MEBARKI2023

تحضير شهادة البكالوريا 2023

أخيييرا

BAC 2023

أخيييرا

طرق حساب المجاميع و الجداءات للمتتاليات
لكل الشعب العلمية و التقنية و الرياضية
طرق مبسطة خاصة بالأستاذMEBARKI

تأليف وإعداد وطبع
الأستاذ : مباركي MEBARKI

MATHEMATIQUES**رياضيات

أتمنى لكم النجاح ونيل العلامة الكاملة في الرياضيات

سوف تبقى في ذكرانا يا أستاذنا
الجمعي عامر (رحمة الله عليك)

رحمة الله عليك يا أبي يا والدي العزيز (أدعوا له بالرحمة بارك الله فيكم)

أتمنى منكم الدعاء بالشفاء لأستاذنا وشيخنا و عمدة من أعمدة الرياضيات الأستاذ القدير : النوي الطاهر

مازال الجديد بحول الله فانتظروه .....

تذكر جيدا:

" أنك **(تستطيع النجاح)** في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح .
ولكنك **(لن تنجح)** أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

أتمنى لكل من ينتقد هذا العمل من أجل الانتقاد أن يرينا أعماله في هذا المجال لكي نتعلم منه و يستفيد الجميع على الأقل نحن نحاول ونجتهد من أعمالنا و مجهوداتنا الخاصة

نحن لا نأخذ أعمال غيرنا و ننسبها لأنفسنا بل نحن نراعي و نحافظ الأمانة العلمية

(الطبيب لا يصلح السيارات و الميكانيكي لا يعالج المرضى)

الفهرس

ما يهم في حساب المجاميع و الجداءات للمتتاليات

عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية : $U_n = U_p + (n-p)\times r$

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية : $U_n = U_p \times q^{n-p}$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول $+1$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

$$S = U_p + U_{p+1} + \dots + U_m$$

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}\right)$$

$$S = \frac{m-p+1}{2}\left(U_p + U_m\right)$$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

$$S = U_p + U_{p+1} + \dots + U_m$$

$$S = \text{الحد الأول للمجموع} \times \frac{(\text{الأساس})^{(\text{عدد الحدود})} - 1}{(\text{الأساس}) - 1}$$ الأساس$\neq 1$

$$S = U_p \times \frac{q^{m-p+1}-1}{q-1} \qquad q \neq 1$$

$$0+1+2+3+\dots+n = \frac{n\times(n+1)}{2}$$

$$1\times 2\times 3\times \dots \times n = n!$$

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

في حالة $a \neq 1$

$$a^0 \times a^1 \times a^2 \times a^3 \times \dots \times a^n = a^{0+1+2+3+\dots+n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$a+a+a+a+\dots+a = a\times(\text{عدد الحدود})$$

$$a\times a\times a\times a\times \dots \times a = a^{\text{عدد الحدود}}$$

ما يجب أن تتذكر :

1) عدد الحدود من الحد U_p (الحد الأول الذي دليله p) إلى الحد U_m (الحد الأخير الذي دليله m)
هو : 1 + دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير أي $m-p+1$ حدا

مثال : عدد الحدود من U_7 إلى U_{27} هو : $27-7+1=21$ أي (21) حدا
عدد الحدود من U_0 إلى U_n هو : $n-0+1=n+1$ أي $(n+1)$ حدا
عدد الحدود من U_n إلى U_{2n} هو : $2n-n+1=n+1$ أي $(n+1)$ حدا
عدد الحدود من U_n إلى U_{3n-2} هو : $(3n-2)-n+1=3n-2-n+1=2n-1$ أي $(2n-1)$ حدا
عدد الحدود من U_{2n+3} إلى U_{4n+2} هو : $(4n+2)-(2n+3)+1=4n+2-2n-3+1=2n$ أي $(2n)$ حدا

تطبيق : ما هو عدد الحدود في كل مما يأتي ؟ : (الجواب النهائي بين القوسين)

.1 من U_{10} إلى U_{80}	(71 حدا)	**.2** من U_2 إلى U_n	($n-1$ حدا)
.3 من U_{2n} إلى U_{4n}	($2n+1$ حدا)	**.4** من U_{n+2} إلى U_{2n+5}	($n+4$ حدا)

2) مجموع حدود متتابعة لمتتالية ثابتة : $a+a+a+...+a=a\times$ (عدد الحدود) (a حقيقي)

مثال : (U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $U_n=3$.
حساب المجاميع الآتية :

$$S_1=U_0+U_1+U_2+...+U_n$$
$$S_1=3+3+3+...+3=3\times(n-0+1)=3(n+1)$$
$$S_2=U_4+U_5+U_6+...+U_{n+1}$$
$$S_2=3+3+3+...+3=3\times((n+1)-4+1)=3(n-2)$$

تطبيق : ليكن المجموع : $S_3=U_{n+2}+U_{n+3}+U_{n+4}+...+U_{2n+1}$ لماذا $S_3=3n$ ؟

3) جداء عوامل متتابعة لمتتالية ثابتة :
عدد العوامل هو نفسه عدد الحدود (نقوم بتسمية الحدود في حالة المجموع و العوامل في حالة الجداء)

$a\times a\times a\times ...\times a=a^{(\text{عدد العوامل})}$ (a حقيقي)

مثال : (U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $U_n=5$.
حساب الجداءات الآتية :

$$P_1=U_0\times U_1\times U_2\times ...\times U_n$$
$$P_1=5\times 5\times 5\times ...\times 5=5^{n-0+1}=5^{n+1}$$
$$P_2=U_n\times U_{n+1}\times U_{n+2}\times ...\times U_{n+2022}$$
$$P_2=5\times 5\times 5\times ...\times 5=5^{n+2022-n+1}=5^{2023}$$

تطبيق : ليكن الجداء : $P_3=U_{2n+1}\times U_{2n+2}\times U_{2n+3}\times ...\times U_{3n+1}$ لماذا $P_3=5^{n+1}$ ؟

4) المجموع الشهير (حالة خاصة لمتتالية حسابية) : $0+1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

مثال : (U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $U_n=7n$

حساب المجموع الآتي : **(قمنا بالتعويض دون حساب النتائج ثم استخراج العامل المشترك)**

$S_1=U_0+U_1+U_2+...+U_n$

$S_1=7(0)+7(1)+7(2)+...+7(n)=7(0+1+2+...+n)=7\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{7n(n+1)}{2}$

تطبيق : (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $V_n=2n$.

لماذا $S_2=V_0+V_1+V_2+...+V_n=n(n+1)$ ؟

مثال تطبيقي 1:

(U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ بـ: $U_n=2n-4$.

حساب المجموع: $S_n=U_0+U_1+U_2+...+U_n$.

$S_n=U_0+U_1+U_2+...+U_n$

$S_n=[2(0)-4]+[2(1)-4]+[2(2)-4]+...+[2(n)-4]$

$S_n=2(0)+2(1)+2(2)+...+2(n)-4-4-4-...-4$

$S_n=2(0+1+2+...+n)-4\times(n-0+1)=2\frac{n(n+1)}{2}-4(n+1)=n(n+1)-4(n+1)$

$S_n=n^2+n-4n-4=n^2-3n-4$

تمرين تطبيقي: (بكالوريا)

(U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ بـ: $U_n=-4n+3$.

بين أن : $S_n=U_0+U_1+U_2+...+U_n=-2n^2+n+3$.

مثال تطبيقي 2 :

(U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $U_n=2^n$.

حساب الجداء : $P_n=U_0\times U_1\times U_2\times...\times U_n$.

$P_n=U_0\times U_1\times U_2\times...\times U_n$

$P_n=2^0\times2^1\times2^2\times...\times2^n=2^{0+1+2+...+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

تمرين تطبيقي: (بكالوريا)

(U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $U_n=2n+1$

و لدينا الجداء P_n حيث : $P_n=e^{U_0}\times e^{U_1}\times e^{U_2}\times...\times e^{U_n}$

اختر الإجابة الصحيحة : 1) $P_n=e^{n(n+1)}$ ، 2) $P_n=e^{(n+1)^2}$ ، 3) $P_n=e^{-n(n+1)}$

5) المجموع الشهير (حالة خاصة لمتتالية هندسية) :

$$1+a^1+a^2+a^2+...+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$ **(حيث a عدد حقيقي لا يساوي 1)**

مثال : (U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $U_n=3^n$.

حساب المجموع الآتي : **(قمنا بالتعويض دون حساب ثم تطبيق القاعدة)**

$$S_1=U_0+U_1+U_2+...+U_n$$

$$S_1=3^0+3^1+3^2+...+3^n=1+3^1+3^2+...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$$

مثال تطبيقي :

(U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $U_n=2\times4^n-6n+3$.

حساب المجموع : $S_n=U_0+U_1+U_2+...+U_n$:

$$S_n=U_0+U_1+U_2+...+U_n$$
$$S_n=\left[2\times4^0-6(0)+3\right]+\left[2\times4^1-6(1)+3\right]+\left[2\times4^2-6(2)+3\right]+...+\left[2\times4^n-6(n)+3\right]$$
$$S_n=\left(2\times4^0+2\times4^1+2\times4^2+...+2\times4^n\right)-\left(6(0)+6(1)+6(2)+...+6(n)\right)+(3+3+3+...+3)$$
$$S_n=2\left(4^0+4^1+4^2+...+4^n\right)-6(0+1+2+...+n)+(3+3+3+...+3)$$
$$S_n=2\frac{4^{n+1}-1}{4-1}-6\frac{n(n+1)}{2}+3(n-0+1)=2\frac{4^{n+1}-1}{3}-3n(n+1)+3(n+1)$$
$$S_n=\frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right)-3n^2+3$$

تمرين تطبيقي: (بكالوريا)

(w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n=4\times5^n-2n+1$

و لدينا المجموع S_n حيث : $S_n=w_0+w_1+w_2+...+w_n$

اختر الإجابة الصحيحة : **1)** $S_n=5^{n+1}-(n+1)^2$ ، **2)** $S_n=5^{n+1}-n^2$ ، **3)** $S_n=5^n-n^2$

1) أنواع المجاميع للحدود المتتابعة للمتتاليات

1. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية .
2. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية .
3. مجموع حدود متتابعة لقوى (مقلوب ، جذر ، ....) لمتتالية هندسية .
4. مجموع حدود متتابعة لجداء أو حاصل قسمة متتاليتين هندسيتين .

2) أنواع الجداءات للحدود المتتابعة للمتتاليات

1. جداء عوامل الحدود المتتابعة لمتتالية هندسية .
2. جداء عوامل الحدود المتتابعة لقوى (مقلوب ، جذر ، ....) لمتتالية هندسية .
   أو مجموع الحدود المتتابعة للوغاريتم متتالية هندسية .

3) مجموع أو جداء حدود متتابعة لمتتالية معرفة بعبارة حد عام (أشكال خاصة لعبارة الحد العام)

1. مجموع حدود متتابعة لمتتالية معرفة بعبارة الحد العام .
2. جداء عوامل متتابعة لمتتالية معرفة بعبارة الحد العام .

4) مجموع أو جداء عوامل متتابعة لمتتالية لها علاقة مباشرة بمتتالية حسابية أو هندسية

1. جداء عوامل متتابعة لمتتالية لها علاقة مباشرة بمتتالية حسابية أو هندسية .
2. مجموع حدود متتابعة لمتتالية لها علاقة مباشرة بمتتالية حسابية أو هندسية .

5) المجموع أو الجداء التيليسكوبي

1. جداء تيليسكوبي أو مجموع تيليسكوبي في حالة متتالية معرفة بعبارة الحد العام .
2. جداء تيليسكوبي أو مجموع تيليسكوبي في حالة متتالية معرفة بصورة حدين متتابعين لمتتالية أخرى بدالة

1) المجاميع للحدود المتتابعة للمتتاليات

أولا : مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

اعلم جيدا أنه قبل الانطلاق في مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية يجب أن تتذكر :

1) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية (U_n) إذا علم U_p أحد حدودها و أساسها r فإن: $U_n = U_p + (n-p)r$

2) مجموع الحدود المتتابعة للمتتالية الحسابية (U_n) الذي ينطلق من الحد U_p حتى يصل إلى الحد U_m أي :

$S = U_p + U_{p+1} + ... + U_m$	$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\Big(\underbrace{\text{الحد الأول للمجموع} + \text{الحد الأخير للمجموع}}_{\text{يحسبان بعبارة الحد العام للمتتالية}}\Big)$
$S = \frac{m-p+1}{2}(U_p + U_m)$	
ملاحظة : U_p و U_m يحسبان بعبارة الحد العام U_n	

مثال تطبيقي 1) :

(U_n) متتالية حسابية أحد حدودها $U_5 = 18$ و أساسها $r = 4$.

المطلوب : حساب المجاميع : $S_1 = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{12}$ ، $S_2 = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$

$S_3 = U_{10} + U_{11} + U_{12} + ... + U_n$ ، $S_4 = U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} + ... + U_{2n+3}$

الجواب :(قبل حساب المجاميع يجب إيجاد عبارة الحد العام U_n بدلالة n)

بما أن (U_n) متتالية حسابية أحد حدودها $U_5 = 18$ و أساسها $r = 4$ فإن : $U_n = U_5 + (n-5)r$ بوضع $(p = 5)$

ومنه : $U_n = 18 + (n-5)\times 4 = 18 + 4n - 20 = 4n - 2$

حساب المجموع : $S_1 = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{12}$:

$$S_1 = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{12} = \frac{12-0+1}{2}(U_0 + U_{12}) = \frac{13}{2}[(4(0)-2) + (4(12)-2)]$$

$$S_1 = \frac{13}{2}(-2+46) = \frac{13}{2}\times 44 = 13\times 22 = 286$$

حساب المجموع : $S_2 = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$:

$$S_2 = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{n-0+1}{2}(U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2}[(4(0)-2) + (4(n)-2)]$$

$$S_2 = \frac{n+1}{2}(-2+4n-2) = \frac{n+1}{2}\times(4n-4) = \frac{n+1}{2}\times 2(2n-2) = (n+1)(2n-2)$$

حساب المجموع : $S_3 = U_{10} + U_{11} + U_{12} + ... + U_n$:

$$S_3 = U_{10} + U_{11} + U_{12} + ... + U_n = \frac{n-10+1}{2}(U_{10} + U_n) = \frac{n-9}{2}[(4(10)-2) + (4(n)-2)]$$

$$S_3 = \frac{n-9}{2}(38+4n-2) = \frac{n-9}{2}\times(4n+36) = \frac{n-9}{2}\times 2(2n+18) = (n-9)(2n+18)$$

حساب المجموع : $S_4=U_{n+1}+U_{n+2}+U_{n+3}+...+U_{2n+3}$:

$$S_4=U_{n+1}+U_{n+2}+U_{n+3}+...+U_{2n+3}=\frac{(2n+3)-(n+1)+1}{2}\left[U_{n+1}+U_{2n+3}\right]$$

$$S_4=\frac{2n+3-n-1+1}{2}\left[4(n+1)-2+4(2n+3)-2\right]$$

$$S_4=\frac{n+3}{2}\left[4n+4-2+8n+12-2\right]=\frac{n+3}{2}(12n+12)=\frac{n+3}{2}\times 2(6n+6)=(n+3)(6n+6)$$

تمرين تطبيقي:

لماذا $S_5=U_{2n+2}+U_{2n+3}+U_{2n+4}+...+U_{5n+1}=3n(14n+4)=6n(7n+2)$ ؟

مثال تطبيقي (2) :

حساب المجموع الآتي : $S=1962+1967+1972+...+2022$.

الجواب : بملاحظة حدود هذا المجموع نجد: $1972-1967=5$ و $1967-1962=5$

أي $1972-1967=1967-1962=5$

و عليه S هو مجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=5$.

لنرمز لهذه المتتالية بــ : (V_n) و أن $V_0=1962$.

وعليه عبارة الحد العام لهذه المتتالية هي : $V_n=V_0+(n-0)r=1962+(n-0)\times 5=1962+5n$

الآن نبحث عن دليل الحد الذي يساوي 2022 أي البحث عن العدد الطبيعي n حيث $V_n=2022$

ومنه $1962+5n=2022$ نجد : $5n=2022-1962$ أي $5n=2022-1962$ و منه $5n=60$

و عليه : $n=\frac{60}{5}=12$ نستنتج أن : $V_{12}=2022$ و عليه يصبح :

$$S=1962+1967+1972+...+2022=V_0+V_1+V_2+...+V_{12}=\frac{12-0+1}{2}(V_0+V_{12})$$

$$S=\frac{13}{2}(1962+2022)=\frac{13}{2}\times 3984=25896$$

تمرين تطبيقي:

لماذا $S'=9+38+67+...+328=2022$ ؟

حـــاول ، فـــكر ، اســـأل من له معـــرفة ، شـــاور ولكـــن لاتيـــأس

فلا تنسي : " أنك (تستطيع النجاح) في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك (لن تنجح) أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

هدفنا ليس (هل التمرين خاطئ) هدفنا أفكار الحل ، تذكر جيدا : الرياضيات للفهم و ليست للحفظ

لازالت الفرصة متاحة لنيل شهادة البكالوريا بجدارة فالمهم العزيمة والإرادة و عدم اليأس فكلنا ناجحون بحول الله تعالى

ثانيا : مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

اعلم جيدا أنه قبل الانطلاق في مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية يجب أن تتذكر :

1) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية (U_n) إ ذا علم U_p أحد حدودها و أساسها q فإن $U_n = U_p \times q^{n-p}$

2) مجموع الحدود المتتابعة للمتتالية الهندسية (U_n) الذي ينطلق من الحد U_p حتى يصل إلى الحد U_m أي :

في حالة الأساس $\neq 1$ فإن : $S = \text{للمجموع الحد الأول} \times \dfrac{\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}} - 1}{\text{الأساس} - 1}$ أو $S = \text{للمجموع الحد الأول} \times \dfrac{1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}$ في حالة الأساس $= 1$ فإن : $S = \text{للمجموع الحد الأول} \times (\text{عدد الحدود})$	$S = U_p + U_{p+1} + \dots + U_m$ 1. في حالة $q \neq 1$: $S = U_p \times \dfrac{q^{m-p+1} - 1}{q - 1}$ أو $S = U_p \times \dfrac{1 - q^{m-p+1}}{1 - q}$ 2. في حالة $q = 1$: $S = U_p \times (m - p + 1)$ U_p يحسب بعبارة الحد العام U_n

مثال تطبيقي 1) :

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول $U_0 = 5$ و أساسها $q = 3$.

المطلوب : حساب المجاميع : $S_1 = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{12}$ ، $S_2 = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$S_3 = U_{10} + U_{11} + U_{12} + \dots + U_n$ ، $S_4 = U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} + \dots + U_{2n+3}$

الجواب : (قبل حساب المجاميع يجب إيجاد عبارة الحد العام U_n بدلالة n .)

بما أن (U_n) متتالية هندسية حدها الأول $U_0 = 5$ و أساسها $q = 3$ فإن : $U_n = U_0 \times q^n$ ومنه : $U_n = 5 \times 3^n$

حساب المجموع $S_1 = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{12}$:

$$S_1 = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{12} = U_0 \times \frac{q^{12-0+1} - 1}{q - 1} = 5 \times \frac{3^{13} - 1}{3 - 1} = 5 \times \frac{3^{13} - 1}{2} = \frac{5}{2}\left(3^{13} - 1\right)$$

حساب المجموع $S_2 = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$:

$$S_2 = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_0 \times \frac{q^{n-0+1} - 1}{q - 1} = 5 \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = 5 \times \frac{3^{n+1} - 1}{2} = \frac{5}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$$

حساب المجموع $S_3 = U_{10} + U_{11} + U_{12} + \dots + U_n$:

$$S_3 = U_{10} + U_{11} + U_{12} + \dots + U_n = U_{10} \times \frac{q^{n-10+1} - 1}{q - 1} = \left(5 \times 3^{10}\right) \times \frac{3^{n-9} - 1}{3 - 1}$$

$$S_3 = 5 \times 3^{10} \times \frac{3^{n-9} - 1}{2} = \frac{5 \times 3^{10}}{2}\left(3^{n-9} - 1\right) = \frac{295245}{2}\left(3^{n-9} - 1\right)$$

حساب المجموع $S_4 = U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} + \ldots + U_{2n+3}$:

$$S_4 = U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} + \ldots + U_{2n+3} = U_{n+1} \times \frac{q^{2n+3-(n+1)+1} - 1}{q-1}$$

$$S_4 = \left(5 \times 3^{n+1}\right)\frac{3^{2n+3-n-1+1} - 1}{3-1} = 5 \times 3^{n+1}\,\frac{3^{n+3} - 1}{2} = \frac{5}{2} \times 3^{n+1}\left(3^{n+3} - 1\right)$$

تمرين تطبيقي:

لماذا $S_5 = U_{2n+2} + U_{2n+3} + U_{2n+4} + \ldots + U_{5n+1} = \frac{5}{2} \times 3^{2n+2} \times \left(3^{3n} - 1\right)$ ؟

مثال تطبيقي 2) :

حساب المجموع الآتي : $S = 3 + 6 + 12 + \ldots + 1536$.

الجواب : بملاحظة حدود هذا المجموع نجد : $\frac{6}{3} = 2$ و $\frac{12}{6} = 2$ أي $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$

و عليه S هو مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = 2$.

لنرمز لهذه المتتالية بــ : (W_n) و أن $W_0 = 3$.

وعليه عبارة الحد العام لهذه المتتالية هي : $W_n = W_0 \times q^{n-0} = 3 \times 2^n$

لنبحث عن دليل الحد الذي يساوي 1536 أي البحث عن العدد الطبيعي n حيث $W_n = 1536$

ومنه $3 \times 2^n = 1536$ نجد : $2^n = \frac{1536}{3} = 512$ أي $\ln 2^n = \ln 512$ و منه $n \ln 2 = \ln 512$

و عليه : $n = \frac{\ln 512}{\ln 2} = 9$ نستنتج أن : $W_9 = 512$.

و عليه يصبح : $S = 3 + 6 + 12 + \ldots + 1536 = W_0 + W_1 + W_2 + \ldots + W_9$

$$S = W_0 \times \frac{q^{9-0+1} - 1}{q-1} = 3 \times \frac{2^{10} - 1}{2-1} = 3 \times \frac{2^{10} - 1}{1} = 3\left(2^{10} - 1\right) = 3 \times 1023 = 3072$$

تمرين تطبيقي:

لماذا $S' = 5 + 20 + 80 + \ldots + 20480 = 27305$ ؟

ثالثا : مجموع حدود متتابعة لقوى (مقلوب ، جذر ، .....) لمتتالية هندسية

الطريقة هي فرض متتالية و إثباتها أنها هندسية ثم نقوم بتطبيق قانون مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

مثال تطبيقي:

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 4$ و أساسها $q = 9$.

المطلوب : حساب المجاميع : $S_1 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ ، $S_2 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_n}$

$S_3 = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dots + \dfrac{1}{v_n}$ ، $S_4 = \dfrac{3}{v_0^2} + \dfrac{3}{v_1^2} + \dfrac{3}{v_2^2} + \dots + \dfrac{3}{v_n^2}$

الجواب : نعلم أنه إذا كانت (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 9$ فإن : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q = 9$.

حساب المجموع : $S_1 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$:

نفرض أن : $w_n = v_n^2$ ، نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ: $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{v_{n+1}^2}{v_n^2} = \left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)^2 = q^2$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها q^2 حيث $q^2 = 9^2 \neq 1$ و عليه :

$$S_1 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n = w_0 \times \frac{\left(q^2\right)^{n-0+1} - 1}{q^2 - 1}$$

$$S_1 = v_0^2 \times \frac{\left(q^2\right)^{n+1} - 1}{q^2 - 1} = v_0^2 \times \frac{q^{2(n+1)} - 1}{q^2 - 1} = 4^2 \times \frac{9^{2(n+1)} - 1}{9^2 - 1} = 16 \times \frac{9^{2(n+1)} - 1}{81 - 1}$$

$$S_1 = 16 \times \frac{9^{2(n+1)} - 1}{80} = \frac{16}{80}\left[9^{2(n+1)} - 1\right] = \frac{1}{5}\left[9^{2(n+1)} - 1\right]$$

حساب المجموع : $S_2 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_n}$:

نفرض أن : $w_n = \sqrt{v_n}$ ، نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ: $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\sqrt{v_{n+1}}}{\sqrt{v_n}} = \sqrt{\dfrac{v_{n+1}}{v_n}} = \sqrt{q}$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\sqrt{q}$ حيث $\sqrt{q} = \sqrt{9} = 3 \neq 1$ ومنه :

$$S_2 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_n} = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n = w_0 \times \frac{\left(\sqrt{q}\right)^{n-0+1} - 1}{\sqrt{q} - 1}$$

$$S_2 = \sqrt{v_0} \times \frac{\left(\sqrt{q}\right)^{n+1} - 1}{\sqrt{q} - 1} = \sqrt{4} \times \frac{\left(\sqrt{9}\right)^{n+1} - 1}{\sqrt{9} - 1} = 2 \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = 2 \times \frac{3^{n+1} - 1}{2} = 3^{n+1} - 1$$

حساب المجموع : $S_3=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}$:

نفرض أن : $w_n=\frac{1}{v_n}$ ،نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ:
$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\frac{1}{v_{n+1}}}{\frac{1}{v_n}}=\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{1}{\frac{v_{n+1}}{v_n}}=\frac{1}{q}$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q}$ حيث $\frac{1}{q}=\frac{1}{9}\neq 1$ ومنه :

$$S_3=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}=w_0+w_1+w_2+\ldots+w_n=w_0\times\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n-0+1}-1}{\frac{1}{q}-1}$$

$$S_3=\frac{1}{v_0}\times\frac{\left(q^{-1}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{q}-1}=\frac{1}{v_0}\times\frac{q^{-(n+1)}-1}{\frac{1}{q}-1}=\frac{1}{4}\times\frac{9^{-(n+1)}-1}{\frac{1}{9}-1}=\frac{1}{4}\times\frac{\left(3^2\right)^{-(n+1)}-1}{-\frac{8}{9}}$$

$$S_3=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{9}{8}\right)\times\left[3^{-2(n+1)}-1\right]=-\frac{9}{32}\left[3^{-2(n+1)}-1\right]$$

تمرين تطبيقي:

لماذا $S_4=\frac{3}{v_0^2}+\frac{3}{v_1^2}+\frac{3}{v_2^2}+\ldots+\frac{3}{v_n^2}=-\frac{243}{1280}\left[3^{-4(n+1)}-1\right]$ ؟.

رابعا :مجموع حدود متتابعة لجداء أو حاصل قسمة متتاليتين هندسيتين

قبل البداية : يجب التذكر أن المتتاليات التي عبارة حدها العام على الشكل : b^n أو $a\times b^n$ هي متتاليات هندسية

حيث a و b عددين حقيقيين مثل : 3^n أو 4×5^n أو $\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ ، $\frac{5}{3}\times\left(\frac{4}{7}\right)^{2n-3}$ ، .... إلخ

في هذه الحالة نقوم بفرض متتالية و إثباتها أنها هندسية ثم نجيب بنفس طريقة الحالة الثالثة

مثال تطبيقي:

- (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=3$ و أساسها $q=4$ . .

المطلوب : حساب المجاميع: $S_1=u_0+5u_1+25u_2+\ldots+5^n u_n$ ، $S_2=3u_0+3^3u_1+3^5u_2+\ldots+3^{2n+1}u_n$

$S_3=2u_0+14u_1+98u_2+\ldots+2\times 7^n u_n$ ، $S_4=u_0+\frac{u_1}{2}+\frac{u_2}{4}+\ldots+\frac{u_n}{2^n}$

$S_5=\frac{2}{3u_0^2}+\frac{10}{9u_1^2}+\frac{50}{27u_2^2}+\ldots+\frac{2\times 5^n}{3^{n+1}u_n^2}$ ، $S_6=u_0+\frac{u_1}{4}+\frac{u_2}{16}+\ldots+\frac{u_n}{4^n}$

الجواب : بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ فإن : $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q=4}$.

حساب المجموع : $\boxed{S_1=u_0+5u_1+25u_2+\ldots+5^n u_n}$:

نفرض أن : $w_n=5^n u_n$ ، نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{5^{n+1}u_{n+1}}{5^n u_n}=\frac{5^n\times5^1\times u_{n+1}}{5^n\times u_n}=5^1\times\frac{u_{n+1}}{u_n}=5\times q=5q$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $5q$ حيث $5q=5\times4=20\neq1$ ومنه :

$$S_1=u_0+5u_1+25u_2+\ldots+5^n u_n=w_0+w_1+w_2+\ldots+w_n=w_0\times\frac{(5q)^{n-0+1}-1}{5q-1}$$

$$S_1=\left(5^0u_0\right)\times\frac{(5q)^{n+1}-1}{5q-1}=1\times u_0\times\frac{(5q)^{n+1}-1}{5q-1}=1\times3\times\frac{(5\times4)^{n+1}-1}{5\times4-1}$$

$$S_1=3\times\frac{20^{n+1}-1}{19}=\frac{3}{19}\left(20^{n+1}-1\right)$$

حساب المجموع : $\boxed{S_2=3u_0+3^3u_1+3^5u_2+\ldots+3^{2n+1}u_n}$:

نفرض أن : $w_n=3^{2n+1}u_n$ ، نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{3^{2(n+1)+1}u_{n+1}}{3^{2n+1}u_n}=\frac{3^{2n+3}u_{n+1}}{3^{2n+1}u_n}=\frac{3^{2n}\times3^3\times u_{n+1}}{3^{2n}\times3^1\times u_n}=3^2\times\frac{u_{n+1}}{u_n}=3^2\times q=9q$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $9q$ حيث $9q=9\times4=36\neq1$ و منه :

$$S_2=3u_0+3^3u_1+3^5u_2+\ldots+3^{2n+1}u_n=w_0+w_1+w_2+\ldots+w_n=w_0\times\frac{(9q)^{n-0+1}-1}{9q-1}$$

$$S_2=\left(3^{2(0)+1}u_0\right)\times\frac{(9q)^{n+1}-1}{9q-1}=3\times u_0\times\frac{(9q)^{n+1}-1}{9q-1}=3\times3\times\frac{(9\times4)^{n+1}-1}{9\times4-1}$$

$$S_2=9\times\frac{36^{n+1}-1}{35}=\frac{9}{35}\left(36^{n+1}-1\right)=\frac{9}{35}\left[\left(6^2\right)^{n+1}-1\right]=\frac{9}{35}\left(6^{2(n+1)}-1\right)$$

قول مأثور (بتصرف)

إذا درس **الغبي** الكثير من **الدروس الغبية**

سيتحول إلى **غبي مزعج** و خطير جدا ،

لأنه سيصبح **غبي واثق من نفسه** ،

و هنا **تكمن الكارثة**

حساب المجموع : $S_3 = 2u_0 + 14u_1 + 98u_2 + ... + 2\times 7^n u_n$:

نفرض أن : $w_n = 2\times 7^n u_n$ ، نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2\times 7^{(n+1)} u_{n+1}}{2\times 7^n u_n} = \frac{7^{n+1} u_{n+1}}{7^n u_n} = \frac{7^n \times 7^1 \times u_{n+1}}{7^n \times u_n} = 7^1 \times \frac{u_{n+1}}{u_n} = 7^1 \times q = 7q$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $7q$ حيث $7q = 7\times 4 = 28 \neq 1$ ومنه :

$$S_3 = 2u_0 + 14u_1 + 98u_2 + ... + 2\times 7^n u_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n = w_0 \times \frac{(7q)^{n-0+1} - 1}{7q - 1}$$

$$S_3 = \left(2\times 7^{(0)} u_0\right) \times \frac{(7q)^{n+1} - 1}{7q - 1} = 2\times u_0 \times \frac{(7q)^{n+1} - 1}{7q - 1} = 2\times 3 \times \frac{(7\times 4)^{n+1} - 1}{7\times 4 - 1}$$

$$S_3 = 6\times \frac{28^{n+1} - 1}{27} = \frac{6}{27}\left(28^{n+1} - 1\right) = \frac{2}{9}\left[28^{n+1} - 1\right]$$

حساب المجموع : $S_4 = u_0 + \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{4} + ... + \frac{u_n}{2^n}$:

نفرض أن : $w_n = \frac{u_n}{2^n}$ ، نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{u_n}{2^n}} = \frac{2^n u_{n+1}}{2^{n+1} u_n} = \frac{2^n \times u_{n+1}}{2^n \times 2 \times u_n} = \frac{1}{2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \times q = \frac{1}{2} q$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}q$ حيث $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}\times 4 = 2 \neq 1$ و منه :

$$S_4 = u_0 + \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{4} + ... + \frac{u_n}{2^n} = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n = w_0 \times \frac{\left(\frac{1}{2}q\right)^{n-0+1} - 1}{\frac{1}{2}q - 1}$$

$$S_4 = \left(\frac{u_0}{2^0}\right) \times \frac{\left(\frac{1}{2}q\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2}q - 1} = \frac{u_0}{1} \times \frac{\left(\frac{1}{2}q\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2}q - 1} = \frac{3}{1} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\times 4\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2}\times 4 - 1}$$

$$S_4 = 3\times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1}\left(2^{n+1} - 1\right) = 3\left[2^{n+1} - 1\right]$$

حساب المجموع : $S_5=\frac{2}{3u_0^2}+\frac{10}{9u_1^2}+\frac{50}{27u_2^2}+\ldots+\frac{2\times 5^n}{3^{n+1}u_n^2}$:

نفرض أن : $w_n=\frac{2\times 5^n}{3^{n+1}u_n^2}$ ، نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\frac{2\times 5^{n+1}}{3^{(n+1)+1}u_{n+1}^2}}{\frac{2\times 5^n}{3^{n+1}u_n^2}}=\frac{2\times 5^{n+1}\times 3^{n+1}u_n^2}{3^{n+2}u_{n+1}^2\times 2\times 5^n}=\frac{2\times 5^n\times 5^1\times 3^n\times 3^1u_n^2}{3^n\times 3^2\times u_{n+1}^2\times 2\times 5^n}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{5^1\times 3^1u_n^2}{3^2\times u_{n+1}^2}=\frac{5u_n^2}{3u_{n+1}^2}=\frac{5}{3}\times\frac{u_n^2}{u_{n+1}^2}=\frac{5}{3}\times\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^2=\frac{5}{3}\times\left(\frac{1}{q}\right)^2=\frac{5}{3}\times\frac{1}{q^2}=\frac{5}{3q^2}$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3q^2}$ حيث $\frac{5}{3q^2}=\frac{5}{3\times 4^2}=\frac{5}{48}\neq 1$ ومنه :

$$S_5=\frac{2}{3u_0^2}+\frac{10}{9u_1^2}+\frac{50}{27u_2^2}+\ldots+\frac{2\times 5^n}{3^{n+1}u_n^2}=w_0+w_1+w_2+\ldots+w_n=w_0\times\frac{\left(\frac{5}{3q^2}\right)^{n-0+1}-1}{\frac{5}{3q^2}-1}$$

$$S_5=\frac{2\times 5^0}{3^{0+1}u_0^2}\times\frac{\left(\frac{5}{3q^2}\right)^{n+1}-1}{\frac{5}{3q^2}-1}=\frac{2}{3u_0^2}\times\frac{\left(\frac{5}{3q^2}\right)^{n+1}-1}{\frac{5}{3q^2}-1}=\frac{2}{3\times 3^2}\times\frac{\left(\frac{5}{3\times 4^2}\right)^{n+1}-1}{\frac{5}{3\times 4^2}-1}$$

$$S_5=\frac{2}{27}\times\frac{\left(\frac{5}{48}\right)^{n+1}-1}{\frac{5}{48}-1}=\frac{2}{27}\times\frac{\left(\frac{5}{48}\right)^{n+1}-1}{-\frac{43}{48}}=\frac{2}{27}\times\left(-\frac{48}{43}\right)\left[\left(\frac{5}{48}\right)^{n+1}-1\right]$$

$$S_5=-\frac{32}{387}\left[\left(\frac{5}{48}\right)^{n+1}-1\right]$$

الرجال أربعة :
1. رجل يعلم ويعلم انه يعلم فذلك **عالم** فاتبعوه.
2. ورجل يعلم ولا يعلم انه يعلم فذلك **نائم** فأيقظوه.
3. ورجل لا يعلم ويعلم انه لا يعلم فذلك **راغب في العلم** فعلموه
4. و رجل لا يعلم ولا يعلم انه لا يعلم فذلك **جاهل** فاجتنبوه.

حساب المجموع : $S_6 = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{16} + \ldots + \frac{u_n}{4^n}$:

نفرض أن : $w_n = \frac{u_n}{4^n}$ ، نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية وذلك بـ :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{u_{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{u_n}{4^n}} = \frac{4^n u_{n+1}}{4^{n+1} u_n} = \frac{4^n \times u_{n+1}}{4^n \times 4 \times u_n} = \frac{1}{4} \times \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} \times q = \frac{1}{4} q$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}q$ حيث $\frac{1}{4}q = \frac{1}{4} \times 4 = 1$ و منه :

بما أن الأساس يساوي 1 فإن المجموع هو الحد الأول للمجموع ضرب عدد الحدود أي :

$$S_6 = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{16} + \ldots + \frac{u_n}{4^n} = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n = w_0(n - 0 + 1) = \frac{u_0}{4^0}(n+1)$$

$$S_6 = \frac{u_0}{1}(n+1) = u_0(n+1) = 3(n+1)$$

تمرين تطبيقي:

لماذا $S_7 = 2u_0 + 4u_1 + 8u_2 + \ldots + 2^{n+1}u_n = \frac{6}{7}\left[2^{3(n+1)} - 1\right]$ ؟

تذكر جيدا: " أنك **(تستطيع النجاح)** في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك **(لن تنجح)** أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

2) الجـــــــداءات

أولا : جداء عوامل متتابعة لمتتالية هندسية

لحساب جداء عوامل متتابعة لمتتالية هندسية نقوم تعويض بعبارة الحد العام للمتتالية الهندسية

مثال تطبيقي (1) :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها $q = 3$.

المطلوب : حساب الجداء : $P_1 = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

الجواب : بما أن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها $q = 3$ فإن : $u_n = u_0 \times q^n$

الآن نقوم تعويض كل الحدود في عبارة الحد العام مثلا :

$$u_0 = u_0 \times q^0 \text{ ، } u_1 = u_0 \times q^1 \text{ ، } u_2 = u_0 \times q^2 \text{ ، } \ldots \text{ ، } u_n = u_0 \times q^n$$

ومنه :

$$P_1 = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \left(u_0 \times q^0\right) \times \left(u_0 \times q^1\right) \times \left(u_0 \times q^2\right) \times \ldots \times \left(u_0 \times q^n\right)$$

$$P_1 = u_0 \times q^0 \times u_0 \times q^1 \times u_0 \times q^2 \times \ldots \times u_0 \times q^n = \left(u_0 \times u_0 \times u_0 \times \ldots \times u_0\right) \times \left(q^0 \times q^1 \times q^2 \times \ldots \times q^n\right)$$

$$P_1 = (u_0)^{n-0+1} \times q^{0+1+2+\ldots+n} = (u_0)^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n+1} \times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

مثال تطبيقي (2) :

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 4$ و أساسها $q = 9$.

المطلوب : حساب الجداء: $P_2 = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

الجواب : بما أن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 4$ و أساسها $q = 9$ فإن : $v_n = v_0 \times q^n$

الآن نقوم تعويض كل الحدود في عبارة الحد العام مثلا :

$$v_0 = v_0 \times q^0 \text{ ، } v_1 = v_0 \times q^1 \text{ ، } v_2 = v_0 \times q^2 \text{ ، } \ldots \text{ ، } v_n = v_0 \times q^n$$

$$P_2 = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n = \left(v_0 \times q^0\right) \times \left(v_0 \times q^1\right) \times \left(v_0 \times q^2\right) \times \ldots \times \left(v_0 \times q^n\right)$$

$$P_2 = v_0 \times q^0 \times v_0 \times q^1 \times v_0 \times q^2 \times \ldots \times v_0 \times q^n = \left(v_0 \times v_0 \times v_0 \times \ldots \times v_0\right) \times \left(q^0 \times q^1 \times q^2 \times \ldots \times q^n\right)$$

$$P_2 = (v_0)^{n-0+1} \times q^{0+1+2+\ldots+n} = (v_0)^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 4^{n+1} \times 9^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$P_2 = \left(2^2\right)^{n+1} \times \left(3^2\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{2(n+1)} \times 3^{2\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{2(n+1)} \times 3^{n(n+1)}$$

تمرين تطبيقي:

(w_n) متتالية هندسية حدها الأول $w_0 = e^2$ و أساسها $q = e^{-4}$.

أثبت أن : $P_3 = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \ldots \times w_n = e^{2(n+1)} \times e^{-2n(n+1)}$ ثم استنتج أن : $P_3 = e^{2\left(1-n^2\right)}$.

ثانيا : جداء عوامل متتابعة لقوى (مقلوب ، جذر ، ....) أو مجموع حدود لوغاريتم متتالية هندسية

مثال تطبيقي :

- (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0=3$ و أساسها $q=2$.

المطلوب: حساب الجداءات و المجموع الآتية : $P_1=v_0^2\times v_1^2\times v_2^2\times\ldots\times v_n^2$ ، $P_2=\sqrt{v_0}\times\sqrt{v_1}\times\sqrt{v_2}\times\ldots\times\sqrt{v_n}$

$P_3=\frac{5}{v_0}\times\frac{5}{v_1}\times\frac{5}{v_2}\times\ldots\times\frac{5}{v_n}$ ، $P_4=\frac{1}{v_0}\times\frac{2}{v_1}\times\frac{3}{v_2}\times\ldots\times\frac{n+1}{v_n}$ ، $S=\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+\ldots+\ln v_n$

الجواب : بما أن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0=3$ و أساسها $q=2$ فإن : $v_n=v_0\times q^n$

نلاحظ ما يلي :

$$P_1=v_0^2\times v_1^2\times v_2^2\times\ldots\times v_n^2=(v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n)^2$$

$$P_2=\sqrt{v_0}\times\sqrt{v_1}\times\sqrt{v_2}\times\ldots\times\sqrt{v_n}=\sqrt{v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n}$$

$$P_3=\frac{5}{v_0}\times\frac{5}{v_1}\times\frac{5}{v_2}\times\ldots\times\frac{5}{v_n}=\frac{5\times5\times5\times\ldots\times5}{v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n}=\frac{5^{n-0+1}}{v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n}$$

$$P_4=\frac{1}{v_0}\times\frac{2}{v_1}\times\frac{3}{v_2}\times\ldots\times\frac{n+1}{v_n}=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times(n+1)}{v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n}=\frac{(n+1)!}{v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n}$$

$$S=\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+\ldots+\ln v_n=\ln(v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n)$$

في كل مما سبق نحتاج لحساب : $v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$

بما أن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0=3$ و أساسها $q=2$ فإن : $v_n=v_0\times q^n$

الآن نقوم تعويض كل الحدود في عبارة الحد العام مثلا :

$v_0=v_0\times q^0$ ، $v_1=v_0\times q^1$ ، $v_2=v_0\times q^2$ ، ... ، $v_n=v_0\times q^n$

ومنه :

$$v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n=(v_0\times q^0)\times(v_0\times q^1)\times(v_0\times q^2)\times\ldots\times(v_0\times q^n)$$

$$=v_0\times q^0\times v_0\times q^1\times v_0\times q^2\times\ldots\times v_0\times q^n=(v_0\times v_0\times v_0\times\ldots\times v_0)\times(q^0\times q^1\times q^2\times\ldots\times q^n)$$

$$=(v_0)^{n-0+1}\times q^{0+1+2+\ldots+n}=(v_0)^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}=3^{n+1}\times2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ومنه نستنتج :

$$P_1=(v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n)^2=\left(3^{n+1}\times2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^2=3^{2(n+1)}\times2^{2\times\frac{n(n+1)}{2}}=3^{2(n+1)}\times2^{n(n+1)}$$

$$P_2=\sqrt{v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n}=\sqrt{3^{n+1}\times2^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\left(3^{n+1}\times2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{n+1}{2}}\times2^{\frac{n(n+1)}{4}}$$

$$P_3=\frac{5^{n-0+1}}{v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n}=\frac{5^{n+1}}{3^{n+1}\times2^{\frac{n(n+1)}{2}}}=5^{n+1}\times3^{-(n+1)}\times2^{\frac{-n(n+1)}{2}}$$

$$P_4=\frac{(n+1)!}{v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}=(n+1)!\times 3^{-(n+1)}\times 2^{\frac{-n(n+1)}{2}}$$

$$S=\ln(v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n)=\ln\left(3^{n+1}\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)=\ln 3^{n+1}+\ln 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$S=(n+1)\ln 3+\frac{n(n+1)}{2}\ln 2$$

تمرين تطبيقي:

برهن أن : $S'=\ln(v_0)+\ln(2v_1)+\ln(3v_2)+\ldots+\ln[(n+1)v_n]=\ln[(n+1)!]+(n+1)\ln 3+\frac{n(n+1)}{2}\ln 2$

3) مجموع أو جداء حدود متتابعة لمتتالية معرفة بعبارة حد عام (أشكال خاصة)

1. مجموع حدود متتابعة لمتتالية معرفة بعبارة الحد العام .
2. جداء عوامل متتابعة لمتتالية معرفة بعبارة الحد العام .

مثال تطبيقي :

(u_n) ، (v_n) ، (w_n) ، (z_n) ، (y_n) متتاليات عددية حيث :

$u_n=2\times 3^n-4n+7$ ، $v_n=2n3^{4n}$ ، $w_n=\frac{7e^{2n-3}}{n+1}$ ، $z_n=2\ln(n+1)+5n-1$ ، $y_n=\frac{5\times 3^{4n-1}}{2n}$

المطلوب : حساب الجداءات و المجاميع الآتية :

$S_1=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$ ، $P_1=v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$ ، $P_2=w_0\times w_1\times w_2\times\ldots\times w_n$

$S_2=z_0+z_1+z_2+\ldots+z_n$ ، $P_3=y_1\times y_2\times y_3\times\ldots\times y_n$

في حالة حساب مجموع أوجداء لمتتالية معرفة بعبارة الحد العام(شكل خاص)نقوم بالتعويض دون حساب النتائج

الجواب :

1) (u_n) متتالية عددية حيث: $u_n=2\times 3^n-4n+7$ حساب : $S_1=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

$$S_1=\left[2\times 3^0-4(0)+7\right]+\left[2\times 3^1-4(1)+7\right]+\left[2\times 3^2-4(2)+7\right]+\ldots+\left[2\times 3^n-4(n)+7\right]$$

$$S_1=\left(2\times 3^0+2\times 3^1+2\times 3^2+\ldots+2\times 3^n\right)-\left(4(0)+4(1)+4(2)+\ldots+4(n)\right)+(7+7+7+\ldots+7)$$

$$S_1=2\left(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^n\right)-4(0+1+2+\ldots+n)+(7+7+7+\ldots+7)$$

$$S_1=2\frac{3^{n+1}-1}{3-1}-4\frac{n(n+1)}{2}+7(n-0+1)=2\frac{3^{n+1}-1}{2}-4\frac{n(n+1)}{2}+7(n+1)$$

$$S_1=\left(3^{n+1}-1\right)-2n(n+1)+7(n+1)=3^{n+1}-1-2n^2-2n+7n+7=3^{n+1}-2n^2+5n+6$$

2) (v_n) متتالية عددية حيث: $v_n=2n3^{4n}$ حساب : $P_1=v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$

$$P_1=v_1\times v_2\times v_3\times\ldots\times v_n=2(1)3^{4(1)}\times 2(2)3^{4(2)}\times 2(3)3^{4(3)}\times\ldots\times 2(n)3^{4(n)}$$

$$P_1=(2\times 2\times 2\times\ldots\times 2)\times(1\times 2\times 3\times\ldots\times n)\times\left(3^{4(1)}\times 3^{4(2)}\times 3^{4(3)}\times\ldots\times 3^{4(n)}\right)$$

$$P_1=(2)^{n-1+1}\times(n!)\times\left(3^{4(1)+4(2)+4(3)+....+4(n)}\right)=2^n\times n!\times 3^{4(1+2+3+...+n)}=2^n\times n!\times 3^{4\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$P_1=2^n\times n!\times 3^{2n(n+1)}$$

3) (w_n) متتالية عددية حيث: $w_n=\frac{7e^{2n-3}}{n+1}$ حساب : $P_2=w_0\times w_1\times w_2\times...\times w_n$

$$P_2=w_0\times w_1\times w_2\times...\times w_n=\frac{7e^{2(0)-3}}{0+1}\times\frac{7e^{2(1)-3}}{1+1}\times\frac{7e^{2(2)-3}}{2+1}\times...\times\frac{7e^{2n-3}}{n+1}$$
$$P_2=\frac{7e^{2(0)-3}}{1}\times\frac{7e^{2(1)-3}}{2}\times\frac{7e^{2(2)-3}}{3}\times...\times\frac{7e^{2n-3}}{n+1}$$
$$P_2=\frac{7\times7\times7\times...\times7\times e^{2(0+1+2+...+n)-3-3-3-...-3}}{1\times2\times3\times...\times(n+1)}=\frac{7^{n-0+1}\times e^{2\frac{n(n+1)}{2}-3(n-0+1)}}{(n+1)!}$$
$$P_2=\frac{7^{n+1}\times e^{n(n+1)-3(n+1)}}{(n+1)!}=\frac{7^{n+1}\times e^{(n-3)(n+1)}}{(n+1)!}$$

4) (z_n) متتالية عددية حيث: $z_n=2\ln(n+1)+5n-1$ حساب : $S_2=z_0+z_1+z_2+...+z_n$

$$S_2=[2\ln(1)+5(0)-1]+[2\ln(2)+5(1)-1]+[2\ln(3)+5(2)-1]+...+[2\ln(n+1)+5(n)-1]$$
$$S_2=(2\ln1+2\ln2+2\ln3+...+2\ln(n+1))+(5(0)+5(1)+5(2)+...+5(n))-(1+1+1+...+1)$$
$$S_2=2(\ln1+\ln2+\ln3+...+\ln(n+1))+5(0+1+2+...+n)-(1+1+1+...+1)$$
$$S_2=2\ln(1\times2\times3\times...\times(n+1))+5\frac{n(n+1)}{2}-1(n-0+1)=2\ln[(n+1)!]+\frac{5}{2}n(n+1)-(n+1)$$
$$S_2=2\ln[(n+1)!]+\left(\frac{5}{2}n-1\right)(n+1)$$

تمرين تطبيقي:

برهن أن : $P_3=y_1\times y_2\times y_3\times...\times y_n=\frac{5^n\times3^{2n(n+1)-n}}{2^n\times n!}$ ثم استنتج أن : $P_3=\left(\frac{5}{2}\right)^n\times\frac{3^{n(2n+1)}}{n!}$

حـــاول ، فـــكر ، اســـأل من له معـــرفة ، شـــاور ولكـــن لاتيـــأس

فلا تنسي : " أنك (تستطيع النجاح) في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك (لن تنجح) أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

هدفنا ليس (هل التمرين خاطئ) هدفنا أفكار الحل ، تذكر جيدا : الرياضيات للفهم و ليست للحفظ

**لازالت الفرصة متاحة لنيل شهادة البكالوريا بجدارة فالمهم العزيمة والإرادة و عدم اليأس
فكلنا ناجحون بحول الله تعالى**

4) مجموع أو جداء عوامل متتابعة لمتتالية لها علاقة مباشرة بمتتالية حسابية أو هندسية

1. جداء عوامل متتابعة لمتتالية لها علاقة مباشرة بمتتالية حسابية أو هندسية .
2. مجموع حدود متتابعة لمتتالية لها علاقة مباشرة بمتتالية حسابية أو هندسية .

مثال تطبيقي :

نفرض (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ و حدها الأول $u_0=4$.
ولتكن المتتاليات العددية (v_n) ، (w_n) ، (z_n) ، (y_n) ، (R_n) ، (X_n) ، (T_n) ، (L_n) حيث :

$u_n = 4v_n - 6n + 1$ ، $w_n = \sqrt{u_n - 2n + 3}$ ، $u_n = \dfrac{z_n^2}{2n}$ حيث $(z_n \succ 0)$ ، $u_n = \dfrac{3}{y_n}$ ، $u_n = \dfrac{2n}{R_n - 2n}$

$T_n = \dfrac{2 - u_n}{u_n - 1}$ ، $u_n = \ln(L_n - 2)$ ، $u_n = \dfrac{2}{n!}X_n^{n+1} - 3n + 5$

المطلوب : حساب الجداءات و المجاميع الآتية :

.1 $S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$	**.2** $S_2 = w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2$
.3 $P_1 = z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_n$	**.4** $P_2 = y_1 \times y_2 \times y_3 \times \ldots \times y_n$
.5 $S_3 = \dfrac{1}{y_0} + \dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} + \ldots + \dfrac{1}{y_n}$	**.6** $S_4 = R_1 + \dfrac{R_2}{2} + \dfrac{R_3}{3} + \ldots + \dfrac{R_n}{n}$
.7 $S_5 = \dfrac{u_1 \times R_1}{2} + \dfrac{u_2 \times R_2}{4} + \dfrac{u_3 \times R_3}{6} + \ldots + \dfrac{u_n \times R_n}{2n}$	
.8 $P_3 = (R_1 - 2)\times(R_2 - 4)\times(R_3 - 6)\times\ldots\times(R_n - 2n)$	
.9 $S_6 = \dfrac{1}{T_0 + 1} + \dfrac{1}{T_1 + 1} + \ldots + \dfrac{1}{T_n + 1}$	**.10** $S_7 = \dfrac{T_0 + 2}{T_0 + 1} + \dfrac{T_1 + 2}{T_1 + 1} + \dfrac{T_2 + 2}{T_2 + 1} + \ldots + \dfrac{T_n + 2}{T_n + 1}$
.11 $P_4 = (L_0 - 2)\times(L_1 - 2)\times(L_2 - 2)\times\ldots\times(L_n - 2)$	
.12 $S_8 = X_0 + X_1^2 + \dfrac{X_2^3}{2} + \dfrac{X_3^4}{6} + \ldots + \dfrac{X_n^{n+1}}{n!}$	

الإجابة : نلاحظ كل المجاميع و الجداءات الماضية كلها لها علاقة بمجموع أو بجداء حدود المتتالية الهندسة (u_n) (نفس الشيء لو كانت المتتالية حسابية) لذلك وجب علينا إيجاد العلاقة بالمتتالية (u_n) التي تساعدنا على تسهيل المجاميع و الجداءات الماضية و للفهم أكثر اتبع مراحل الحل الآتية :

.1 حساب المجموع $S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$:

لدينا $u_n = 4v_n - 6n + 1$ و نبحث في هذا المجموع على علاقة v_n بـ u_n.

لدينا : $u_n = 4v_n - 6n + 1$ ومنه $u_n + 6n - 1 = 4v_n$ أي $v_n = \dfrac{1}{4}(u_n + 6n - 1)$

$S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

و عليه $S_1 = \frac{1}{4}(u_0 + 6(0) - 1) + \frac{1}{4}(u_1 + 6(1) - 1) + \frac{1}{4}(u_2 + 6(2) - 1) + ... + \frac{1}{4}(u_n + 6n - 1)$

$S_1 = \frac{1}{4}(u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + 6(0 + 1 + 2 + ... + n) - (1 + 1 + 1 + ... + 1))$

بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ و حدها الأول $u_0 = 4$ فإن :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 \times \frac{q^{n-0+1} - 1}{q - 1} = 4 \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = 4 \times \frac{3^{n+1} - 1}{2} = 2(3^{n+1} - 1)$$

ومنه : $S_1 = \frac{1}{4}\left(2(3^{n+1} - 1) + 6\frac{n(n+1)}{2} - 1(n - 0 + 1)\right) = \frac{1}{4}(2 \times 3^{n+1} - 2 + 3n(n+1) - n - 1)$

أي : $S_1 = \frac{1}{4}(2 \times 3^{n+1} + 3n^2 + 2n - 3)$

.2 حساب المجموع $S_2 = w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + ... + w_n^2$:

لدينا $w_n = \sqrt{u_n - 2n + 3}$ و نبحث في هذا المجموع على علاقة w_n^2 بـــ u_n.

لدينا : $w_n = \sqrt{u_n - 2n + 3}$ ومنه $w_n^2 = u_n - 2n + 3$ أي $S_2 = w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + ... + w_n^2$

و عليه $S_2 = (u_0 - 2(0) + 3) + (u_1 - 2(1) + 3) + (u_2 - 2(2) + 3) + ... + (u_n - 2n + 3)$

ومنه : $S_2 = (u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n - 2(0 + 1 + 2 + ... + n) + (3 + 3 + 3 + ... + 3))$

أي : $S_2 = \left(2(3^{n+1} - 1) - 2\frac{n(n+1)}{2} + 3(n - 0 + 1)\right) = (2 \times 3^{n+1} - 2 - n(n+1) + 3n + 3)$

ومنه نستنتج : $S_2 = (2 \times 3^{n+1} - n^2 + 2n + 1)$

.3 حساب الجداء $P_1 = z_1 \times z_2 \times ... \times z_n$: لدينا $u_n = \frac{z_n^2}{2n}$ و نبحث في هذا الجداء على علاقة z_n بـ u_n.أي:

$u_n = \frac{z_n^2}{2n}$ ومنه $z_n^2 = 2n \times u_n$ أي $z_n = \sqrt{2n \times u_n}$ لأن $(z_n \succ 0)$

لدينا $P_1 = z_1 \times z_2 \times ... \times z_n$ ومنه : $P_1 = \sqrt{(2(1) \times u_1)} \times \sqrt{(2(2) \times u_2)} \times ... \times \sqrt{(2(n) \times u_n)}$

$$P_1 = \sqrt{(2 \times 2 \times ... \times 2) \times (1 \times 2 \times ... \times n) \times (u_1 \times u_2 \times ... \times u_n)} = \sqrt{2^{n-1+1} \times n! \times (u_1 \times u_2 \times ... \times u_n)}$$

بما أن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ و حدها الأول $u_0 = 4$ فإن : $u_n = u_0 \times q^n$

$$u_1 \times u_2 \times ... \times u_n = (u_0 \times q^1) \times (u_0 \times q^2) \times ... \times (u_0 \times q^n) = (u_0 \times u_0 \times ... \times u_0) \times (q^1 \times q^2 \times ... \times q^n)$$

$$= (u_0)^{n-1+1} \times q^{1+2+...+n} = (u_0)^n \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 4^n \times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

إذن : $P_1 = \sqrt{2^n \times n! \times \left(4^n \times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)}$

3. حساب الجداء $P_2 = y_1 \times y_2 \times y_3 \times \ldots \times y_n$:

لدينا $u_n = \frac{3}{y_n}$ و نبحث في هذا الجداء على علاقة y_n بـ u_n. لدينا : $u_n = \frac{3}{y_n}$ ومنه $y_n = \frac{3}{u_n}$.

ومنه :

$$P_2 = y_1 \times y_2 \times y_3 \times \ldots \times y_n$$

$$P_2 = \frac{3}{u_1} \times \frac{3}{u_2} \times \frac{3}{u_3} \times \ldots \times \frac{3}{u_n} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times \ldots \times 3}{u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n} = \frac{3^{n-1+1}}{4^n \times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{3^n}{2^{2n} \times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$P_2 = 3^n \times 2^{-2n} \times 3^{\frac{-n(n+1)}{2}} = 3^{n-\frac{n(n+1)}{2}} \times 2^{-2n} = 3^{\frac{-n^2+n}{2}} \times 2^{-2n}$$

$$P_2 = 3^{\frac{-n(n-1)}{2}} \times 2^{-2n}$$

4. حساب المجموع $S_3 = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n}$:

لدينا $u_n = \frac{3}{y_n}$ نبحث في هذا المجموع على علاقة $\frac{1}{y_n}$ بـ u_n. لدينا : $u_n = \frac{3}{y_n}$ ومنه $\frac{1}{y_n} = \frac{u_n}{3}$.

ومنه :

$$S_3 = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n}$$

$$S_3 = \frac{u_0}{3} + \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{3} + \ldots + \frac{u_n}{3} = \frac{1}{3}(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \frac{1}{3} \times 2(3^{n+1} - 1)$$

ومنه :

$$S_3 = \frac{2}{3}(3^{n+1} - 1)$$

5. حساب المجموع $S_4 = R_1 + \frac{R_2}{2} + \frac{R_3}{3} + \ldots + \frac{R_n}{n}$:

لدينا $u_n = \frac{2n}{R_n - 2n}$ نبحث في هذا المجموع على علاقة $\frac{R_n}{n}$ بـ u_n.

لدينا : $u_n = \frac{2n}{R_n - 2n}$ ومنه $\frac{1}{u_n} = \frac{R_n - 2n}{2n}$. ومنه : $\frac{1}{u_n} = \frac{R_n}{2n} - \frac{2n}{2n}$ أي : $\frac{1}{u_n} = \frac{R_n}{2n} - 1$ و عليه : $\frac{1}{u_n} + 1 = \frac{R_n}{2n}$

إذن نستنتج أن : $\frac{R_n}{n} = 2\left(\frac{1}{u_n} + 1\right)$ ومنه :

$$S_4 = R_1 + \frac{R_2}{2} + \frac{R_3}{3} + \ldots + \frac{R_n}{n}$$

$$S_4 = 2\left(\frac{1}{u_1} + 1\right) + 2\left(\frac{1}{u_2} + 1\right) + 2\left(\frac{1}{u_3} + 1\right) + \ldots + 2\left(\frac{1}{u_n} + 1\right)$$

$$S_4 = 2\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{1}{u_n} + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1\right) = 2\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{1}{u_n} + 1(n - 1 + 1)\right)$$

نبحث الآن عن : $\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+...+\frac{1}{u_n}\right)$ نعلم أن المتتالية (u_n) هندسية ومنه : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$

نفرض أن : $w_n=\frac{1}{u_n}$ ، نبرهن أنها هندسية وذلك بـ: $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{u_n}}=\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{\frac{u_{n+1}}{u_n}}=\frac{1}{q}$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q}$ حيث : $\frac{1}{q}=\frac{1}{3}\neq 1$

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+...+\frac{1}{u_n}=w_1+w_2+w_3+...+w_n=w_1\times\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1+1}-1}{\frac{1}{q}-1}$$

$$=\frac{1}{u_1}\times\frac{\left(q^{-1}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}=\frac{1}{u_0\times q}\times\frac{q^{-n}-1}{\frac{1}{q}-1}=\frac{1}{4\times 3}\times\frac{3^{-n}-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{12}\times\frac{3^{-n}-1}{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{12}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left[3^{-n}-1\right]=-\frac{3}{24}\left[3^{-n}-1\right]=-\frac{1}{8}\left(3^{-n}-1\right)$$

أي : $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+...+\frac{1}{u_n}=-\frac{1}{8}\left(3^{-n}-1\right)$

ومنه نستنتج أن : $S_4=2\left(-\frac{1}{8}\left(3^{-n}-1\right)+n\right)=-\frac{1}{4}\left(3^{-n}-1\right)+2n$

.6 حساب المجموع $S_5=\frac{u_1\times R_1}{2}+\frac{u_2\times R_2}{4}+\frac{u_3\times R_3}{6}+...+\frac{u_n\times R_n}{2n}$:

لدينا $u_n=\frac{2n}{R_n-2n}$ نبحث في هذا المجموع على علاقة $\frac{u_n\times R_n}{2n}$ بـ u_n.

لدينا $u_n=\frac{2n}{R_n-2n}$ و منه : $u_n\left(R_n-2n\right)=2n$ أي : $u_n\times R_n-2n\times u_n=2n$

وعليه : $u_n\times R_n=2n\times u_n+2n$ ومنه : $\frac{u_n\times R_n}{2n}=\frac{2n\times u_n+2n}{2n}=\frac{2n\times u_n}{2n}+\frac{2n}{2n}$ أي $\frac{u_n\times R_n}{2n}=u_n+1$

ومنه : $S_5=\frac{u_1\times R_1}{2}+\frac{u_2\times R_2}{4}+\frac{u_3\times R_3}{6}+...+\frac{u_n\times R_n}{2n}$

$$S_5=\left(u_1+1\right)+\left(u_2+1\right)+\left(u_3+1\right)+...+\left(u_n+1\right)=\left(u_1+u_2+u_3+...+u_n\right)+1+1+1+...+1$$

نبحث عن : $u_1+u_2+u_3+...+u_n$:

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n=u_1\times\frac{q^{n-1+1}-1}{q-1}=u_0\times q\times\frac{q^n-1}{q-1}=4\times 3\frac{3^n-1}{2}=6\left(3^n-1\right)$$

ومنه : $S_5 = 6\left(3^n - 1\right) + 1(n - 1 + 1) = 6\times 3^n - 6 + n$ ومنه : $S_5 = 6\times 3^n + n - 6$

.7 حساب الجداء $P_3 = (R_1 - 2)\times(R_2 - 4)\times(R_3 - 6)\times\ldots\times(R_n - 2n)$

لدينا $u_n = \dfrac{2n}{R_n - 2n}$ نبحث في هذا الجداء على علاقة $R_n - 2n$ بـ u_n.

لدينا $u_n = \dfrac{2n}{R_n - 2n}$ ومنه : $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{R_n - 2n}{2n}$ و عليه : $R_n - 2n = \dfrac{2n}{u_n}$.

ومنه : $P_3 = (R_1 - 2)\times(R_2 - 4)\times(R_3 - 6)\times\ldots\times(R_n - 2n)$

$$P_3 = \frac{2(1)}{u_1}\times\frac{2(2)}{u_2}\times\frac{2(3)}{u_3}\times\ldots\times\frac{2(n)}{u_n} = \frac{(2\times2\times2\times\ldots\times2)\times(1\times2\times3\times\ldots\times n)}{u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n} = \frac{2^{n-1+1}\times n!}{4^n\times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

ومنه :

$$P_3 = \frac{2^n\times n!}{4^n\times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 2^n\times 4^{-n}\times 3^{-\frac{n(n+1)}{2}}\times n! = 2^n\times 2^{-2n}\times 3^{-\frac{n(n+1)}{2}}\times n!$$

و عليه :

$$P_3 == 2^{n-2n}\times 3^{-\frac{n(n+1)}{2}}\times n! = 2^{-n}\times 3^{-\frac{n(n+1)}{2}}\times n!$$

.8 حساب المجموع $S_6 = \dfrac{1}{T_0 + 1} + \dfrac{1}{T_1 + 1} + \ldots + \dfrac{1}{T_n + 1}$:

لدينا $T_n = \dfrac{2 - u_n}{u_n - 1}$ نبحث في هذا المجموع على علاقة $\dfrac{1}{T_n + 1}$ بـ u_n.

في هذه الحالة نقوم بالقسمة الإقليدية لـ $2 - u_n$ على $u_n - 1$ نجد : $T_n = \dfrac{2 - u_n}{u_n - 1} = -1 + \dfrac{1}{u_n - 1}$

ومنه : $T_n + 1 = \dfrac{1}{u_n - 1}$ وعليه نجد : $\dfrac{1}{T_n + 1} = u_n - 1$

أي :

$$S_6 = \frac{1}{T_0 + 1} + \frac{1}{T_1 + 1} + \ldots + \frac{1}{T_n + 1}$$

ومنه :

$$S_6 = (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \ldots + (u_n - 1)$$

$$S_6 = (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n) - (1 + 1 + 1 + \ldots + 1) = 2\left(3^{n+1} - 1\right) - 1(n - 0 + 1)$$

$$S_6 = 2\left(3^{n+1} - 1\right) - n - 1 = 2\times 3^{n+1} - n - 3$$

قول مأثور (بتصرف)

إذا درس **الغبي** الكثير من **الدروس الغبية**

سيتحول إلى **غبي مزعج** و خطير جدا ،

لأنه سيصبح **غبي واثق من نفسه** ، و هنا **تكمن الكارثة**

.9 حساب المجموع $S_7 = \frac{T_0+2}{T_0+1} + \frac{T_1+2}{T_1+1} + \frac{T_2+2}{T_2+1} + ... + \frac{T_n+2}{T_n+1}$

لدينا $T_n = \frac{2-u_n}{u_n-1}$ نبحث في هذا المجموع على علاقة $\frac{T_n+2}{T_n+1}$ بـ u_n.

توجد عدة طرق لإيجاد هذه العلاقة ومن بينها نستعمل ما وجدنا في الحالة السابقة حيث وجدنا: $\frac{1}{T_n+1} = u_n - 1$

ثم نقوم بالقسمة الإقليدية لـ T_n+2 على T_n+1 نجد : $\frac{T_n+2}{T_n+1} = 1 + \frac{1}{T_n+1} = 1 + (u_n - 1)$

وعليه نجد : $\frac{T_n+2}{T_n+1} = u_n$

ومنه :

$$S_7 = \frac{T_0+2}{T_0+1} + \frac{T_1+2}{T_1+1} + \frac{T_2+2}{T_2+1} + ... + \frac{T_n+2}{T_n+1}$$

$$S_7 = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

$$S_7 = 2\left(3^{n+1} - 1\right)$$

.10 حساب الجداء $P_4 = (L_0-2)\times(L_1-2)\times(L_2-2)\times...\times(L_n-2)$:

لدينا $u_n = \ln(L_n - 2)$ نبحث في هذا المجموع على علاقة $L_n - 2$ بـ u_n.

لدينا $u_n = \ln(L_n - 2)$ ومنه : $L_n - 2 = e^{u_n}$

ومنه :

$$P_4 = (L_0-2)\times(L_1-2)\times(L_2-2)\times...\times(L_n-2)$$

أي : $P_4 = e^{u_0}\times e^{u_1}\times e^{u_2}\times...\times e^{u_n} = e^{u_0+u_1+u_2+...+u_n}$ ومنه $P_4 = e^{2\left(3^{n+1}-1\right)}$

تمرين تطبيقي :

لدينا $S_8 = X_0 + X_1^2 + \frac{X_2^3}{2} + \frac{X_3^4}{6} + ... + \frac{X_n^{n+1}}{n!}$ بين أن : $S_8 = 3^{n+1} + \frac{1}{4}\left(3n^2 - 7n - 14\right)$

حل سؤال حول المجموع لبكالوريا شعبة الرياضيات 2018 الموضوع الثاني :

لدينا : (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-1}$ و حدها الأول $u_1=e^{-1}$.ولدينا $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$

المطلوب : حساب المجموع :

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$$

لدينا $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$ نبحث في هذا المجموع على علاقة $\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$ بـ u_n.

لدينا $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$ ومنه $\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)=u_n+\frac{n^2}{n+1}$ بطرح $\frac{1}{n+1}$ للطرفين نجد :

$$\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=u_n+\frac{n^2}{n+1}-\frac{1}{n+1}$$ ومنه : $$\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=u_n+\frac{n^2-1}{n+1}$$

إذن : $\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=u_n+\frac{(n-1)(n+1)}{n+1}$ ومنه نجد: $\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=u_n+n-1$

ومنه :

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$$

أي :

$$S_n=(u_1+(1)-1)+(u_2+(2)-1)+(u_3+(3)-1)+\ldots+(u_n+(n)-1)$$
$$S_n=(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n)+(1+2+3+\ldots+n)-(1+1+1+\ldots+1)$$

بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-1}$ و حدها الأول $u_1=e^{-1}$ فإن :

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=u_1\times\frac{q^{n-1+1}-1}{q-1}=e^{-1}\times\frac{(e^{-1})^n-1}{e^{-1}-1}=\frac{1}{e}\times\frac{e^{-n}-1}{e^{-1}-1}=\frac{e^{-n}-1}{e(e^{-1}-1)}$$

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{e^{-n}-1}{1-e}$$

ومنه $S_n=\frac{e^{-n}-1}{1-e}+\frac{n(n+1)}{2}-1(n-1+1)$ ومنه $S_n=\frac{e^{-n}-1}{1-e}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n}{2}$

و عليه :

$$S_n=\frac{e^{-n}-1}{1-e}+\frac{n(n-1)}{2}$$

الرياضيات تاج في رؤوس الأذكياء لا يراه إلا الأذكياء
وتذكر أنه ليس كل ما يلمع ذهبا .....

5) المجموع أو الجداء التيليسكوبي

1. جداء تيليسكوبي أو مجموع تيليسكوبي في حالة متتالية معرفة بعبارة الحد العام .
2. جداء تيليسكوبي أو مجموع تيليسكوبي في حالة متتالية معرفة بصورة حدين متتابعين لمتتالية أخرى بدالة.

أولا : جداء تيليسكوبي أو مجموع تيليسكوبي في حالة متتالية معرفة بعبارة الحد العام

a. المجموع التيليسكوبي :

نستعمله في حالة متتالية معرفة بعبارة الحد العام حيث شكلها مكتوب بفرق صورة عددين طبيعيين متتابعين متعلقين بـ n بدالة f أي $u_n = f(n+1) - f(n)$ أو $u_n = f(n) - f(n+1)$

أمثلة : كل الحالات الآتية نستعمل المجموع التيليسكوبي في مجموع الحدود المتتابعة لهذه المتتالية :

عبارة الحد العام	الدالة f	عبارة الحد العام	الدالة f
$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}$	$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
$2e^{n+1} - 2e^{n}$	$f(x) = 2e^{x}$	$(n+3)! - (n+2)!$	$f(x) = (x+2)!$
$\ln(n+2) - \ln(n+1)$	$f(x) = \ln(x+1)$	$\frac{3e^{n+1} - (n+1)^2}{n} - \frac{3e^{n} - n^2}{n-1}$	$f(x) = \frac{3e^{x} - x^2}{x-1}$

طريقة استعمال المجموع التيليسكوبي :

مثال تطبيقي :

(u_n) متتالية عددية حيث : $u_n = \frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}$

المطلوب : حساب المجموع S_n حيث : $S_n = u_3 + u_4 + u_5 + ... + u_n$.

الجواب : نقوم بتعويض كل الحدود بما يساويها أي :

$$S_n = u_3 + u_4 + u_5 + ... + u_n$$

$$S_n = \left(\frac{3+2}{3-1} - \frac{3+1}{3-2}\right) + \left(\frac{4+2}{4-1} - \frac{4+1}{4-2}\right) + \left(\frac{5+2}{5-1} - \frac{5+1}{5-2}\right) + ... + \left(\frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{1}\right) + \left(\frac{6}{3} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{7}{4} - \frac{6}{3}\right) + ... + \left(\frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}\right)$$

نقوم بتغير ترتيب الحدود في كل قوس نجد :

$$S_n = \left(-\frac{4}{1} + \frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2} + \frac{6}{3}\right) + \left(-\frac{6}{3} - \frac{7}{4}\right) + ... + \left(-\frac{n+1}{n-2} + \frac{n+2}{n-1}\right)$$

نقوم بتغيير أماكن الأقواس نجد:

$$S_n = -\frac{4}{1} + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{6}{3} - \frac{6}{3}\right) + \left(\frac{7}{4} - \frac{7}{4}\right) + ... + \left(\frac{n+1}{n-2} - \frac{n+1}{n-2}\right) + \frac{n+2}{n-1}$$

نلاحظ أنه لم يتبقى من المجموع إلا الحد الأول والحد الأخير ومنه نجد :

$$S_n = -\frac{4}{1} + \frac{n+2}{n-1} = \frac{-4n+4+n+2}{n-1} = \frac{6-3n}{n-1} = \frac{3(2-n)}{n-1}$$

مثال آخر : (u_n) متتالية عددية حيث : $u_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{(n+1)^2}{n+2}$

المطلوب : حساب المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

لدينا :

$$S_n = \left(\frac{0^2}{0+1} - \frac{(0+1)^2}{0+2}\right) + \left(\frac{1^2}{1+1} - \frac{(1+1)^2}{1+2}\right) + \left(\frac{2^2}{2+1} - \frac{(2+1)^2}{2+2}\right) + ... + \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{(n+1)^2}{n+2}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{0}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{9}{4}\right) + ... + \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{(n+1)^2}{n+2}\right)$$

نقوم بتغيير أماكن الأقواس نجد:

$$S_n = \frac{0}{1} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right) + ... + \left(\frac{n^2}{n+1} + \frac{n^2}{n+1}\right) - \frac{(n+1)^2}{n+2}$$

نلاحظ أنه لم يتبقى من المجموع إلا الحد الأول والحد الأخير ومنه نجد : $S_n = \frac{0}{1} - \frac{(n+1)^2}{n+2} = \frac{-(n+1)^2}{n+2}$

تمرين تطبيقي : (بكالوريا)

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$

أختر الإجابة الصحيحة : المجموع : $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

(1 $-\ln(n+1)$ ، **(2** $\ln(n+2)$ ، **(3** $1 - \ln(n+1)$

b. الجداء التيليسكوبي :

نستعمله في حالة متتالية معرفة بعبارة الحد العام حيث شكلها مكتوب بحاصل قسمة صورة عددين طبيعيين متتابعين متعلقين بـ n بدالة f أي $u_n = \frac{f(n+1)}{f(n)}$ أو $u_n = \frac{f(n)}{f(n+1)}$

أمثلة : كل الحالات الآتية نستعمل الجداء التيليسكوبي في جداء الحدود المتتابعة لهذه المتتالية :

عبارة الحد العام	الدالة f	عبارة الحد العام	الدالة f
$\frac{n}{n+1}$	$f(x) = x$	في حالة $1 - \frac{1}{n+1}$: تبدو لنا أنها لا تخص الجداء التيليسكوبي ولكن بعد التبسيط نجد عبارتها تكتب على الشكل $\frac{n}{n+1}$	أي الدالة f معرفة من الشكل $f(x) = x$
$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$	$f(x) = \ln x$		
$\frac{2e^n + 1}{2e^{n+1} + 1}$	$f(x) = 2e^x + 1$		

الرياضياتي ينتقد المعلومة و يتحقق من صحتها و المتطفل على الرياضيات ينتقد فقط من أجل الانتقاد بالقول أن هذا خاطئ من أجل أن يعتقد المستمع غير الرياضياتي أنها خاطئة بدون سبب ثم نشرها إلى الغير لتشويه صاحب العمل و لكن أذكرهم أنه للمجتهد إن أصاب أجران و إن أخطأ فله أجر واحد فللحالتين له أجر

مثال تطبيقي :

(u_n) متتالية عددية حيث : $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

المطلوب : حساب الجداء P_n حيث .: $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

الجواب : لدينا : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

نقوم بتعويض كل الحدود بما يساويها أي : $P_n = \frac{0+2}{0+1} \times \frac{1+2}{1+1} \times \frac{2+2}{2+1} \times \ldots \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{n+2}{n+1}$

$P_n = \frac{2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n+1)}$ ثم نقوم بالاختزال نجد : $P_n = \frac{(n+2)}{1} = n+2$

تمرين تطبيقي :

(u_n) متتالية عددية حيث : $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$ برهن أن : $P_n = u_2 \times u_3 \times u_4 \times \ldots \times u_n = \frac{\ln 2}{\ln(n+1)}$

تمرين يشمل المجموع و الجداء التيلسكوبيان في حالة متتالية معرفة بعبارة الحد العام .

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2. استنتج المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

3. أوجد من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n الجداء : $P_n = S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n$.

4. أدرس اتجاه تغير المتتالية (P_n)

ثانيا :جداء تيليسكوبي أو مجموع تيليسكوبي في ثانيا حالة متتالية معرفة بصورة حدين متتابعين لمتتالية أخرى بدالة

a. المجموع التيليسكوبي :

نستعمله في حالة متتالية معرفة بفرق صورة حدين متتابعين متعلقين بـ n لمتتالية بدالة f أي

$u_n = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ أو $u_n = f(u_n) - f(u_{n+1})$

أمثلة : في كل الحالات الآتية نستعمل المجموع التيلسكوبي في مجموع الحدود المتتابعة لهذه المتتالية :

عبارة الحد العام	الدالة f	عبارة الحد العام	الدالة f
$u_{n+1} - u_n$	$f(x) = x$	$3e^{-2u_{n+1}} - 3e^{-2u_n}$	$f(x) = 3e^{-2x}$
$\frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$	$f(x) = \frac{1}{2}x$	$\ln(u_n + 2) - \ln(u_n + 1)$	$f(x) = \ln(x+1)$
$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$2e^{u_{n+1}} - 2e^{u_n}$	$f(x) = 2e^{x}$

سر النجاح هو أن تكون عزيمتك على النجاح أكبر من خوفك من الفشل

طريقة استعمال المجموع التيليسكوبي :

مثال تطبيقي :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان حيث : $u_n = 3n^2 - 2n + 5$ ، $v_n = u_{n+1} - u_n$

المطلوب : حساب المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

الجواب : نقوم بتعويض كل الحدود بما يساويها أي : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + ... + (u_{n+1} - u_n)$$

ومنه $$S_n = (-u_0 + u_1) + (-u_1 + u_2) + (-u_2 + u_3) + ... + (-u_n + u_{n+1})$$

أي : . $$S_n = -u_0 + (u_1 - u_1) + (u_2 - u_2) + (u_3 - u_3) + ... + (u_n - u_n) + u_{n+1} = u_{n+1} - u_0$$

و بالتعويض في عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) نجد :

$$S_n = u_{n+1} - u_0 = \left[3(n+1)^2 - 2(n+1) + 5\right] - \left[3(0)^2 - 2(0) + 5\right] = 3n^2 + 4n + 1$$

مثال آخر : (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان حيث : $u_n = \ln\left(n^2 - n + 1\right)$ ، $v_n = e^{u_n} - e^{u_{n+1}}$

المطلوب : حساب المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

الجواب : نقوم بتعويض كل الحدود بما يساويها أي : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

$$S_n = \left(e^{u_0} - e^{u_1}\right) + \left(e^{u_1} - e^{u_2}\right) + \left(e^{u_2} - e^{u_3}\right) + ... + \left(e^{u_n} - e^{u_{n+1}}\right)$$

ومنه

$$S_n = e^{u_0} + \left(-e^{u_1} + e^{u_1}\right) + \left(-e^{u_2} + e^{u_2}\right) + \left(-e^{u_3} + e^{u_3}\right) + ... + \left(-e^{u_n} + e^{u_n}\right) - e^{u_{n+1}} = e^{u_0} - e^{u_{n+1}}$$

و بالتعويض في عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) نجد :

$$S_n = e^{u_0} - e^{u_{n+1}} = e^{\ln\left(0^2 - 0 + 1\right)} - e^{\ln\left(n^2 - n + 1\right)} = e^{\ln 1} - \left(n^2 - n + 1\right) = 1 - n^2 + n - 1 = -n^2 + n$$

تمرين تطبيقي :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان حيث : $u_n = 2n^2 + 1$ ، $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$

برهن أن : $$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = -\frac{2(n+1)^2}{2(n+1)^2 + 1}$$

b. الجداء التيليسكوبي :

نستعمله في حالة متتالية معرفة بقسمة صورة حدين متتابعين متعلقين بـ n لمتتالية بدالة f

أي $u_n=\dfrac{f(u_{n+1})}{f(u_n)}$ أو $u_n=\dfrac{f(u_n)}{f(u_{n+1})}$.

أمثلة : في كل الحالات الآتية نستعمل الجداء التيلسكوبي في جداء الحدود المتتابعة لهذه المتتالية :

عبارة الحد العام	الدالة f	عبارة الحد العام	الدالة f
$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$	$f(x)=x$	في حالة $1-\dfrac{1}{u_n+1}$: تبدو لنا أنها لا تخص الجداء التيلسكوبي ولكن بعد التبسيط نجد عبارتها تكتب على الشكل $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$	أي الدالة f معرفة من الشكل $f(x)=x$
$\dfrac{\ln(u_{n+1})}{\ln u_n}$	$f(x)=\ln x$		
$\dfrac{2e^{u_n}+1}{2e^{u_{n+1}}+1}$	$f(x)=2e^x+1$		

مثال تطبيقي :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان حيث: $u_n=\dfrac{n+2}{n+1}$ ، $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

المطلوب : حساب الجداء P_n حيث : $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$.

الجواب : نقوم بتعويض كل الحدود بما يساويها أي :

$$P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$$

$$P_n=\frac{u_1}{u_0}\times\frac{u_2}{u_1}\times\frac{u_3}{u_2}\times\ldots\times\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_{n+1}}{u_0\times u_1\times u_2\times\ldots\times u_n}=\frac{u_{n+1}}{u_0}$$

و بالتعويض في عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) نجد :

$$P_n=\frac{u_{n+1}}{u_0}=\frac{\dfrac{(n+1)+2}{(n+1)+1}}{\dfrac{(0)+2}{(0)+1}}=\frac{\dfrac{n+3}{n+2}}{2}=\frac{n+3}{2(n+1)}$$

تمرين تطبيقي :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان حيث : $u_n=n^2+2n+3$ ، $v_n=\dfrac{\ln(u_{n+1})}{\ln(u_n)}$

برهن أن : $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n=\dfrac{\ln(n^2+4n+6)}{\ln 3}$

أتمنى أن يستفيد تلاميذنا الأعزاء و أساتذتنا الكرام من هذه المجهودات و أن أكون قد قمت بتبسيط بعض الصعوبات التي قد تمر عليكم في المجاميع و الجداءات في المتتاليات

أتمنى الترحم على والدي العزيز و على أستاذنا الجمعي عامر

رحمة الله على موتانا و موتى المسلمين

أدعوا لكل من اجتهد بالتوفيق و النجاح

فوصية أبي رحمة الله عليه : يا بني على المرء العمل و ليس عليه درك النجاح