نجد: $\boxed{b = -3}$، إذن: $\boxed{f(x) = (x+3)e^{-x} - 3}$.

ب) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$e^2 - 3$	↘	-2	↘ -3

بحيث، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [(x+3)e^{-x} - 3] = -\infty$ لأن: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (x+3) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [(x+3)e^{-x} - 3] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} - 3\right) = -3$

و $f(-2) = (-2+3)e^{-(-2)} - 3 = e^2 - 3$

ج) تبيان أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له:

بمأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$،

فإن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = -3}$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ(C_f) عند $+\infty$.

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

د) تبيان أن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α محصور بين $1,50$ و$1,52$:

لدينا: f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ (لأنها متناقصة تماما على المجال $[-2; +\infty[$)

ولدينا: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3 \end{cases}$، أي: $-2 \in]-3; 0]$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α.

وبما أن: $\begin{cases} f(1{,}50) \simeq -1{,}996 \\ f(1{,}52) \simeq -2{,}011 \end{cases}$، أي: ($2-$ محصور بين $f(1{,}50)$ و$f(1{,}52)$)

فإن: $\boxed{1{,}50 < \alpha < 1{,}52}$.

3) لدينا: $F(x) = (-x-4)e^{-x}$ و$D_F = \mathbb{R}$؛ I العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^{0} f(x)dx$.

أ) حساب $F'(x)$:

$$F'(x) = -1 \times e^{-x} - e^{-x}(-x-4) = (-1+x+4)e^{-x} = (x+3)e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

بما أن $F'(x) = (x+3)e^{-x}$ فإن F أصلية للدالة $x \mapsto (x+3)e^{-x}$

وبالتالي: $x \mapsto F(x) - 3x$ هي أصلية للدالة f.

ب) إعطاء تفسيرا بيانيا للعدد I:

العدد I هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -2$، $x = 0$.

تبرير الحصر التالي $4,5 < I < 5$ باعتبارات بيانية محضة:

جـ) حساب العدد I:

لدينا: $I = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = [(-x-4)e^{-x} - 3x]_{-2}^{0}$

ومنه: $I = [(-0-4)e^{-0} - 3(0)] - \left[(-(-2)-4)e^{-(-2)} - 3(-2)\right]$

وعليه: $I = -4 - (-2e^2 + 6) = -10 + 2e^2$.

التمرين 02

مجلة الرائد في الرياضيات (بالعبيدي محمد العربي)

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

لدينا: $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ والمعرفة على $]-\infty;1[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right) = 2$$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right) = -\infty$$ لأن: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$

つづく

استنتاج مستقيمين مقاربين للمنحنى (C)

من النهايتين السابقتين نستنتج أن : المستقيم ذا المعادلة : $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

المستقيم ذا المعادلة : $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

2) حساب $f'(x)$ وتبيان أن f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

لدينا: $f'(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)'+\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)'=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$ ومنه: $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\left[1+e^{\frac{1}{x-1}}\right]$

$f'(x)\prec 0$ لأن $1+e^{\frac{1}{x-1}}\succ 0$ و $\frac{-1}{(x-1)^2}\prec 0$ منه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty;1[$

x	$-\infty$		0		α		1
$f'(x)$		-		-		-	
$f(x)$	2	↘	e^{-1}	↘	0	↘	$-\infty$

3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيدا $\alpha\in]-\infty;1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$

إيجاد حصرا للعدد α باستعمال الجدول المعطى

في الجدول لدينا: $f(0,21)=0,016$ و $f(0,22)=-0,005$ من الجدول المعطى نستنتج أن $\alpha\in]0,21;0,22[$.

4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) و (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

<u>توضيح:</u> كيفية رسم (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

لدينا: $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ;x\in]-\infty;\alpha] \\ -f(x) & ;x\in]\alpha;1[\end{cases}$ ومنه: $x\in]-\infty;\alpha]$ معناه $(C')=(C)$

$x\in[\alpha;1[$ معناه (C') نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل

5) تعيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m

المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلان مختلفان في الإشارة معناه المستقيم ذو المعادلة $y=m$ يقطع المنحنى (C') في نقطتين مختلفتين من البيان نجد أن : $m\in]e^{-1};2[$

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

1-II) دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها على $]-\infty;1[$

* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$

*لدينا: $g(x) = f(2x-1)$ ومنه $g'(x) = 2f'(2x-1)$ وعليه الدالة g لها نفس اتجاه تغير الدالة f أي g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ لأن $f'(2x-1) \prec 0$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$2 \searrow -\infty$

2 أ) التحقق أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ **وأن:** $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$

$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right) = f(\alpha) = 0$ من الجواب 3 $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right) = 2f'(\alpha)$

ب) استنتاج معادلة (T) **المماس لـ g عند الفاصلة** $\frac{\alpha+1}{2}$

لدينا: $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه: $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right) + 0$

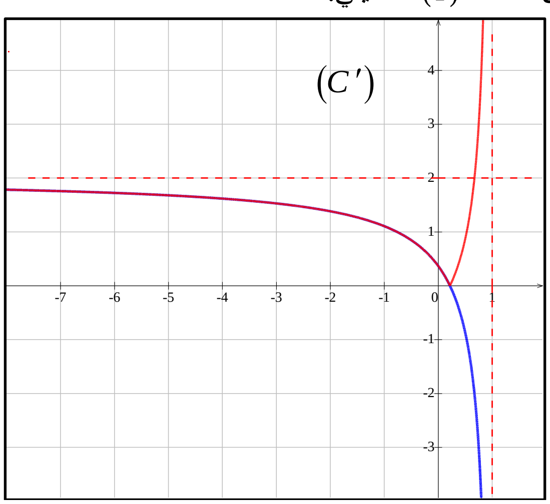
جـ) التحقق أن: $y = \frac{2x}{(\alpha-1)^3} - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ **معادلة للمستقيم** (T)

لدينا: $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} - \frac{-1}{(\alpha-1)^2}e^{\frac{1}{\alpha-1}}$ لكن: $f(\alpha) = 0$ معناه $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{(\alpha-1)}$

ومنه : $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)^3} = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$ وعليه تكون معادلة (T) كما يلي:

$$(T): y = 2\frac{1}{(\alpha-1)^3}\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{2x}{(\alpha-1)^3} - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$$

الرسم :



مسائل المستوى الثالث ★★★

التمرين 03

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

$f(x)=\left(-x^3+2x^2\right)e^{-x+1}$

1- أ- حساب النهايات : . $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)e^{-x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)e^{-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{e^{x-1}}=0$.

و منه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

ب-إثبات أن عبارة المشتقة هي $f'(x)=x\left(x^2-5x+4\right)e^{-x+1}$:

نحسب المشتقة $f'(x)=\left(-3x^2+4x\right)e^{-x+1}-\left(-x^3+2x^2\right)e^{-x+1}$ و منه $f'(x)=\left(x^3-5x^2+4x\right)e^{-x+1}$ أي ان $f'(x)=x\left(x^2-5x+4\right)e^{-x+1}$ محققة .

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x\left(x^2-5x+4\right)$

لدينا $\left(x^2-5x+4\right)$ له جذرين هما 1 و 4

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
اشارة $\left(x^2-5x+4\right)$		+		+	0	−	0	+	
اشارة x		−	0	+		+		+	
اشارة $f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

و منه f متزايدة على المجالين $[0\,;1]$ و $[4;+\infty[$ متناقصة على المجالين $]-\infty\,;0]$ و $[1\,;4]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-32e^{-3}$	↗	0

2- كتابة معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$f'(2)=-4e^{-1}$ و $f(2)=0$ و منه معادلة المماس (T) هي $y=-\frac{4}{e}x+\frac{8}{e}$.

3- h دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $h(x)=x^2.e^{-x+2}-4$

دراسة تغيرات الدالة h : $h'(x)=2x.e^{-x+2}-x^2.e^{-x+2}=x(2-x)e^{-x+2}$ إشارتها من إشارة $(2-x)$

و منه فهي موجبة على المجال $[0\,;2]$ و سالبة على المجال $[2;+\infty[$ و منه الدالة h متزايدة على المجال $[0\,;2]$ و متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ و لدينا $h(2)=0$ إذن $h(2)=0$ قيمة حدية كبرى و منه $h(x)$ إشارتها سالبة .

تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0\,;+\infty[$:

$f(x)-y=\left(-x^3+2x^2\right)e^{-x+1}+4e^{-1}x-8e^{-1}=-x^3.e^{-x+1}+2x^2.e^{-x+1}+4xe^{-1}-8e^{-1}$ و منه

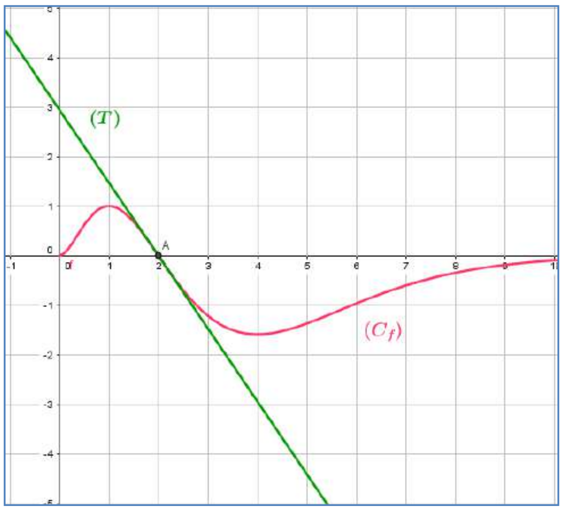
$f(x)-y=-x^3.e^{-x+1}+4x.e^{-1}+2x^2.e^{-x+1}-8e^{-1}=-xe^{-1}\left(x^2.e^{-x+2}-4\right)+2e^{-1}\left(x^2e^{-x+2}-4\right)$ أي ان

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

$f(x)-y=\left(x^2.e^{-x+2}-4\right)(-x+2)e^{-1}$ أي ان $f(x)-y=h(x)(-x+2)e^{-1}$ بما أن إشارة $h(x)$ سالبة ومنه اشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ أي ان (C_f) يقع فوق (T) على المجال $[0;2[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]2;+\infty[$ و يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2 .

4- رسم المنحنى البياني (C_f) و المماس (T) :



5- المناقشة بيانيا :

المعادلة $f(x)=m(x-2)......(E)$ حلها هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم $(\Delta_{;m})$ ذو المعادلة $y=m(x-2)$.

لما $m\in\left]-\infty;-\frac{4}{e}\right]$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

لما $m\in\left]-\frac{4}{e};0\right[$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة (E) ثلاثة حلول.

لما $m=0$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة (E) حلين .

لما $m\in]0;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

6- لدينا $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ من السؤال رقم (1) بوضع $t=\frac{1}{x}$

و منه $\lim_{x\to+\infty} t=0$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} t=+\infty$ نجد $\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{t\to0} f(t)=0$.

المشتقة : هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و منه $g'(x)=-\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}-5\frac{1}{x}+4\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ أي

$g'(x)=\frac{1}{x^5}\left(-1+5x-4x^2\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ و اشارته منه اشارة $\left(-1+5x-4x^2\right)$ و لها جذرين هما 1 و $\frac{1}{4}$

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

و منه g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{4};1\right]$ و متناقصة على المجالين $[1;+\infty[$; $\left]0;\frac{1}{4}\right]$ و $g\left(\frac{1}{4}\right)=f(4)$, $g(1)=f(1)$

جدول تغيرات الدالة g

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-32e^{-3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

التمرين 04

العملاق في الرياضيات (بواب نور الدين)

الجزء I :

1 دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات :

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)e^x=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}3e^x-\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$) ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$.

اتجاه التغيّر :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=(3-x)'\times e^x+(e^x)'\times(3-x)=(2-x)e^x$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2-x$ ، نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

جدول التغيّرات :

$g(2)=e^2-3$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^2-3	$\searrow$	$-\infty$

2 تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α :

لدينا : $g(0)=(3-0)e^0-3=3-3=0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

من جدول تغيرات g نلاحظ أنها مستمرة ومتناقصة تماما على $[2.82\,;2.83]$

زيادة على ذلك : $g(2.82)\approx 0.06$ و $g(2.83)\approx -0.08$ وبالتالي : $g(2.82)\times g(2.83)<0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.82<\alpha<2.83$.

إذن : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha\in\,]2.82\,;2.83[$.

3 استنتاج إشارة $g(x)$:

$g(x)=0$ يكافئ $x\in\{0\,;\alpha\}$

$g(x)<0$ يكافئ $x\in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]\alpha\,;+\infty[$

$g(x)>0$ يكافئ $x\in\,]0\,;\alpha[$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء II :

1 أ- تبيان أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$:

تذكير : القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه عندما يؤول x إلى a ، فإن نسبة تزايد f بين العددين a و x تؤول إلى عدد حقيقي L ، أي :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$$

لدينا : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=$ ونعلم أن : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{e^x-1}}\times x=1\times 0=0$$

إذن : الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ وعددها المشتق عند 0 هو $f'(0)=0$

ب- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O:

تذكير: معادلة مماس المنحنى الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

لدينا : $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ وبالتالي فإن معادلة المماس (T) هي $y=0$

2 أ- تبيان أن $\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$:

تذكير : $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0$ و $\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u^n}=+\infty$ (n عدد طبيعي) .

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^3}\right)}=0$. إذن : $\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$.

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=0$$ إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

نعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ب- تبيان أنه من أجل $x\neq 0$ فإن $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'(e^x-1)-(e^x-1)'\times x^3}{(e^x-1)^2}=\frac{3x^2(e^x-1)-x^3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2[(3-x)e^x-3]}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$$

جـ- التحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$:

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $(3-\alpha)e^{\alpha}-3$ ومنه : $e^{\alpha}=\dfrac{3}{3-\alpha}$ وبالتالي :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{e^{\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{\alpha}{3-\alpha}}=\alpha^3\times\frac{3-\alpha}{\alpha}=\alpha^2(3-\alpha)$$ إذن : $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$

تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2.82<\alpha<2.83$ ومنه : $-2.83<-\alpha<-2.82$ (الضرب في -1)

وبإضافة العدد 3 لجميع الحدود ينتج : $3-2.83<3-\alpha<3-2.82$

وبالتالي : $0.17<3-\alpha<0.18$ ... (1)

ومن : $2.82<\alpha<2.83$ نحصل على : $(2.82)^2<\alpha^2<(2.83)^2$

وبالتالي : $7.95<\alpha^2<8.01$ ... (2)

من (1) و (2) وبالضرب طرف في طرف ينتج : $1.35<\alpha^2(3-\alpha)<1.44$

إذن : $1.35<f(\alpha)<1.44$

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

د- جدول تغيّرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3 أ- حساب $f(x)+x^3$:

من أجل $x\neq 0$: $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}$

استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x\mapsto -x^3$:

إشارة الفرق $f(x)-(-x^3)$ أي : $f(x)+x^3$ هي إشارة الجداء $x(e^x-1)$

يمكن الاستعانة بجدول الإشارة للحصول على النتائج الآتية :

- إذا كان $x=0$ يكون $f(x)-(-x^3)=0$ ومنه (C) يقطع (C_f) في النقطة O

- إذا كان $x\neq 0$ يكون $f(x)-(-x^3)>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (C) .

ب- تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$:

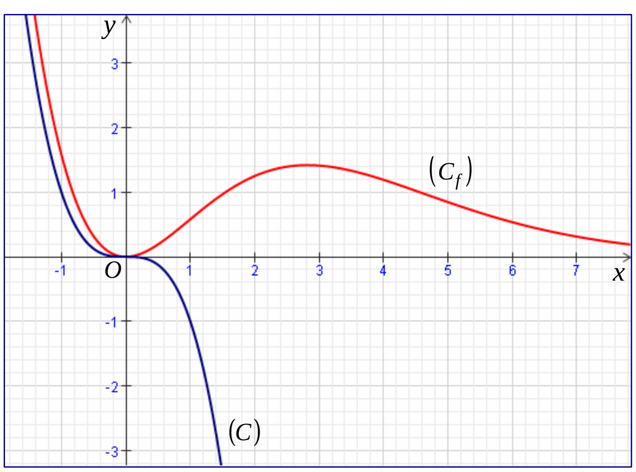
من أجل $x\neq 0$ ، لدينا : $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}=0$ إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$.

هندسيا : المنحنى (C)

هو منحنى مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

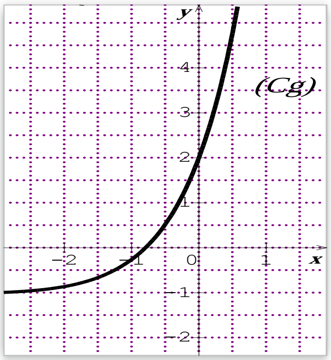
4 رسم (C) و (C_f) :



مسائل المستوى الثالث ★★★

التمرين 05

كتابة الأستاذ (بعون لقمان)



I. g الدالة المعرّفة على IR بـ : $g(x)=(x+3)e^{x}-1$ ومنحناها البياني :

أ) بقراءة بيانية : نلاحظ أنّ : $g(-1)<0$ و أنّ : $g\left(\frac{-1}{2}\right)>0$.

ب) لدينا الدالة g مستمرّة ومتزايدة تماما على IR إذا فهي مستمرّة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ وكذلك لدينا : $g\left(\frac{-1}{2}\right)\times g(-1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ مع $g(\alpha)=0$.

التحقق أنّ : $-0.8<\alpha<-0.7$: لدينا $]-0.8;-0.7[\subset\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ ومنه g مستمرّة ومتزايدة تماما على $]-0.8;-0.7[$ و $g(-0.8)\times g(-0.7)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.8<\alpha<-0.7$

جـ) استنتاج إشارة $g(x)$ على IR : لدينا من خلال البيان نجد أنّ : $g(x)<0$ لمّا $x<\alpha$ و $g(x)>0$ لمّا $x>\alpha$ و $g(x)=0$ لمّا $x=\alpha$. (يمكن تلخيص الإشارة في جدول) .

II. f الدالة المعرّفة على IR ب : $f(x)=(x+2)(e^{x}-1)$. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)(e^{x}-1)\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+2)(e^{x}-1)\right]=+\infty$

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و:

$f'(x)=1.(e^{x}-1)+e^{x}(x+2)=e^{x}-1+xe^{x}+2e^{x}=(x+3)e^{x}-1=g(x)$ و هو المطلوب

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على IR :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$-\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$: لدينا :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)(e^{x}-1)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x}-x+2e^{x}-2+x)=-2$ (لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}=0$) . فنجد : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-2))=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)(e^{x}-1)+x+2\right]$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته : $y=-x-2$.

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

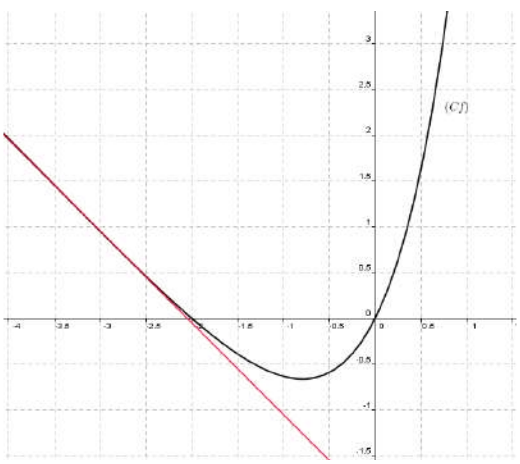
ب) لدراسة الوضع النسبي بين $\left(C_f\right)$ و المستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$:

$f(x)-y=\left[\left(x+2\right)\left(e^x-1\right)+\left(x+2\right)\right]=\left[\left(x+2\right)\left(e^x-1+1\right)\right]$ ومنه $f(x)-y=\left(x+2\right)e^x$ نجد :

$\begin{cases} e^x>0 \\ x+2=0 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} e^x>0 \\ x=-2 \end{cases}$ فنلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-y$	-		+
الوضعية	$\left(C_f\right)$ تحت (Δ)	$\left(C_f\right)$ يقطع (Δ) في $A(-2;0)$	$\left(C_f\right)$ فوق (Δ)

جـ) (T) يوازي (Δ) معناه (T) و (Δ) لهما نفس معامل التوجيه أي : $f'(x_0)=-1$ ومنه $g(x_0)=-1$ بحل المعادلة نجد : $x_0=-3$. ومنه $(T): y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$ نجد : $(T): y=-x-2-e^{-3}$.



4. الرسم :

5. حساب $f(x)-g(x)$:

$$f(x)-g(x)=\left(x+2\right)\left(e^x-1\right)-\left(x+3\right)e^x-1=-e^x-x-1$$

فنجد أنّ : $f(x)=f'(x)-e^x-x-1$.

استنتاج دالة أصلية للدالة f على IR .

أي : $F(x)=f(x)-e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x$.

و منه : $F(x)=\left(x+3\right)e^x-2e^x-\dfrac{1}{2}x^2-2x$. هي دالّة أصلية للدالة f على IR .

6. h دالة معرّفة على IR بـ : $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$.

أ) h دالة زوجيّة معناه : D_h متناظرة بالنسبة الى 0 و من أجل كلّ $x\in D_h$ فإنّ : $h(-x)=h(x)$

$h(-x)=|-x|\left(e^{|-x|-2}-1\right)+1=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1=h(x)$. ومنه h دالة زوجيّة .

ب) لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $h(x)=x\left(e^{x-2}-1\right)+1$ و $f(x-2)+1=(x-2+2)\left(e^{x-2}-1\right)+1=h(x)$

و هو المطلوب .

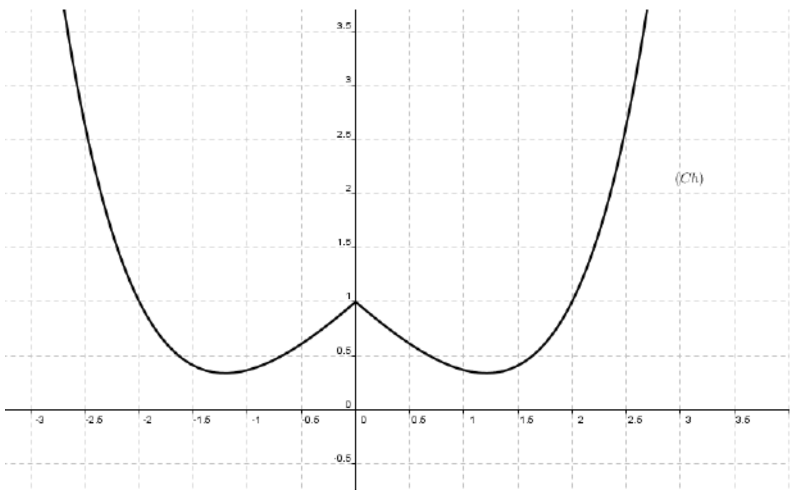
つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

جـ) يتم رسم المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) على المجال $[0;+\infty[$ وذلك بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ وبما أنّ

h دالة زوجية أي منحناها البياني مناظر بالنسبة الى محور التراتيب ومنه نكمل الجزء المتبقي من (C_h) بالتناظر بالنسبة الى محور التراتيب .

الرسم :



مسائل المستوى الرابع ★★★★

التمرين 01

تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

الجزء الأول :

1- حل المعادلة $g(x)=0$:

$g(x)=0$ تكافئ $2e^{2x}-5e^{x}+2=0 \rightarrow (1)$

(1) تكافئ $2e^{2x}-4e^{x}-e^{x}+2=0$ تكافئ $2e^{x}(e^{x}-2)-(e^{x}-2)=0$

تكافئ $(e^{x}-2)(2e^{x}-1)=0$ تكافئ $\left[\begin{array}{l} e^{x}=2 \\ e^{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ ومنه $\left[\begin{array}{l} x=\ln 2 \\ x=-\ln 2\end{array}\right.$

إذا $S_{(1)}=\{\ln 2,-\ln 2\}$

2- تحليل $g(x)$ وإشارته :

لدينا $g(x)=2e^{2x}-5e^{x}+2$ ومنه $g(x)=(e^{x}-2)(2e^{x}-1)$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$2e^{x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
الجداء		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه نستنتج أن : $\begin{cases} g(x)<0 \;/\; x\in\left]-\ln 2;\ln 2\right[\\ g(x)=0 \;/\; x\in\{-\ln 2,\ln 2\} \\ g(x)>0 \;/\; x\in\left]--\infty;-\ln 2\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[\end{cases}$

الجزء الثاني :

– لدينا الدالة $f(x)=2x+\dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}$ معرفة على $\mathbb{R}^{*}$.

1 – التحقق انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^{*}$ لدينا $f(-x)+f(x)=-3$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}^{*}$

$$f(-x)+f(x)=-2x+\frac{2e^{x}-1}{1-e^{x}}+2x+\frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}$$
$$=\frac{2e^{x}-1}{1-e^{x}}+\frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}$$
$$=\frac{2e^{x}-1}{1-e^{x}}+\frac{2-e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{-2e^{x}+1+2-e^{x}}{e^{x}-1}$$
$$=\frac{-3(e^{x}-1)}{e^{x}-1}=-3$$

- نستنتج ان (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $(0;-\frac{3}{2})$

لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^{*}$ لدينا $f(0-x)+f(0+x)=2(\frac{-3}{2})$

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

2 - أ)- التحقق انه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $f(x) = 2x + \dfrac{2-e^x}{e^x-1}$:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = 2x + \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} \times \dfrac{e^x}{e^x} = 2x + \dfrac{2-e^x}{e^x-1}$

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-e^x}{e^x-1} = -2 \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

وبذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-e^x}{e^x-1} = -2$.

ب)- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = -1 \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

وبذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{x}} = -1$.

جـ)- إشارة $\left(1-e^{-x}\right)$

لدينا $1-e^{-x} = 0$ من أجل $x = 0$ ومنه نستنتج الإشارة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^{-x}$	$-$	0	$+$

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} 2x = 0; \ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} 1-e^{-x} = 0^- \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} 2e^{-x}-1 = 1; \ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = -\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$.

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x = 0; \ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-e^{-x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2e^{-x}-1 = 1; \ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = +\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$.

د)- المستقيمات المقاربة للمنحنى $\left(C_f\right)$:

- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2x = -2$ فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (2x-2) = 0$

ومنه المستقيم (Δ') الذي معادلته $y = 2x-2$ مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$.

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

- بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x=-1$ فان

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

- بما ان $\left|\lim_{x\to0} f(x)\right|=+\infty$ ومنه نستنتج أن (C_f) يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب .

– 3) أ)– <u>التحقق من صحة عبارة</u> $f'(x)$:

لدينا من اجل كل لدينا : $f(x)=2x+\dfrac{2-e^x}{e^x-1}$

ومنه $$f'(x)=2+\frac{-e^x(e^x-1)-e^x(2-e^x)}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^x-1)^2-e^{2x}+e^x-2e^x+e^{2x}}{(e^x-1)^2}$$
$$=\frac{2e^{2x}-4e^x+2-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

ب)– <u>اتجاه التغير وجدول التغيرات</u>:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

ومنه f متزايدة تماما في المجال $-\infty;-\ln 2$ والمجال $\ln 2;+\infty$

ومتناقصة تماما على المجالين $-\ln 2;0$ والمجال $0;\ln 2$.

– <u>جدول تغيرات الدالة</u> f :

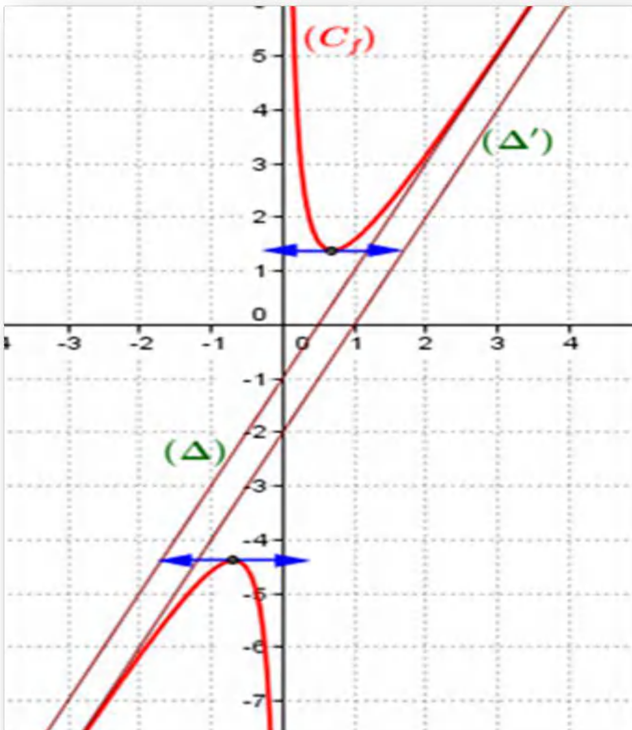
لدينا $f(\ln 2)=2\ln 2-1+1$
$=2\ln 2\approx 1{,}38$

و $f(-\ln 2)=-3-f(\ln 2)$
$=-3-2\ln 2\approx -4{,}38$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-4{,}38$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1{,}38$	↗	$+\infty$

つづく

4) – <u>تمثيل كلا من</u> (Δ) ، (Δ') و (C_f) :



5) – قيم $\alpha \in]0;+\infty[$

التي من أجلها المعادلة

$$-2-\ln\alpha \ \ e^{-x}+1+\ln\alpha=0 \rightarrow \ 1$$

لا تقبل حلول :

أ) – بيانيا :

(1) تكافئ $-2e^{-x}-\ln\alpha e^{-x}+1+\ln\alpha=0$

تكافئ $\ln\alpha \ \ 1-e^{-x} \ \ -2e^{-x}+1=0$

ومنه $\ln\alpha \ \ 1-e^{-x} \ \ =2e^{-x}-1$

تكافئ $\dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}=\ln\alpha$ مع $1-e^{-x}\neq 0$

ومنه $\begin{cases} 2x+\dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}=2x+\ln\alpha \\ x\in\mathbb{R}^* \end{cases}$

إذا $\begin{cases} y=f \ \ x \\ y=2x+\ln\alpha \end{cases}$

ومنه حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (d_α) ذو المعادلة $y=2x+\ln\alpha$

و بذلك (1) لا تقبل حلول عندما المستقيم (d_α) يكون محصور بين المستقيمين المقاربين (Δ) و (Δ')

ومنه $2x-2<2x+\ln\alpha<2x-1$ فان $-2\leq\ln\alpha\leq-1$

ومنه $e^{-2}\leq\alpha\leq e^{-1}$ وبذلك $\alpha\in\left[e^{-2};e^{-1}\right]$.

ب) – حسابيا :

المعادلة (1) لاتقبل حلول من أجل $-2-\ln\alpha \ \ 1+\ln\alpha \ \ \geq 0$

تكافئ $\begin{cases} 2+t \ \ 1+t \ \ \leq 0 \\ t=\ln\alpha \ \ /\alpha>0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} -2\leq t\leq -1 \\ t=\ln\alpha \ \ /\alpha>0 \end{cases}$ تكافئ $-2\leq\ln\alpha\leq-1$ تكافئ $\alpha\in\left[e^{-2};e^{-1}\right]$.

انـــــــــــتهى .

مسائل المستوى الرابع ★★★★

التمرين 02

مجموعة الرياضيات الجزائرية (جمال بورنان)

I) 1) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

لنا $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$ ومنه

$$g'(x)=\left[(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1\right]'=(1+x+x^2)'e^{-\frac{1}{x}}+\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'(1+x+x^2)$$

$$=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)=\frac{x^2(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+2x^3+1+x+x^2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^2(x+1)+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\boxed{\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}$$

- إستنتاج إتجاه تغير g: وجدنا $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\left[\frac{(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right](x+1)$

بما أنه مهما كان x من $]0;+\infty[$ فإن $\frac{(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\succ 0$ وأيضا x+1 موجب تماما على هذا المجال إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $g'(x)\succ 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

2) $g(1)=3e^{-1}-1=\frac{3}{e}-1\succ 0$ و

$$g(0,9)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1=2,71\times 0,32-1\approx -0,13\prec 0$$

إذن بما أن الدالة g مستمرة على المجال $]0,9;1[$ و $g(0,9)\times g(1)\prec 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة g(x)=0 حل على الأقل في المجال $]0,9;1[$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال فإن هذا الحل وحيد وهو α .

إستنتاج إشارة g(x): نستنتج إن g(x) سالب تماما في المجال $]0;\alpha[$ وموجب تماما في المجال $]\alpha;+\infty[$.

つづく

II) $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty+1\times e^{-\infty}=\boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=0+(+\infty)\times e^{0}=\boxed{+\infty}$

ب) تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

لنا $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ ومنه

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{-1+x^2e^{-\frac{1}{x}}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1}{x^2}=\boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ومنه نستنتج أن إشارة f’(x) من إشارة g(x) أي في المجال $]0;\alpha[$ تكون المشتقة سالبة تماما أي الدالة f متناقصة تماما وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ تكون الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

x	0	α	1	$+\infty$
f’(x)	‖ $-$	0	$+$	
f(x)	‖ $+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) تبيين أن: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$.

بوضع $t=-\frac{1}{x}$ ومنه $x=-\frac{1}{t}$ ولما $x\to+\infty$ فإن $t\to 0$ فنجد:

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{t}e^{t}+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{-\left(e^{t}-1\right)}{t}\right)=-\lim_{t\to0}\left(\frac{e^{t}-1}{t}\right)=-1$$

Y=x مقارب للمنحني $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ معناه: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right]=0+1-1=0$$

أي أن المستقيم ذو المعادلة **y=x** مقارب مائل للمنحني $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$.

3) $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0-1+1=0$.

- دراسة إتجاه تغير الدالة **h**:

$$h'(x)=\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)$$

إذن إشارة **h'(x)** من نفس إشارة $e^{-\frac{1}{x}}-1$

h'(x)<0 معناه $e^{-\frac{1}{x}}-1\prec0$ أي $e^{-\frac{1}{x}}\prec1\rightarrow e^{-\frac{1}{x}}\prec e^{0}\rightarrow-\frac{1}{x}\prec0$ إذن الدالة **h** متناقصة تماما

$\rightarrow x\succ0\rightarrow\boxed{x\in\left]0;+\infty\right[}$

على المجال المعطى أي على مجموعة تعريفها.

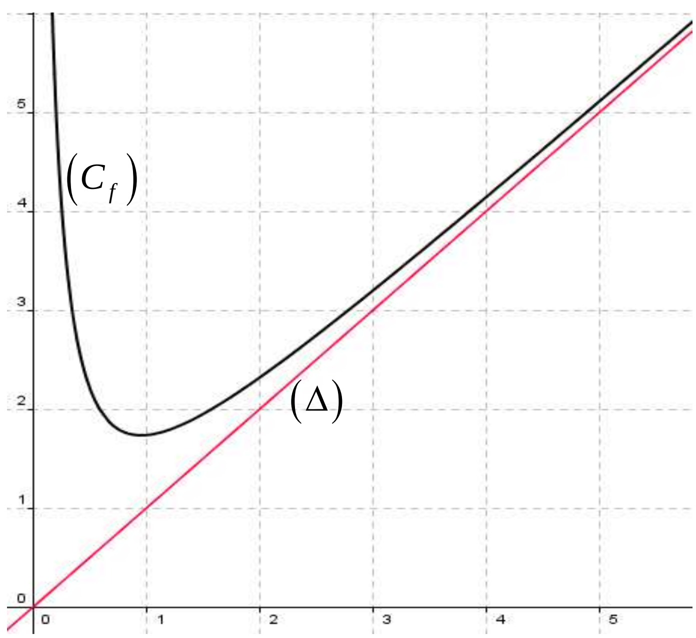
الدالة **f** متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ولنا $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ وعليه نستنتج أن المنحني الممثل لها يقع فوق محور الفواصل بشكل تام ومنه مهما كان **x** من $\left]0;+\infty\right[$ فإن **h(x)>0** .

つづく

ب)
$$f(x)-x=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x=\frac{1}{x}-x+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1-x^2}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=(1+x)\left[\frac{1-x}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right]=(1+x)\left[\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right]=\boxed{(1+x)h(x)}$$

نستنتج أن $f(x)-x\succ 0$ إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

4) رسم (Δ) و (C_f) :



5) أ) كتابة u_n بدلالة n:
$$u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}}}\right]-\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{n+1}\left[n+\left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}\right]-\frac{n^2}{n+1}$$
$$=\frac{n^2}{n+1}+e^{-n}-\frac{n^2}{n+1}$$
$$=\boxed{e^{-n}}$$

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

- تبيين أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q و حدها الأول u_1 :

لنا $u_n = e^{-n}$ ومنه $u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e}e^{-n} = \boxed{\frac{1}{e}u_n}$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها

$\boxed{q = \frac{1}{e}}$ و حدها الأول $u_1 = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$.

- حساب بدلالة n المجموع S_n :

لنا $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$ ومنه $\boxed{\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) = u_n + \frac{n^2}{n+1}}$

$$S_n = \left(\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{1^2}{1+1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{2^2}{2+1} - \frac{1}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{3^2}{3+1} - \frac{1}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{n^2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{1^2 - 1}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{2^2 - 1}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{3^2 - 1}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{n^2 - 1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{(1-1)(1+1)}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{(2-1)(2+1)}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{(3-1)(3+1)}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{(n-1)(n+1)}{n+1}\right)$$

$$= (u_1 + (1-1)) + (u_2 + (2-1)) + (u_3 + (3-1)) + \ldots + (u_n + (n-1))$$

$$= (u_1 + 0) + (u_2 + 1) + (u_3 + 2) + \ldots + (u_n + (n-1))$$

$$= (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))$$

$$= \left(\frac{1}{e} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}}\right) + \frac{n-1}{2}(1 + n - 1) = \left(\frac{1}{e} \times \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{1}{e} \times \frac{\frac{e^n - 1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right) + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{e} \times \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{e}{e-1}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{e^n - 1}{(e-1)e^n}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{1 - e^{-n}}{e-1} + \frac{n(n-1)}{2}}$$

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

التمرين 03

مجلة Top Maths في الدوال الأسية

I) φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1 .$$

1.أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{t}=+\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1=+\infty .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x+1}-1$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e\dfrac{x^2}{e^x}-1=-1$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة φ :

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\varphi'(x)=(2x-1)e^{-x+1}+\left(x^2-x+1\right)(-1)e^{-x+1}$

أي $\varphi'(x)=\left(-x^2+3x-2\right)e^{-x+1}$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-x+1}>0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ هي من إشارة $\left(-x^2+3x-2\right)$ ؛

$\Delta=9-8=1$ ومنه $x'=\dfrac{-3-1}{-2}=2$ و $x''=\dfrac{-3+1}{-2}=1$ ، وعليه فمن أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ ، $-x^2+3x-2<0$ أي $\varphi'(x)<0$ ومنه الدالة φ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$ ؛

ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]1;2[$ ، $-x^2+3x-2>0$ أي $\varphi'(x)>0$ ومنه الدالة φ متزايدة تماما على المجال $[1;2]$.

- جدول تغيرات الدالة φ :

x	$-\infty$		1		2		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{e}-1$	↘	0	↘	-1

2. تبيين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 :

من خلال جدول تغيرات الدالة φ لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;1[\cup]1;2]$ ، $\varphi(x)>0$ و $\varphi(1)=0$ إذا المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $]-\infty;2]$ حلا وحيدا وهو 1 .

لدينا الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-1;\dfrac{3}{e}-1\right]$ إذا يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[2;+\infty[$ حيث $\varphi(\alpha)=0$ أي α حل للمعادلة $\varphi(x)=0$.

- تحقق أن $2,79<\alpha<2,80$:

つづく

لدينا $\varphi(2,79)\approx 0,000776$ و $\varphi(2,80)\approx -0,00159$ إذا $\varphi(2,79)\times\varphi(2,80)<0$ ومنه $2,79<\alpha<2,80$.

3. استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $\varphi(1)=\varphi(\alpha)=0$ ؛ من أجل كل $x\in]-\infty;1[\cup]1;\alpha[$ ، $\varphi(x)>0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $\varphi(x)<0$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على الترتيب تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}=\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}=+\infty$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{-x+1}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)e=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

بـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=2e^{-x+1}+(2x-1)(-1)e^{-x+1}$

$f'(x)=(2-2x+1)e^{-x+1}=(3-2x)e^{-x+1}$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $e^{-x+1}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(3-2x)$؛

$f'(x)=0$ تكافئ $3-2x=0$ ومعناه $x=\dfrac{3}{2}$ ؛

$f'(x)>0$ تكافئ $3-2x>0$ ومعناه $x<\dfrac{3}{2}$.

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

2. تبيين أن للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 :

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \dfrac{2(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2 - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

أي $g'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$

ومنه $g'(1) = \dfrac{-2 + 2 + 1}{(1 - 1 + 1)^2} = 1$ و $f'(1) = (3 - 2)e^{-1+1} = 1$

إذا للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسين لهما نفس معامل التوجيه 1 في النقطة ذات الفاصلة 1 ، ولدينا

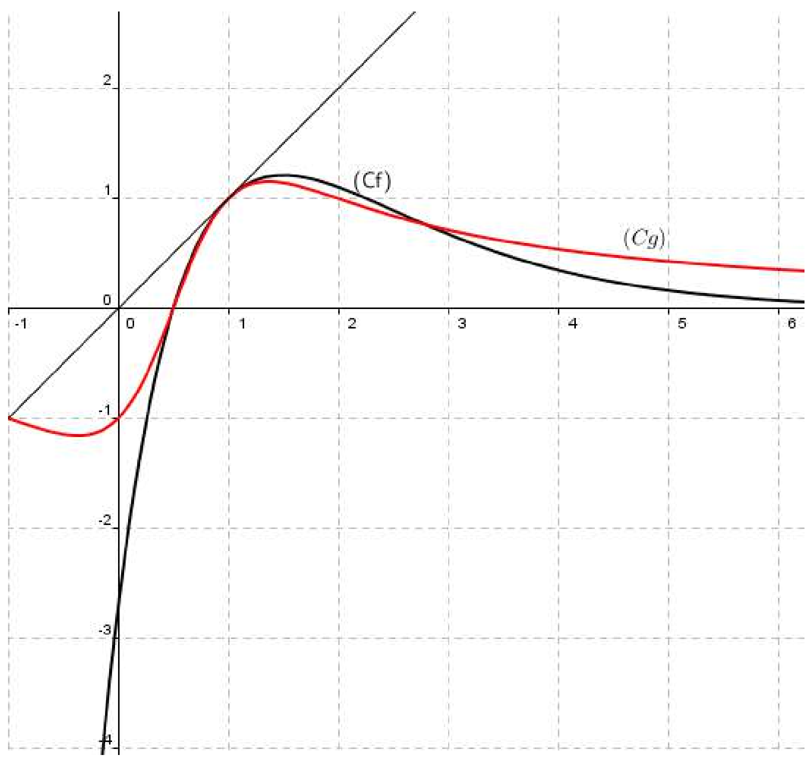
$f(1) = (2 - 1)e^{-1+1} = 1$ و $g(1) = \dfrac{2 - 1}{1^2 - 1 + 1} = 1$ إذا للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ نقطة مشتركة

$A(1;1)$ وهي نقطة التماس ومنه للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة $A(1;1)$.

ـ إيجاد معادلة للمستقيم (T):

$y = x - 1 + 1$ أي $y = x$.

3. رسم المماس (T) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:



つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

4.أـ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}:$$

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-g(x)=(2x-1)e^{-x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$$f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\left[(x^2-x+1)e^{-x+1}-1\right]}{x^2-x+1}$$

أي $f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

بـ دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على :

لندرس إشارة ثلاثي الحدود x^2-x+1 : $\Delta=1-4=-3$ ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $x^2-x+1>0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

ـ استنتاج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$:

يتقاطعان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ في النقط $A(1;1)$ ، $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ و $C(\alpha;f(\alpha))$.

في المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $]\alpha;+\infty[$ ، $(\mathscr{C}_f)$ يقع أسفل $(\mathscr{C}_g)$؛

وفي المجالين $\left]\frac{1}{2};1\right[$ و $]1;\alpha[$ ، $(\mathscr{C}_f)$ يقع أعلى $(\mathscr{C}_g)$.

جــ باستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t)dt$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\int_1^x f(t)dt=\int_1^x (2t-1)e^{-t+1}dt$.

نضع $u(t)=2t-1$ و $v'(t)=e^{-t+1}$ ومنه $u'(t)=2$ و $v(t)=-e^{-t+1}$.

$$\int_1^x f(t)dt=\int_1^x (2t-1)e^{-t+1}dt=\int_1^x u(t)v'(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt=u(t)v(t)-\int_1^x u'(t)v(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt=\left[-(2t-1)e^{-t+1}\right]_1^x-\int_1^x -2e^{-t+1}dt$$

つづく

$$\int_1^x f(t)dt=-(2x-1)e^{-x+1}+1-2\left[e^{-t+1}\right]_1^x$$

$$\int_1^x f(t)dt=-(2x-1)e^{-x+1}+1-2\left(e^{-x+1}-1\right)$$

$$.\int_1^x f(t)dt=-(2x+1)e^{-x+1}+3$$

د ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$:

$$\int_1^2[f(x)-g(x)]dx=\int_1^2 f(x)dx-\int_1^2 g(x)dx$$

$$\int_1^2[f(x)-g(x)]dx=\left[-(2x+1)e^{-x+1}+3\right]_1^2-\int_1^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$\int_1^2[f(x)-g(x)]dx=-5e^{-1}+3-\left[\ln\left(x^2-x+1\right)\right]_1^2$$

$$\int_1^2[f(x)-g(x)]dx=\left(-5e^{-1}+3-\ln 3\right)ua$$

المساحة المطلوبة هي $\int_1^2[f(x)-g(x)]dx$ حيث:

$$.\int_1^2[f(x)-g(x)]dx=\left(-5e^{-1}+3-\ln 3\right)ua\approx 0{,}0619905\,ua$$

II) 1. حساب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$ ومنه

$$f''(x)=-2e^{-x+1}-(3-2x)e^{-x+1}=(2x-5)e^{-x+1} \text{ ؛}$$

$$f^{(3)}(x)=2e^{-x+1}-(2x-5)e^{-x+1}=-(2x-7)e^{-x+1} \text{ ؛}$$

$$.f^{(4)}(x)=-2e^{-x+1}+(2x-7)e^{-x+1}=(2x-9)e^{-x+1}$$

ـ تخمين عبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. ($f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).:

يبدو أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $.f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$

2. البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$:

$f'(x)=(-1)\left[2x-(2+1)\right]e^{1-x}=-(2x-3)e^{1-x}$ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أنه $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ولنبرهن أن

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\left[2x-(2n+3)\right]e^{1-x}$$

لدينا $f^{(n+1)}(x)=(-1)^n 2e^{1-x}+(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right](-1)e^{1-x}$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}e^{1-x}\left[2x-(2n+1)-2\right]$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}e^{1-x}\left[2x-(2n+3)\right]$$

ومنه الخاصية وراثية وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ،

$$.f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$$

つづく

3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

أـ حساب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k، المجموع: $u_k + u_{k+1}$:

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، $u_n = f^{(n)}(1) = (-1)^n\left[2-(2n+1)\right] = (-1)^{n+1}(2n-1)$

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$، $u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1}(2k-1) + (-1)^{k+2}(2k+1)$

$$u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1}(2k-1-2k-1)$$

أي $u_k + u_{k+1} = 2(-1)^{k+2} = 2(-1)^k$

ب ـ استنتاج بدلالة n، المجموع: $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = \frac{(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n})}{2}$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$$

$$= \frac{u_1 - u_{2n+1} + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_2 + \ldots + u_{2n} + u_{2n+1})}{2}$$

$$= \frac{u_1 - u_{2n+1}}{2} + \frac{1}{2}\left[(u_1 + u_2) + (u_2 + u_3) + \ldots + (u_{2n} + u_{2n+1})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left((-1)^{2n+2}(4n+1)\right)\right] + \frac{1}{2} \times 2\left[(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2n}\right]$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = -2n + \left[(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2n}\right] = -2n$$

التمرين 04

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

ا- لدينا $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\frac{x+1}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2 = 0$ بالتزايد المقارن ..

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x) = 2(1+x)e^{-x} - (1+x)^2 e^{-x} = (x^2-1)e^{-x}$ و منه اشارتها من اشارة $(1-x^2)$ و هي موجبة على المجال $[-1;1]$ و سالبة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ و منه f متزايدة على المجال $[-1;1]$ و متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$.

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

جدول تغيراتها

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

3) اثبات وجود نقطة الانعطاف: لدينا $f'(x)=(x^2-1)e^{-x}$ و منه $f''(x)=(-x^2+2x+1)e^{-x}$ و منه اشارتها من اشارة $(-x^2+2x+1)$

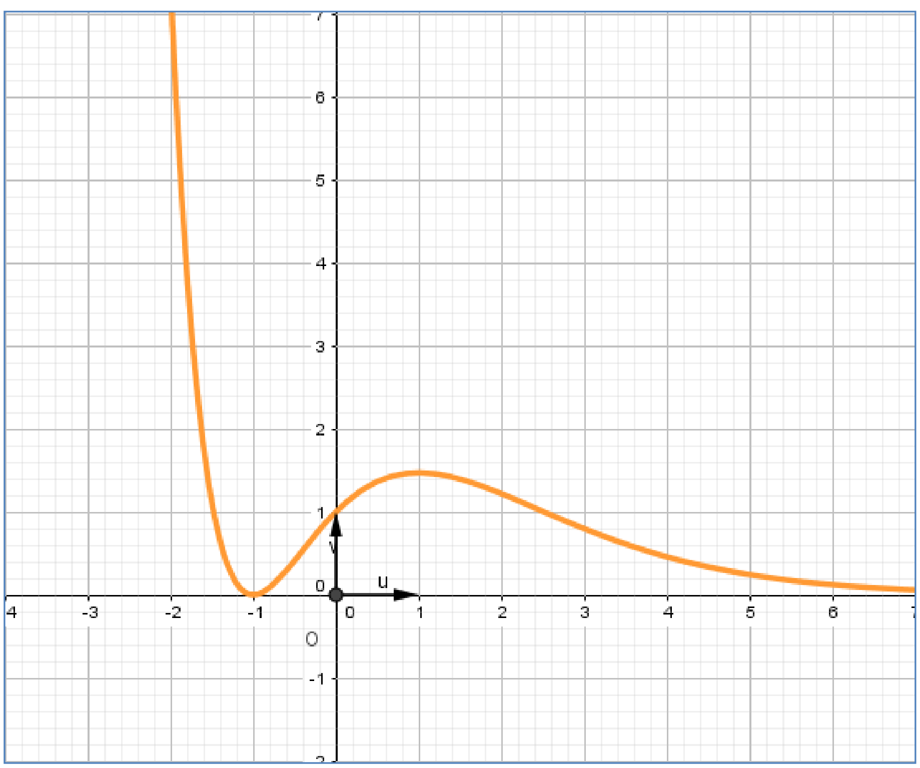
نحسب المميز $\Delta=8$ و منه له جذرين هما $x=-1+\sqrt{2}$ و $x=-1-\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
اشارة $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما f'' تنعدم عند العددين $-1+\sqrt{2}$ و $-1-\sqrt{2}$ و تغير اشارتها فإن هما فاصلتي نقطتي انعطاف للمنحنى (C) و النقطتان هما $A(-1-\sqrt{2};2e^{1+\sqrt{2}})$ و $B(-1+\sqrt{2};2e^{1-\sqrt{2}})$.

حساب $f(-2)=e^2$.

رسم البيان :



つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

II- لدينا $f_m(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$.

1) اثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω : أي ان احداثياتها لا تتعلق بـ m نعدم المضرب في العبارة في هذا العدد و منه نضع $x=0$ و منه $f_m(0)=1$ أي ان كل المنحنيات تمر من $\omega(0\,;\,1)$.

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f_m $f_m'(x)=(2x+m-x^2-mx-1)e^{-x}$ و منه $f_m'(x)=(-x^2+(2-m)x+m-1)e^{-x}$

نحسب المميز $\Delta=(2-m)^2+4(m-1)=m^2$ و منه f_m' تقبل جذرين هما $x''=1-m$; $x'=1$ و منه تكون

لما m عدد موجب :

- $f_m'(x)$ موجبة على المجال $[1-m;1]$ و منه f متزايدة على هذا المجال
- $f_m'(x)$ سالبة على المجالين $[1;+\infty[$ و$]-\infty;1-m]$ منه f متناقصة على هذين المجالين

لما m عدد سالب :

- $f_m'(x)$ موجبة على المجال $[1;1-m]$ و منه f متزايدة على هذا المجال
- $f_m'(x)$ سالبة على المجالين $[1-m;+\infty[$ و$]-\infty;1]$ منه f متناقصة على هذين المجالين .

لما m عدد معدوم : فإن $f_m'(x)$ تنعدم عند 1 و هي موجبة أي ان الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

مما سبق نستنتج أن f تقبل قيمتين حديتين لما $m\neq 1$.

3) لدينا $f_m(1-m)=\left[(1-m)^2+m(1-m)+1\right]e^{-1+m}$ أي $f_m(1-m)=[-m+2]\ e^{-1+m}$ و منه $M_m(1-m;f_m(1-m))$

أي $M_m\left(1-m\ ;\ \dfrac{(2-m)}{e^{1-m}}\right)$ بوضع $x=1-m$ و $y=\dfrac{2-m}{e^{1-m}}$

نجد $y=(1+x)\,e^{-x}$ و هي معادلة المنحنى الشامل للنقطة M_m لما m يمسح $\mathbb{R}$.

4) دراسة وضعية (C) بالنسبة للمنحنى (C_m) لدينا $f_m(x)-f(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}=(m-2)\,e^{-x}$

اشارته من اشارة $(m-2)$:

المناقشة

- لما $m>2$ فإن (C_m) يقع فوق (C) على $\mathbb{R}$.
- لما $m<2$ فإن (C_m) يقع تحت (C) على $\mathbb{R}$.

5) حساب مساحة الحيز $A(\alpha)$ $A(\alpha)=\int_0^{\alpha}[f_3(x)-f(x)]dx=\int_0^{\alpha}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\alpha}=1-e^{-\alpha}$

و منه $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left[1-e^{-\alpha}\right]=1$.

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

التمرين 05

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول : $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$.

1) إثبات أن كل المنحنيات (C_k) تمر نقطتين ثابتتين : --

لدينا : $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ أي : $f_{k+1}(x)=(x+1)^2e^{-(k+1)x}$ و بما أنّ النقطة ثابتة مهما تغيّر الوسيط k فسيكون ترتيب النقطة ثابت مهما كان k .

أي : $f_{k+1}(x)-f_k(x)=0$ أي : $(x+1)^2e^{-(k+1)x}-(x+1)^2e^{-kx}=0$ و منه : $e^{-kx}(x+1)^2(e^{-x}-1)=0$

و عليه : $\begin{cases}(x+1)^2=0\\(e^{-x}-1)=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=-1\\e^{-x}=1\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}x=-1\\x=0\end{cases}$ إذن : جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين هما $A(-1;0)$ و $B(0;1)$.

2) حساب نهايتي الدالة f_k : --

*) لما $k>0$ يكون : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2e^{-kx}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{-kx}\right)=+\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2e^{-kx}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-kx}\right)=0\end{cases}$.

*) لما $k=0$ يكون : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2\right]=+\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2\right]=+\infty\end{cases}$.

*) لما $k<0$: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2e^{kx}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{kx}\right)=0\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2e^{kx}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{kx}\right)=+\infty\end{cases}$.

3) أ) حساب $f_k'(x)$ ثم تحديد إتجاه تغيّر الدالة f_k حسب قيم k : --

$f_k'(x)=2(x+1)e^{-kx}-k(x+1)^2e^{-kx}$ أي : $f_k'(x)=(x+1)(-kx-k+2)e^{-kx}$.

*) من أجل $k=0$ تكون : $f_0'(x)=2(x+1)$ هذه الأخيرة موجبة على $[-1;+\infty[$ و سالبة على $]-\infty;-1]$ و منه : الدالة f_0 متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$ و متناقصة على $]-\infty;1]$.

*) من أجل $k>0$: ندرس إشارة المشتقة أي نحل المعادلة $f_k'(x)=0$ أي : $\begin{cases}x+1=0\\-kx-k+2=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=-1\\x=\dfrac{2-k}{k}\end{cases}$

إذن : لما $x\in\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$ تكون $f_k'(x)\geq0$ و عليه الدالة f_k متزايدة على المجال $\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$.

لما $x\in]-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$ تكون $f_k'(x)\leq0$ و عليه الدالة f_k متناقصة على كل من المجالين :

$]-\infty;-1]$ و $\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$.

つづく

*) من أجل $k<0$: بنفس الطريقة السابقة ، لكن :

لما $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$ تكون $f_k'(x)\geq 0$ و عليه الدالة f_k متوايدة على كل من المجالين : $\left]-\infty;-1\right]$ و $\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$.

لما $x\in\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$ تكون $f_k'(x)\leq 0$ و عليه الدالة f_k متناقصة على المجال $\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$.

ب) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f_k من أجل $k\in\mathbb{R}_+$: ---

x	$-\infty$		-1		$\frac{-k+2}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_k(-1)$	$\nearrow$	$f_k\left(\frac{-k+2}{k}\right)$	$\searrow$	0

4) المناقشة حسب قيم k الوضع النسبي بين المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) : ------------------------------------

ندرس إشارة الفرق نجد : $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}\left[\dfrac{1-e^x}{e^x}\right]$ ، نلاحظ أنّ إشارة الفرق من إشارة : $1-e^x$

*) الفرق ينعدم عند 0 و -1 أي أنّ المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) يتقاطعان في النقطتين A و B . (س1)

*) الفرق يكون موجب على $\left]-\infty;0\right]$ أي أنّ المنحنى (C_{k+1}) يقع فوق المنحنى (C_k) .

*) الفرق يكون سالب على $\left[0;+\infty\right[$ أي أنّ المنحنى (C_{k+1}) يقع تحت المنحنى (C_k) .

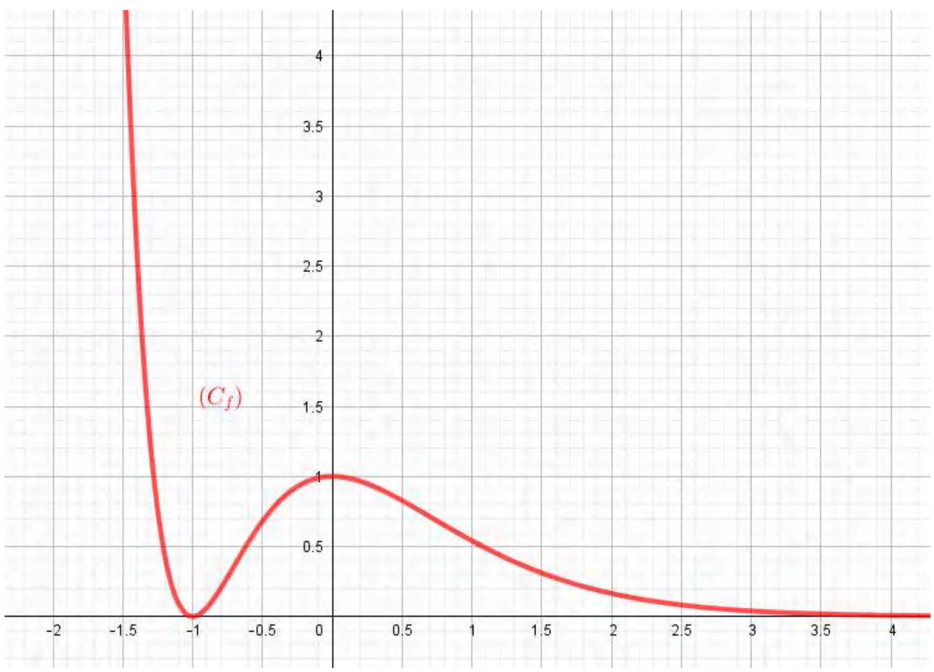
الجزء الثاني : لدينا $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$.

1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$: ---

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{e3}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

つづく

*) إنشــاء المنحني (C_f) :



2) أ) بيان أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$: --

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $f(x)=1$ تعني $f(x)-1=0$ ، لنضع : $h(x)=f(x)-1$.

الدالة h مستمرة و متناقصة على المجال $]-\infty,-1]$ و $\begin{cases} h(-1,28)=0.01 \\ h(-1,27)=-0,08 \end{cases}$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,28<\alpha<-1,27$.

و من جهة أخرى لدينا : $g(0)=f(0)-1$ أي : $h(0)=1-1$ و منه : $h(0)=0$ أي أنّ الحل الآخر معدوم .

ب) تعيين قيم m : --

لدينا : $\left|\frac{m+1}{e^m}\right|=\left|\frac{x+1}{e^x}\right|$ أي : $\frac{|m+1|}{e^m}=\frac{|x+1|}{e^x}$ أي : $|m+1|e^{-m}=|x+1|e^{-x}$ أي تصبح :

$(m+1)^2e^{-2m}=(x+1)^2e^{-2x}$ ، إذن : $f(x)=f(m)$ ، حلول هذه الأخيرة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=f(m)$ و عليه : قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلا وحيدا و من خلال ملاحظة البيان نجد أنها محققة لما يكون $m\in]-\infty;\alpha[$.

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

3) لدينا : $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$: ------------------------------------

$g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}-e^{-2x}$ و منه : $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$.

إذن : من أجل كل عدد حقيقي تكون $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ محقّقة .

*) يمكن الآن إستنتاج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$ أي : $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ و عليه تصبح :

$g(x)=-\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2}e^{-2x}$ أي أنّ الدالة الأصلية هي : $G(x)=-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة حساب مساحة الحيز المستوى : --

$$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\underbrace{(x+1)^2}_{u}\underbrace{e^{-2x}}_{v'}=\left[-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\left[2(x+1)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]=-\frac{1}{2}+\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}\,dx$$

و منه : $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=-\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$ أي : $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^2\right)$

إذن : $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^2$ و عليه : $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=-\frac{5}{4}+\frac{e^2}{4}\ (u.a)$.

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 01

تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2\, e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

1. اثبات ان الدالة f تقبل الصفر كنهاية عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$:

لدينا ع. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ ت لدينا $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)^2}\times\dfrac{1}{2}(x-1)^2\, e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\dfrac{2x^2}{(x-1)^2}\times\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\dfrac{1}{2}(x-1)^2\, e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

وبما ان

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\x\to+\infty}}\dfrac{2x^2}{(x-1)^2}=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\x\to+\infty}}\dfrac{1}{2}(x-1)^2\, e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to+\infty} t\, e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0\quad /\begin{cases}t=\frac{1}{2}(x-1)^2\\ t\xrightarrow[x\to+\infty]{x\to-\infty}+\infty\end{cases}\end{cases}$$

فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2. اثبات ان f تقبل الاشتقاق على IR و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=x(x+1)(2-x)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

- بما ان الدوال $\left(x\mapsto e^x\,;x\mapsto-\dfrac{1}{2}(x-1)^2\right)$; $x\mapsto x^2$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x)=(x^2)'e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}+\left(e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\right)'x^2=2xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}+\left[-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]'e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\times x^2$$

$$f'(x)=2xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}-(x-1)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\times x^2=\left[2x-x^2(x-1)\right]e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

$$=\left[2x-x^2(x-1)\right]e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}=x\left(-x^2+x+2\right)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}=x(x+1)(-x+2)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

3. إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم استنتاج اتجاه تغير f :

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان $f'(x)=x(x+1)(2-x)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x+1)(2-x)$

لان من اجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}>0$

لدينا $x(x+1)(2-x)=0$

من اجل $x=0$ او $x=-1$ او $x=2$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)(2-x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

وبذلك f متناقصة تماما في المجالين $[-1\,;0]$ و $[2\,;+\infty[$

و متزايدة تماما في المجالين $[0\,;2]$ و $]-\infty\,;-1]$.

つづく

4. شكل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

$$f(-1)=(-1)^2\ e^{-\frac{1}{2}(-1-1)^2}=e^{-2}$$
$$f(0)=(0)^2\ e^{-\frac{1}{2}(0-1)^2}=0$$
$$f(2)=(2)^2\ e^{-\frac{1}{2}(2-1)^2}=4e^{-\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{e}}$$

5. معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $(+1)$:

لدينا $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $\begin{cases} f'(1)=(1)(2)(1)e^{-\frac{1}{2}(1-1)}=2 \\ f(1)=(1)^2 e^{-\frac{1}{2}(1-1)}=1 \end{cases}$

ومنه $(T): y=2x-1$

6. اثبات ان $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ثلاثة مماسات (d_1)، (d_2) و (d_3) تشمل مبدأ المعلم :

نعلم ان المماس عند النقطة $(a;f(a))$ من $(\mathcal{C}_f)$ له معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

حتى يشمل هذا المماس المبدأ يجب $0=f'(a)(0-a)+f(a)$ تكافئ $f(a)=a\,f'(a)$

تكافئ $a^2\ e^{-\frac{1}{2}(a-1)^2}=a^2(a+1)(2-a)e^{-\frac{1}{2}(a-1)^2}$ تكافئ $a^2=a^2(a+1)(2-a)$ وذلك مهما كان $a\in\mathbb{R}$

ومنه $a^2\left[1-(a+1)(2-a)\right]=0$ وبذلك $a^2\left(a^2-a-1\right)=0$

ومنه إما $a^2=0$ من اجل $a=0$ او $a^2-a-1=0$ من اجل $\left.\begin{array}{l}\Delta=(-1)^2-4(1)(-1)=5 \\ a_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ a_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right\}$

اذا $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ثلاثة مماسات تشمل مبدأ المعلم عند النقط التي فواصلها $\left\{0,\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

أ)- إحداثيتي نقطة التماس لكل مماس:

- من اجل $x=0$ فان $f(0)=0$ ومنه النقطة هي المبدأ $(0;0)$.

- من أجل $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ فان $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}$ ومنه النقطة هي $M_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}\right)$.

- من أجل $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فان $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}$ ومنه النقطة هي $M_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}\right)$.

ب)- معامل توجيه لكل مماس ثم معادلة لكل من (d_1)، (d_2) و (d_3):

- من اجل $x=0$ فان $f'(0)=0$ ومنه معادلة المماس $(d_1): y=0$.

つづく

- من أجل $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

فان $f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}$

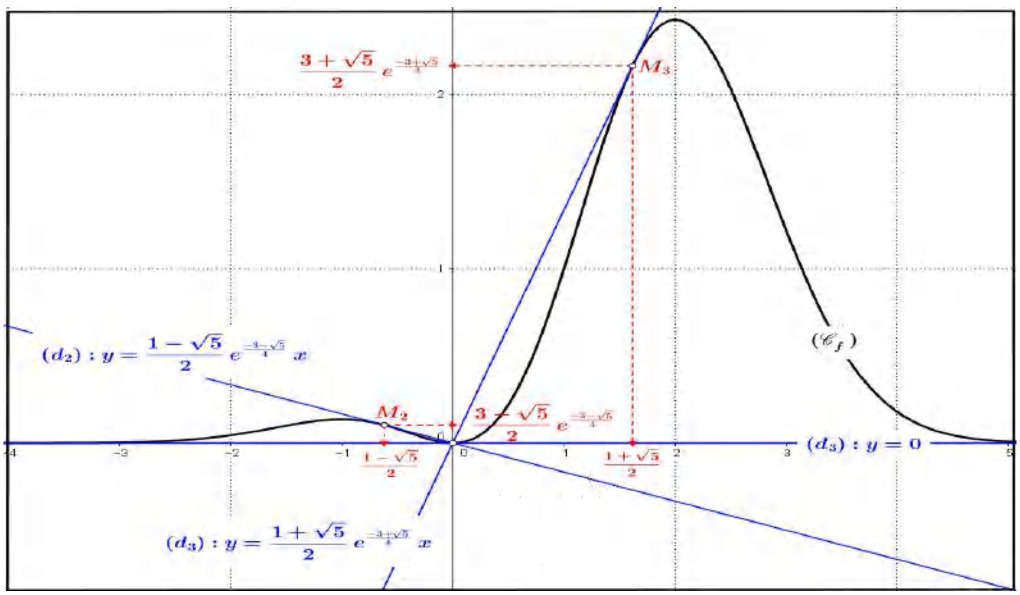
ومنه معادلة المماس $(d_2): y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}.x$.

- من أجل $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

فان $f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}$

ومنه معادلة المماس $(d_3): y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}.x$.

7. رسم كل من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المماسات (d_1)، (d_2) و (d_3) :



8. m عدد حقيقي ، نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y=mx$.

أ)- إثبات ان (d_m) يشمل نقطة ثابتة :

- بفرض ان $M_0(x_0;y_0)\in(d_m)$ يكافئ $y_0=mx_0$ ومنه $mx_0-y_0=0$ ومنه $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=0\end{cases}$

ومنه مهما كان العدد الحقيقي m فان (d_m) يشمل المبدأ .

ب)- بقراءة بيانية ،إيجاد قيم m الحقيقية ، التي من اجلها المستقيم (d_m) يقطع $(\mathscr{C}_f)$ في ثلاث نقاط متمايزة:

المستقيم (d_m) ميله متغير m ويشمل المبدأ إذا المستقيم (d_m) يدور و مركز دورانه المبدأ

من البيان نستنتج ان لمستقيم (d_m) يقطع $(\mathscr{C}_f)$ في ثلاث نقاط متمايزة من اجل :

$$m\in\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}};0\right[\cup\left]0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}\right[$$

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 02

تمارين مقترحة (ساعد أحمد)

أولا : 1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(4e^x-2xe^x-4\right)=-4$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(4-2x)e^x-4=-\infty$.

- حساب المشتقة: $g'(x)=-2e^x+e^x(4-2x)=(-2x+2)e^x$
- إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $-2x+2$.

لدينا $g'(x)=0$ تكافئ $-2x+2=0$ أي $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	$\nearrow$	$2e-4$	$\searrow$	$-\infty$

2) لدينا $g(0)=(4-0)e^0-4=0$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا معدوما هذا من جهة.

ومن جهة أخرى لدينا g مستمرة على $\mathbb{R}$ ورتيبة تماما على $[1,+\infty[$ و $g(1,5)\times g(1,6)<0$
فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,5<\alpha<1,6$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ثانيا

1) لدينا $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$. نبين أن المنحنى (C_f) يقبل عند $-\infty$ و عند $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)}=0$$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ومنه

المنحنى (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=0$.

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$ ومنه المنحني

(C_f) يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=-1$.

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$.

f معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث

$$f'(x)=\frac{2\left(e^x-2x\right)-\left(e^x-2\right)(2x-2)}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{-2xe^x+4e^x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

3) استنتاج إشارة $f'(x)$ وإنجاز جدول تغيرات الدالة f .

$f'(x)$ لها نفس إشارة $g(x)$ ومنه :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبالتالي جدول تغيرات الدالة f هو :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4) حساب $f(1)$ ثم استنتاج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

لدينا $f(1)=0$ ونلخص جدول إشارة $f(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5) نبين أن $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ونستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا من الجزء الأول $g(\alpha)=0$ أي $(4-2\alpha)e^{\alpha}-4=0$ أي $e^{\alpha}=\dfrac{4}{4-2\alpha}=\dfrac{2}{2-\alpha}$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha}=\dfrac{2\alpha-2}{\dfrac{2}{2-\alpha}-2\alpha}=\dfrac{\alpha-1}{\dfrac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\dfrac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{1-2\alpha+\alpha^2}$

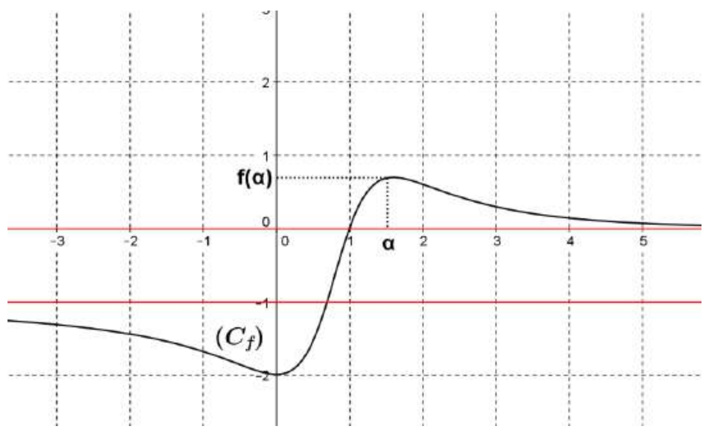
つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

أي $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$.

حصر العدد $f(\alpha)$: لدينا $1{,}59<\alpha<1{,}60$ وبإضافة -1 نجد $0{,}59<\alpha-1<0{,}60$ نأخذ المقلوب نجد $\dfrac{1}{0{,}60}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0{,}59}$ أي $1{,}66<\dfrac{1}{\alpha-1}<1{,}69$ وبإضافة -1 نجد $0{,}66<-1+\dfrac{1}{\alpha-1}<0{,}69$ أي $0{,}66<f(\alpha)<0{,}69$

6) أنشاء المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f).



ثالثا:

7) **المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي** m، عدد وإشارة حلول المعادلة $2x-2=(e^x-2x)m$.

$2x-2=(e^x-2x)m$ تكافئ $\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=m$ أي $f(x)=m$. حلول المعادلة المطلوبة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=m$:

- إذا كان $m<-2$ المعادلة لا تقبل حلول.
- إذا كان $m=-2$ للمعادلة حل مضاعف معدوم.
- إذا كان $-2<m<-1$ للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة.
- إذا كان $-1\leq m\leq 0$ للمعادلة حل وحيد موجب.
- إذا كان $0<m<f(\alpha)$ للمعادلة حلين موجبين.
- إذا كان $m=f(\alpha)$ للمعادلة حل مضاعف $x=\alpha$.
- إذا كان $m>f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول.

つづく

رابعا:

1) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=-f(x)$.

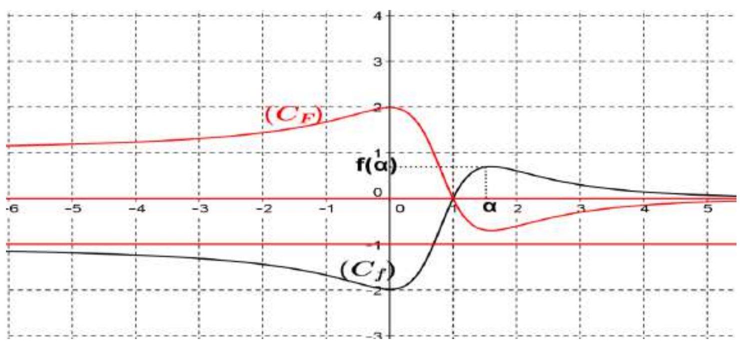
أ) حساب $F'(x)$ بدلالة $f'(x)$ واستنتاج إشارة $F'(x)$.

$F'(x)=-f'(x)$ و إشارة $F'(x)$ هي عكس إشارة $f'(x)$ أي

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	-	0	+	

ب) ننجز جدول تغيرات الدالة F وننشئ تمثيلها البياني (C_F) .

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	-	0	+	
$F(x)$	1	↗	2	↘	$-f(\alpha)$	↗	0



2) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=[f(x)]^2$

أ) حساب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $h'(x)$.

لدينا $h(x)=[f(x)]^2$ ومنه $h'(x)=2f(x)\times f'(x)$.

إشارة $h'(x)$ هي إشارة الجداء $2f(x)\times f'(x)$ أي

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	|	+	0	$-$	
$f(x)$		$-$	|	$-$	0	+	|	+	
$h'(x)$		+	0	$-$	0	+	0	$-$	

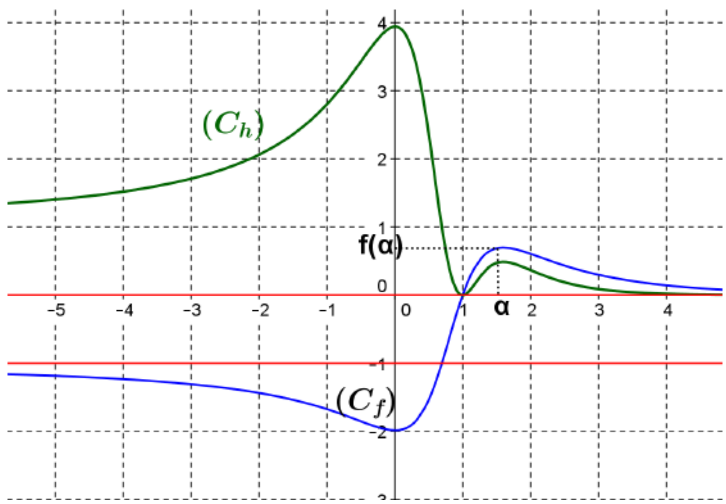
つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

ب) جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	$(f(\alpha))^2$	$\searrow$	0

ج) إنشاء (C_h)



3) لتكن u الدالة المعرفة كما يلي : $u(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

أ) مجموعة التعريف للدالة u : الدالة u معرفة إذا وفقط إذا كان $f(x)\neq 0$ أي من أجل $x\neq 1$

إذن $D_f=]-\infty\,,1[\cup]1\,,+\infty[$

ب)حساب $u'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $u'(x)$.

من أجل كل من D_f : $u'(x)=\dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$.

إشارة $u'(x)$ هي إشارة $-f'(x)$ أي

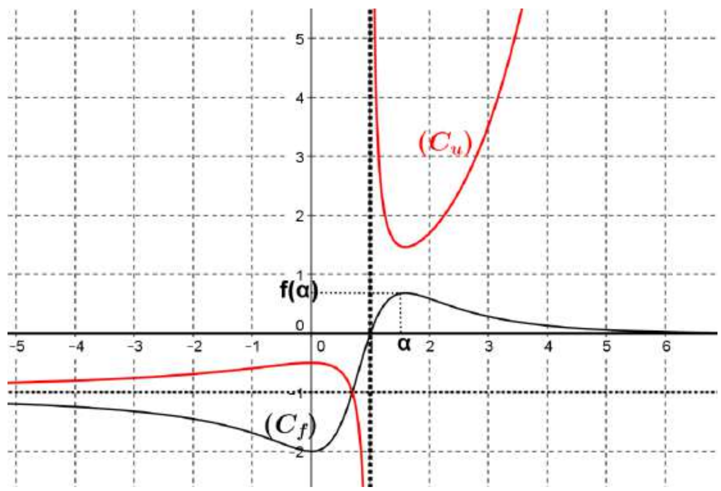
x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

つづく

ج)جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$u(x)$	-1	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{f(\alpha)}$	↗	$+\infty$

د) إنشاء (C_u)



4) لتكن v الدالة المعرفة كما يلي : $v(x)=\sqrt{f(x)}$

أ) مجموعة التعريف للدالة v : v معرفة إذا وفقط إذا كانت $f(x)\geq 0$ أي $D_v=[1,+\infty[$.

ب)حساب $v'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $v'(x)$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي v' حيث $v'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

إشارة $v'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.

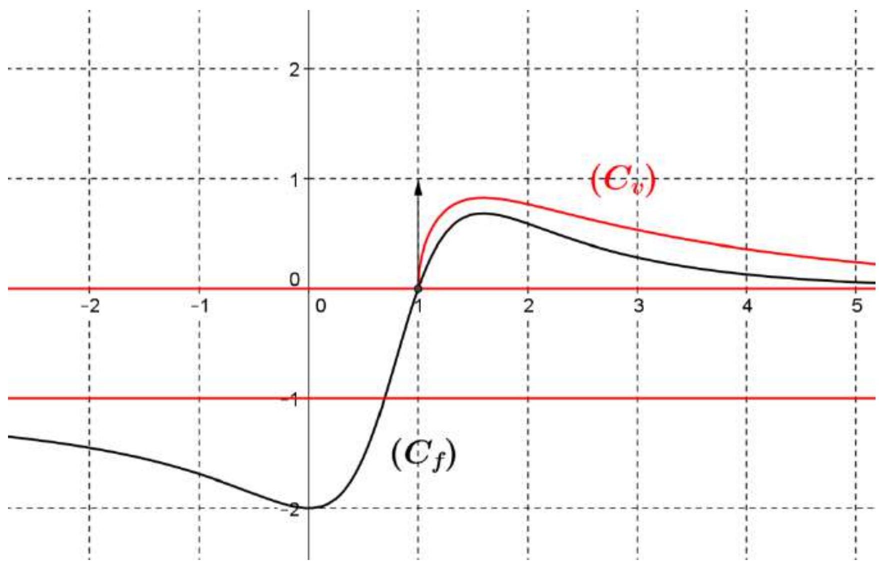
ج) جدول تغيرات الدالة v :

x	1		α		$+\infty$
$v'(x)$	‖	+	0	−	
$v(x)$	0	↗	$\sqrt{f(\alpha)}$	↘	0

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

د) إنشاء (C_v)



5) لتكن s الدالة المعرفة كما يلي: $s(x)=\ln f(x)$

أ) مجموعة التعريف للدالة s : s معرفة إذا وفقط إذا كانت $f(x)>0$ أي $D_s=]1,+\infty[$.

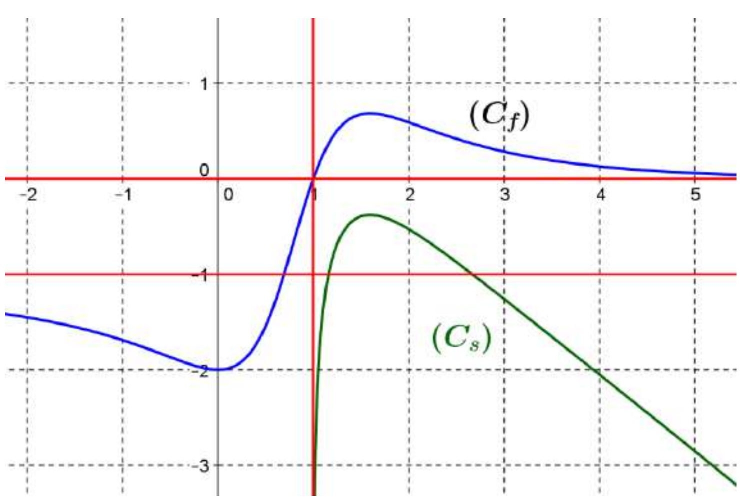
ب) حساب $s'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $s'(x)$.

الدالة s قابلة للإشتقاق على $]1,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي s' حيث $s'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

إشارة $s'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.

ج) جدول تغيرات الدالة s

x	1		α		$+\infty$
$s'(x)$		$+$	0	$-$	
$s(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$



د) إنشاء (C_s)

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

6) لتكن t الدالة المعرفة كما يلي : $t(x)=e^{f(x)}$

أ) مجموعة التعريف للدالة t : الدالة t معرفة على $\mathbb{R}$.

ب) حساب $t'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $t'(x)$.

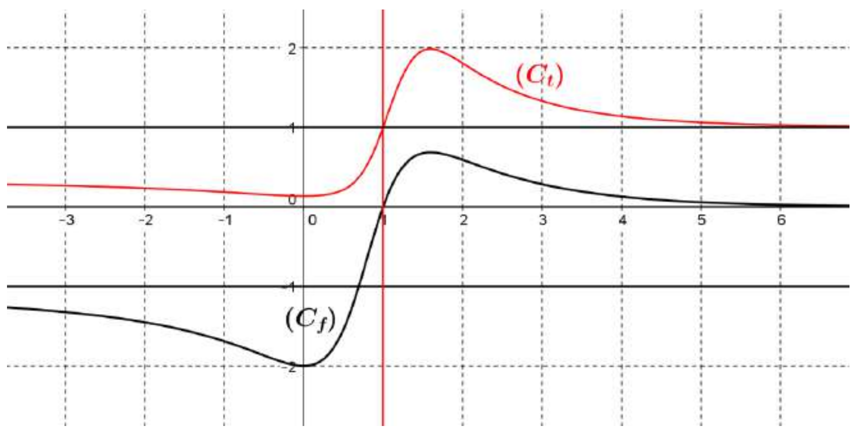
t قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي t' حيث $t'(x)=f'(x)e^{f(x)}$.

إشارة $t'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.

ج) جدول تغيرات الدالة t

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$t(x)$	e^{-1}	$\searrow$	e^{-2}	$\nearrow$	$e^{f(\alpha)}$	$\searrow$	1

د) إنشاء (C_t)



خامسا : ارفاق كل دالة بتمثيلها البياني

المنحني	(C_1)	(C_2)	(C_3)	(C_4)	(C_5)	(C_6)
هو التمثيل البياني للدالة.........	(C_v)	(C_s)	(C_t)	(C_h)	(C_F)	(C_u)

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 03

تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى)

الجزء الأول : $f_1(x)=xe^{-x}$

(1) (أ) نهاية الدالة f_1 عند $-\infty$: نعلم ان $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$

و نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$: نعلم حسب التزايد المقارن ان : $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=0$

(ب) دراسة تغيرات الدالة f_1 :

$f_1'(x)=1\times e^{-x}+x\times\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$ ومنه $f_1'(x)>0$ تعني $(1-x)e^{-x}>0$ أي $1-x>0$ اذن $x<1$

ومنه الدالة f_1 متزايدة من اجل $x<1$ ومتناقصة من اجل $x\succ1$ و $f_1'(x)=0$ من اجل $x=1$

(ج) المنحنى (C_k) لا يناسب (C_1) (التغيرات غير منسجمة) اذن $k\neq1$ اذن $k\succ1$, $k\geq2$

(2) (أ) $f_n(x)=x^ne^{-x}$

$f_n(0)=0^n\times e^{-0}=0$ ومنه فان كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة $O(0,0)$

و نلاحظ أيضا ان $f_n(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$ أي $B\left(1;\frac{1}{e}\right)\in C_n$ اذن كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة $B\left(1;\frac{1}{e}\right)$

(ب) من اجل $n\geq2$ فان المشتقة هي : $f_n'(x)=nx^{n-1}e^{-x}+x^n\left(-e^{-x}\right)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

اذن $f'_n(x)=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

(3) من اجل كل عدد حقيقي x : $f_3'(x)=x^2(3-x)e^{-x}$ و $f_3'(x)>0$ من اجل $x^2(3-x)e^{-x}>0$ أي

$3-x>0$ اذن $x<3$ وبالتالي الدالة f_3 متزايدة من اجل $x<3$ ومتناقصة من اجل $x\succ3$

وهذا يعني ان الدالة f_3 تقبل قيمة حدية كبرى عندما $x=3$

(4) (أ) المماس (T_k) له معادلة من الشكل : $y=f_k'(1)(x-1)+f_k(1)$

حيث $f_k(1)=\frac{1}{e}$ و $f_k'(1)=(k-1)e^{-1}=\frac{k-1}{e}$ اذن : $(T_k):y=\frac{k-1}{e}(x-1)+\frac{1}{e}=\frac{k-1}{e}x+\frac{-k+2}{e}$

(T_k) يقطع محور الفواصل عندما $y=0$ أي $\frac{k-1}{e}x+\frac{-k+2}{e}=0$ ومنه $x=-\frac{\frac{-k+2}{\cancel{e}}}{\frac{k-1}{\cancel{e}}}=\frac{k-2}{k-1}$

اذن (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)$

(ب) استنتاج قيمة العدد الصحيح k :

من معطيات التمرين المستقيم (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{4}{5};0\right)$ أي $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)=\left(\frac{4}{5};0\right)$

ومنه $\frac{k-2}{k-1}=\frac{4}{5}$ اذن $5(k-2)=4(k-1)$ وبالتالي قيمة العدد هي $k=6$

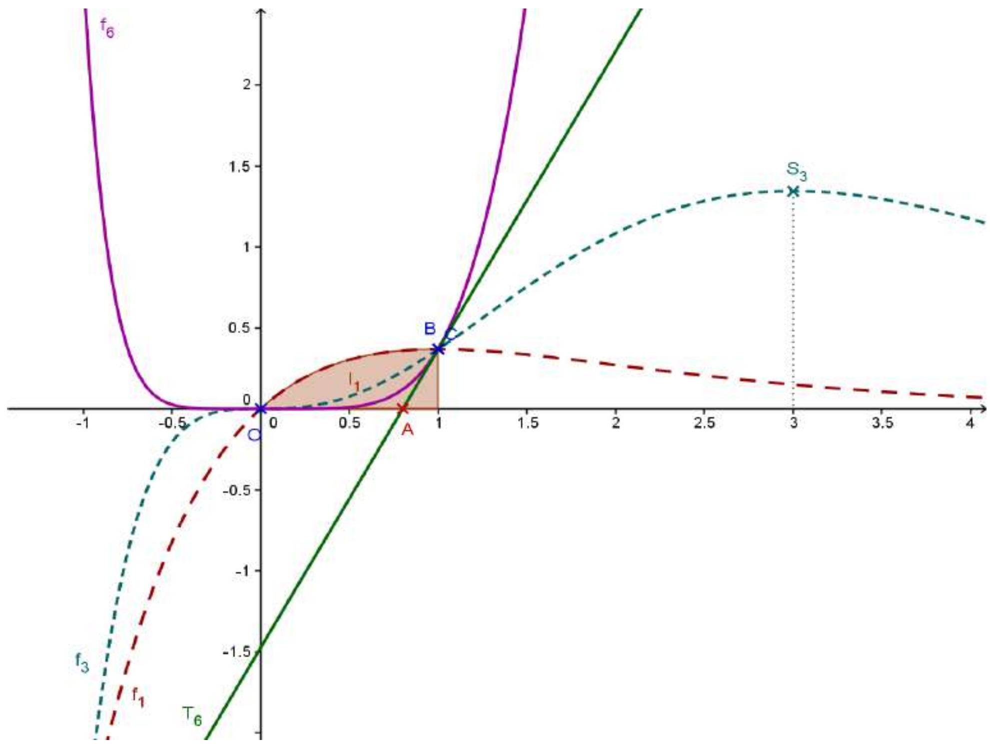
つづく

الجزء الثاني : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

(1) حساب (I_1) : $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

نضع $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ اذن نجد

$$I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)\times 1\,dx = \left[\left(-e^{-1}\right)-0\right] - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \left[\left(e^{-1}\right)-1\right] = 1-\frac{2}{e}$$



(2) (أ) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (I_n) :

من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان الدالة f_n موجبة على $[0,1]$. اذن يمكن تفسير هندسيا العدد I_n انه مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_n) ومحور الفواصل وبالمستقيمين الذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=1$

والتمثيلات البيانية (C_1) و (C_2) و (C_3) و (C_{10}) و (C_{20}) و (C_{30}) توحي ان المتتالية (I_n) متناقصة

(ب) برهان هذا التخمين بدراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n): $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

ومن خواص التكامل الخطية اذن : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x-1)x^n e^{-x}\,dx$

وعلى المجال $[0,1]$ لدينا $(x-1)x^n e^{-x} \le 0$ اذن $\int_0^1 (x-1)x^n e^{-x}\,dx \le 0$ ومنه $I_{n+1} - I_n \le 0$ وبالتالي $I_{n+1} \le I_n$

つづく

وهكذا اذن المتتالية (I_n) متناقصة

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

ج) $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ وبما ان $f_n(x)\geq 0$ فان $I_n\geq 0$ (محدودة من الأسفل) وبما ان المتتالية (I_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 نستنتج ان المتتالية (I_n) متقاربة .

د) حساب $\lim I_n$:

لدينا $0\leq x\leq 1$ ومنه $-1\leq -x\leq 0$ و $e^{-1}\leq e^{-x}\leq e^{0}$ وأيضا $x^ne^{-1}\leq x^ne^{-x}\leq x^n$ أي ان $x^ne^{-x}\leq x^n$

وبالمرور الى التكامل نجد : $\int_0^1 x^ne^{-x}\,dx\leq\int_0^1 x^n\,dx$ ومنه $I_n\leq\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

اذن $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ وباستعمال النهاية بالمقارنة نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty}0=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

التمرين 04

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول :

لدينا : $f_\alpha(x)=e^{2x}-2\alpha e^{x}+3$ ، حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$.

1) f مستمرة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة مركبة من دالة كثير حدود و دالة أسية ، أي :

$f'_\alpha(x)=2e^{2\alpha}-2\alpha e^{x}$ ، القيم الحدية للدالة f_α تحقق : $f'_\alpha(x)=0$ أي :

$2e^{2\alpha}-2\alpha e^{x}=0$ ، ومنه : $2e^{x}\left(e^{x}-\alpha\right)=0$ ، لدينا : $e^{x}\neq 0$ إذا : $e^{x}-\alpha=0$ أي : $e^{x}=\alpha$.

وهنا نميز حالتين :

أ- إذا كان : $\alpha\leq 0$ معناه : $e^{x}=\alpha$ غير محققة و عليه نقول أن لاتوجد قيم حدية للدالة f_α لما $\alpha\leq 0$.

ب- إذا كان : $\alpha\geq 0$ معناه : $e^{x}=\alpha$ تقبل حل وحيد x_α و هو : $\ln e^{x_\alpha}=\ln\alpha$ أي : $x_\alpha\ln e=\ln\alpha$ ، ومنه : $x_\alpha=\ln\alpha$

. أي نقول توجد قيمة حدية للدالة f_α لما $\alpha\geq 0$ وهي : $\omega_\alpha\left(x_\alpha;f\left(x_\alpha\right)\right)$.

2) لدينا لما $\alpha\geq 0$ ، $\omega_\alpha\left(x_\alpha;f\left(x_\alpha\right)\right)$ هي النقطة الحدية للدالة f_α :

✓ أي : $\begin{cases}x_\alpha=\ln\alpha\\ y_\alpha=f\left(x_\alpha\right)=f\left(\ln\alpha\right)=2e^{\ln\alpha}-2\alpha e^{\ln\alpha}+3\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x_\alpha=\ln\alpha\\ y_\alpha=\left(e^{\ln\alpha}\right)^2-2e^{\ln\alpha}+3\end{cases}$

أي : $\begin{cases}x_\alpha=\ln\alpha\\ y_\alpha=\alpha^2-2\alpha^2+3\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x_\alpha=\ln\alpha\\ y_\alpha=-\alpha^2+3\end{cases}$ ، ومنه : $\omega_\alpha\left(\ln\alpha;3-\alpha^2\right)$ لما : $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

✓ تعيين مجموعة النقط ω_α لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$:

لدينا إحداثيات ω_α هي x_α و y_α حيث : $y_\alpha=f\left(x_\alpha\right)$ ، لدينا لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$ فإن : x_α يمسح $\mathbb{R}$ و y_α صورة x_α بالدالة f_α ، إذن نقول : مجموعة النقط ω_α هي المنحني (C_α) منحنى الدالة f_α .

($x_\alpha=\ln\alpha$)، لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$ فإن : x_α يمسح $\mathbb{R}$.

つづく

الجزء الثاني :

نضع $\alpha=1$ ، أي : $f_1(x)=2e^{2x}-2e^x+3$ ، أي : $f_1'(x)=2e^{2x}-2e^x$.

1) لدينا : $\alpha=1>0$ ومنه : (C_1) يقبل قيمة حدية ω_1 ، حيث: $\omega_1(x_1;f(x_1))$ ،

أي : $\begin{cases} x_1=\ln 1=0 \\ y_1=f(0)=2 \end{cases}$ ومنه : $\omega_1(0;2)$.

• $f_1'(x)=2e^{2x}-2e^x$ أي : $f_1'(x)=2e^x(e^x-1)$ ، إشارة f_1' من إشارة (e^x-1) ، أي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	3	$\searrow$	$f_1(0)=2$	$\nearrow$	$+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{2x}-2e^x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(e^x-2)+3=+\infty$. أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}-2e^x+3)=3$ ، أي : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=3$

و منه : $y=3$ مقارب أفقي للمنحني (C_1) بجوار $-\infty$.

2) تعيين معادلة للمماس (T) لـ (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$:

$(T): y=f_1'(\ln 2)(x-\ln 2)+f_1(\ln 2)$ ، $\begin{cases} f_1'(\ln 2)=2e^{2\ln 2}-2e^{\ln 2}=\left(2e^{\ln 2}\right)^2-4=8-4=4 \\ f_1(\ln 2)=e^{2\ln 2}-2e^{\ln 2}+3=4-4+3=3 \end{cases}$

و منه : $(T): y=4(x-2\ln)+3$ ، أي : $(T): y=4x-4\ln 2+3$.

4) لدينا : $(D_m): y=mx+3-m\ln 2$:

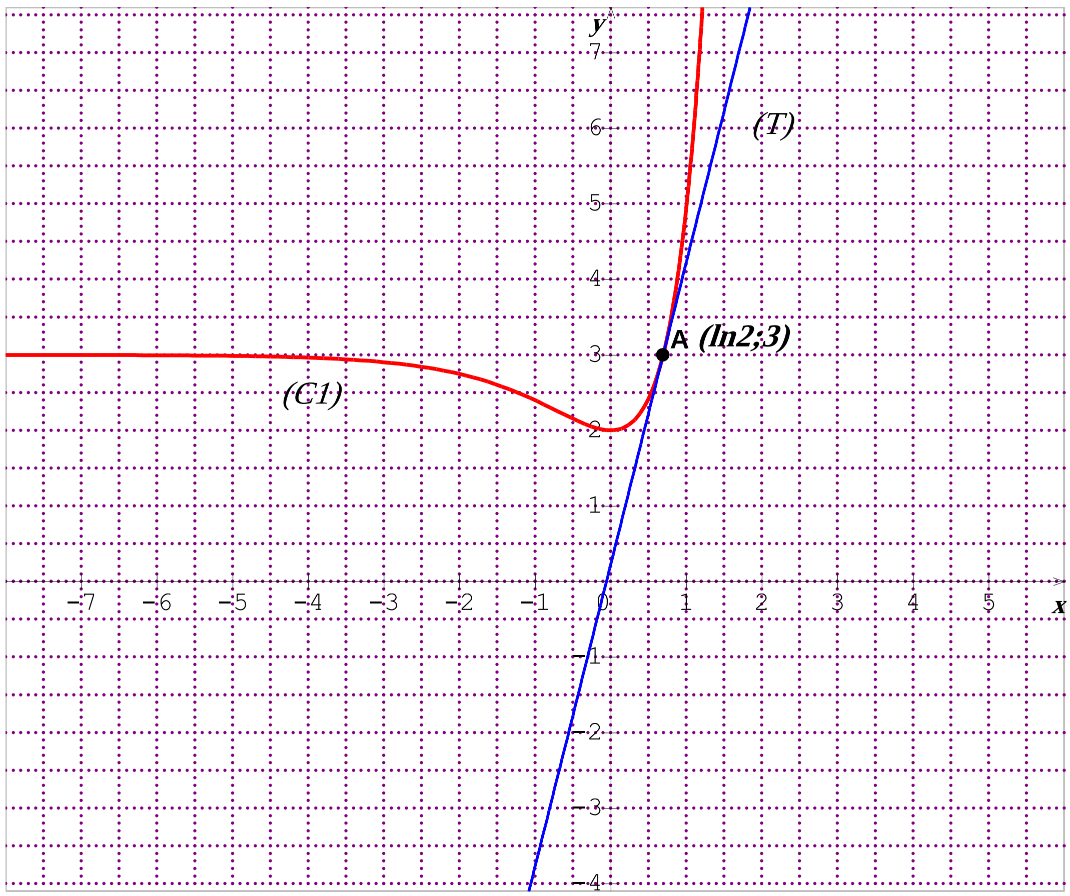
• تبيين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياها :

$y=mx+3-m\ln 2$ أي : $y-mx-3+m\ln 2=0$ ومنه : $m(\ln 2-x)+(y-3)=0$

معناه أن : $\ln 2-x=0$ و $y-3=0$ ، وعليه : $x=\ln 2$ و $y=3$ ، ومنه من أجل كل m من $\mathbb{R}$ المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة ذات الإحداثيات $A(\ln 2;3)$.

つづく

3) رسم كلا من (T) و (C_1) : باستخدام مبرمج (sine qua non) :



- لنناقش بيانيا حسب قيم m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) :

لدينا : (T) هو (D_4) ، كما لدينا : (D_m) هي مستقيمات تشمل نقطة ثابتة لما m يمسح $\mathbb{R}$ ،
ومنه نحن في حالة المناقشة الدورانية :

✓ لما : $m \le 0$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطة وحيدة هي : $A(\ln 2;3)$.

✓ لما : $0 < m < 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداهما هي $A(\ln 2;3)$.

✓ لما : $m = 4$ (C_1) يمس (D_m) في النقطة $A(\ln 2;3)$.

✓ لما : $m > 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداهما $A(\ln 2;3)$.

5) لدينا : $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ و $f_1(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$.

- كتابة $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$: $g(x) + f_1(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3 + e^{2x} - 2e^x + 3 = 6$ ، وعليه : $g(x) = 6 - f_1(x)$

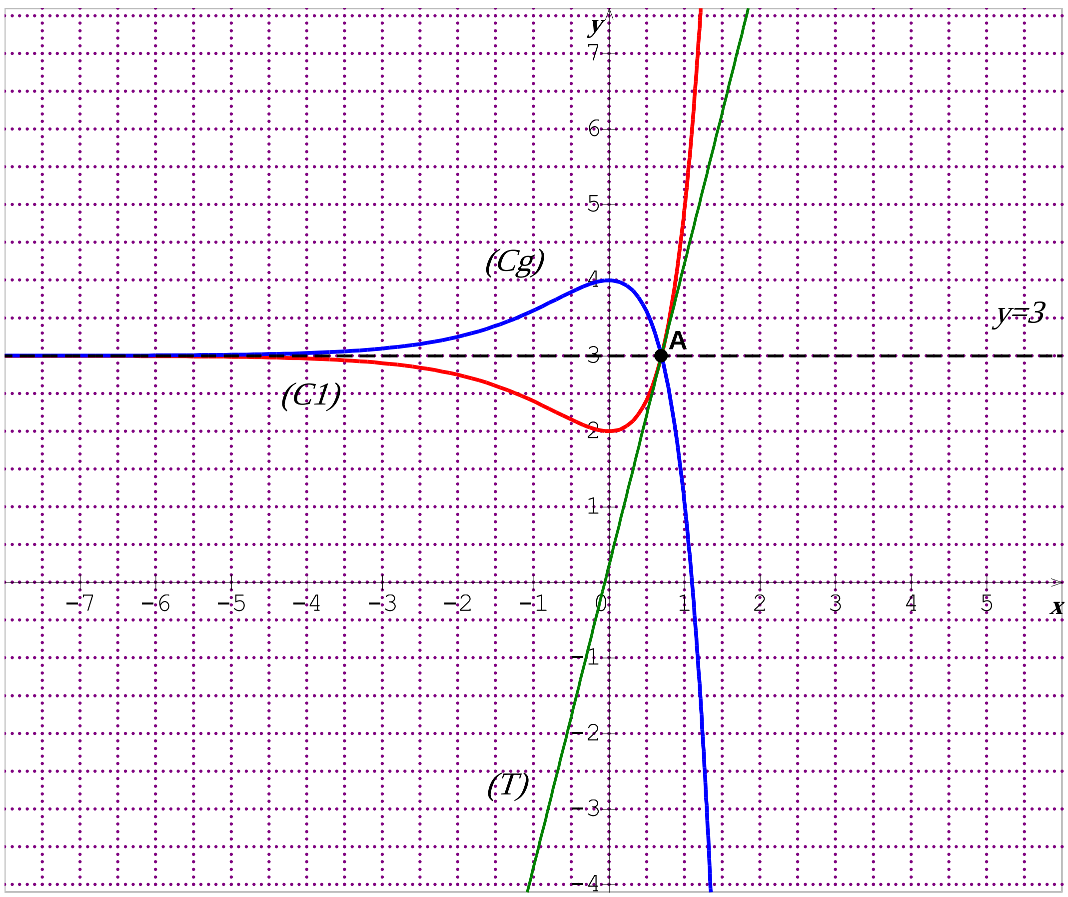
つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

لدينا: $g(x)+f_1(x)=6$ ومنه (C') و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y=\frac{6}{2}$ أي: $y=3$.

ملاحظة : إذا كان لدينا $f(x)+g(x)=2d$ نقول أن: (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة للمستقيم: $y=\frac{2d}{2}$ أي : $y=d$ ، ليكن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة للمستقيم $y=d$ معناه أن :

$f(x)+g(x)=f(x)+(2d-f(x))$ ومنه : $f(x)+g(x)=2d$



مسائل المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 05

استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر)

الجزء الأول

1 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_0(x)}{x}$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

التفسير الهندسي : المنحنى (C_0) يقبل $\boxed{\text{فرع قطع مكافئ}}$ باتجاه محور التراتيب وَ بجوار $+\infty$.

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$

التفسير الهندسي : المنحنى (C_0) يقبل مستقيم مقارب معادلته $\boxed{y=0}$ (محور الفواصل) بجوار $-\infty$.

2 أ-إثبات أن الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

نعلم أن الدالتان $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x^2$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي جداءهما أيضاً دالة قابة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن $\boxed{f_0 \text{ دالة قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}}$.

حساب $f'_0(x)$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'_0(x) = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = (2x+x^2)e^x$

إذن : $\boxed{f'_0(x) = x(x+2)e^x}$

ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة f_0 :

إشارة $f'_0(x)$ هي من إشارة $x(x+2)$ ، لأن : $e^x > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

الجدول التالي يوضح إشارة $f'_0(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✓ إذا كان $x \in]-2;0[$ فإن $f'_0(x) < 0$ و بالتالي f_0 دالة متناقصة تماماً .

✓ إذا كان $x \in]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$ فإن $f'_0(x) \geq 0$ و بالتالي f_0 دالة متزايدة .

3 جدول تغيرات الدالة f_0 :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_0(x)$	0	↗	$f_0(2) = 4e^{-2}$	↘	$f_0(0) = 0$	↗	$+\infty$

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

استنتاج مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة f_0 تقبل 0 كقيمة حدية صغرى لها من أجل $x = 0$ ، إذن : $f_0(x) \geq 0$

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$ هي : $\boxed{S =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[}$.

4 إثبات أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$: $0 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-x-2}$

لدينا من جدول تغيرات الدالة f_0 على المجال $]-\infty; 0[$: $0 < f_0(x) \leq 4e^{-2}$ منه : $0 < x^2e^x \leq 4e^{-2}$

نقسم الطرفين على $4x^2$ الموجب نجد : $0 < \frac{x^2}{4} \leq \frac{e^{-2}}{e^x}$ إذن : $\boxed{0 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-2-x}}$.

5 إثبات أن (C_0) يقبل نقطتي إنعطاف :

لدينا من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$: $f'_0(x) = (x^2 + 2x)e^x$

منه : $f''_0(x) = (x^2 + 2x)'e^x + (x^2 + 2x)(e^x)' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$

إشارة $f''_0(x)$ هي من إشارة $(x^2 + 4x + 2)$ ، لأن : $e^x > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

مميز المعادلة $x^2 + 4x + 2 = 0$ هو : $\Delta = 8 > 0$ إذن للمعادلة حلان متمايزان هما : $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ وَ $x_2 = -2 + \sqrt{2}$

الجدول التالي يوضح إشارة $f''_0(x)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + 4x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''_0(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من جدول الإشارة نلاحظ أن $f''_0(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها عند x_1 وَ x_2 و بالتالي المنحنى (C_0) يقبل نقطتي إنعطاف هما :

$A(x_1; f_0(x_1))$ وَ $B(x_2; f_0(x_2))$.

6 كتابة معادلة المماس (Δ) عند الفاصلة 0 :

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y = f_0'(0)(x - 0) + f_0(0)$ مع : $f_0'(0) = f_0(0) = 0$

إذن : $\boxed{(\Delta) : y = 0}$.

7 أ- هل يمكن تعيين x_0 ؟

المماس (T) يوازي حامل محور الفواصل معناه : $f_0'(x_0) = 0$ و حسب ما سبق نجد : $\boxed{x_0 = 0}$ أو $\boxed{x_0 = -2}$

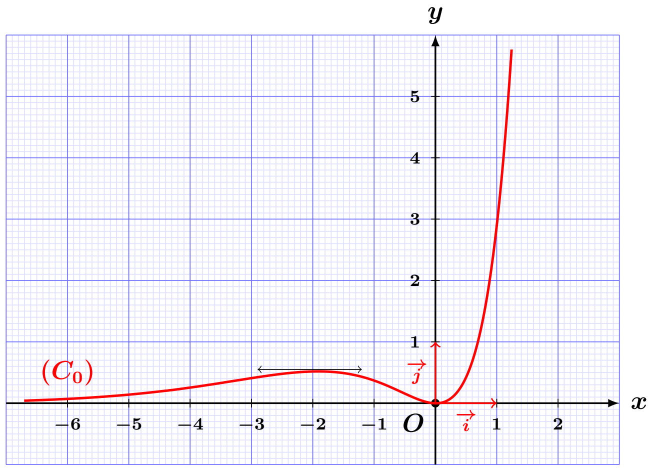
ب- هل يمكن تعيين x_0 ؟

يكون المماس (T) عمودي على المستقيم (Δ) معناه (T) يكون يوازي محور التراتيب ، في هذه الحالة تكون الدالة f_0 غير قابلة للاشتقاق عند x_0 ، وَ حسب السؤال 2 لدينا f_0 دالة قابلة للاشتقاق على R ، و بالتالي $\boxed{\text{لا توجد قيمة لـ } x_0}$.

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

8 رسم كل من المماس (Δ) وَ المنحنى (C_0) :



9 المناقشة البيانية :

لدينا من أجل كل $m > 0$ وَ $x > 0$: $2\ln|x| + x - \ln m = 0$ تكافئ: $\ln x^2 + x - \ln m = 0$ تكافئ: $\ln x^2 + x = \ln m$

تكافئ: $e^{\ln x^2 + x} = m$ تكافئ: $e^{\ln x^2} \times e^x = m$ تكافئ: $x^2 e^x = m$ أي: $f_0(x) = m$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_0) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل .

✓ إذا كان $m \in]0; 4e^{-2}[$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول ، حل موجب و حلين سالبين .

✓ إذا كان $m = 4e^{-2}$، المعادلة تقبل حلان ، أحدهما موجب و الأخر مضاعف سالب .

✓ إذا كان $m \in]0; 4e^{-2}[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد موجب .

الجزء الثاني ---------------------- $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)\, e^x$ ----------------------

1 حساب كل من $f_0^{(1)}(x)$ ، $f_0^{(2)}(x)$ ، $f_0^{(3)}(x)$:

لدينا: $f_0^{(1)}(x) = f'_0(x)$ منه: $\boxed{f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)\, e^x}$

وَ: $f_0^{(2)}(x) = f''_0(x)$ منه: $\boxed{f_0^{(2)}(x) = (x^2 + 4x + 2)\, e^x}$

وَ: $f_0^{(3)}(x) = [f''_0(x)]' = (x^2 + 4x + 2)' e^x + (x^2 + 4x + 2)(e^x)'$ منه: $\boxed{f_0^{(3)}(x) = (x^2 + 6x + 6)\, e^x}$

2 لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 1$: $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n) . e^x$

✓ أولاً نقوم بتخمين عبارة $f_0^{(n)}(x)$ بدلالة n ، و حسب السؤال الأول نلاحظ أن :

$$f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)\, e^x = (x^2 + (2 \times 1)\, x + 0 \times 1)\, e^x$$
$$f_0^{(2)}(x) = (x^2 + 4x + 2)\, e^x = (x^2 + (2 \times 2)\, x + 1 \times 2)\, e^x$$
$$f_0^{(3)}(x) = (x^2 + 6x + 6)\, e^x = (x^2 + (2 \times 3)\, x + 2 \times 3)\, e^x$$

إذن من أجل كل $n \geq 1$ لدينا: $\boxed{f_0^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + (n-1))\, e^x}$ حيث: $\boxed{a_n = 2n}$ وَ $\boxed{b_n = (n-1)\, n}$

✓ ثانيا نبرهن على صحة التخمين بالتراجع و لتكن الخاصية $p(n)$

-نتحقق من صحة $p(1)$: لدينا من أجل $n = 1$، $f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)\, e^x = f'_0(x)$ منه $p(1)$ محققة .

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

-نفرض صحة $p(n)$ أي : $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x$

-نبرهن على صحة $p(n+1)$ أي : $f_0^{(n+1)}(x) = (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1))e^x$

لدينا :

$$\begin{aligned} f_0^{(n+1)}(x) &= \left[f_0^{(n)}(x)\right]' \\ &= \left[(x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x\right]' \\ &= (x^2 + 2nx + (n-1)n)'e^x + (x^2 + 2nx + (n-1)n)(e^x)' \\ &= (2x + 2n)e^x + (x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x \\ &= (2x + 2n + x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x \\ &= (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1))e^x \end{aligned}$$

منه $p(n+1)$ صحيحة و بالتالي من أجل كل $n \geq 1$ ، التخمين صحيح (الفرضية صحيحة) .

3 لنتحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ ، $a_{n+1} = a_n + 2$ وَ $b_{n+1} = b_n + a_n$:

لدينا : $a_n = 2n$ منه : $a_{n+1} = 2(n+1)$ و منه : $a_{n+1} = 2n + 2$ أي : $\boxed{a_{n+1} = a_n + 2}$.

وَ لدينا : $b_n = (n-1)n$ منه : $b_{n+1} = n(n+1)$ و منه : $b_{n+1} = n^2 + n$ و منه : $b_{n+1} = n^2 \underbrace{-n + 2n}_{n}$

و منه : $b_{n+1} = n(n-1) + 2n$ إذن : $\boxed{b_{n+1} = b_n + a_n}$.

4 إثبات أن (a_n) متتالية حسابية :

لدينا : $a_{n+1} = a_n + 2$ إذن حسب التعريف يتبين أن (a_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = 2}$.

5 لنبين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون : $b_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n$

لدينا : $a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$ منه : $a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{n}{2}(2 + 2n)$

أي : $a_1 + a_2 + ... + a_n = n(1+n)$ إذن : $\boxed{a_1 + a_2 + ... + a_n = b_{n+1}}$

الجزء الثالث -- $k(x) = |x|\sqrt{e^x}$ --

1 كتابة $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

نعلم أن : $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$ منه : $k(x) = \begin{cases} x\sqrt{e^x} & , x \geq 0 \\ -x\sqrt{e^x} & , x \leq 0 \end{cases}$

-دراسة استمرارية الدالة k عند 0 :

لدينا : $k(0) = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to 0} k(x) = 0$ منه : $\lim\limits_{x\to 0} k(x) = k(0) = 0$ ، إذن $\boxed{\text{الدالة } k \text{ مستمرة عند } 0}$

2 دراسة قابلية اشتقاق الدالة k على يمين و على يسار 0 :

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x\sqrt{e^x}}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{e^x} = 1$ ، منه الدالة k قابلة للاشتقاق على يمين 0

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{-x\sqrt{e^x}}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} -\sqrt{e^x} = -1$ ، منه الدالة k قابلة للاشتقاق على يسار 0

النتيجة : بما أن النهاية من اليمين تختلف عن النهاية من اليسار فإن $\boxed{\text{الدالة } k \text{ غير قابلة للاشتقاق عند } 0}$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_k) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $O(0;0)$ وَ تسمى نقطة زاوية .

つづく

3 كتابة معادلتي المماسين لـ (C_k) عند الفاصلة 0 :

لدينا معادلة المماس على يمين 0 من الشكل : $y = k'_d(0)(x-0) + k(0)$ حيث : $k'_d(0) = 1$ وَ $k(0) = 0$

منه معادلة المماس من يمين 0 هي: $\boxed{y = x}$.

لدينا معادلة المماس على يسار 0 من الشكل : $y = k'_g(0)(x-0) + k(0)$ حيث : $k'_g(0) = -1$ وَ $k(0) = 0$

منه معادلة المماس من يسار 0 هي: $\boxed{y = -x}$.

4 لنبين أن الدالة k هي مركب دالتين عدديتين أحدهما الدالة f_0:

لدينا : $k(x) = |x|\sqrt{e^x}$ منه : $k(x) = \sqrt{x^2}\sqrt{e^x}$ و منه : $k(x) = \sqrt{x^2e^x}$ أي : $\boxed{k(x) = \sqrt{f_0(x)}}$

إذن الدالة k هي مركب دالتين ، الأولى هي الدال f_0 وَ الثانية هي الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$.

5 لنبين أنه من أجل كل من $\mathbb{R}$ أن : $2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x) \times \sqrt{f_0(x)}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $k(x) = \sqrt{f_0(x)}$ منه : $k'(x) = \dfrac{f_0'(x)}{2\sqrt{f_0(x)}}$ و منه : $k'(x) = \dfrac{f_0'(x) \times \sqrt{f_0(x)}}{2f_0(x)}$

إذن : $\boxed{2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x) \times \sqrt{f_0(x)}}$.

6 استنتاج اتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ هي من إشارة $f'_0(x)$ ، و حسب الجزء الأول في السؤال 2-ب نستنتج ما يلي :

✓ إذا كان $x \in]-2;0[$ فإن $k'(x) < 0$ و بالتالي k دالة متناقصة تماماً .

✓ إذا كان $x \in]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$ فإن $k'(x) \geq 0$ و بالتالي k دالة متزايدة .

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	0	↗	$k(-2) = 2\sqrt{e^{-2}}$	↘	$k(0) = 0$	↗	$+\infty$

7 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{k(x)}{x}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{k(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\,e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

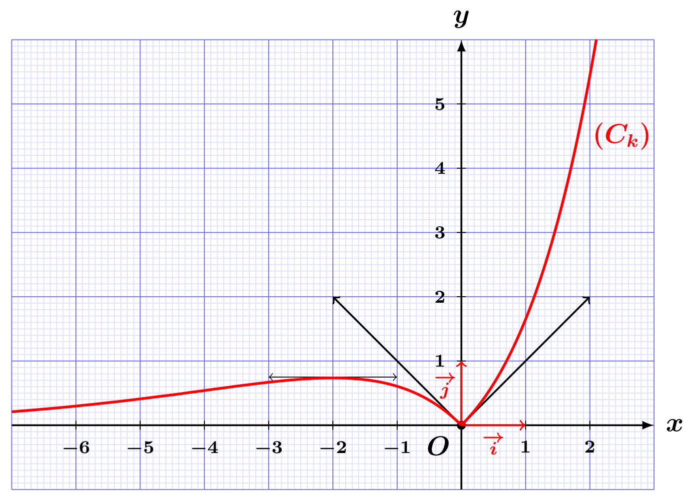
التفسير الهندسي :

المنحنى (C_k) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب .

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

8 رسم المنحنى (C_k) :



9 المناقشة البيانية :

لدينا : $|x|\sqrt{e^x}+x-m=0$ منه : $|x|\sqrt{e^x}=-x+m$ أي : $k(x)=-x+m$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_k) مع المستقيمات الموازية لنصف المماس من يسار 0

✓ إذا كان $m\in]-\infty;0[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد سالب .

✓ إذا كان $m=0$ ، المعادلة تقبل حل وحيد معوم .

✓ إذا كان $m\in]0;+\infty[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد موجب .

الجزء الرابع -- $f_\alpha(x)=(x-\alpha)^2e^x$ --

1 حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\alpha(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\alpha)^2e^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-2\alpha x+\alpha^2\right)e^x=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x-2\alpha xe^x+\alpha^2e^x\right)=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

2 لنثبت أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'_\alpha(x)=(2+x-\alpha)(x-\alpha)e^x$:

الدالة f_α معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'_\alpha(x)=\left[(x-\alpha)^2\right]'e^x+(x-\alpha)^2(e^x)'$

منه : $f'_\alpha(x)=2(x-\alpha)e^x+(x-\alpha)^2e^x$ و منه : $f'_\alpha(x)=\left[2(x-\alpha)+(x-\alpha)^2\right]e^x$

إذن : $\boxed{f'_\alpha(x)=(x-\alpha)(2+x-\alpha)e^x}$.

3 دراسة اتجاه تغير الدالة f_α :

إشارة $f'_\alpha(x)$ هي من إشارة $(x-\alpha)(2+x-\alpha)$ لأن : $e^x>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f'_\alpha(x)=0$ تكافئ : $(x-\alpha)(2+x-\alpha)=0$ أي $(x=\alpha$ أو $x=\alpha-2)$

つづく

الجدول التالي يوضح إشارة $f'_\alpha(x)$:

x	$-\infty$		$\alpha-2$		α		$+\infty$
$x-\alpha$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2-\alpha$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✓ إذا كان $x \in]\alpha-2;\alpha[$ فإن $f'_\alpha(x) < 0$ و بالتالي f_α دالة متناقصة تماماً .

✓ إذا كان $x \in]-\infty;\alpha-2] \cup [\alpha;+\infty[$ فإن $f'_\alpha(x) \geq 0$ و بالتالي f_α دالة متزايدة .

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$\alpha-2$		α		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{\alpha-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 حساب كل من $f''_\alpha(x)$ وَ $f'''_\alpha(x)$:

لدينا : $f'_\alpha(x) = (x-\alpha)(2+x-\alpha)e^x$

منه : $f''_\alpha(x) = [x^2+(4-2\alpha)x+\alpha^2-4\alpha+2]e^x$

وَ : $f'''_\alpha(x) = [x^2+(6-2\alpha)x+\alpha^2-6\alpha+6]e^x$

5 لنبين بالتراجع على العدد الطبيعي n الغير معدوم أن : $f_\alpha^{(n)}(x) = \left[(x+n-\alpha)^2-n\right]e^x$

-نتحقق من صحة $p(1)$: لدينا من أجل $n=1$.

$$f_\alpha^{(1)}(x) = \left[(x+1-\alpha)^2-1\right]e^x = (x+1-\alpha-1)(x+1-\alpha+1)e^x = (x-\alpha)(x+2-\alpha)e^x$$

أي $f_\alpha^{(1)}(x) = f'_\alpha(x)$ منه $p(1)$ محققة .

-نفرض صحة $p(n)$ أي : $f_\alpha^{(n)}(x) = \left[(x+n-\alpha)^2-n\right]e^x$

-نبرهن على صحة $p(n+1)$ أي : $f_\alpha^{(n+1)}(x) = \left[(x+n+1-\alpha)^2-(n+1)\right]e^x$

لدينا :

$$\begin{aligned}
f_\alpha^{(n+1)}(x) &= \left[f_\alpha^{(n)}(x)\right]' \\
&= \left[\left[(x+n-\alpha)^2-n\right]e^x\right]' \\
&= \left[(x+n-\alpha)^2-n\right]'e^x + \left[(x+n-\alpha)^2-n\right](e^x)' \\
&= 2(x+n-\alpha)e^x + \left[(x+n-\alpha)^2-n\right]e^x \\
&= \left[2(x+n-\alpha)+(x+n-\alpha)^2-n\right]e^x \\
&= \left[\underbrace{(x+n-\alpha)^2+2(x+n-\alpha)+1}-1-n\right]e^x \\
&= \left[(x+n-\alpha+1)^2-(1+n)\right]e^x
\end{aligned}$$

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

منه $p(n+1)$ صحيحة و بالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $f_\alpha^{(n)}(x) = \left[(x+n-\alpha)^2 - n\right] e^x$.

6 لنبين أن كل المنحنيات (C_α) تقبل نقطتي انعطاف فاصلتيهما x_1 و x_2 :

لدينا : $f''_\alpha(x) = 0$ منه : $x^2 + (4-2\alpha)x + \alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$ أي : $(x+2-\alpha)^2 - 2 = 0$

منه : $(x+2-\alpha)^2 = 2$ ومنه : $(x+2-\alpha = \sqrt{2}$ أو $x+2-\alpha = -\sqrt{2})$

أي : $(x = \alpha + \sqrt{2} - 2$ أو $x = \alpha - \sqrt{2} - 2)$

الجدول التالي يوضح إشارة $f''_\alpha(x)$:

x	$-\infty$		$\alpha-\sqrt{2}$		$\alpha+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من جدول الإشارة نلاحظ أن $f''_\alpha(x)$ ينعدم و يغير من إشارته من أجل $x_1 = \alpha + \sqrt{2} - 2$ وَ $x_2 = \alpha - \sqrt{2} - 2$

و بالتالي المنحنى (C_α) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $\boxed{A_\alpha(x_1; f_\alpha(x_1))}$ وَ $\boxed{B_\alpha(x_2; f_\alpha(x_2))}$.

7 دراسة اتجاه تغير الدالةكيف نختار قيمة α حتى يكون : $x_1 < 0 < x_2$ ؟

يكون $x_1 < 0 < x_2$ لما $x_1 \times x_2 < 0$ منه : $\left(\alpha - \sqrt{2} - 2\right)\left(\alpha + \sqrt{2} - 2\right) < 0$ و منه : $(\alpha-2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 < 0$

و منه : $(\alpha-2)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2$ أي : $|\alpha - 2| < 2$ و بالتالي : $\boxed{-\sqrt{2}+2 < \alpha < \sqrt{2}+2}$.

8 التعرف على القيم المختلفة للوسيط α :

لدينا من جدول تغيرات الدالة f_α أن المنحنيات (C_α) تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x = \alpha$

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = -1$ يمثل (C_{-1}) أي $\alpha = -1$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 0$ يمثل (C_0) أي $\alpha = 0$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 1$ يمثل (C_1) أي $\alpha = 1$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 2$ يمثل (C_2) أي $\alpha = 2$.