الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية -النهايات-

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 02

بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

- النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال: $$\lim_{x\to-\infty}(2x^2+x+3)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=+\infty$$

- النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2}\right)=3$$

حالات عدم التعيـــين:

① $\infty-\infty$ ② $0\times\infty$ ③ $\frac{\infty}{\infty}$ ④ $\frac{0}{0}$

طرق إزالة حالات عدم التعيـــين:

1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ حيث: $f(x_0) = g(x_0) = 0$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهما على الشكل: $(x - x_0)Q(x)$ ثم نختزل الكسر

ونحسب النهاية من جديد:

مثال 1: $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{4x+7}{x+3}\right) = \frac{11}{4}$$

مثال 2: $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+8}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to -2}\left(\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}\right) = \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-2x+4}{x-2}\right) = -3$$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2 + 3x - 7$ على الشكل: $(x-1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax + b$ ومنه:

$$(x-1)Q(x) = (x-1)(ax+b) = ax^1 + (b-x)x - b$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b - a = 3 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x-1)(4x+7)$$

ط2: القسمة الإقليدية:

مثال:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+8 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3-2x^2} & x^2-2x+4 \\
\quad -2x^2+8 & \\
\quad \underline{+2x^2+4x} & \\
\quad +4x+8 & \\
\quad \underline{-4x-8} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

مثال: $p(x)=4x^2+3x-7$ ،$x_0=1$

معاملات $p(x)$	$c=-7$	$b=3$	$a=4$	
الجذر x_0			$\downarrow$	$x_0=1$
معاملات $Q(x)$	$c'=0$	$b'=7$	$a'=4$	

$$
\begin{cases}
a'=a=4 \\
b'=aa'+b=1(4)+3=7 \\
c'=x_0b'+c=1(7)-7=0
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow 4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$$

2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال1

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right) = \frac{1}{2}$$

مثال2:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{x+8}+3)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{(1-x)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(-\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} \right) = -\frac{3}{2}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال3)

أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال4)

مثال3:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x+1-\sqrt{x^2+x-2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(x+1-\sqrt{x^2+x-2})(x+1+\sqrt{x^2+x-2})}{(x+1+\sqrt{x^2+x-2})} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(x+1)^2-(x^2+x-2)}{x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1+|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)} \right) \quad (x \to +\infty \Rightarrow |x| = x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \right) = \frac{1}{2}$$

مثال4:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)\Rightarrow(x\to-\infty\Rightarrow|x|=-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(\underbrace{2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}_{\to1}\right)\right)=-\infty$$

2) استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=f'(2)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\sqrt{x-1};f(2)=1;f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

الخليل للرياضيات

مثال 2:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)=1$$

$$f(x)=\sin(x)\,;f(0)=0;f'(x)=\cos(x)$$

نهاية دالة مركبة:

$$f=v\circ u:\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}u(x)=b\\ \lim\limits_{x\to v}v(x)=c\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=c$$

مثال:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}}_{f(x)}\right);\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}\left(\underbrace{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}_{u(x)}\right)=4\\ \lim\limits_{x\to 4}\left(\underbrace{\sqrt{x}}_{u(x)}\right)=2\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}f(x)=2$$

النهايات بالمقارنة:

الحالة ①:

$$\begin{cases}g(x)\le f(x)\le h(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=l$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + \cos(x)}{x + 1} \right)$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 2x - 1 \leq 2x + \cos(x) \leq 2x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 1}{x + 1} \leq \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

ملاحظة: المتراجحة لم تتغير لأنه لما $(x \to +\infty)$ فإن: $(x + 1 > 0)$

أما إذا كان $(x \to -\infty)$ فإن: $(x + 1 < 0)$، منه تتغير المتراجحة عند القسمة على $(x + 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{x + 1} \leq \dfrac{2x + \cos(x)}{x + 1} \leq \dfrac{2x + 1}{x + 1} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x - 1}{x + 1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{x + 1} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} = 2$$

الحالة ②:

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{2 - \sin(x)} \right)$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\sin(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 - \sin(x) \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq x$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2-\sin(x) \geq \dfrac{x}{3}} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)=+\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2-\sin(x)}\right)=+\infty$$

الحالة ③:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2+x\cos(x))$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq x\cos(x) \leq -x$$

$$\Rightarrow -2x^2+x \leq -2x^2+\cos(x) \leq -2x^2-x$$

$$\begin{cases} -2x^2+\cos(x)-2x^2-x \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2-x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(-2x^2+\cos(x))=-\infty$$

ملاحظة:

غالبا ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin(x)\,;\cos(x))$ لما x يؤول $\pm\infty$.

حيث أن هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $\pm\infty$.

ولحصر $f(x)$ دائما ننطلق من حصر الدالة المثلثية $(\sin(x)\,;\cos(x))$ بين (-1) و $(+1)$.

المستقيمات المقاربة:

① $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ $\Rightarrow$ المستقيم $x = a$ مستقيم مقارب عمودي

(يوازي محور التراتيب)

② $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ $\Rightarrow$ المستقيم $y = b$ مستقيم مقارب أفقي

(يوازي محور الفواصل)

③ $\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$ $\Rightarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل

◄ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ►