المستوى: الثالثة علوم تجريبية — أكتوبر 2023

الفرض الأوّل في مادة الرياضيات — المدة : ساعتان

I. نعتبر الدّالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x)=x^3+6x+12$$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) بيّـن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيـدا α حيث : $-1,48 \prec \alpha \prec -1,47$

ثـمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$$

ليكن (C_f) المنحنى الممثّل لها في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيـّن أنّـــه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{(x^2+2)^2}$.

ج) ادرس اتّـــجاه تغيّـــر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّـراتها .

2. أ) بيّـن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

ب) ادرس وضعيّة (C_f) بالنّـسبة إلى (Δ) .

3. بيّـن أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4. ارسم كلّا من (Δ) و (C_f)

5. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=m$

 بالتـــوفيـــق

الإجابــــة النّموذجيّــة	العلامة

I. لدينا : $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1) دراسة اتجاه تغير الدّالة g :

الدّالـة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 3x^2 + 6$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $g'(x)>0$ و منه الدّالة g متـزايـدة تـمـامـا على $\mathbb{R}$.

2) تبييـن أنّ المعادلــة $g(x) = 0$ حلّا وحيـدا α :

بما أنّ الدّالـة gمستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و منه على] -1,48 ; -1,47 [و لدينا : $g(-1,48) = -0,12$ و $g(-1,47) = 0,0035$

و منه $g(-1,48) \times g(-1,47) < 0$

إذن و حسب مبرهنــة القيم المتوسطة ، المعادلــة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

حيث $-1.48<\alpha<-1.47$

➢ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	- 0 +

II. لدينا: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$:

1) أ- حساب نهايات الدّالـة f عند أطراف مجموعة تعريفها :

- $\lim_{x\to-\infty} [f(x)] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^3-6}{x^2+2}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty} [x] = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} [f(x)] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3-6}{x^2+2}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty} [x] = +\infty$

ب) حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2) - (2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4 + 12x}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

ج) جدول تغيّرات $f(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه f متزايدة تماما على كل من $]-\infty\ ;\ \alpha]$ و $[0\ ;\ +\infty[$

و f' متناقصة تماما على $[\alpha\ ;\ 0]$

ج) <u>جدول تغيّرات</u> $f(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2) **أ .** <u>نبيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل :</u>

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-6-2x}{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)=0$$

و منه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند كلّ من $-\infty$ و $+\infty$

ب) <u>دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى (Δ) :</u>

ندرس إشارة الفرق : $(f(x)-x)$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-x=\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

لدينا : $(x^2+2)>0$ و منه الإشارة $f(x)-x$ هي إشارة $-2(x+3)$:

$-2x-6=0$ و منه $-2x=6$ أي $x=-3$ و منه إشارة $(f(x)-y)$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$(f(x)-x)$	$+$	0	$-$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$(f(x)-x)$	$+$		$-$
الوضعية	$c(f)$ يقع أعلى (Δ)	(Δ) يقطع $c(f)$ في A(-3 , -3)	$c(f)$ يقع تحت (Δ)

3) <u>تبيــن أنّ :</u> $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أنّ : $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$:

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha = \frac{2\alpha^3 - 12 - 3\alpha^3 - 6\alpha}{\alpha^2 + 2}$$

$$= \frac{-(\alpha^3 + 6\alpha + 12)}{\alpha^2 + 2} = -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 + 2} = -\frac{0}{\alpha^2 + 2} = 0$$

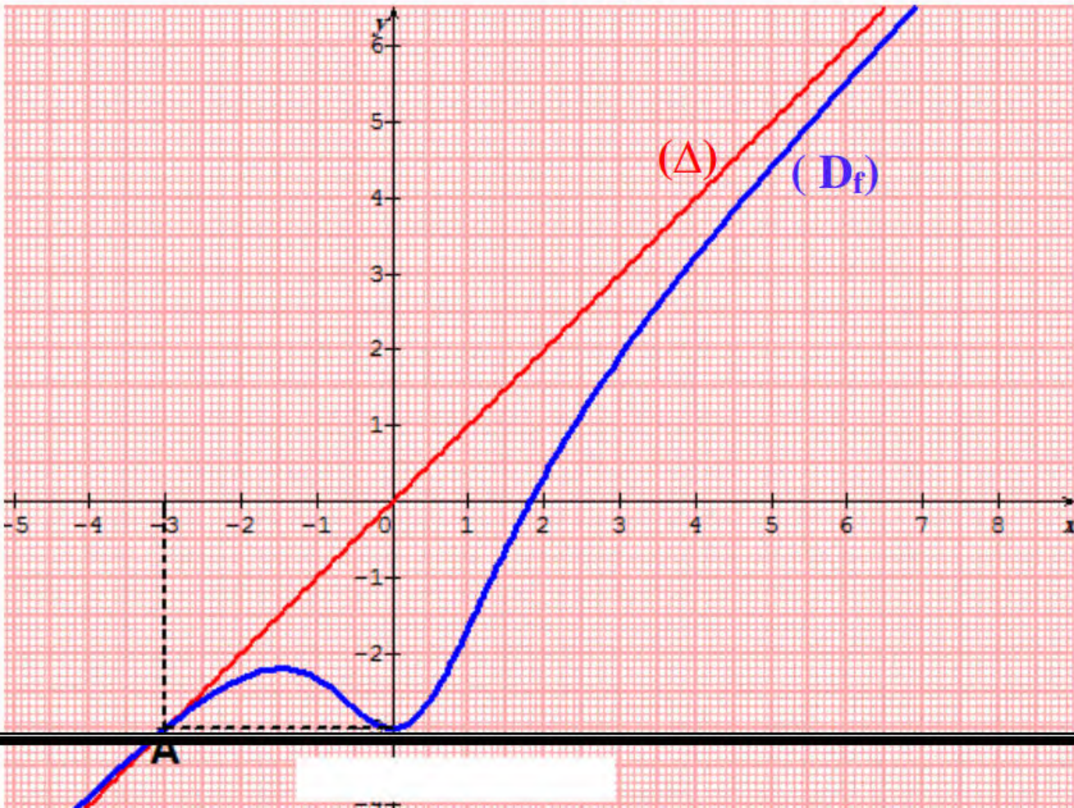
إذن : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

➢ <u>استنتاج حصرا للعدد</u> $f(\alpha)$:

لدينا : $-1{,}48 < \alpha < -1{,}47$ و لدينا $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

و منه : $\frac{3}{2}(-1{,}48) < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1{,}47)$ أي : $-2{,}22 < f(\alpha) < -2{,}21$

4) <u>إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :</u>



5) <u>المناقشة البيانية :</u>

- لمّا $m \in]-\infty; -3[$ المعادلة لها حل واحد سالب .
- لمّا $m = -3$ المعادلة تقبل حلّين أحدهما معدوم و الآخر سالب.
- لمّا $m \in]-3; f(\alpha)[$ المعادلة تقبل 3 حلول ، واحد موجب و اثنان سالبان.
- لمّا $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلّين واحد موجب و الآخر سالب.
- لمّا $m \in]f(\alpha); +\infty[$ للمعادلة حل موجب .