سلاسل المنجد - دروس و تمارين

علوم فيزيائية

3AS
الشعب العلمية و الرياضية

السلسلة 3-03-1

تطور دراسة ظواهر كهربائية

عرض نظري و تمارين محلولة

يمكن تحميل السلسلة بصيغة pdf من موقع المنجد :
www.sites.google.com/site/faresfergani

للمزيد (عرض نظري مفصل – تمارين – فيديوهات ......)
يرجى زيارتنا على صفحة الوحدة في نفس الموقع الإلكتروني .

لكي يصلك جديد موقع المنجد تابع صفحة الفايسبوك التالية :
facebook.com/elmoundjidff

الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
fares_fergani@yahoo.fr
0771998109

الإصدار : جانفي/2023

العلوم الفيزيائية

سلاسل المنجد في العلوم الفيزيائية – ثالثة ثانوي – الوحدة 03

دراسة ظواهر كهربائية

إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

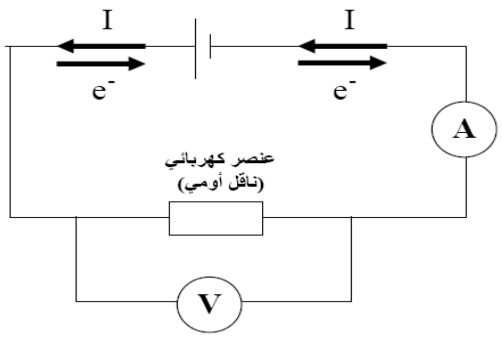
****

السلسلة 3-03- 01

عرض نظري و تمارين

I- مفاهيم أساسية في الكهرباء

1- التيار الكهربائي و التوتر الكهربائي



• مفهوم التيار الكهربائي و التوتر الكهربائي :

- التيار الكهربائي هو الإنتقال الجماعي لحاملات الشحنة و حاملات الشحنة في النواقل المعدنية هي الإلكترونات .
- ينتقل التيار الكهربائي من القطب الموجب للمولد إلى قطبه السالب ، و الإلكترونات في الاتجاه المعاكس .
- تقاس شدة التيار الكهربائي بجهاز يدعى مقياس الأمبير يرمز له بـ (A) ويوصل دوما على التسلسل مع العنصر المراد قياس شدته التيار الكهربائي المارة به
- إذا كانت شدة التيار الكهربائي المار في الدارة ثابتة فإنه يعبر عنها بالعلاقة :

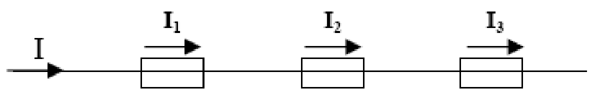
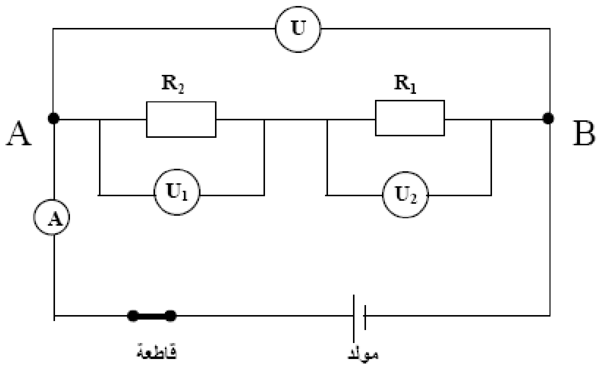
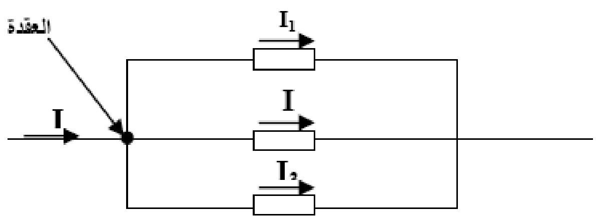
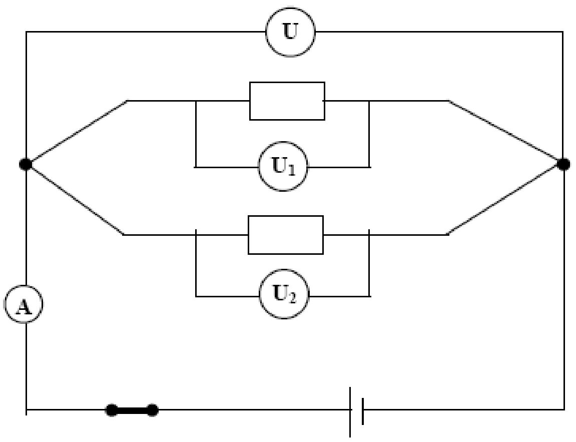
$$\boxed{I = \frac{\Delta q}{\Delta t}}$$

- إذا كانت شدة التيار الكهربائي متغيرة لإنه يعبر عنها بالعلاقة :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

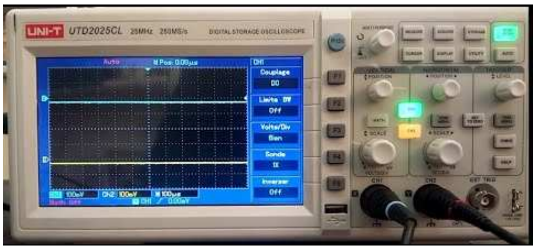
- يجري تيار كهربائي بين نقطتين من دارة إذا كان بين هاتين النقطتين توتر كهربائي .
- يرمز للتوتر الكهربائي بين طرفي A و B لعنصر كهربائي في دارة كهربائية بـ u_{AB} و يكون ما يلي :
  - ✓ $u_{AB} = - u_{BA}$.
  - ✓ $u_{AB} > 0$ إذا كان الطرف A مرتبط بالقطب الموجب للمولد .
  - ✓ $u_{AB} < 0$ إذا كان الطرف A مرتبط بالقطب السالب للمولد .
- يقاس التوتر الكهربائي بجهاز يدعى مقياس الفولط يرمز له بـ (V) ويوصل دوما على التفرع مع العنصر المراد قياس التوتر الكهربائي بين طرفيه .
- للحصول على قيمة موجبة للتوتر الكهربائي بواسطة مقياس الفولط يجب وصل قطبه الموجب (لونه آحمر عادة) بالطرف الموصول بالقطب الموجب للمولد ، و إذا وصلنا قطبه الموجب مع الطرف المرتبط بالقطب السالب للمولد نحصل على قيمة سالبة للتوتر .

• <u>خواص شدة و التيار و التوتر الكهربائي :</u>

	خواص شدة التيار الكهربائي	خواص التوتر الكهربائي
على التسلسل	 $I = I_1 = I_2 = I_3$	 $U = U_1 + U_2$ **قانون جمع التوترات**
على التفرع	 $I = I_1 + I_2 + I_3$ **قانون العقد**	 $U = U_1 = U_2$

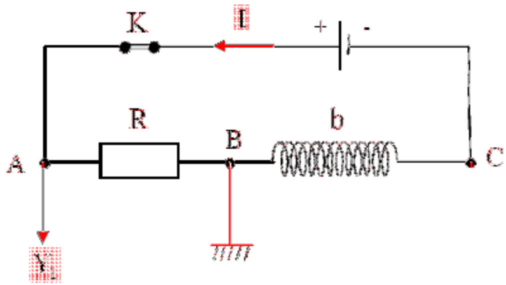
• راسم الاهتزاز المهبطي ذو ذاكرة :

- راسم الاهتزاز المهبطي هو جهاز إلكتروني يمكننا من خلاله الحصول على منحنى تغيرات التوتر الكهربائي بدلالة الزمن لأي عنصر كهربائي في الدارة .



- يمكن لراسم الاهتزاز المهبطي إعطاء منحنيين في آن واحد .

- للحصول على قيمة موجبة للتوتر الكهربائي بين طرفي عنصر كهربائي باستعمال راسم الاهتزاز المهبطي نصل أرضي الجهاز بطرف العنصر الكهربائي الموصول بالقطب السالب للمولد و المدخل Y بالطرف الموصول بالقطب الموجب للمولد ، و إذا لزم عكس ذلك ، نحصل على قيمة سالبة و بعدها نقوم بعكس المنحنى بالضغط على الزر INV .

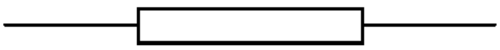


- يمكن الحصول على منحنى التيار عن طريق راسم الاهتزاز المهبطي من خلال منحى التوتر بين طرفي الناقل الأومي ، لأن $u_R = Ri$ و بالتالي المنحنى $i(t)$ مماثل للمنحنى $u_R(t)$.

2- النواقل الأومية و المولدات

• الناقل الأومي :

- الناقل الأومي هو عنصر كهربائي يحول جزأ من الطاقة الكهربائية التي يتلقاها إلى طاقة حرارية بفعل جول ، يرمز له في الدارة الكهربائية كما يلي :

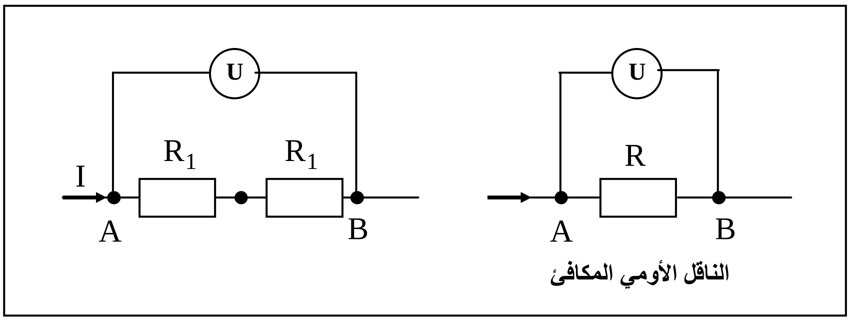


- يتميز الناقل الأومي بثابت يدعى مقاومة الناقل الأومي يرمز له بـ R و وحدته الأوم (Ω) .
- التوتر بين طرفي ناقل أومي يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{u_R = Ri}$$

• جمع النـواقل الأومية :

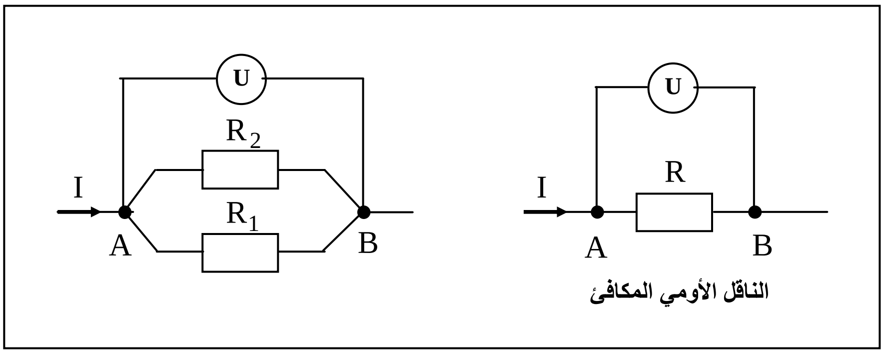
على التسلسل :



$$R = R_1 + R_2$$

R : هي مقاومة الناقل الأومي المكافئ ، و الناقل الأومي المكافئ لنواقل أومية R_1 ، R_2... هو ناقل أومي التوتر بين طرفيه مساوي للتوتر بين طرفي ثنائي القطب (R_1 , R_2 ......) و يجتازه تيار كهربائي شدته مساوية لشدة التيار الكهربائي الذي يجتاز ثنائي القطب (R_1 , R_2 .....) .

على التفرع :



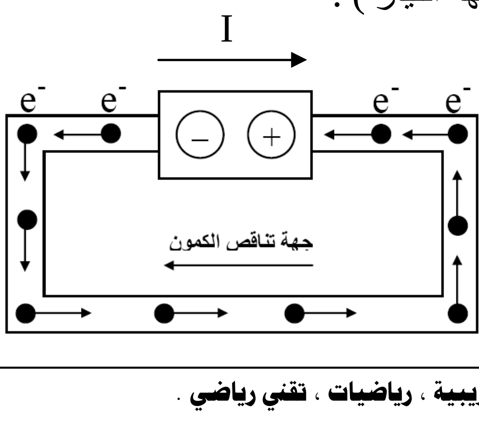
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

R : هي مقاومة الناقل الأومي المكافي للنواقل الأومية R_1 ، R_2 .

• المولد الكهربائي :

- المولد الكهربائي هو عنصر كهربائي يجعل الشحنات الكهربائية تتحرك باستمرار بين قطبين من الدارة الكهربائية و بالتالي إعطاء تيار كهربائي .

- يسلك المولد في دارة كهربائية سلوك المضخة المائية تماما ، فهو يسحب الإلكترونات من جهة قطبه الموجب ، و يدفعها من جهة قطبه السالب (عكس جهة التيار) .



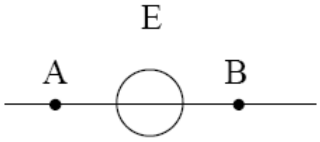
- يتميز المولد بمقاومة داخلية r و قوة محركة كهربائية E تمثل التوتر الكهربائي بين طرفيه عندما لا يجري في الدارة أي تيار .
- التوتر بين طرفي مولد قوته المحركة الكهربائية E و مقاومته الداخلية r يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{u = E - ri}$$

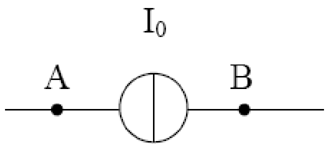
- إذا كانت $r = 0$ نقول على المولد أنه مثالي و يكون :

$$\boxed{u = E}$$

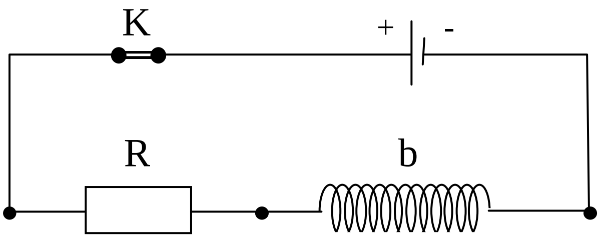
أي التوتر بين طرفيه (بين طرفي الدارة) ثابت و يساوي E .
- لا يوجد في الواقع مولد مثالي لكن يمكن بتجهيز مرفق للمولد جعل المقاومة الداخلية معدومة و الحصول على مولد التوتر بين طرفيه ثابت E يدعى هذا المولد مولد التوتر .
- مولد التوتر هو مولد يعطي توتر ثابت و يساوي E ، يرمز له في الدارة الكهربائية كما يلي :



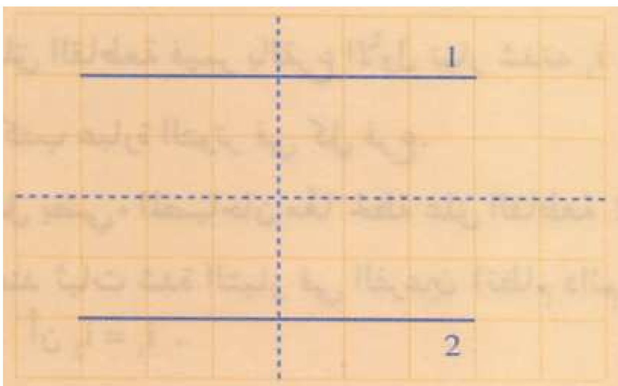
- هناك مولد آخر يدعى مولد التيار و هو مولد يعطي تيار ثابت I_0 ، يرمز له كما يلي :



<u>التمرين (1) :</u> <u>(التمرين : 001 في بنك التمارين على الموقع) (*)</u>

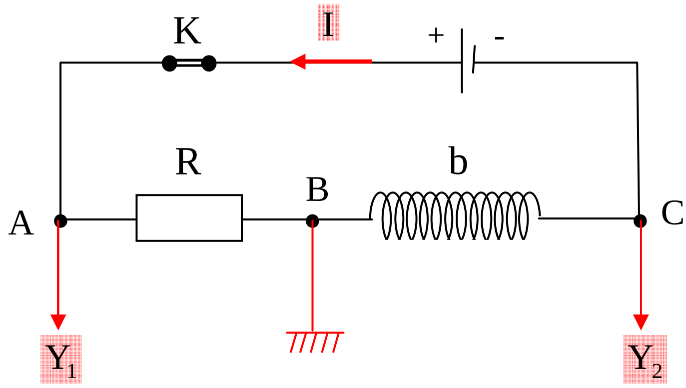


تتكون الدارة التالية من ناقل أومي (R) و وشيعة (b) و قاطعة (k)
1- عين على هذه الدارة جهة التيار الكهربائي ، ثم بين كيف يتم وصل هذه الدارة براسم الاهتزاز المهبطي حتى نحصل على منحنيين ، الأول يمثل التوتر بين طرفي الناقل الأومي و الثاني بين طرفي الوشيعة .
2- المنحنيين (1) ، (2) التاليين هما الذين يظهران على شاشة راسم الإهتزاز المهبطي . أي المنحنيين يمثل التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي و أيهما يمثل التوتر u_b بين طرفي الوشيعة



الأجوبة :

1- تعيين جهة التيار الكهربائي و كيفية وصل هذه الدارة براسم الاهتزاز المهبطي :



2- المنحنى الموافق لكل عنصر كهربائي :

من خلال طريقة وصل راسم الاهتزاز المهبطي بالدارة ، يُظهر راسم الاهتزاز المهبطي على المدخل Y_1 التوتر u_{AB} بين طرفي الناقل الأومي و على المدخل Y_2 يُظهر التوتر u_{CB} بين طرفي الوشيعة ، و كون أن Y_1 مرتبط بطرف الناقل الأومي الموصول بالقطب الموجب للمولد و المدخل Y_2 مترابط بطرف الوشيعة الموصول بالقطب السالب للمولد يكون :

- $u_{AB} > 0$

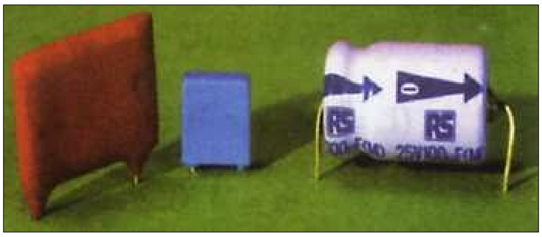
و هذا يتفق مع المنحنى (1) و عليه فإن المنحنى (1) يمثل التوتر بين طرفي الناقل الأومي .

- $u_{CB} < 0$

و هذا يتفق مع المنحنى (2) و عليه فإن المنحنى (2) يمثل التوتر بين طرفي الوشيعة .

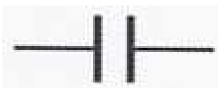
II – ثنائي القطب RC

1- خصائص المكثفة



- **تعريف المكثفة :**

- المكثفة هي عنصر كهربائي قادر على تخزين شحنة كهربائية.
- تتكون المكثفة من ناقلين كهربائيين ، يدعى كل منهما لبوس المكثفة ، يفصل بينهما مادة عازلة للكهرباء .
- يرمز للمكثفة اصطلاحا في الدارات الكهربائية بالرمز التالي :



- **سعة المكثفة :**

- أثبت تجريبيا ان شحنة المكثفة تتناسب طرديا مع التوتر الكهربائي بين طرفيها أي : $q = a\,u$ ، ثابت التناسب a هو ثابت يميز المكثفة يدعى **سعة المكثفة** يرمز لها بـ **C** ووحدتها **الفاراد** التي يرمز لها بـ **F** و نكتب :

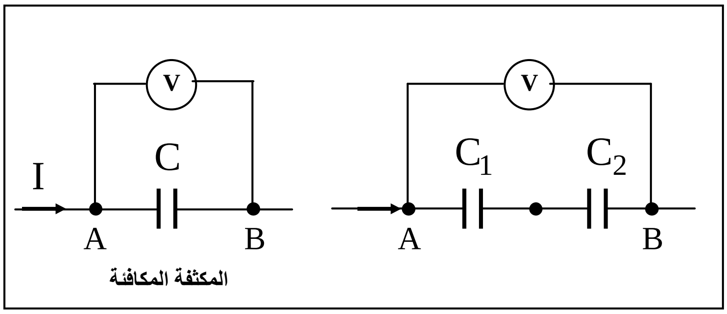
$$\boxed{q = C\,u \rightarrow u = \frac{q}{C}}$$

وحدة شحنة المكثفة : الكولون (C)
وحدة التوتر u : الفولط (V)

- سعة المكثفة هي مقدار يعبر عن إمكانية تخزينة المكثفة للشحنة الكهربائية ، حيث تخزن المكثفة شحنة أكبر كلما كانت سعتها أكبر عندما تشحن بنفس التوتر .
- سعة المكثفة صغيرة جدا ، لذا يعبر عنها عادة بأجزاء الفاراد التالية :
  - ميكرو فاراد (μF) : حيث $1\mu F = 10^{-6} F$
  - نانو فاراد (nF) : حيث $1nF = 10^{-9} F$
  - بيكو فاراد (pF) : حيث $1pF = 10^{-12} F$.

● تجميع المكثفات :

على التسلسل :

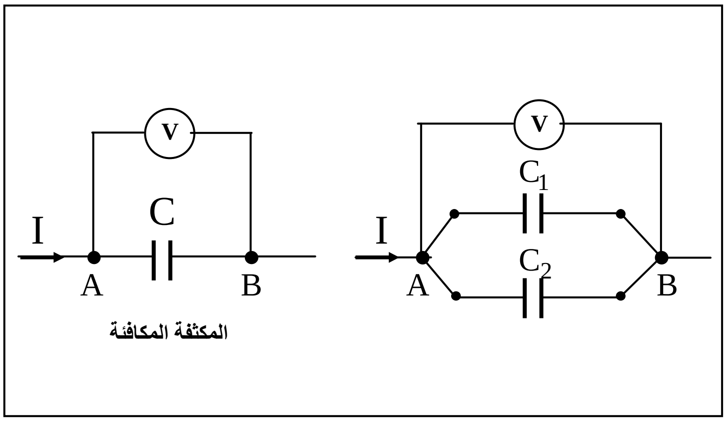


$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ...$$

حيث C هي سعة المكثفة المكافئة ، و المكثفة المكافئة هي مكثفة يكون التوتر بين طرفيها مساوي للتوتر بين ثنائي القطب $(C_1 \ , \ C_2)$ و شدة التيار الذي يجتازها التيار مساوي لشدة التيار الذي يجتاز ثنائي القطب (C_1 , C_2) .

- سعة المكثفة المكافئة في الربط على التسلسل تكون أصغر المكثفات أي : $C < C_1$ ، $C < C_2$ ، يمكن القول بأن جمع المكثفات على التسلسل يجعل السعة المكافئة تصغر .
- جمع المكثفات على التسلسل يسمح أيضا باستخدام توتر أعلى من التوتر الذي تتحمله كل مكثفة على حدة .

على التفرع :



$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

- السعة المكافئة تكون أكبر السعات أي $C > C_1$ ، $C > C_2$ ، $C > C_3$ ، يمكن القول أن الربط على التفرع يجعل المكثفة المكافئة تكبر .
- جمع المكثفات على التفرع يسمح أيضا باستخدام توتر ضعيف للحصول على شحنة كبيرة لا توفرها كل مكثفة على حدة .

مثال :

لدينا مجموعة مكثفات متماثلة سعة كل منها $C_1 = 0.2$ mF .

1- عين طريقة تجميع عدد من هذه المكثفات للحصول على مكثفة مكافئة سعتها 5mF .

2- حدد عدد المكثفات المستعملة .

الجواب :

1- طريقة تجميع المكثفات :

سعة المكثفة المكافئة أكبر من سعة مكثفة واحدة من المكثفات المتماثلة $(C > C_1)$ و هذا يتحقق فقط في الربط على التفرع .

2- عدد المكثفات المستعملة :

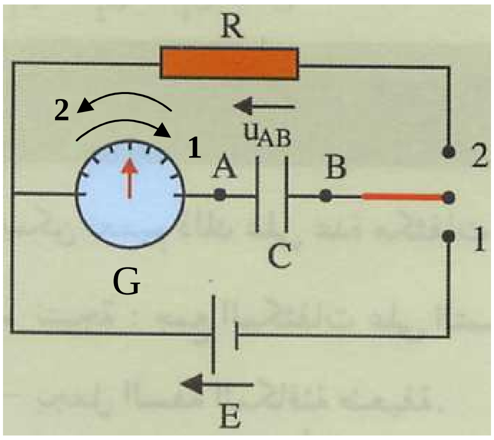
إذا اعتبرنا n هو عدد المكثفات المتتالية يكون :

$$C = \underbrace{C_1 + C_1 + \dots\dots C_1}_{\text{n مرة}}$$

$$C = nC_1 \rightarrow n = \frac{C}{C_1}$$

$$n = \frac{5.10^{-3}}{0.2.10^{-3}} = 25$$

● آلية شحن و تفريغ مكثفة :



نحقق الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل) و المتكونة من : مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E ، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R ، مقياس غلفاني (G) و هو مقياس أمبير حساس جدا ، بادلة .

شحن المكثفة :

- عند وضع البادلة في الوضع (1) ينحرف مؤشر المقياس الغلفاني في الإتجاه (1) ثم يعود إلى الصفر ، يدل ذلك على مرور تيار كهر بائي لفترة وجيزة ثم انقطع .
- التفسير المجهري لما حدث أثناء هو انتقال للإلكترونات من اللبوس A نحو اللبوس B عبر دارة المولد ، و بسبب العازل في المكثفة يحدث تراكم لهذه الإلكترونات في اللبوس B فيشحن هذا الأخير سلبا في حين يشحن اللبوس A إيجابا ، و عندما تنتقل كل الإلكترونات من اللبوس A إلى اللبوس B يتوقف سير الالكترونات و ينقطع التيار الكهربائي

تفريغ المكثفة :

- عند وضع البادلة في الوضع (2) ، نلاحظ انحراف مؤشر المقياس الغلفاني في الاتجاه (2) ثم يعود إلى الصفر ، يدل ذلك على مرور تيار كهربائي لفترة وجيزة ثم انعدم .
- التفسير المجهري لما حدث هو أن الإلكترونات المتراكمة في اللبوس B و التي أتت من اللبوس A أثناء الشحن ، تعود إلى ما كانت عليه إلى اللبوس A حتى يصبح اللبوسين A ، B معتدلين كهربائيا من جديد و عندها يتوقف سير

الالكترونات و ينقطع التيار الكهربائي ، و يفسر الاختلاف في جهة انحراف المؤشر بجهة تيار التفريغ التي تكون معاكسة لجهة تيار الشحن .

ملاحظة :

إن الشحنة الكهربائية الكلية للمكثفة معدومة في كل لحظة لأن المكثفة المشحونة تحمل على لبوسيها شحنتين كهربائيتين متساويتين في القيمة و متعاكستين في الإشارة ، لذا عندما نتكلم عن شحنة المكثفة نقصد بها الشحنة الموجودة على إحدى اللبوسين .

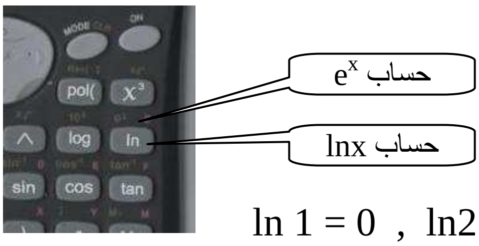
بعض خواص الدالتين اللوغارتمية و الأسية

• تذكير ببعض خواص الدالة اللوغارتمية و الأسية :

$\ln(A.B) = \ln A + \ln B$	$e^{A+B} = e^A . e^B$	$A = B \Leftrightarrow \ln A = \ln B$
$\ln(\frac{A}{B}) = \ln A - \ln B$	$e^{A-B} = \frac{e^A}{e^B}$	$A = B \Leftrightarrow e^A = e^B$
$\ln(\frac{1}{A}) = -\ln A$	$e^{-A} = \frac{1}{e^A}$	$\ln e^x = x$
$\ln(A^n) = n.\ln A$	$(e^{f(x)})' = f'(x) . e^{f(x)}$	$e^{\ln x} = x$

حل المعادلات :

- $e^x = a \rightarrow \ln e^x = \ln a \rightarrow x = \ln a$
- $\ln x = a \rightarrow e^{\ln x} = e^a \rightarrow x = e^a$

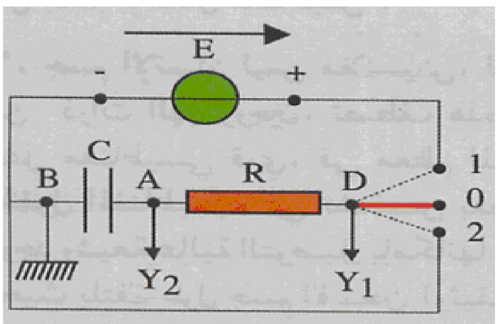


أمثلة :

$\ln 1 = 0$, $\ln 2 = 0.69$, $e^2 = 7.39$, $e^{-2} = 0.13$

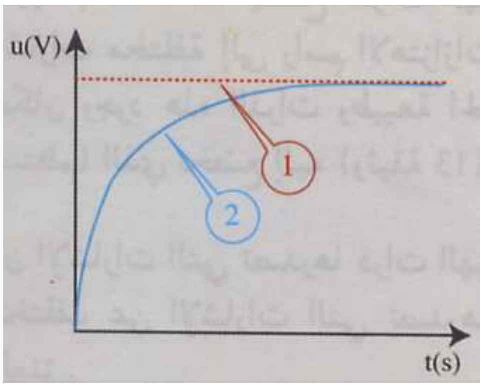
3 - تطور التوتر بين طرفي مكثفة

• الدراسة التجريبية :



نحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل و المكونة من العناصر التالية : مولد توتر ثابت قوته المحركة الكهربائية E، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R ، راسم اهتزاز ذو ذاكرة ، بادلة .

عند الشحن :



- عندما نضع البادلة في الوضع (1) تشحن المكثفة و يظهر على شاشة راسم الاهتزاز المنحنيين (1) و (2) كما في الشكل التالي :

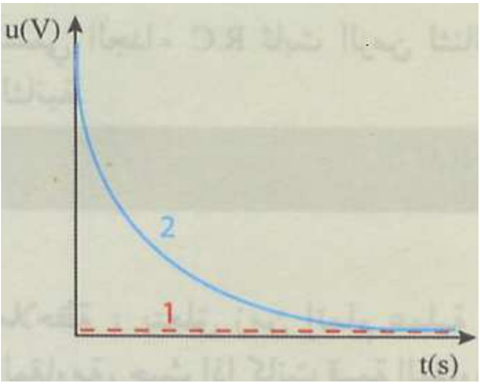
- المنحنيين الذين يظهران على شاشة راسم الاهتزاز ، أحدهما يمثل تطور التوتر u_{DB} بين طرفي المولد ، و الثاني يمثل تطور التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة .

- بما أن التوتر بين طرفي المولد ثابت (مولد توتر) ، من المؤكد أن المنحنى (1) يمثل تطور التوتر بين طرفي المولد u_{DB} ، و من ثم يمثل المنحنى (2) تطور التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة .

- من المنحنى (2) ، نلاحظ أن التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة يزداد خلال عملية الشحن حتى يصل إلى قيمة ثابتة تساوي E عند نهاية عملية الشحن و يثبت عندها .

- تسمى المرحلة التي يزداد التوتر u_{AB} بالنظام الانتقالي و المرحلة التي يثبت فيها هذا التوتر بالنظام الدائم .

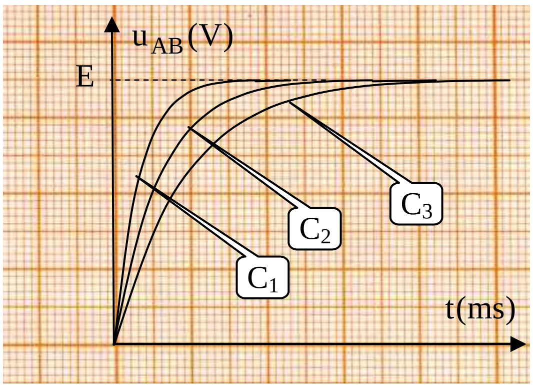
عند التفريغ :



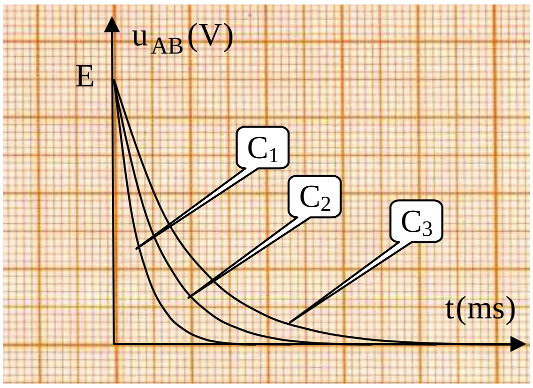
- عندما نضع البادلة في الوضع (2) يظهر على شاشة راسم الاهتزاز المنحنيين (1) ، (2) المبينين في الشكل التالي :

- يمثل المنحنى (1) التوتر u_{DB} بين طرفي المولد و هو منعدم لأن المولد خارج الدارة ، بينما يمثل المنحنى (2) التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة حيث يتناقص هذا التوتر تدريجيا خلال عملية التفريغ (نظام انتقالي) حتى يصل إلى قيمة معدومة يثبت عندها (نظام دائم) .

• ثابت الزمن للدارة (R ,C) :

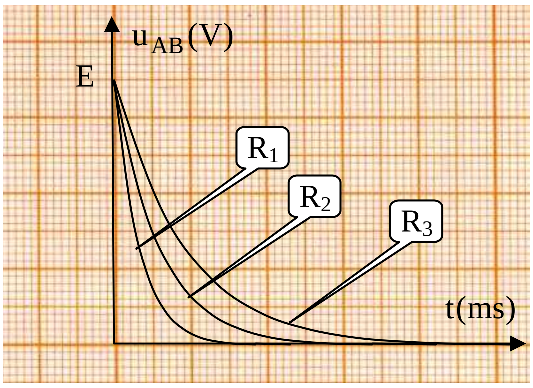


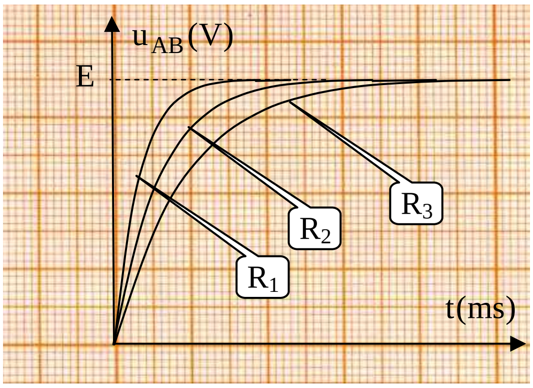
- عندما نعيد الدراسة التجريبية السابقة 3 مرات باستعمال نفس الناقل الأومي و مكثفات ذات سعات مختلفة $C_1 = C$ ، $C_2 = 2C$ ، $C_3 = 3C$ ، ثم ندون المنحنيات $u_{AB}(t)$ المتحصل عليها بواسطة راسم الاهتزاز في بيان واحد نحصل على ما يلي :



- من المنحنيات المتحصل عليها نلاحظ أن زمن اتمام الشحن يزداد بازدياد سعة المكثفة ، و بالمثل فإن زمن إتمام التفريغ في حالة تفريغ المكثفة يزداد أيضا بازدياد سعة المكثفة ، و تكون المنحنيات كما يلي :

- عندما نعيد الدراسة التجريبية السابقة 3 مرات باستعمال نفس المكثفة و مقاومات مختلفة $R_1 = R$ ، $R_2 = 2R$ ، $R_3 = 3R$ ، نلاحظ أن زمن اتمام الشحن و التفريغ يزداد بازدياد المقاومة R ، و تكون المنحنيات التي تظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي كما يلي :



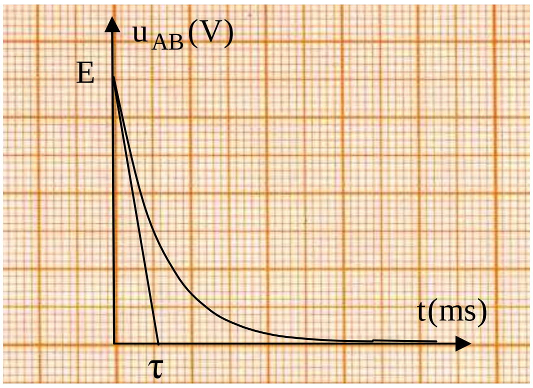


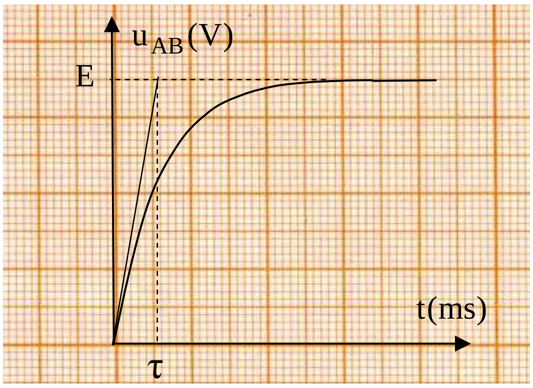
نتيجة :

- زمن إتمام الشحن و التفريغ يزداد بازدياد المقاومة و بازدياد سعة المكثفة ، فهو يزداد بازدياد الجداء R.C
- المقدار R.C هو ثابت يميز الدارة (R,C) يدعى ثابت الزمن لهذه الدارة ، يرمز له بـ τ ووحدته الثانية و نكتب :

$$\boxed{\tau = R \cdot C}$$

- يمكن إثبات أن زمن اتمام الشحن و زمن اتمام التفريغ هو $t = 5\tau$ ، و بالتالي يمكن القول أن ثابت الزمن τ يمثل خمس (20%) من زمن اتمام الشحن أو زمن اتمام التفريغ .
- نحصل على قيمة ثابت الزمن τ من البيان $u_{AB} = f(t)$ المعبر عن تغيرات التوتر بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن ، من خلال تقاطع مماس منحنى هذا البيان عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب $u_{AB} = E$ في حالة الشحن و مع محور الأزمنة في حالة التفريغ ، كما مبين في الشكل التالي :





• الدراسة النظرية :

▪ المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة :

- عند الشحن :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{DA} + u_{AB} = u_{DB}$$

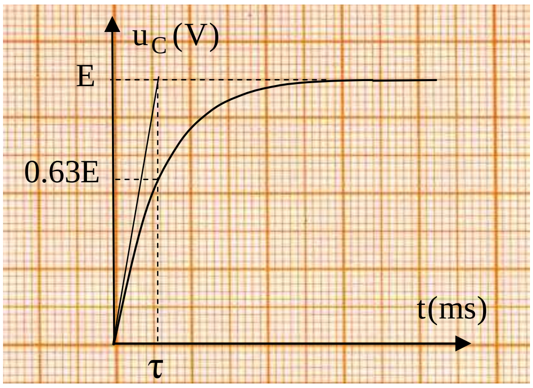
$$R\,i + u_C = E \rightarrow R\frac{dq}{dt} + u_C = E \quad \rightarrow R\frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E \quad \rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

$$\boxed{\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{E}{RC}}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، حلها :

$$\boxed{u_C=E\,(1-e^{-t/\tau})}$$

حيث $\tau = RC$ هو ثابت الزمن للدارة RC .
- لتحديد قيمة τ يمكن إتباع طريقتين :



الطريقة الأولى :
من نقطة تقاطع مماس المنحنى $u_C(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب $u_C = E$ (الشكل) .
الطريقة الثانية :
من العبارة الزمنية $u_C = E\,(1-e^{-t/\tau})$ ، نحسب قيمة التوتر u_C بين طرفي المكثفة عند اللحظة $t = \tau$ فنجد $u_C = 0.63E$ ، ثم نقوم بإسقاط النتيجة المتحصل عليها في البيان مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار (الشكل) .

▪ عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$

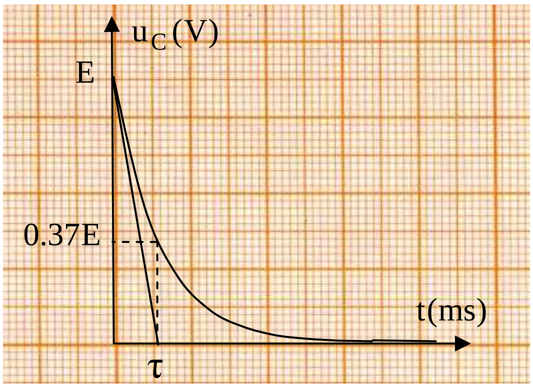
$$0= R\,i + u_C \rightarrow R\frac{dq}{dt}+u_C=0 \quad \rightarrow R\frac{d(C.u_C)}{dt}+u_C=0 \quad \rightarrow RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

$$\boxed{\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{RC}u_C=0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، حلهما دون برهان كما يلي :

$$\boxed{u_C=Ee^{\frac{-1}{RC}t}=E\,e^{-t/\tau}}$$

حيث $\tau = RC$ هو ثابت الزمن للدارة RC .
- لتحديد قيمة τ يمكن إتباع طريقتين :



الطريقة الأولى :

من نقطة تقاطع مماس المنحنى $u_C(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع محور الأزمنة (الشكل) .

الطريقة الثانية :

من العبارة الزمنية $u_C = E\,e^{-t/\tau}$ ، نحسب قيمة التوتر u_C بين طرفي المكثفة عند اللحظة $t = \tau$ فنجد $u_C = 037\ E$ ، ثم نقوم بإسقاط النتيجة المتحصل عليها في البيان مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار (الشكل) .

4- طاقة مكثفة

• الطاقة المخزنة في مكثفة :

▪ العبارة العامة :

- عندما تشحن المكثفة تخزن في لحظة t أثناء شحنها طاقة كهربائية يعبر عنها بالعلاقة :

$$\boxed{E_{(C)} = \frac{1}{2} C\,u_C^{\,2}}$$

و من ثم يمكن كتابة العبارة التالية :

$$\boxed{E_{(C)} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q u_C}$$

حيث : u_C ، q هي التوتر و الشحنة عند اللحظة t .

- قي اللحظة t من تفريغ المكثفة تقدم المكثفة للدارة كهربائية يعبر عن بالعلاقة :

$$\boxed{E_{(C)lib} = E_{(C)0} - E_{(C)}}$$

حيث $E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2$ هي طاقة المكثفة الابتدائية عند $t = 0$.

▪ العبارة اللحظية :

عند الشحن :

عند شحن المكثفة لدينا :

$$u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$$

و منه تصبح عبارة الطاقة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C\,(E\,(1 - e^{-t/\tau}))^2$$

$$E_{(C)}=\frac{1}{2}C\,E^2\,(1-e^{-t/\tau})^2 = E_{(C)0}\,(1-e^{-t/\tau})^2$$

حيث $E_{(C)0}=\frac{1}{2}C\,E^2$ هي طاقة المكثفة الأعظمية .

عند التفريغ :

$$E_{(C)}=\frac{1}{2}C\,u_C{}^2$$

عند تفريغ المكثفة لدينا :

$$u_C = E\,e^{-t/\tau}$$

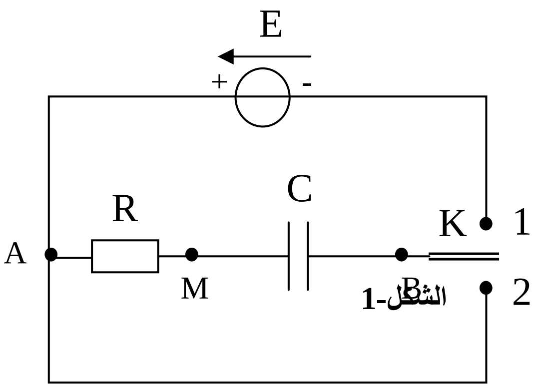
و منه تصبح عبارة الطاقة :

$$E_{(C)}=\frac{1}{2}C\,(E\,e^{-t/\tau})^2$$

$$E_{(C)}=\frac{1}{2}C\,E^2e^{-2t/\tau} = E_{(C)0}\,e^{-2t/\tau}$$

حيث $E_{(C)0}=\frac{1}{2}C\,E^2$ هي طاقة المكثفة الأعظمية .

التمرين (2) : (التمرين : 006 في بنك التمارين على الموقع) (*)



الشكل-1

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) المقابل و التي تتألف من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E ، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته $R = 100\ \Omega$.

1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية الشحن .

أ- بين ماذا يحدث على المستوى المجهري .

ب- بين على الدارة كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي حتى نحصل على المنحنى الممثل لتطور التوتر u_C بين طرفي المكثفة .

جـ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

د- بين أن العبارة $u_C = E\,(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$ هو حل لهذه المعادلة .

هـ- أرسم بشكل كيفي المنحنى $u_C(t)$ مبينا عليه كيفية تحديد τ .

و- قارن بين قيمة التوتر u_C في اللحظة $t = 5\tau$ و E . ماذا تستنتج ؟

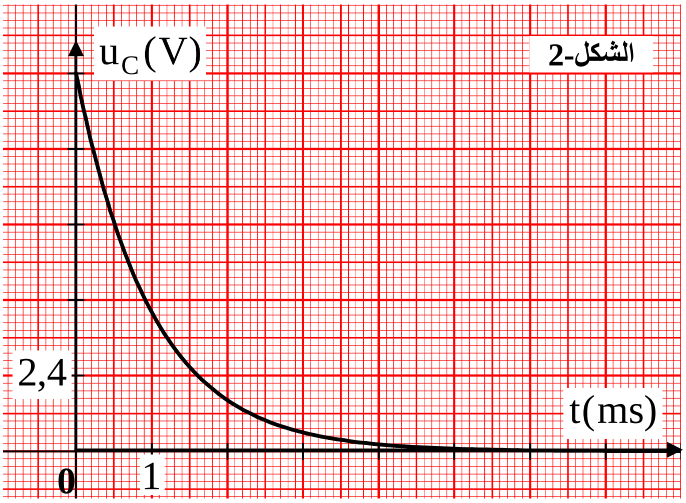
ي- ما هو المدلول الفيزيائي لثابت الزمن τ . بين بالتحليل البعدي أنه متجانس مع الزمن .

2- نضع البادلة في الوضع (2) ، فتبدأ عملية التفريغ :

أ- بين ماذا يحدث على المستوى المجهري .

ب- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C = f(t)$ بين طرفي المكثفة .

جـ- حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل $u_C = Ee^{-\frac{t}{A}}$ ، حيث A هو ثابت يطلب التعبير عنه .



د- الدراسة التجريبية لتطور التوتر بين طرفي المكثفة أعطت بيان (الشكل-2) :

- اعتمادا على البيان أوجد :

• القوة المحركة للمولد E .

• ثابت الزمن τ .

• سعة المكثفة C .

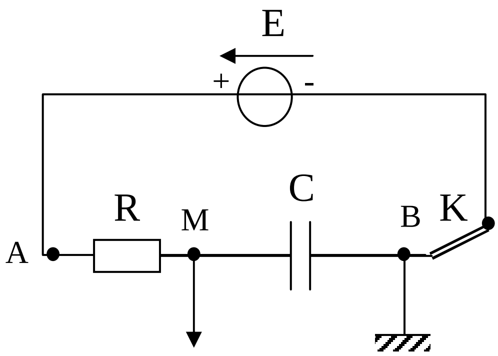
- طاقة المكثفة الأعظمية $E_{(C)0}$.

الأجوبة :

1- أ- ما يحدث على المستوى المجهري :

عندما توضع البادلة في الوضع (1) تشحن المكثفة و على المستوى المجهري يعمل المولد على نقل الإلكترونات من اللبوس M إلى اللبوس B عبر دارة المولد ، حيث تتراكم الإلكترونات عند هذا اللبوس بسبب وجود العازل .

ب- كيفية وصل الدارة براسم الإهتزاز المهبطي حتى نحصل على المنحنى u_{AB} :



جـ- المعادلة التفاضلية :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$

$E = R\,i + u_C$

$$R\frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R\frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E \rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

د- التحقق من الحل :

لدينا :

• $u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$

• $\frac{du_C}{dt} = E(0 - (-\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t})) = \frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

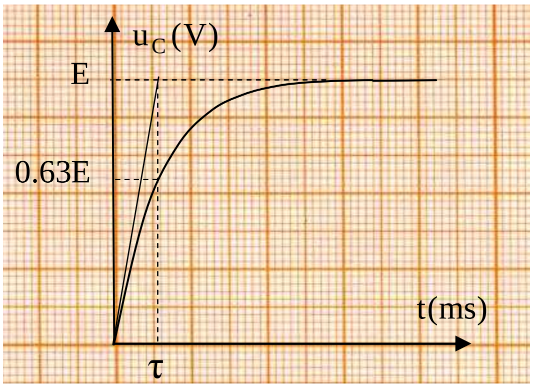
$$\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC}(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

هـ- المنحنى $u_C(t)$:

لدينا معادلة المنحنى :



$u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$

▪ $t = 0 \;\rightarrow\; u_C = 0$

▪ $t = \infty \rightarrow u_C = E$

▪ $t = \tau \;\rightarrow\; u_C = 0.63E$

و- المقارنة بين u_C عند اللحظة $t = 5\tau$ و E :

لدينا :

$$u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$$

بتعويض $t = 5\tau$ نجد :

$$u_{C(t=5\tau)} = E\,(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}) = E\,\underbrace{(1 - e^{-5})}_{0.99} \;\rightarrow\; u_{C\,(t=5\tau)} = E$$

نستنتج أن عملية الشحن ، تنتهي عند اللحظة $t = 5\tau$.

ي- المدلول الفيزيائي :

ثابت الزمن هو الزمن اللازم لشحن المكثفة بنسبة 63% أو الزمن اللازم لتفريغ المكثفة إلى نسبة 37% ، كما يمثل خمس (أو 20%) من زمن إتمام الشحن أو التفريغ .

▪ إثبات أن τ متجانس مع الزمن :

$$[\tau] = [R][C]$$

لدينا :

$$\bullet\; u_R = R.i \;\rightarrow [U] = [R][I] \rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$$

$$\bullet\; u_C = \frac{q}{c} \;\rightarrow [U] = \frac{[Q]}{[C]} \rightarrow [C] = \frac{[Q]}{[U]}$$

و منه يصبح :

$$[\tau] = \frac{[U]}{[I]}\frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]}$$

- لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow [I] = \frac{[Q]}{[T]} \rightarrow [Q] = [I][T] \qquad \rightarrow\; [\tau] = \frac{[I][T]}{[I]} \rightarrow [\tau] = [T] = s$$

إذن τ متجانس مع الزمن .

2- أ- ما يحدث على المستوى المجهري :

عند وضع البادلة في الوضع (2) تتفرغ المكثفة و على المستوى المجهري تعود الإلكترونات المتراكمة عند اللبوس B و التي أتت من اللبوس M أثناء عملية الشحن ، إلى وضعها الأصلي عند اللبوس M عبر دارة المقاومة .

ب- المعادلة التفاضلية بدلالة u_C :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$

$0 = R\,i + u_C$

$$R\frac{dq}{dt}+u_C=0 \quad \rightarrow R\frac{d(C.u_C)}{dt}+u_C=0 \quad \rightarrow RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0 \quad \rightarrow \frac{du_C}{dt}+\frac{1}{RC}u_C=0$$

جـ - عبارة A :

لدينا :

- $u_C = Ee^{-\frac{t}{A}}$
- $\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{A}e^{-\frac{t}{A}}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{E}{A}e^{-\frac{t}{A}}+\frac{1}{RC}.Ee^{-\frac{t}{A}}=0 \quad \longrightarrow (-\frac{E}{A}+\frac{E}{RC})e^{-\frac{t}{A}}=0$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$-\frac{E}{A}+\frac{E}{RC}=0 \rightarrow \frac{E}{A}=\frac{E}{RC} \longrightarrow A=RC$$

د- قيمة E :

- من البيان :

$$t=0 \rightarrow u_C = 2.4 \, . \, 5 = 12V$$

و من معادلة المنحنى : $u_C = E\, e^{-t/\tau}$ يكون :

$$t=0 \rightarrow u_C = E$$

إذن : $E = 12$ V .

▪ قيمة τ :

$$t=\tau \rightarrow u_C = 0.37\,E \rightarrow u_C = 0.37 \, . \, 12 = 4.44 \text{ V}$$

بالقسمة على السلم (2.4V) نجد : 1.85 cm بإسقاط نجد : $\tau = 1$ ms .

▪ قيمة C :

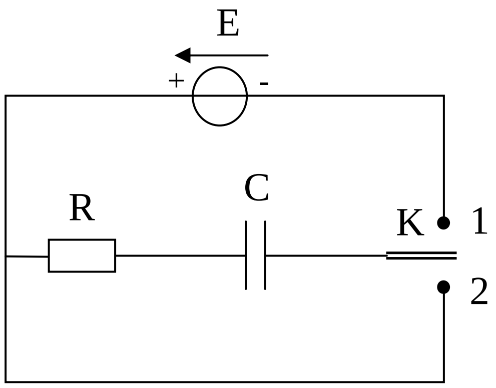
$$\tau = RC \rightarrow C=\frac{\tau}{R} \rightarrow C=\frac{10^{-3}}{100}=10^{-5}\text{ F}$$

▪ طاقة المكثفة الأعظمية $E_{(C)0}$:

$$E_{(C)0}=\frac{1}{2}CE^2 \rightarrow E_{(C)0}=\frac{1}{2}.10^{-5}\,(12)^2=7{,}2.10^{-4}\text{ J}$$

التمرين (3) : (التمرين : 007 في بنك التمارين على الموقع)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في الشكل المقابل و التي تتألف مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائيـة E ، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R .



1- أكتب العبارت اللحظية للمقـادير التالية فـي حالـة الشـحن و التفريـغ ، مع رسم المنحنيات الموافقة بشكل كيفي :

أ- شدة التيار الكهربائي المار في الدارة $i(t)$.

ب- شحنة المكثفة $q(t)$.

جـ- التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي .

د- طاقة المكثفة $E_{(C)}(t)$ . .

2- أكتب المعادلة التفاضلية في الحالات التالية عند الشحن و التفريغ .

أ- بدلالة شحنة المكثفة $q(t)$ المار بالدارة .

ب- بدلالة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار بالدارة .

جـ- بدلالة التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي .

الأجوبة :

1-أ- العبارة اللحظية لشدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة :

عند الشحن :

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C\,u_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

عند الشحن لدينا :

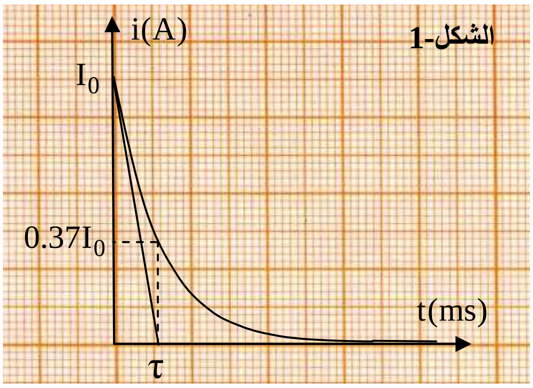
- $u_C = E\,(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$
- $\frac{du_C}{dt} = E\,(0 - (-\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}) = \frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$

و منه تصبح عبارة شدة التيار :

$$i = C\,(\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$\boxed{i = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} = I_0 e^{-t/\tau}}$$

حيث $I_0 = \frac{E}{R}$ هي الشدة العظمى للتيار الكهربائي .



بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow i = I_0$
- $t = \infty \rightarrow i = 0$
- $t = \tau \rightarrow i = 0.37\, I_0$

و منه المنحنى $i(t)$ الممثل لتطور شدة التيار المار بالدارة عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-1) .

<u>عند التفريغ :</u>

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C\, u_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

عند التفريغ لدينا :

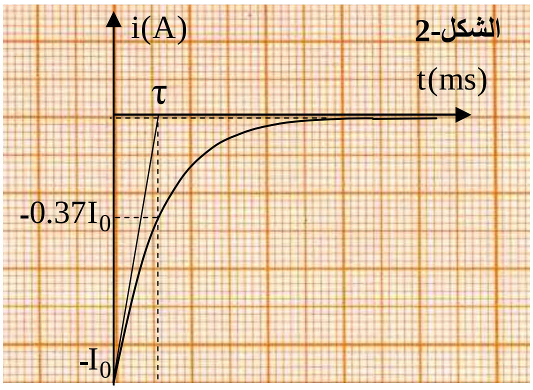
- $u_C = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$
- $\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$

و منه تصبح عبارة شدة التيار :

$$i = C\,(-\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$\boxed{i = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} = -I_0e^{-t/\tau}}$$

حيث $I_0 = \frac{E}{R}$ هي الشدة العظمى للتيار الكهربائي .



بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow i = -I_0$
- $t = \infty \rightarrow i = 0$
- $t = \tau \rightarrow i = -0.37\, I_0$

و منه المنحنى $i(t)$ الممثل لتطور شدة التيار المار بالدارة تفريغ المكثفة يكون كما في (الشكل-2) .

<u>ب- العبارة اللحظة شحنة المكثفة $q(t)$:</u>

<u>عند الشحن :</u>

لدينا : $q = Cu_C$ و عند الشحن لدينا $u_C = E\,(1- e^{-\frac{1}{RC}t})$ ، بالتعويض نجد :

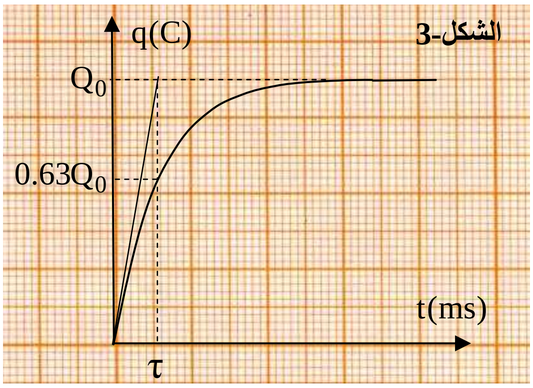
$$\boxed{q = CE(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = Q_0(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})}$$

حيث $Q_0 = CE$ هي شحنة المكثفة الأعظمية .

بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow q = 0$
- $t = \infty \rightarrow q = Q_0$
- $t = \tau \rightarrow q = 0.63\,Q_0$

و منه المنحنى $q(t)$ الممثل لتطور شحنة المكثفة عند شحن المكثفة يكون كما في (الشكل-3) .



عند التفريغ :

لدينا : $q = Cu_C$.

عند التفريغ لدينا $u_C = Ee^{-\frac{t}{RC}}$ ، بالتعويض نجد :

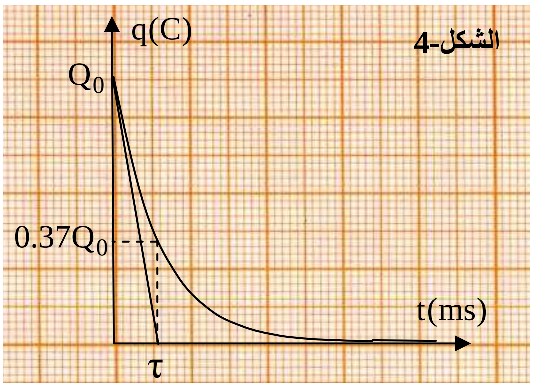
$$\boxed{q = CEe^{-\frac{1}{RC}t} = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

حيث $Q_0 = CE$ هي شحنة المكثفة الأعظمية :

بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow q = Q_0$
- $t = \infty \rightarrow q = 0$
- $t = \tau \rightarrow q = 0,37\,Q_0$

و منه المنحنى $q(t)$ الممثل لتطور شحنة المكثفة عند فتح القاطعة يكون في (الشكل-4) .



جـ- العبارة اللحظية للتوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي :

عند الشحن :

الطريقة الأولى :

لدينا :

$$u_R = R.i = R\frac{dq}{dt} = R\frac{d(C\,u_C)}{dt} = RC\frac{du_C}{dt}$$

عند الشحن :

- $u_C = E\,(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$
- $\frac{du_C}{dt} = E\,(0 - (-\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}) = \frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$

و منه تصبح عبارة $u_R(t)$:

$$u_R = RC\,(\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$\boxed{u_R = Ee^{-\frac{1}{RC}t} = Ee^{-t/\tau}}$$

الطريقة الثانية :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_R + u_C = E \rightarrow u_R = E - u_C$

عند الشحن لدينا :

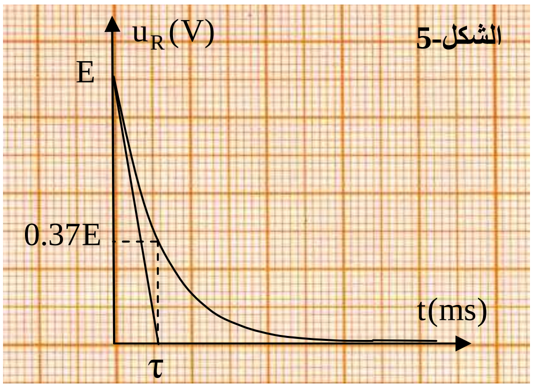
$u_C = E\,(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$

و منه يصبح :

$u_R = E - E\,(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \rightarrow u_R = E - E + E\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

$$\boxed{u_R = E e^{-\frac{1}{RC}t} = E e^{-t/\tau}}$$

بيانيا :



- $t = 0 \rightarrow u_R = E$
- $t = \infty \rightarrow u_R = 0$
- $t = \tau \rightarrow u_R = 0.37\,E$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند شحن المكثفة يكون في (الشكل-5) .

عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_R + u_C = 0$

$u_R = -u_C$

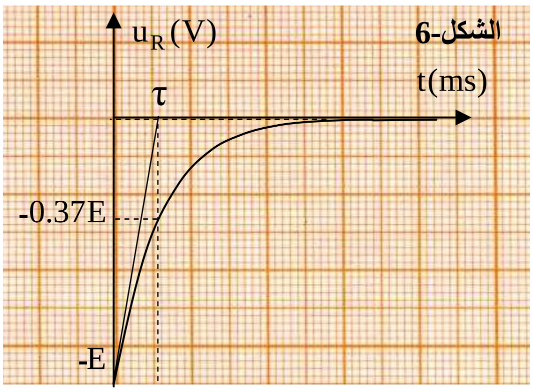
عند التفريغ لدينا :

$u_C = E\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

و منه يصبح :

$$\boxed{u_R = -E e^{-\frac{1}{RC}t} = -E e^{-t/\tau}}$$

بيانيا :



- $t = 0 \rightarrow u_R = -E$
- $t = \infty \rightarrow i = 0$
- $t = \tau \rightarrow i = -0.37\,E$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-6) .

د- العبارة اللحظة لطاقة المكثفة $E_{(C)}(t)$:

عند الشحن :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

عند شحن المكثفة لدينا :

$$u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$$

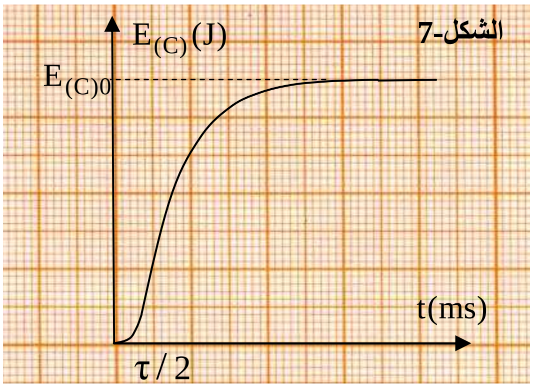
و منه تصبح عبارة الطاقة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C\,(E\,(1 - e^{-t/\tau}))^2$$

$$\boxed{E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2\,(1 - e^{-t/\tau})^2 = E_{(C)0}\,(1 - e^{-t/\tau})^2}$$

حيث $E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2$ هي طاقة المكثفة الأعظمية .

- بيانيا :



$t = 0 \rightarrow E_{(C)} = 0$

$t = \infty \rightarrow E_{(C)} = E_{(C)0}$

و منه المنحنى $E_{(C)}(t)$ الممثل لتطور طاقة المكثفة عند الشحن يكون كما في (الشكل-7) .

عند التفريغ :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

عند تفريغ المكثفة لدينا :

$$u_C = E\,e^{-t/\tau}$$

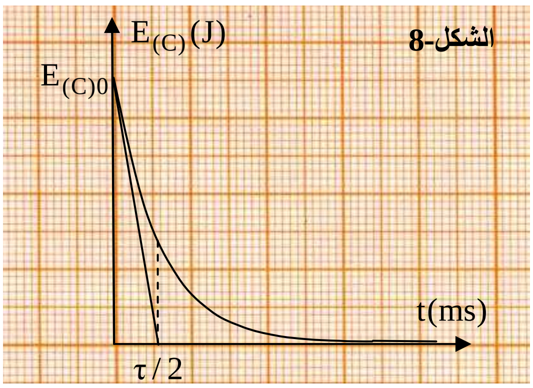
و منه تصبح عبارة الطاقة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C\,(E\,e^{-t/\tau})^2$$

$$\boxed{E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} = E_{(C)0}\,e^{-2t/\tau}}$$

حيث $E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2$ هي طاقة المكثفة الأعظمية .

- بيانيا :



$t = 0 \rightarrow E_{(C)} = E_{(C)0}$

$t = \infty \rightarrow E_{(C)} = 0$

و منه المنحنى $E_{(C)}(t)$ الممثل لتطور طاقة المكثفة عند التفريغ يكون كما في (الشكل-8) .

2-أ- المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:

- عند الشحن :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_R + u_C = E$

$R\,i + u_C = E \rightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}}$$

▪ عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_R + u_C = 0$

$R\,i + u_C = 0 \rightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0}$$

ب- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$:

- عند الشحن :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_R + u_C = E$

$R\,i + u_C = E \rightarrow R\,i + \frac{q}{C} = E$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$

لدينا : $\frac{dq}{dt} = i$ و منه :

$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0}$$

▪ عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_R + u_C = 0$

$R\,i + u_C = 0 \rightarrow R\,i + \frac{q}{C} = 0$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}=0$$

$$\boxed{\frac{di}{dt}+\frac{1}{RC}i=0}$$

جـ- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_R(t)$:

- عند الشحن :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R+u_C=E \rightarrow u_R+\frac{q}{C}=E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_R}{dt}+\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}=0$$

و نعلم أن : $\frac{dq}{dt}=i$ و منه يصبح :

$$\frac{du_R}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$

لدينا :

$$u_R=R.i \rightarrow i=\frac{u_R}{R}$$

يصبح :

$$\boxed{\frac{du_R}{dt}+\frac{1}{RC}u_R=0}$$

- عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{AB}=u_{AM}+u_{MB}$$

$$0=u_R+u_C \rightarrow u_R+\frac{q}{C}=0$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_R}{dt}+\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}=0$$

$$\frac{du_R}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$

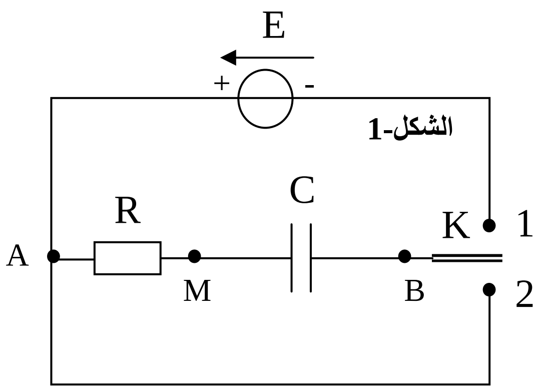
لدينا :

$$u_R=R.i \rightarrow i=\frac{u_R}{R}$$

يصبح :

$$\boxed{\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0}$$

التمرين (4) : (التمرين : 008 في بنك التمارين على الموقع) (*)



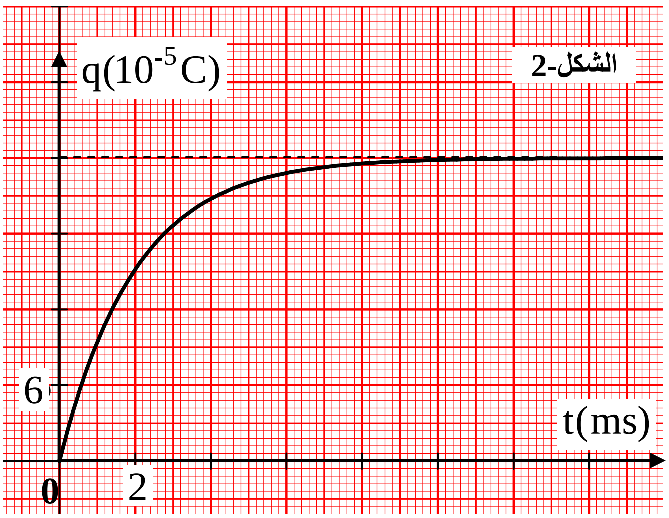
نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) و التي تتألف من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 12\ V$ ، مكثفة غير مشحونة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R .

1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية الشحن .

أ- أوجد المعادلة التفاضلية بدلالة شحنة المكثفة $q(t)$.

ب- أثبت أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو $q = A + Be^{-\alpha t}$ حيث A و B ، α ثوابت يطلب كتابة عباراتها .

جـ- بتطبيق قانون جمع التوترات ، أثبت أن شدة التيار الأعظمية يعبر عنها بالعلاقة : $I_0 = \frac{E}{R}$.



د- عند نهاية الشحن تبلغ طاقة المكثفة قيمة أعظمية $E_{(C)0}$ ، عبر عنها بدلالة C ، E .

هـ- منحنى (الشكل-2) يمثل تغيرات شحنة المكثفة q بدلالة الزمن .

اعتمادا على هذا البيان أوجد :

- سعة المكثفة C .
- ثابت الزمن τ .
- مقاومة الناقل الأومي R .
- شدة التيار الأعظمية I_0 .
- طاقة المكثفة في النظام الدائم .

2- نضع البادلة في الوضع (2) :

أ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة شحنة المكثفة $q = f(t)$ مبينا حلها دون برهان .

ب- نعتبر المكثفة تفرغت من شحنتها تماما عندما تصبح شحنتها تساوي 1% من شحنتها الأعظمية ، عبر عن الزمن اللازم لتفريغ المكثفة بدلالة ثابت الزمن τ ، ثم احسب قيمته .

الأجوبة :

1- أ- المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$$

$$E = Ri + \frac{q}{C} \rightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E \rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$$

ب- إثبات أن $q = Q_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

- $q = A + Be^{-\alpha t}$
- $\dfrac{dq}{dt} = -\alpha Be^{-\alpha t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\alpha Be^{-\alpha t} + \frac{1}{RC}\left(A + Be^{-\alpha t}\right) = \frac{E}{R}$$

$$-\alpha Be^{-\alpha t} + \frac{A}{RC} + \frac{B}{RC}e^{-\alpha t} = \frac{E}{R}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

- $-\alpha + \dfrac{B}{RC} = 0 \rightarrow \alpha = \dfrac{B}{RC}$
- $\dfrac{B}{RC} = \dfrac{E}{R} \rightarrow B = EC$

من الشروط الابتدائية :

$t = 0 \rightarrow q = 0$

بالتعويض في العلاقة $q = A + Be^{-\alpha t}$:

$0 = A + B \rightarrow A = -B = -EC$

جـ- إثبات أن شدة التيار الأعظمية يعبر عنها بالعلاقة $I_0 = \dfrac{E}{R}$:

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{R(t)} + u_{C(t)} = E$

$Ri_{(t)} + U_{c(t)} = E$

- عند اللحظة $t = 0$ المكثفة غير مشحونة و يكون : $i = I_0$ ، $u_C = 0$ و منه :

$$RI_0 = E \rightarrow I_0 = \frac{E}{R}$$

د- عبارة طاقة المكثفة الأعظمية $E_{(C)0}$ بدلالة C ، E :

- في لحظة t أثناء الشحن تخزن المكثفة طاقة يعبر عنها بالعلاقة : $E_{(C)} = \dfrac{1}{2}C.u_C^2$

- تبلغ الطاقة قيمتها الأعظمية في النظام الدائم (نهاية الشحن) أين يكون $u_C = E$ و عليه تكون عبارة الطاقة الأعظمية للمكثفة كما يلي : $E_{(C)} = \dfrac{1}{2}C.E^2$

هـ- ▪ قيمة C :

- من البيان :

$Q_0 = 4 \,.\, 6 \,.\, 10^{-5} = 2.4 \,.\, 10^{-4}$ C.

و لدينا :

$$Q_0 = EC \rightarrow C = \frac{Q_0}{E} \rightarrow C = \frac{2.4 \ . \ 10^{-4}}{12} = 2 \ . \ 10^{-5} \ F$$

▪ قيمة τ :

$$t = \tau \rightarrow q = 0.63Q_0 = 0.63 \ . \ 2.4 \ . \ 10^{-4} = 1.512 \ . \ 10^{-4} \ C$$

بالقسمة على السلم $(6 \ . \ 10^{-5})$ نجد : $2.52 \ cm$ ، بالإسقاط نجد : $\tau = 2 \ ms$.

▪ قيمة R :

$$\tau = RC \rightarrow R = \frac{\tau}{C} \rightarrow R = \frac{2 \ . \ 10^{-3}}{2 \ .10^{-5}} = 100 \ \Omega$$

▪ شدة التيار الأعظمية I_0:

$$I_0 = \frac{E}{R} \rightarrow I_0 = \frac{12}{100} = 0.12 \ A$$

● طاقة المكثفة عند $t = 0$:

عند اللحظة $t = 0$ (بداية التفريغ) تكون طاقة المكثفة أعظمية ، و عليه :

$$E_C = \frac{1}{2}CE^2 \rightarrow E_{(C)} = \frac{1}{2} . 2 . 10^{-5} \ (12)^2 = 1.44 \ . 10^{-3} \ J$$

2- أ- المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{AM} + u_{MB} = 0$$

$$Ri + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها : $q = Q_0 \ e^{-t/\tau}$ حيث :

▪ $\tau = RC$

▪ $Q_0 = EC$

جـ- الزمن Δt اللازم لتفريغ المكثفة :

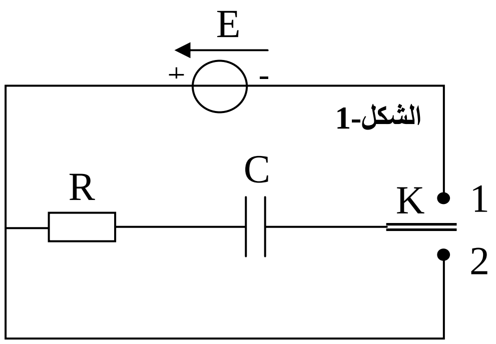
المكثفة تتفرغ من شحنتها تماما عندما تصبح شحنتها تساوي 1% من شحنتها الأعظمية (كما ذكر) ، أي : $q = \frac{1}{100}Q_0$ ، بالتعويض في العبارة $q(t)$:

$$\frac{1}{100}Q_0 = Q_0 \ e^{-\Delta t/\tau} \rightarrow \frac{1}{100} = e^{-\Delta t/\tau} \rightarrow \ln\frac{1}{100} = -\frac{\Delta t}{\tau}$$

$$-\ln 100 = -\frac{\Delta t}{\tau} \rightarrow \Delta t = -(\ln 100) . \tau \rightarrow \Delta t \approx 5\tau$$

$$\Delta t = 5 \ . \ 2 \ ms = 10 \ ms$$

التمرين (5) : (التمرين : 009 في بنك التمارين على الموقع) (**)



تتكون الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 10V$ ، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R

• نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية الشحن .

1- بين على الشكل جهة التيار الكهربائي المار في الدارة و كذا جهة حاملات الشحن (الإلكترونات) ، ثم مثل بالأسهم التوترين u_C ، u_R .

2- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C = f(t)$ بين طرفي المكثفة .

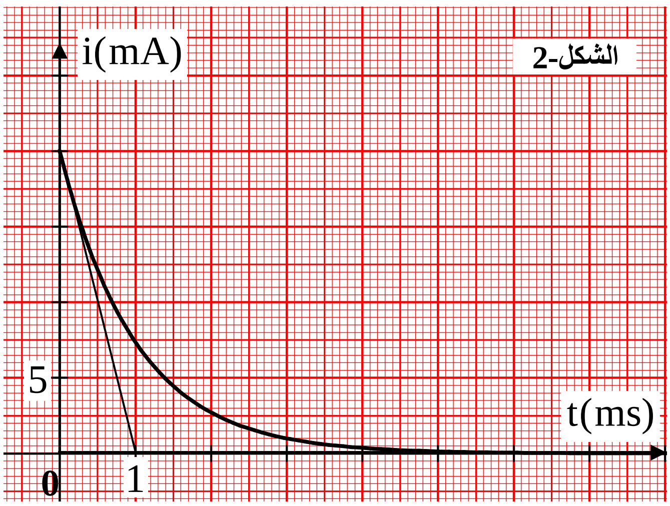
3- حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $u_C = A(1 - e^{-\frac{t}{B}})$ حيث A و B ثابتين يطلب التعبير عنهما .

4- مثل بشكل كيفي المنحنى $u_C(t)$.

5- على نفس البيان السابق أرسم المنحنى $u_C'(t)$ في الحالتين التاليتين :

▪ لو استبدلنا المكثفة السابقة بمكثفة سعتها $C' = 2C$ و أبقينا على نفس قيمة مقاومة الناقل الأومي R .

▪ لو استبدلنا الناقل الأومي ذو المقاومة R بناقل أومي مقاومته $R' = \frac{R}{2}$ مع الإبقاء على نفس سعة المكثفة C.



6- منحنى (الشكل-2) يمثل تغيرات شدة التيار الكهربائي i بدلالة الزمن .

اعتمادا على هذا البيان أوجد :

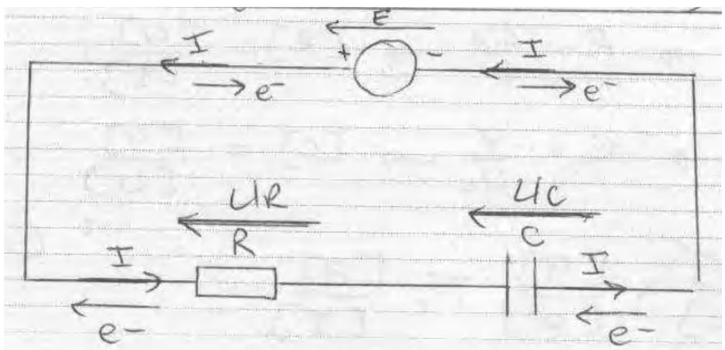
أ- مقاومة الناقل الأومي R .

ب- سعة المكثفة C .

8- كيف يتم ربط مكثفة سعتها 'C مع المكثفة السابقة لكي يأخذ ثابت الزمن القيمة $\tau' = 3\tau$ ؟ أحسب قيمة 'C .

الأجوبة :

<u>1- جهة التيار و حاملات الشحن و تمثيل u_C ، u_R :</u>



<u>2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:</u>

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$Ri + u_C = E \rightarrow R\frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow$$

$$R\frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E$$

$$R\frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E \rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = E$$

<u>3- عبارتي A و B :</u>

▪ $u_C = A\,(1 - e^{-t/B})$

- $\frac{du_C}{dt} = A\,(0 - (-\frac{1}{B} e^{-t/B})) = \frac{A}{B} e^{-t/B}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

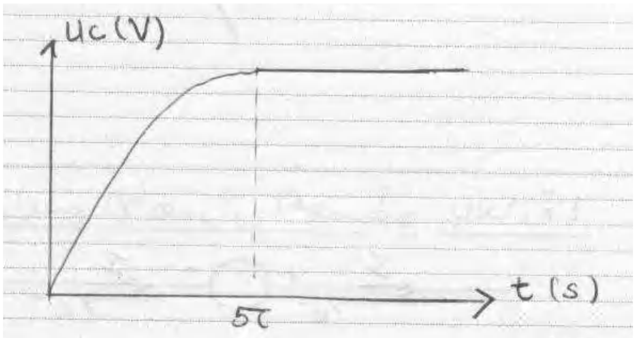
$$\frac{A}{B} e^{-t/B} + \frac{A}{RC}(1 - e^{-t/B}) = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{A}{B} e^{-t/B} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC} e^{-t/B} = \frac{E}{RC} \rightarrow (\frac{A}{B} - \frac{A}{RC})\, e^{-t/B} + \frac{A}{RC} = \frac{E}{RC}$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

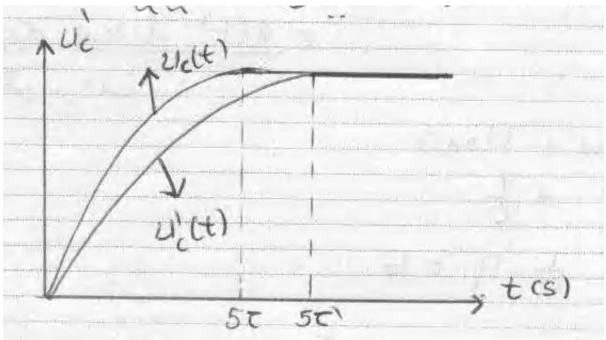
- $\frac{A}{B} - \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1}{RC} \rightarrow B = RC$
- $\frac{A}{RC} = \frac{E}{RC} \rightarrow A = E$

4- تمثيل المنحنى $u_C(t)$:



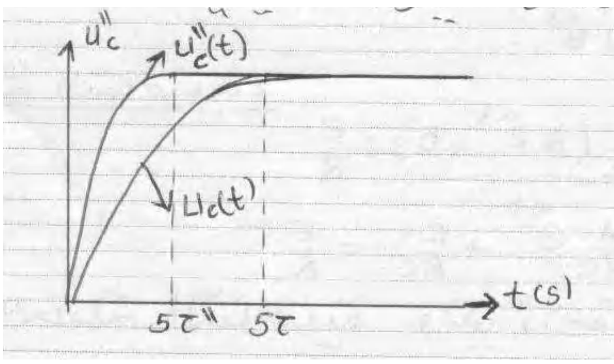
$u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$
- $t = 0 \rightarrow u_C = 0$
- $t = \infty \rightarrow u_C = E$

5- المنحنى $u_C'(t)$:



$C' > C$ ← بازدياد سعة المكثفة C مع ثبات مقاومة الناقل الأومي R ، تزداد قيمة ثابت الزمن τ ، و بالتالي يزداد زمن اتمام الشحن 5τ ، و عليه المنحنى $u_C'(t)$ يكون كما يلي :

6- المنحنى u_C'' :



$R' < R$ ← بنقصان مقاومة الناقل الأومي R مع ثبات سعة المكثفة C ، تنقص قيمة ثابت الزمن τ و بالتالي ينقص زمن اتمام الشحن 5τ و عليه المنحنى $u_C''(t)$ يكون كما يلي :

6- أ- قيمة R :

من البيان :

$I_0 = 4 \,.\, 5 \,.\, 10^{-3} = 0.02$ A

و لدينا : $I_0 = \frac{E}{R}$ ، إذن :

$$R = \frac{E}{I_0} = \frac{10}{0,02} = 500\,\Omega$$

ب- قيمة C :

من البيان $\tau = 1ms$ و لدينا : $\tau = RC$ ، إذن :

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{10^{-3}}{500} = 2.10^{-6}\ \Omega$$

7- كيفية وصل المكثفة C' مع المكثفة C :

نلاحظ أن :

$$\tau' = 2\tau \quad \rightarrow \quad \tau' > \tau \rightarrow RC_{éq} > RC \rightarrow C_{éq} > C$$

و هذا يتحقق عند ربط المكثفة C' على التفرع مع المكثفة C لأن :

$$C_{éq} = C + C' \rightarrow C_{éq} > C$$

قيمة C' :

نحسب أولا السعة المكافئة $C_{éq}$:

▪ $\tau' = 3\tau = 3 . 10^{-3}$ s

▪ $\tau' = RC_{éq} \rightarrow C_{éq} = \frac{\tau'}{R} = \frac{3.10^{-3}}{500} = 6.10^{-6}$ F

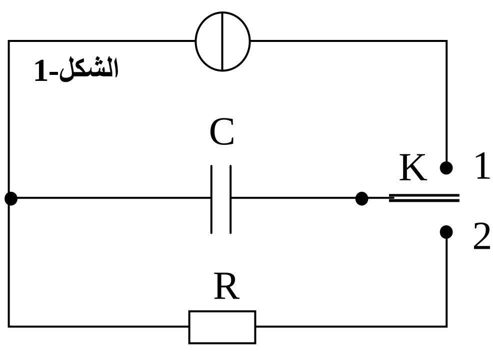
المكثفتين C ، C' موصولتين على التفرع لذا :

$$C_{éq} = C + C' \rightarrow C' = C_{éq} - C$$
$$C' = 6 . 10^{-6} - 2 . 10^{-6} = 4 . 10^{-6}\ F$$

التمرين (6) : (التمرين : 074 في بنك التمارين على الموقع) (**)

في حصة الأعمال المخبرية ، اقترح الأستاذ على تلاميذه مخطط الدارة الممثل في (الشكل-1) لدراسة ثنائي القطب RC . تتكون الدارة من العناصر التالية :

- مولد التيار يعطي تيار ثابت شدته I = 10 mA .
- مكثفة (غير مشحونة) سعتها C.
- ناقل أومي مقاومته R .
- بادلة K مقاومتها مهملة .



1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة t = 0 فتبدأ عملية شحن المكثفة ، بواسطة جهاز ExAO تمكنا من مشاهدة المنحنى البياني الممثل لتطور التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن t (الشكل-2- أ) .

أ- أكتب عبارة التوتر u_C بدلالة الزمن t و سعة المكثفة C و شدة التيار I الذي يجريه المولد في الدارة .

ب- اعتمادا على (الشكل-2- أ) ، بين أن $C = 10^{-5}$ F ثم أحسب طاقة المكثفة الأعظمية E_{Cmax} .

2- نضع البادلة K في الوضع (2) في لحظة نعتبرها من جديد t = 0 ، فيتم تفريغ المكثفة في الناقل الأومي ، سمح جهاز ExAO من متابعة تطور التوتر الكهربائي u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن t . بواسطة برمجية تمكنا من الحصول على المنحنى البياني (الشكل-2 - ب) .

أ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

ب- حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $u_C = Ae^{-t/B}$ ، عبر عن A و B بدلالة المقادير المميزة للدارة ، بين أن الثابت B متجانس مع الزمن .

جـ- اعتمادا على منحنى (الشكل-2- ب) عين قيمة ثابت الزمن τ ثم أحسب مقاومة الناقل الأومي R .

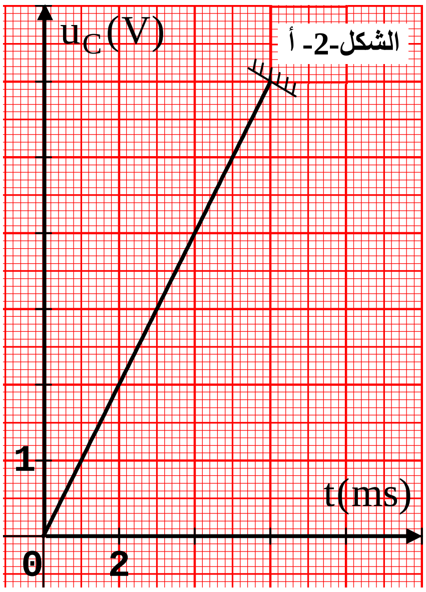
3- أ- أكتب العبارة اللحظية للطاقة المخزنة في المكثفة $E_C(t)$ بدلالة الزمن t و ثابت الزمن τ و طاقة المكثفة الأعظمية E_{C0} .

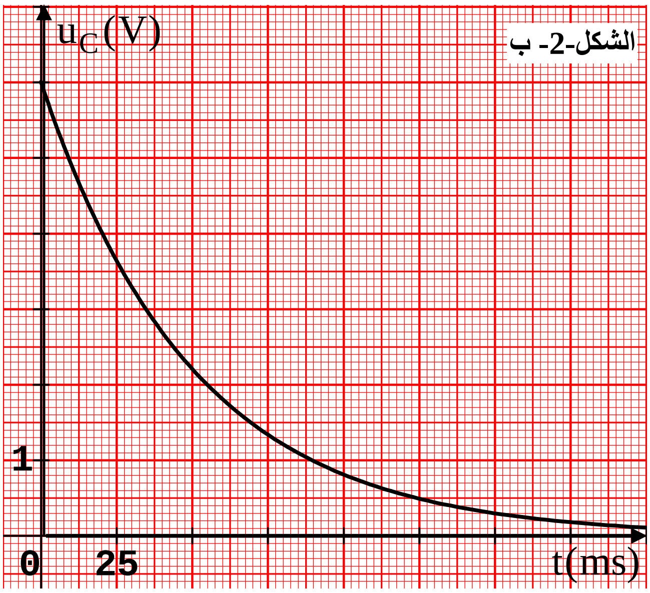
ب- في أي لحظة يكون $E_C = \frac{E_{C0}}{e^2}$ حيث E_{C0} هي طاقة المكثفة الأعظمية و e هو أساس اللوغاريثم النيبيري

4- نريد أن نسرع عملية التفريغ ليصبح زمن إتمام التفريغ نصف زمن إتمام التفريغ السابق ، لذلك نصل ناقل أومي آخر مقاومته 'R مع الناقل الأومي السابق .

أ- بين كيف يجب ربط هذا الناقل الأومي مع الناقل الأومي R حتى يتم ذلك .

ب- أحسب قيمة المقاومة 'R .





الأجوبة :

1- أ- العلاقة النظرية بين u_C و t .

لدينا : $u_C = \frac{q}{C}$

مولد التوتر يعطي تيار شدته ثابتة لذلك يكون :

$I = \frac{q}{t} \rightarrow q = It$

يصبح لدينا : $u_C = \frac{It}{C}$

ب- سعة المكثفة من البيان :

- بيانيا : المنحنى $u_C(t)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$u_C = a\,t$

- نظريا ومن خلال العلاقة النظرية السابقة

$u_C = \frac{I}{C}t$

- بالمطابقة :

$\frac{I}{C} = a \rightarrow C = \frac{I}{a}$

- من البيان :

$a = \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} = 1000$

إذن :

$C = \frac{10 \times 10^{-3}}{1000} = 10^{-5}\ F$

- طاقة المكثفة الاعظمية E_{cmax} :

$$E_{cmax} = \frac{1}{2} C U_{c\,max}^2$$

من البيان $U_{cmax} = 6V$ ومنه :

$$E_{cmax}(C) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} (6)^2 = 1,8 \cdot 10^{-4} J$$

2- أ- المعادلة التفاضلية بدلالة $U_c(t)$:

حسب قانون جمع التوترات

$$U_R + U_C = 0$$

$$Ri + U_c = 0$$

$$R \frac{dq}{dt} + U_c = 0$$

$$R \frac{d(C.U_c)}{dt} + U_c = 0$$

$$RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0 \rightarrow \frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{RC} U_c = 0$$

ب- عبارتي A و B :

- $U_c = A e^{-t/B}$
- $\frac{dU_c}{dt} = -\frac{A}{B} e^{-t/B}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$-\frac{A}{B} e^{-t/B} + \frac{1}{RC} \cdot A e^{-t/B} = 0$$

$$A e^{-t/B} \left(-\frac{1}{B} + \frac{1}{RC} \right) = 0$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$-\frac{1}{B} + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow B = RC$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow U_c = U_{cmax}$$

بالتعويض في العبارة $U_c = A e^{-t/\tau}$ نجد :

$$E = A e^{-0/\tau} \longrightarrow A = U_{cmax}$$

- إثبات أن B متجانس مع الزمن :

$$B = RC \rightarrow [B] = [R][C]$$

- $U_R = Ri \rightarrow [U] = [R][I] \rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$
- $U_c = \frac{q}{C} \rightarrow [U] = \frac{[Q]}{[C]} = \frac{[I][T]}{[C]} \rightarrow [C] = \frac{[I][T]}{[U]}$

بالتعويض :

$$[B] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[I][T]}{[U]} \rightarrow [B] = [T]$$

اذن B متجانس مع الزمن .

جـ- قيمة τ :

$$t = \tau \rightarrow U_c = 0,37\, U_c = 0,37 \times 6 = 2,22V$$

بالاسقاط نجد : $\tau = 50ms$

- قيمة R :

$$\tau = RC \rightarrow R = \frac{\tau}{C}$$

$$R = \frac{50.10^{-3}}{10^{-5}} = 5.10^3 \Omega$$

3- عبارة $E_c(t)$ بدلالة t ، τ ، E_{c0} :

$$E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$$

ولدينا عن تنحن المكثفة $U_c = U_{cmax} e^{-t/\tau}$ ومنه :

$$E_c = \frac{1}{2} C \left(u_{cmax} e^{-t/\tau} \right)^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} C u_{cmax}^2 e^{-2t/\tau}$$

وكون أن $E_{c0} = \frac{1}{2} C u_{cmax}^2$ يصبح ،

$$u_{C\max} = E_{c0}\, e^{-2t/\tau}$$

اللحظة التي يصبح فيها $E_c = \frac{E_{c0}}{e^2}$

بتعويض $E_c = \frac{E_{c0}}{e^2}$ و عبارة الطاقة السابقة نجد :

$$\frac{\cancel{E_{c0}}}{e^2} = \cancel{E_{c0}}\, e^{-2t/\tau}$$

$$\frac{1}{e^2} = e^{-\frac{2t}{\tau}} \rightarrow \ln \frac{1}{e^2} = -\frac{2t}{\tau}$$

$$-\ln e^2 = -\frac{2t}{\tau} \rightarrow \ln e^2 = \frac{2t}{\tau}$$

$$2 = \frac{2t}{\tau} \rightarrow t = \tau = 50ms$$

4- أ- كيفية وصل الناقل الأومي 'R :

زمن اتمام الشحن يصبح نصف زمن اتمام الشحن السابق يعني :

$$5\tau' = \frac{5\tau}{2} \quad \rightarrow \tau' = \frac{\tau}{2}$$

- $\tau = RC$
- $\tau' = R_{eq}C$

$$\tau' = \frac{\tau}{2} \quad \rightarrow R_{eq}C = \frac{RC}{2} \quad \rightarrow \ R_{eq} = \frac{R}{2} \quad \rightarrow R_{eq} < R$$

و هذا يتحقق عند ربط الناقل الأومي 'R على التفرع مع الناقل الأومي R .

قيمة 'R :

نحسب R_{eq} :

$$\tau' = \frac{\tau}{2} = \frac{50\,ms}{2} = 25\,ms$$

و لدينا :

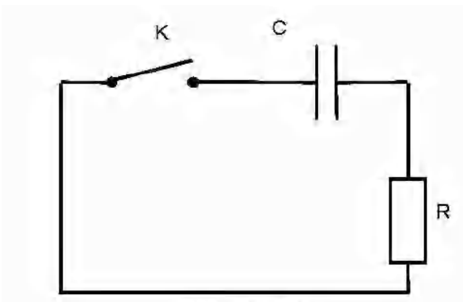
$$\tau' = R_{eq}C \;\rightarrow\; R' = \frac{\tau'}{C} = \frac{25.10^{-3}}{10^{-5}} = 2500\,\Omega = 2,5\,.\,10^{3}\,\Omega$$

لدينا في الربط على التفرع :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \;\rightarrow\; \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{eq}} - \frac{1}{R'}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{2,5.10^{3}} - \frac{1}{5.10^{3}} = \frac{2-1}{5.10^{3}} = \frac{1}{5.10^{3}} \rightarrow R' = 5\,.\,10^{3}\,\Omega$$

التمرين (7) : (بكالوريا 2013 - رياضيات) (التمرين : 050 في بنك التمارين على الموقع) (**)



الشكل-2

مكثفة سعتها C شحنت كليا تحت توتر كهربائي ثابت : E = 12V . لمعرفة سعتها C نحقق الدارة الكهربائية (الشكل-2) ، حيث $R = 1k\Omega$.

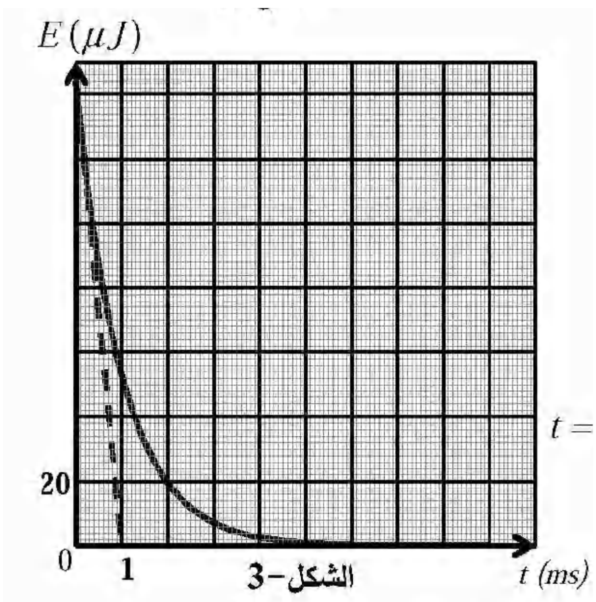
1- نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0\,ms$.

أ- بتطبيق قانون جمع التوترات ، جد المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

ب- حل المعادلة التفاضلية السابقة يعطى من الشكل : $u_C(t) = Ae^{\alpha t}$ ، حيث : A و α ثابتان يطلب كتابة عبارتيهما .

2- أكتب العبارة اللحظة $E_C(t)$ للطاقة المخزنة في المكثفة .

3- (الشكل-3) يمثل تطور $E_C(t)$ ، الطاقة المخزنة في المكثفة بدلالة الزمن . *ukklm*



الشكل-3

أ- استنتج قيمة E_{C0} الطاقة المخزنة العظمى في المكثفة .

ب- من (الشكل-3) ، بين أن مماس للمنحنى في اللحظة : $t = 0\ ms$ يقطع محور الأزمنة في اللحظة : $t = \frac{\tau}{2}$.

جـ- أحسب τ ثابت الزمن ، ثم استنتج سعة المكثفة C .

4- اثبت أن زمن تناقص الطاقة إلى النصف هو : $t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln 2$.

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = 0$$

$$Ri + u_C = 0$$

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

ومنه :

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

ب- عبارة A و α :

$$u_C = Ae^{\alpha t}$$

$$\frac{du_C}{dt} = A\alpha e^{\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC}A.e^{\alpha t} = 0$$

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{A}{RC}e^{\alpha t} = 0$$

$$e^{\alpha t}\left(A\alpha + \frac{A}{RC}\right) = 0$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية ولكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$$

عند اللحظة $t=0$ (بداية التفريغ) يكون التوتر بين طرفي المكثفة مساوي لـ E (أعظمي) ، بالتعويض في العبارة $u_C(t)$:

$$E = Ae^{\alpha(0)} \rightarrow A = E$$

و- العبارة اللحظية للطاقة المخزنة في المكثفة :

$E_{(c)} = \frac{1}{2} C u_c^2$

عند التفريغ لدينا :

$u_c = E e^{-t/\tau}$

ومنه :

$E_{(c)} = \frac{1}{2} C E^2 \left(e^{-t/\tau}\right)^2$

$E_{(c)} = \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} = E_{(c)0} e^{-2t/\tau}$

حيث $E_{(c)0} = \frac{1}{2} C E^2$ وهي الطاقة الأعظمية في المكثفة .

ق - م - قيمة $E_{(c)0}$:

من البيان :

$E_{(c)0} = 7 \times 20 \times 10^{-6} = 1,4 \times 10^{-4}\, J$

ي- اثبات أن مماس المنحنى $E_{(c)}(t)$ عند $t=0$ يقطع محور الأزمنة عند $t = \frac{\tau}{2}$:

نكتب معادلة المماس :

$E_{(c)} = a t + b$

- $b = (E_{(c)})_{t=0} = \left(E_{(c)0} e^{-2t/\tau}\right)_{t=0} = E_{(c)0}$

- $a = \left(\frac{dE_{(c)}}{dt}\right)_{t=0} =$

$E_{(c)} = E_{(c)0} e^{-2t/\tau} \rightarrow \frac{dE_{(c)}}{dt} = \left(\frac{2E_{(c)0}}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)_{t=0}$

إذن :

$a = \left(\frac{-2E_{(c)0}}{\tau} e^{\frac{-2(0)}{\tau}}\right) = \frac{-2E_{(c)0}}{\tau}$

ومنه تكون معادلة المماس كما يلي :

$E_{(c)} = -\frac{2E_{(c)0}}{\tau} t + E_{(c)0}$

عند تقاطع المماس مع محور الأزمنة يكون : $E_{(c)} = 0$ ومنه

$0 = -\frac{2E_{(c)0}}{\tau} t + E_{(c)0}$

$\frac{2\cancel{E_{(c)0}}\, t}{\tau} = \cancel{E_{(c)0}}$

$\frac{2t}{\tau} = 1 \longrightarrow t = \frac{\tau}{2}$

ه- قيمة τ :

من البيان :

$\frac{\tau}{2} = 10^{-3} s \rightarrow \tau = 2 \times 10^{-3} s$

* قيمة C :

$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{2 \times 10^{-3}}{10^3} = 2 \times 10^{-6} F = 2\, \mu F$

4- إثبات أن : $t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln 2$

لدينا :

$$E_{(C)} = E_{(C)0}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$t = t_{1/2} \rightarrow E_{(C)} = \frac{E_{(C)0}}{2}$$

بالتعويض :

$$\frac{\cancel{E_{(C)0}}}{2} = \cancel{E_{(C)0}}\, e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$$

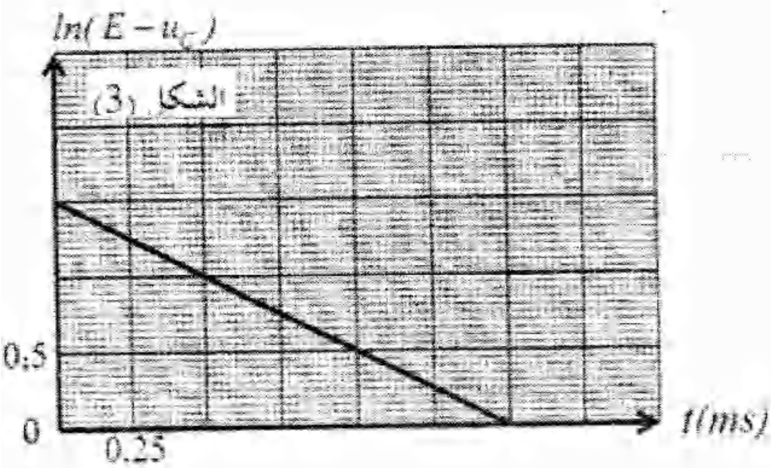
$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$$

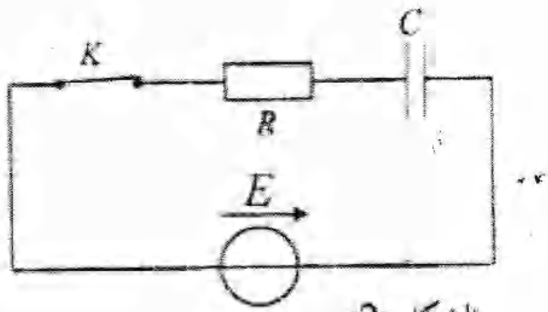
$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{2t_{1/2}}{\tau}$$

$$-\ln 2 = -\frac{2t_{1/2}}{\tau} \rightarrow t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln 2$$

التمرين (8) : (بكالوريا 2015 - رياضيات) (التمرين : 028 في بنك التمارين على الموقع) (**)

تستعمل المكثفات في عدة تراكيب كهربائية ذات فائدة علمية في الحياة اليومية .
بغرض حساب سعة مكثفة غير مشحونة مسبقا ، نحقق التركيب الموضح بالشكل(2) حيث $R = 100\ \Omega$ و المولد ثابت التوتر قوته المحركة الكهربائية E .





الشكل (2)

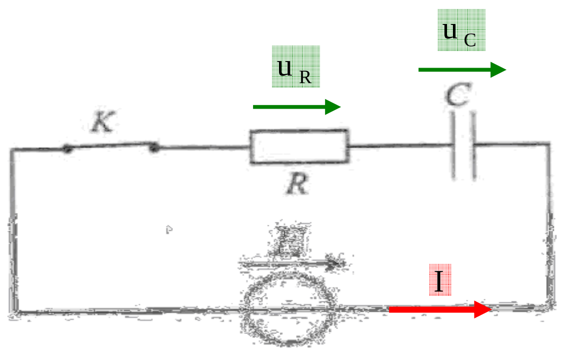
1- أعد رسم الدارة موضحا عليها التوترات بأسهم وجهة التيار الكهربائي .
2- بتطبيق قانون جمع التوترات ، جد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .
3- بين ان العبارة $u_C(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ هي حل للمعادلة التفاضلية ، حيث A و τ ثابتان يطلب كتابة عبارتيهما .
4- بين أن : $\ln(E - u_C) = -\frac{1}{\tau}t + \ln E$.
5- بيان الشكل(3) يمثل تغيرات $\ln(E - u_C)$ بدلالة الزمن ، استنتج من البيان :
أ- قيمة E القوة المحركة الكهربائية للمولد .
ب- قيمة ثابت الزمن τ ، و قيمة سعة المكثفة C .
6- أ- اكتب العبارة اللحظية لطاقة المكثفة في اللحظة $E_{(C)}(t)$.
ب- نرمز بـ $E_{(C)}(\tau)$ للطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t = \tau$ و بـ $E_C(\infty)$ للطاقة العظمى .

- احسب النسبة $\frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)}$.

7- كيف يتم ربط مكثفة سعتها 'C مع المكثفة السابقة لكي يأخذ ثابت الزمن القيمة $\tau' = \frac{\tau}{4}$ ؟ و احسب قيمة 'C .

الأجوبة :

1- رسم الدارة :



2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$
$$R.i + u_C = E$$
$$R\frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R\frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E$$
$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

3- عبارتي A و τ :

- $u_C = A(1 - e^{-t/\tau})$
- $\frac{du_C}{dt} = A(0 - (-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau})) = \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC}A(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC}e^{-t/\tau} = \frac{E}{RC}$$
$$Ae^{-t/\tau}(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}) + \frac{A}{RC} = \frac{E}{RC}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

- $\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \rightarrow \tau = RC$
- $\frac{A}{RC} = \frac{E}{RC} \rightarrow A = E$

4- إثبات العلاقة $\ln(E - u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E$:

$$u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$$
$$u_C = E - Ee^{-t/\tau} \rightarrow u_C = E - Ee^{-t/\tau} \rightarrow Ee^{-t/\tau} = E - u_C \rightarrow E - u_C = Ee^{-t/\tau}$$
$$\ln(E - u_C) = \ln(Ee^{-t/\tau}) \rightarrow \ln(E - u_C) = \ln E + \ln e^{-t/\tau}$$
$$\ln(E - u_C) = \ln E - \frac{t}{\tau} \rightarrow \ln(E - u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E$$

5- أ- قيمة E :

- بيانيا المنحنى $\ln(E - u_C) = f(t)$ عبارة عن مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$$\ln(E - u_C) = a\,t + b \quad \text{............................} \quad (1)$$

نظريا و مما سبق :

$$\ln(E - u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E \quad \text{..........................} \quad (2)$$

بمطابقة العلاقتين (1) ، (2) :

$$\ln E = b \rightarrow E = e^b$$

من البيان :

- $b = 1.5 \rightarrow E = e^{1.5} \rightarrow E = 4.5\ V$

ب- قيمة τ :

بالمطابقة السابقة أيضا :

$$-\frac{1}{\tau} = a \rightarrow \tau = -\frac{1}{a}$$

من البيان :

- $a = -\dfrac{1.5}{6\ .\ 0,25\ .10^{-3}} = -10^3$

إذن :

$$\tau = -\frac{1}{-10^3} = 10^{-3}\ s = 1\,ms$$

- قيمة C :

$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} \rightarrow C = \frac{10^{-3}}{100} = 10^{-5} F = 10\,\mu F$$

6- أ- عبارة الطاقة المخزنة اللحظية :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C\, u_C{}^2$$

و حيث أن : $u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$ يكون :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C\, E^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 \rightarrow E_{(C)} = E_{(C)0} (1 - e^{-t/\tau})^2$$

ب- النسبة $\frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)}$:

من العبارة $E_{(C)}(t)$ السابقة :

$$E_{(C)}(\infty) = E_{(C)0}$$

بقسمة عبارة $E_{(C)}(t)$ على عبارة $E_{(C)}(\infty)$ نجد :

$$\frac{E_{(C)}(t)}{E_{(C)}(\infty)} = \frac{E_{(C)0}(1-e^{-t/\tau})^2}{E_{(C)0}} \rightarrow \frac{E_{(C)}(t)}{E_{(C)}(\infty)} = (1-e^{-t/\tau})^2$$

$$t = \tau \rightarrow \frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)} = (1-e^{-\tau/\tau})^2 = (1-e^{-1}) \rightarrow \frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)} \approx 0.4$$

7- كيفية وصل المكثفة 'C مع المكثفة C :

نلاحظ أن :

$$\tau' = \frac{\tau}{4} \rightarrow \tau' < \tau \rightarrow RC_{éq} < RC \rightarrow C_{éq} < C$$

و هذا يتحقق عند ربط المكثفة 'C على التسلسل مع المكثفة C لأن :

$$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \rightarrow C_{éq} < C$$

قيمة 'C :

$$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \rightarrow \frac{1}{C'} = \frac{1}{C_{éq}} - \frac{1}{C} \rightarrow \frac{1}{C'} = \frac{C - C_{éq}}{C_{éq}.C} \rightarrow C' = \frac{C_{éq}C}{C - C_{éq}}$$

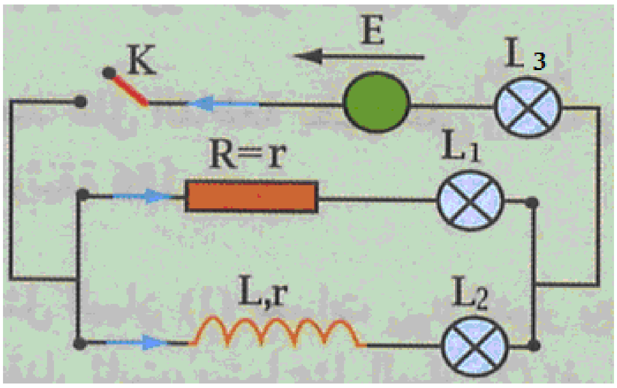
- $\tau' = RC_{éq} \rightarrow C_{éq} = \frac{\tau'}{R} = \frac{\frac{\tau}{4}}{R} = \frac{\tau}{4R} \rightarrow C_{éq} = \frac{10^{-3}}{4 \, . \, 100} = 2.5 \, . \, 10^{-6}$

- $C' = \frac{2.5 \, . \, 10^{-6} \, . \, 10^{-5}}{10^{-5} - 2.5 \, . \, 10^{-6}} \rightarrow C' = 3.33 \, . \, 10^{-6} = 3.33 \, \mu F$

III – ثنائي القطب RL

1- خاصة الوشيعة

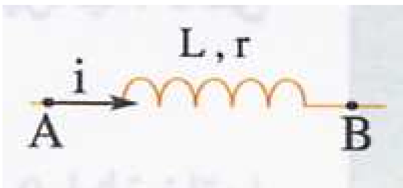
• الخاصية التحريضية للوشيعة :



- نحقق التركيب المبين في الشكل التالي و المتكون من : مولد قوته المحركة الكهربائية E ، ناقل أومي ، وشيعة ، مصابيح (L_1) ، (L_2) ، (L_3) قاطعة (K) :
- عند غلق القاطعة تتغير شدة التيار الكهربائي المار بالدارة من القيمة 0 لحظة غلقها إلى القيمة (i) ، و عندها نلاحظ اشتعال المصباحين (L_1) ، (L_3) في الحين و تأخر اشتعال المصباح (L_2) مما يدل على نشوء تيار آخر في الجزء الخاص بالوشيعة ، قام بعرقلة التيار الكهربائي الناشئ عن المولد .
- عند فتح القاطعة تتغير شدة التيار الكهربائي المار بالدارة من القيمة (i) إلى القيمة 0 ، نلاحظ انطفاء المصباح (L_3) في الحين و تأخر انطفاء المصباحين (L_1) ، (L_2) مما يدل على نشوء تيار حل محل التيار المنقطع و الناشئ عن المولد في الجزء من الدارة الذي يحتوي على الوشيعة .
- نستنتج أن الوشيعة يمكنها توليد تيار كهربائي ، تسمى هذه الظاهرة بالتحريض الكهرومغناطيسي و نقول للوشيعة خاصية **تحريضية** .

• التوتر بين طرفي وشيعة :

- لكل وشيعة ميزتين : مقاومة داخلية (r) تقدر بالأوم (Ω) ، ذاتية (L) تقدر بالهنري (H) .
- الذاتية L هي مقدار موجب تتعلق قيمتها بالشكل الهندسي للوشيعة (الطول ℓ ، نصف القطر R ، عدد اللفات) ، كما أن وجود النواة الحديدية داخل الوشيعة يؤثر على قيمة الذاتية كذلك .
- يرمز للوشيعة في الدارة الكهربائية كما يلي :



- تعطى عبارة التوتر بين طرفي وشيعة مقاومتها الداخلية r و ذاتيتها L و يجتازها تيار متغير بدلالة الزمن i كالتالي :

$$\boxed{u_b = L\frac{di}{dt} + ri}$$

- إذا كانت شدة التيار الكهربائي المار عبر الوشيعة ثابتة ، يكون $\frac{di}{dt} = 0$ و يصبح :

$$\boxed{u_b = ri}$$

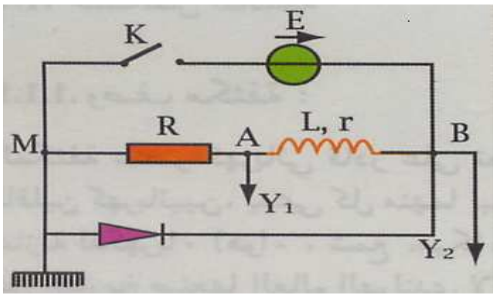
نقول عن الوشيعة في هذه الحالة أنها سلكت سلوك ناقل أومي .

- إذا كانت مقاومة الوشيعة مهملة $(r = 0)$ ، يقال عن الوشيعة أنها صافية (مثالية أو صرفة) ، و إذا اجتازها تيار كهربائي متغير بدلالة الزمن فإنه يعبر عن التوتر الكهربائي بين طرفيها في هذه الحالة بالعلاقة :

$$\boxed{u_b = L\frac{di}{dt}}$$

2- دراسة تطور شدة التيار المار بالوشيعة

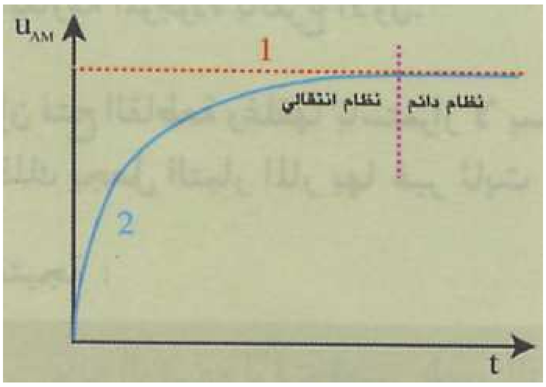
- **الدراسة التجريبية :** (تطور شدة التيار المار في الوشيعة)



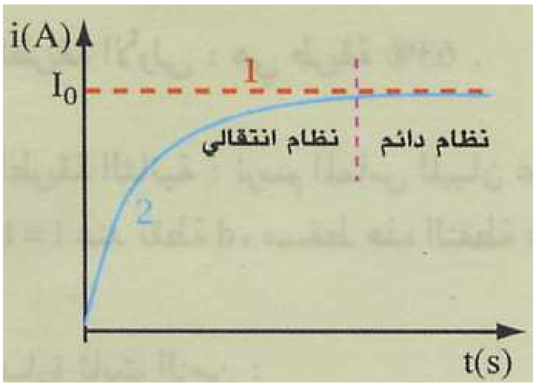
- التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي يتناسب طرديا مع شدة التيار $i(t)$ وفق العلاقة $u_R = R\ i$ ، لذلك يكون تطور $u_R(t)$ مماثل لتطور $i(t)$ و لهما نفس شكل المنحنى ، إذن لدراسة تطور شدة التيار المار بالوشيعة ندرس تطور التوتر $u_R(t)$ بين طرفي ناقل أومي موصول على التسلسل مع هذه الوشيعة .

- نحقق الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي و التي تتكون من : مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r ، ، ناقل أومي مقاومة R ، صمام ثنائي (يسمح بمرور التيار في جهة واحدة فقط) ، راسم اهتزاز مهبطي ذو ذاكرة ، قاطعة (K) .

- **عند غلق القاطعة :**



على شاشة راسم الاهتزازات يظهر على المدخل Y_1 المنحني البياني التالي و الذي يمثل تطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي $u_{AM}(t) = u_{R(t)}$.



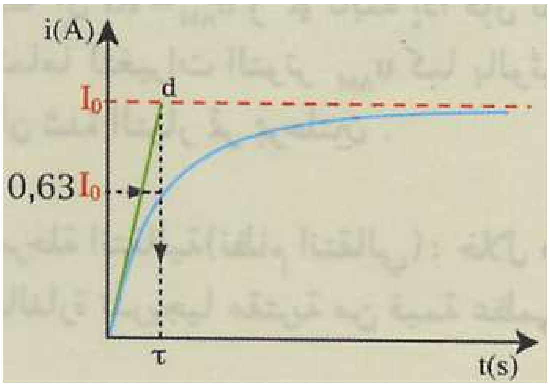
- كون أن تطور التوتر u_{AM} بين طرفي الناقل الأومي مماثل لتطور شدة التيار الكهربائي المار بالدارة كما ذكرنا سابقا و بالتالي يكون لهما نفس شكل المنحنى ، و بالتالي يكون المنحنى $i(t)$ كما يلي :

نلاحظ أن شدة التيار المار بالوشيعة عند غلق القاطعة ، يتزايد تدريجا في البداية (نظام انتقالي) ، و بعدها تصبح قيمته ثابتة (نظام دائم) .

• ثابت الزمن لثنائي القطب RL :

- ثابت الزمن τ الذي ووحدته الثانية s في ثنائي القطب (RL) ، هو الزمن اللازم لبلوغ شدة التيار الكهربائي المار بهذه الدارة عند غلق القاطعة قيمة تساوي %63 من قيمتها العظمى ، يعبر عنه بالعلاقة :

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R + r}}$$



- نلاحظ أن ثابت الزمن τ يزداد بازدياد ذاتية الوشيعة L و بنقصان المقاومة (R+r) .

- يعين ثابت الزمن τ بيانيا من خلال مماس المنحنيات u(t) ، i(t) عند اللحظة t = 0 حيث يمثل لحظة بلوغ المماس القيمة العظمى أو القيمة المعدومة (الشكل) .

• الدراسة النظرية : (تطور شدة التيار المار في الوشيعة)

- **المعادلة التفاضلية بدلالة i(t) (r ≠0) :**

عند غلق القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_b + u_R = E$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E \rightarrow L\frac{di}{dt} + (r + R)\,i = E$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R + r}{L} i = \frac{E}{L}}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ن حلها :

$$\boxed{i\,(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})}$$

حيث :

$$\boxed{I_0 = \frac{E}{R + r} \quad , \quad \tau = \frac{L}{R + r}}$$

3- طاقة وشيعة

• عبارة طاقة الوشيعة :

عندما يجتاز الوشيعة تيار كهربائي شدته i في لحظة t فإنها تخزن في هذه اللحظة طاقة يعبر عنها بالعلاقة :

$$\boxed{E_{(L)} = \frac{1}{2} L\, i^2(t)}$$

• العبارة اللحظية :

لدينا عند غلق القاطعة : $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ بالتعويض في عبارة $E_{(L)}$:

$$\boxed{E_{(L)} = \frac{1}{2} L I_0^2\,(1 - e^{-t/\tau})^2 = E_{(L)0}\,(1 - e^{-t/\tau})}$$

حيث : $E_{(L)0} = \frac{1}{2} L I_0^2$ هي طاقة الوشيعة الأعظمية .

التمرين (9) : (التمرين : 014 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) و التي تتكون من مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ، قاطعة K ، ناقل أومي مقاومتة $R = 90\ \Omega$ ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r .

نغلق القاطعة فيظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) ، حيث يمثل المنحنى (1) تغيرات التوتر بين طرفي المولد ، و المنحنى (2) يمثل تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأمي .

1- أ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة i(t) .

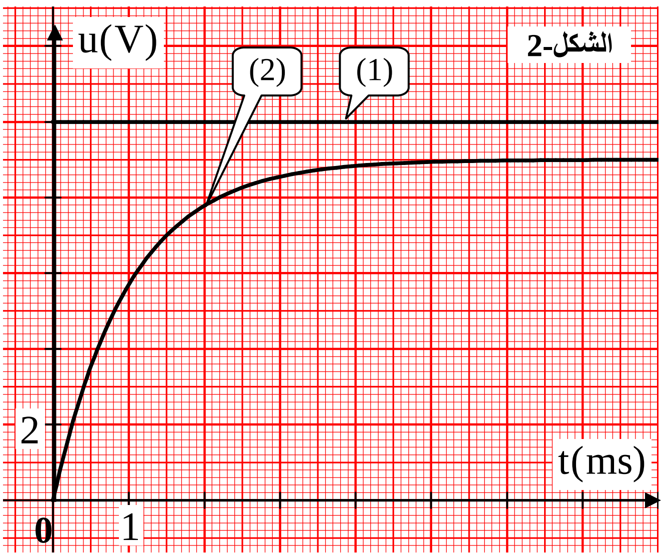
ب- أثبت $i = \frac{E}{R + r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)$ هو حل لهذه المعادلة .

جـ- اعتمادا على المعادلة التفاضلية ، أثبت أن شدة التيار الأعظمية I_0 المار بالدراة يعبر عنه بالعلاقة $I_0 = \frac{E}{R + r}$

2- بين على الدارة كيف تم ربط راسم الاهتزاز المهبطي بالدارة حتى تمكنا من الحصول على المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) .

3- اعتمادا على هذين المنحنيين أوجد :

- القوة المحركة الكهربائية E للمولد .
- شدة التيار الكهربائي الأعظمية I_0 و كذلك ثابت الزمن τ للدارة .
- المقاومة الداخلية للوشيعة .
- ذاتية الوشيعة .
- طاقة الوشيعة في النظام الدائم .



4- نفتح الآن القاطعة .

أ- اكتب المعادلة التفاضلية التي تعبر عن شدة التيار $i = f(t)$ المار بالدارة .

ب- حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $i = I_0 e^{-\frac{t}{A}}$ ، حيث A ثابت يطلب التعبير عنهما .

جـ- ماذا يمثل A و ما هو مدلوله الفيزيائي و بين أنه متجانس مع الزمن (وحدته الثانية) .

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$:

$$\frac{d\,i}{dt} + \frac{(R+r)}{L} i = \frac{E}{L}$$

ب- التحقق من الحل :

لدينا :

- $i = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$
- $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t} + \frac{(R+r)}{L} \; \frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t} + \frac{E}{L}(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t} + \frac{E}{L} - \frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t} = \frac{E}{L} \quad \rightarrow \quad \frac{E}{L} = \frac{E}{L}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

جـ- إثبات أن $I_0 = \frac{E}{R+r}$:

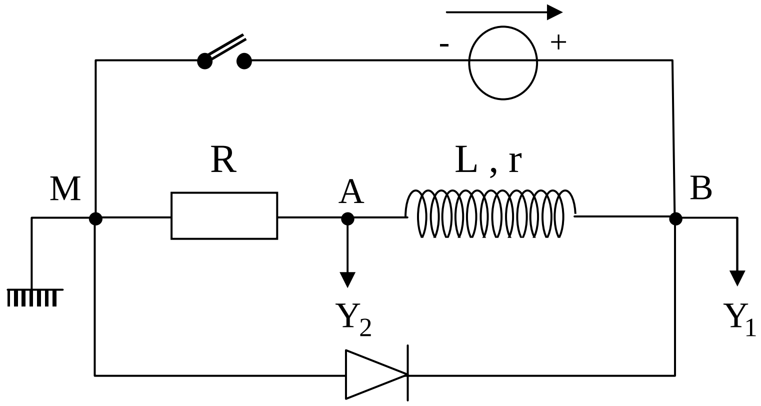
لدينا :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L} i = \frac{E}{L}$$

في النظام الدائم يكون : $i = I_0$ ، $\frac{di}{dt} = 0$ ، بالتعويض نجد :

$$0 + \frac{R+r}{L} I_0 = \frac{E}{L} \quad \rightarrow \quad (R+r)\, I_0 = E \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{E}{R+r}$$

2- كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي :



3- القوة المحركة الكهربائية للمولد :

- التوتر بين طرفي المولد ثابت و مساوي للقوة المحركة الكهربائية له E و اعتنادا على المنحنى(1) يكون $E = 10\ V$

▪ شدة التيار الكهربائي الأعظمية I_0 :

لدينا : $u_R = Ri$ و في النظام الدائم نكتب :

$$u_{R(t=\infty)} = RI_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R(t=\infty)}}{R}$$

من المنحنى (2) لدينا : $u_{R(t=\infty)} = 9V$ ، إذن :

$$I_0 = \frac{9}{90} = 0{,}1A$$

▪ ثابت الزمن τ :

$$t = 0 \rightarrow u_R = 0.63\ u_{Rmax} = 0.63\ (4.5\ .\ 2) = 5.67\ V \qquad (2.83\ cm)$$

بالإسقاط مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار نجد : $\tau = 1\ ms$.

▪ المقاومة الداخلية للوشيعة r :

$$I_0 = \frac{E}{R+r} \rightarrow R + r = \frac{E}{I_0} \rightarrow r = \frac{E}{I_0} - R$$

$$r = \frac{10}{0.1} - 90 = 10\,\Omega$$

▪ ذاتية الوشيعة L :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = (R+r)\tau$$

$$L = (90+10)\ .10^{-3} = 0.1\,H$$

▪ طاقة الوشيعة في النظام الدائم :

في النظام الدائم تكون طاقة الوشيعة أعظمية :

$$E_{(b)} = E_{(b)0} = \frac{1}{2}LI_0{}^2$$

$$E_{(b)} = E_{(b)0} = \frac{1}{2}.0.1(0.1)^2 = 5.\ 10^{-4}\ J$$

4-أ- المعادلة التفاضلية بدلالة شدة التيار :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{BM} = u_{BA} + u_{AM}$

$$0 = L\frac{di}{dt} + ri + Ri$$

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = 0$$

ب- عبارة A :

- $i = I_0 e^{-\frac{t}{A}}$
- $\frac{di}{dt} = \frac{-I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{A}}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$\frac{-I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{A}} + \frac{R+r}{L}(I_0 e^{-\frac{t}{A}}) = 0 \rightarrow (\frac{-1}{A} + \frac{R+r}{L})I_0 e^{-\frac{t}{A}} = 0$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكل تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\frac{-1}{A} + \frac{R+r}{L} = 0 \rightarrow \frac{R+r}{L} = \frac{1}{A} \rightarrow A = \frac{L}{R+r}$$

جـ- يمثل A ثابت الزمن للدارة RL و مدلوله الفيزيائي هو أنه يمثل الزمن اللازمن لبلوغ شدة التيار المار بالوشيعة 63% من قيمته الأعظمية .

- إثبات أن $A = \tau$ (ثابت الزمن) أنه متجانس مع الزمن :

لدينا :

$$A = \frac{L}{R+r} \rightarrow [A] = \frac{[L]}{[R_T]}$$

و حيث لأن :

- $u_b = L\frac{di}{dt} \rightarrow [U] = [L]\frac{[I]}{[T]} \rightarrow [L] = \frac{[U][T]}{[I]}$
- $u_R = RI \rightarrow [U] = [R][I] \rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$

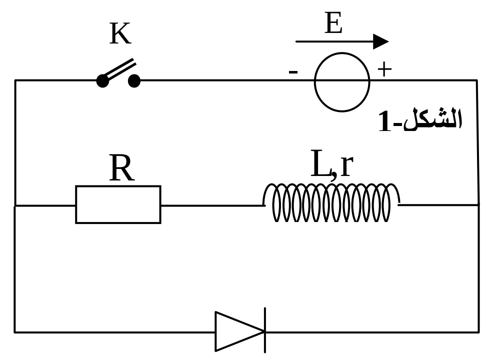
يكون بالتعويض في عبارة $[\tau]$ نجد :

$$[A] = \frac{\frac{[U][T]}{[I]}}{\frac{[U]}{[I]}} = \frac{[U][T]}{[I]} \cdot \frac{[I]}{[U]} \rightarrow [A] = [T] = s$$

إذن الثابت A (ثابت الزمن τ) متجانس مع الزمن .

التمرين (10) : (التمرين : 015 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي و التي تتكون على التسلسل من مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ، قاطعة ، ناقل أومي مقاومتة R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r .



1- أكتب العبارات اللحظية مع رسم المنحنى البياني الموافق بشكل كيفي لكل من المقادير التالية عند غلق القاطعة و عند فتحها و ذلك باهمال المقاومة الداخلية للوشيعة ($r = 0$) :

- التوتر بين طرفي الناقل الأومي .
- التوتر بين طرفي الوشيعة .

2- أعد نفس الأسئلة من أجل ($r \neq 0$) .
3- أكتب العبارة اللحظية للطاقة المخزنة في الوشيعة مع رسم المنحنى البياني الموافق بشكل كيفي من أجل ($r \neq 0$)
4- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي من أجل ($r \neq 0$) عند غلق القاطعة و فتحها .
5- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة من أجل ($r = 0$) عند غلق القاطعة و فتحها .

الأجوبة :

1- العبارات اللحظية من أجل ($r = 0$) :

- العبارة اللحظية للتوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي ($r = 0$) :

- عند غلق القاطعة :

$$u_R = R\,i$$

عند غلق القاطعة و من أجل $r = 0$ لدينا :

$$i(t) = I_0\,(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R}\,(1 - e^{-t/\tau})$$

بالتعويض في عبارة u_R نجد :

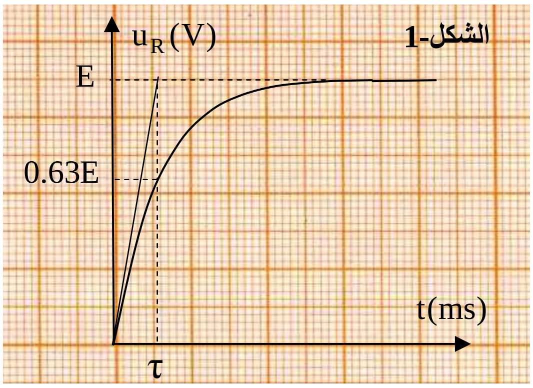
$$u_R = R\,\frac{E}{R}\,(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\boxed{u_R = E\,(1 - e^{-t/\tau})}$$

- بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow u_R = 0$
- $t = \infty \rightarrow u_R = E$
- $t = \tau \rightarrow u_R = 0.63\,E$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-1) :



- عند فتح القاطعة :

$u_R = R\,i$

عند فتح القاطعة و من أجل $r = 0$ لدينا :

$$i(t) = I_0\,e^{-t/\tau} = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في عبارة u_R :

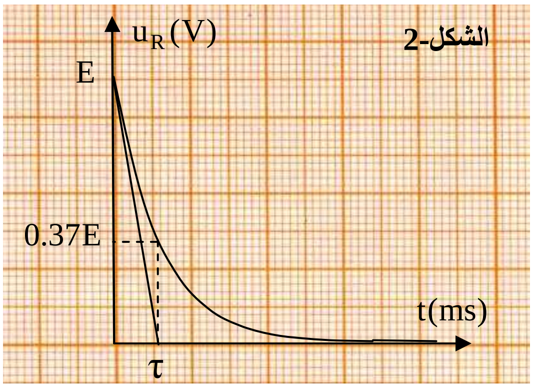
$$u_R = R\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_R = E\,e^{-t/\tau}}$$

- بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow u_R = E$
- $t = \infty \rightarrow u_R = 0$
- $t = \tau \rightarrow u_R = 0.37\,E$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-2) .



● العبارة اللحظية للتوتر $u_b(t)$ بين طرفي الناقل الوشيعة ($r = 0$) :

- عند غلق القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

$$u_b = E - u_R \rightarrow u_b = E - R.i$$

عند غلق القاطعة و من أجل $r = 0$ لدينا :

$$i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

بالتعويض :

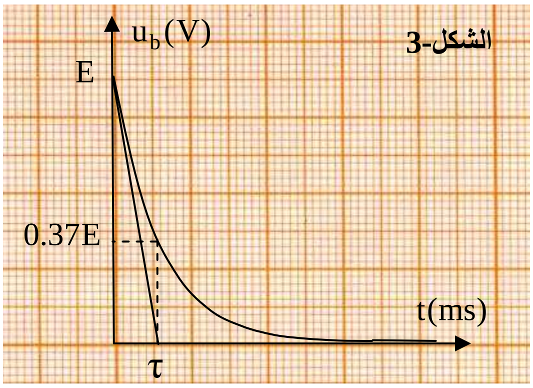
$$u_b = E - R.\frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow u_b = E - E\,(1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow u_b = E - E - Ee^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_b = Ee^{-t/\tau}}$$

- بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow u_b = E$
- $t = \infty \rightarrow u_b = 0$
- $t = \tau \rightarrow u_b = 0.37\,E$

و منه المنحنى $u_b(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الوشيعة عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-3) :



- عند فتح القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = 0$$

$$u_b = -u_R \rightarrow u_b = -R.i$$

عند فتح القاطعة و من أجل $r = 0$ لدينا :

$$i = I_0\, e^{-t/\tau} = \frac{E}{R}\, e^{-t/\tau}$$

بالتعويض :

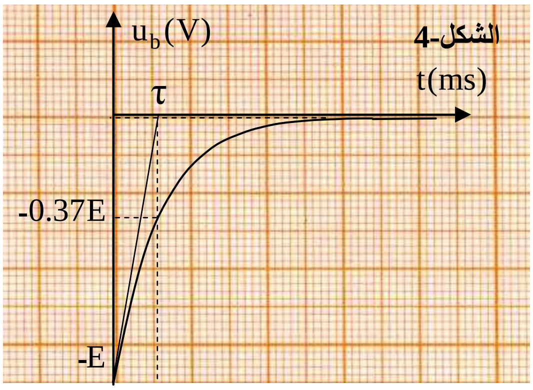
$$u_b = -R.\frac{E}{R}\, e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_b = Ee^{-t/\tau}}$$

-> بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow u_b = -E$
- $t = \infty \rightarrow u_b = 0$
- $t = \tau \rightarrow u_b = -0.37\,E$

و منه المنحنى $u_b(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الوشيعة عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-4) :



2- العبارات اللحظية من أجل $r \neq 0$:

● العبارة اللحظية للتوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي ($r \neq 0$) :

- عند غلق القاطعة :

$$u_R = R\, i$$

عند غلق القاطعة :

$$i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R + r}(1 - e^{-t/\tau})$$

بالتعويض في عبارة u_R نجد :

$$u_R = R\,.\frac{E}{R + r}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\boxed{u_R = \frac{ER}{R + r}(1 - e^{-t/\tau})}$$

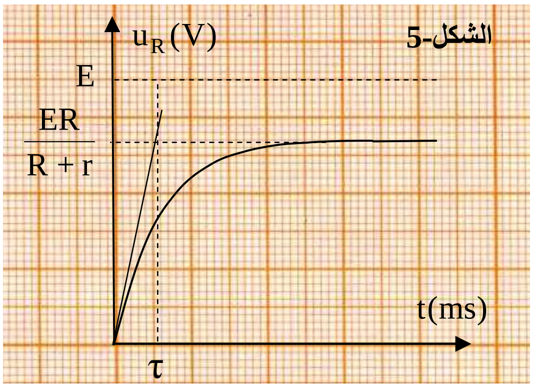
- بيانيا :

▪ $t = 0 \rightarrow u_R = 0$

▪ $t = \infty \rightarrow u_R = \dfrac{ER}{R+r} < E$

▪ $t = \tau \rightarrow u_R = 0.63\, u_{Rmax}$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-5) :



- عند فتح القاطعة :

$$u_R = R\,i$$

عند فتح القاطعة لدينا :

$$i(t) = I_0\, e^{-t/\tau} = \frac{E}{R+r} e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في عبارة u_R نجد :

$$u_R = R.\frac{E}{R+r} e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_R = \frac{ER}{R+r} e^{-t/\tau}}$$

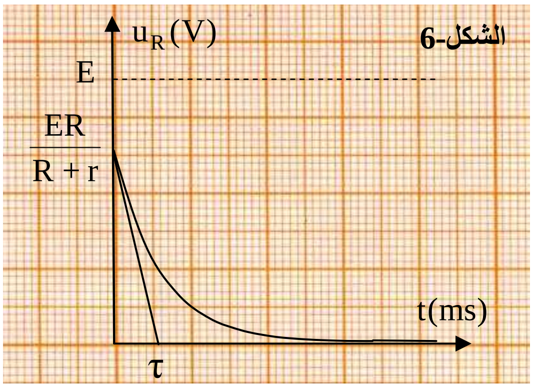
- بيانيا :

▪ $t = 0 \rightarrow u_R = \dfrac{ER}{R+r} < E$

▪ $t = \infty \rightarrow u_R = 0$

▪ $t = \tau \rightarrow u_R = 0.37\, u_{R0}$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-6) :



2- العبارات اللحظية من أجل $(r \neq 0)$:

● العبارة اللحظية للتوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة $(r \neq 0)$:

- عند غلق القاطعة :

طريقة أولى :

$$u_b = L\frac{di}{dt} + ri$$

عند غلق القاطعة لدينا :

▪ $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau}) = \dfrac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$

▪ $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{E}{R+r}(1 - (-\dfrac{R+r}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t})) \rightarrow \dfrac{di}{dt} = \dfrac{E}{L} e^{-t/\tau}$

بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = L.\frac{E}{L}e^{-t/\tau} + r.\frac{E}{R+r}(1-e^{-t/\tau})$$

$$u_b = L.\frac{E}{L}e^{-t/\tau} + \frac{E.r}{R+r} - \frac{E.r}{R+r}e^{-t/\tau} \rightarrow u_b = Ee^{-t/\tau} + \frac{E.r}{R+r} - \frac{E.r}{R+r}e^{-t/\tau}$$

$$u_b = \frac{E.r}{R+r} + (E - \frac{E.r}{R+r})e^{-t/\tau} \rightarrow u_b = \frac{E.r}{R+r} + (\frac{E.R + E.r - E.r}{R+r})e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_b = \frac{E.r}{R+r} + \frac{E.R}{R+r}e^{-t/\tau}}$$

طريقة ثانية :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{BM} = u_{BA} + u_{AM}$

$E = u_b + u_R \rightarrow u_b = E - u_R \rightarrow u_b = E - Ri$

عند غلق القاطعة لدينا :

$$i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = E - R.\frac{E}{R+r}(1-e^{-t/\tau}) \rightarrow u_b = E - \frac{ER}{R+r}(1-e^{-t/\tau})$$

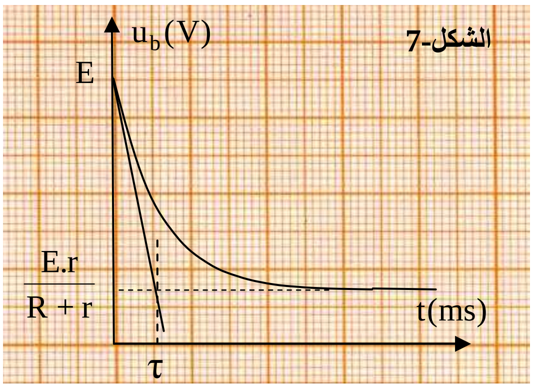
$$u_b = E - \frac{E\,R}{R+r} + \frac{E\,R}{R+r}e^{-t/\tau} \rightarrow u_b = \frac{E\,R + E\,r - E\,R}{R+r} + \frac{E\,R}{R+r}e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_b = \frac{E.r}{R+r} + \frac{E.R}{R+r}e^{-t/\tau}}$$

- بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow u_b = \frac{E.r}{R+r} + \frac{E.R}{R+r} = \frac{E\,(R+r)}{R+r} = E$
- $t = \infty \rightarrow u_b = \frac{E.r}{R+r}$

و منه المنحنى $u_b(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الوشيعة عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-7) :



- عند فتح القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{BM} = u_{BA} + u_{AM}$

$0 = u_b + u_R \rightarrow u_b = - u_R \rightarrow u_b = - Ri$

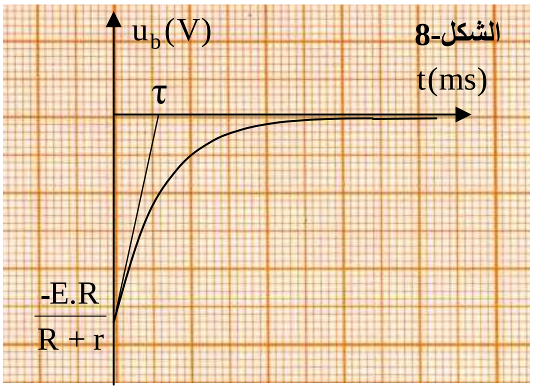
عند فتح القاطعة لدينا :

$$i = I_0\, e^{-t/\tau} = \frac{E}{R+r}\, e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = -\ R.\frac{E}{R+e}\, e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_b = -\frac{ER}{R+e}\, e^{-t/\tau}}$$



- بيانيا :

▪ $t = 0 \;\rightarrow\; u_b = -\dfrac{E.R}{R+r}$

▪ $t = \infty \;\rightarrow\; u_b = 0$

و منه المنحنى $u_b(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الوشيعة عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-8) :

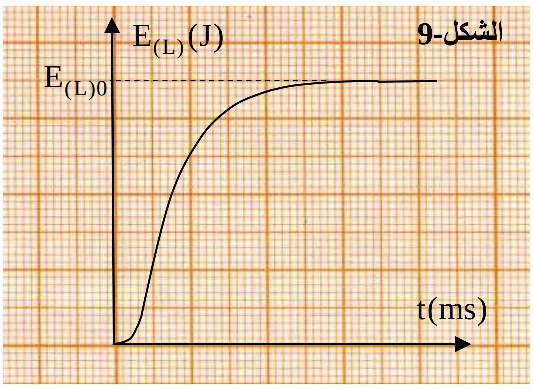
3- العبارة اللحظية لطاقة الوشيعة $E_{(L)}(t)$ بين طرفي الوشيعة :

عند غلق القاطعة :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} Li^2$$

لدينا عند غلق القاطعة : $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ بالتعويض في عبارة $E_{(L)}$:

$$\boxed{E_{(L)} = \frac{1}{2} LI_0^{\,2}\,(1 - e^{-t/\tau})^2 = E_{(L)0}\,(1 - e^{-t/\tau})}$$



حيث : $E_{(L)0} = \dfrac{1}{2} LI_0^2$ هي طاقة الوشيعة الأعظمية .

بيانيا :

$t = 0 \rightarrow E_{(L)} = 0$

$t = \infty \rightarrow E_{(L)} = E_{(L)0}$

و منه المنحنى $E_{(L)}(t)$ الممثل لتطور طاقة الوشيعة عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-9) :

عند فتح القاطعة :

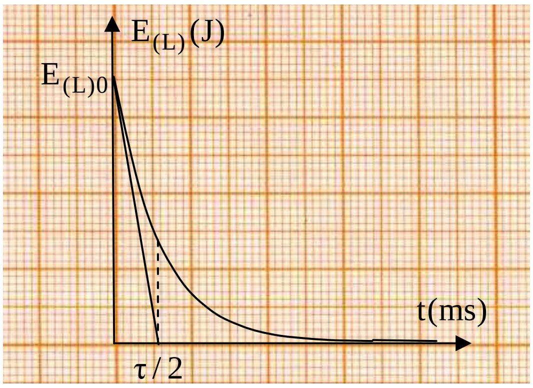
$$E_{(L)} = \frac{1}{2} Li^2$$

لدينا عند فتح القاطعة : $i = I_0\; e^{-t/\tau}$ بالتعويض في عبارة $E_{(L)}$:

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L I_0^2 \left(e^{-t/\tau} \right)^2$$

$$\boxed{E_{(L)} = \frac{1}{2} L I_0^2 e^{-2t/\tau}}$$

الشكل



بيانيا :

$t = 0 \rightarrow E_{(L)} = E_{(L)0}$

$t = \infty \rightarrow E_{(L)} = 0$

و منه المنحنى $E_{(L)}(t)$ الممثل لتطور طاقة الوشيعة عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-10) :

4- المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي $(r \neq 0)$:

- عند غلق القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_b + u_R = E$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E \rightarrow L\frac{di}{dt} + (R+r)i = E$$

لدينا :

$$u_R = Ri \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$$

بالتعويض :

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{u_R}{R}\right) + (R+r)\frac{u_R}{R} = E \rightarrow \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{(R+r)}{R}u_R = E$$

بضرب الطرفين في $\frac{R}{L}$ نجد :

$$\frac{R}{L}\cdot\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{R}{L}\frac{(R+r)}{R}u_R = \frac{R}{L}.E$$

$$\boxed{\frac{du_R}{dt} + \frac{(R+r)}{L}u_R = \frac{ER}{L}}$$

- عند فتح القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_b + u_R = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E \rightarrow L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$$

لدينا :

$$u_R = R\,i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$$

بالتعويض u_R :

$$L(\frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}) + (R+r)\frac{u_R}{R} = 0 \rightarrow \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{(R+r)}{R}u_R = 0$$

بضرب الطرفين في $\frac{R}{L}$ نجد :

$$\frac{R}{L}.\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{R}{L}\frac{(R+r)}{R}u_R = 0$$

$$\boxed{\frac{du_R}{dt} + \frac{(R+r)}{L}u_R = 0}$$

5- المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة من أجل ($r = 0$) :

عند غلق القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_b + u_R = E \rightarrow u_b + R.i = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_b}{dt} + R\frac{di}{dt} = 0$$

لدينا من أجل $(r = 0)$

$$u_b = L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u_b}{L}$$

بالتعويض :

$$\boxed{\frac{du_b}{dt} + \frac{R}{L}u_b = 0}$$

عند فتح القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_E = u_R + u_b \rightarrow 0 = R\,i + u_b$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_b}{dt} + R\frac{di}{dt} = 0$$

لدينا من أجل $(r = 0)$

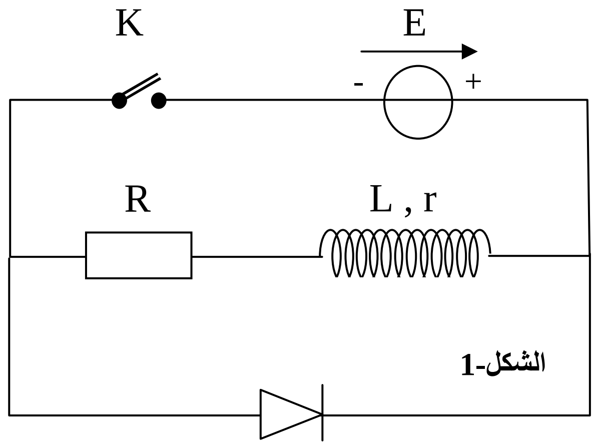
$$u_b = L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u_b}{L}$$

بالتعويض :

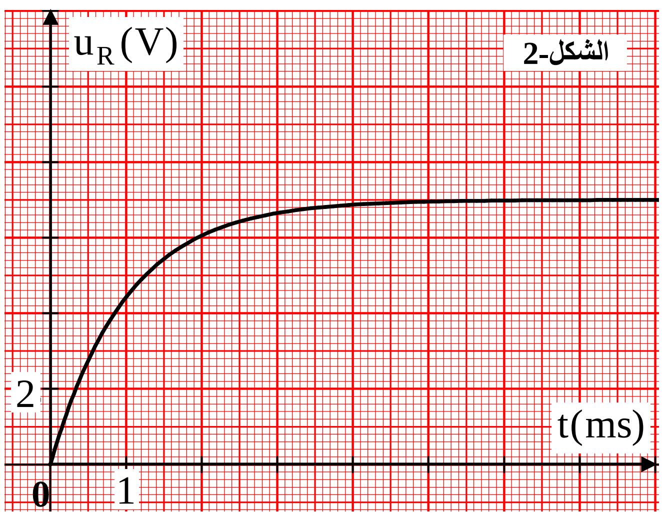
$$\boxed{\frac{du_b}{dt} + \frac{R}{L}u_b = 0}$$

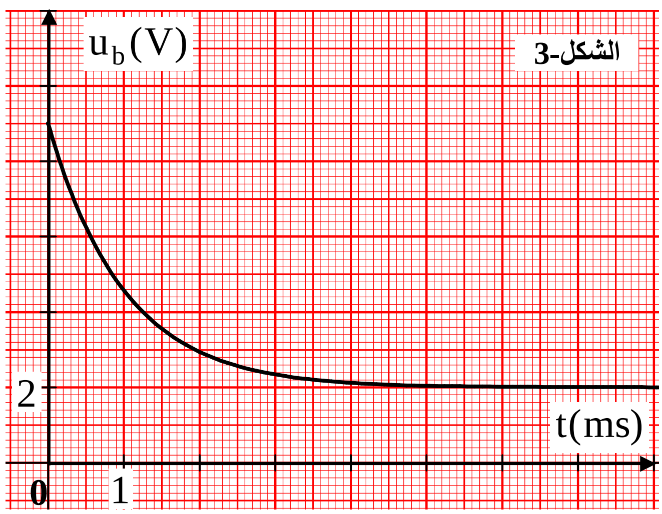
التمرين (11) : (التمرين : 016 في بنك التمارين على الموقع) (*)

الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) تتكون من العناصر التالية موصولة على التسلسل : مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ، ناقل أومي مقاومته R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية $r = 20\ \Omega$.



عند ربط هذه الدارة بمدخلي راسم اهتزاز مهبطي تمكنا من مشاهدة المنحنيين $u_R(t)$ ، $u_b(t)$ المبينين في الشكلين (2) ، (3) عند غلق القاطعة .





1- أ- بين كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي لمشاهدة منحنيي الشكلين (1) ، (2) .
2- اعتمادا على المنحنيين أوجد :
أ- القوة المحركة الكهربائية E .
ب- الشدة الأعظمية للتيار الكهربائي I_0 .
جـ- مقاومة الناقل الأومي R .
د- ثابت الزمن τ .
هـ- ذاتية الوشيعة .

3- عند اللحظة $t = 2\ ms$ أوجد :

أ- شدة التيار الكهربائي .

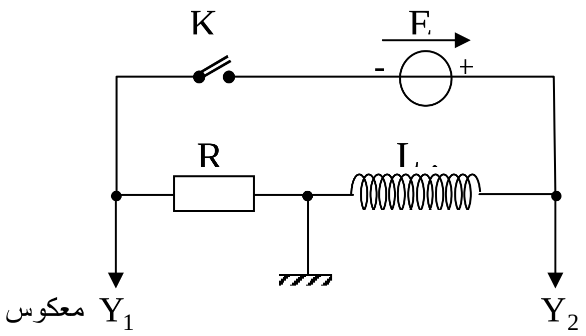
ب- الطاقة المخزنة في الوشيعة .

4- أحسب طاقة الوشيعة في النظام الدائم .

الأجوبة :

1- كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي :

- نصل الدارة براسم الاهتزاز المهبطي ثم نضغط على االزر INV في المدخل Y_1 كما في الشكل التالي :



2-أ- القوة المحركة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$E = u_b + u_R$

عند النظام الدائم يكون :

$E = u_{b0} + u_{R0}$

من منحنيي الشكلين (2) ، (3) : $u_{b0} = 2V$ ، $u_{R0} = 7V$ و منه يصبح :

$E = 2 + 7 = 9V$

ب- الشدة الأعظمية للتيار الكهربائي :

لدينا : $u_{AM} = L\frac{di}{dt} + ri$ و في النظام الدائم أين $\frac{di}{dt} = 0$ ، $i = I_0$ يكون :

$$u_{b(\infty)} = r\,I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{b(\infty)}}{r}$$

من منحنى (الشكل-3) : $u_{b(\infty)} = 2V$ و منه :

$$I_0 = \frac{2}{20} = 0.1\,A$$

جـ- مقاومة الناقل الأومي R :

$$I_0 = \frac{E}{R+r} \rightarrow R + r = \frac{E}{I_0} \rightarrow R = \frac{E}{I_0} - r \quad \rightarrow R = \frac{9}{0.1} - 20 = 70\,\Omega$$

طريقة ثانية :

$u_{R(t)} = Ri_{(t)}$

في النظام الدائم أين : $i = I_0$ نكتب :

$$u_{R(\infty)} = RI_0 \quad \rightarrow I_0 = \frac{u_{R(\infty)}}{R}$$

من البيان : $u_{R(\infty)} = 7V$

$$R = \frac{7}{0,1} = 70\,\Omega$$

د- ثابت الزمن τ :

من منحنى (الشكل-2) :

$t = \tau \rightarrow u_R = 0.63\ u_{Rmax} = 0.63\ .\ 7 = 4.41\ V$

بالإسقاط مع أخذ السلم بعين الاعتبار نجد : $\tau = 1\ ms$

هـ- ذاتية الوشيعة :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = \tau(R+r) \quad \rightarrow \quad L = 10^{-3}(70+20) = 0.09\,H$$

3- عند اللحظة $t = 2\ ms$:

• شدة التيار الكهربائي :

عند غلق القاطعة لدينا :

$$i = I_0\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

عند اللحظة $t = 2\ ms$:

$$i_{(2ms)} = 0{,}1\,(1 - e^{-\frac{2\,ms}{1\,ms}}) = 8{,}65 \,.\, 10^{-2}\ A$$

• الطاقة المخزنة في الوشيعة :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L\, i^2$$

عند اللحظة $t = 2\ ms$:

$$E_{(L)(2ms)} = \frac{1}{2} L\, i^2_{(2ms)} \quad \rightarrow E_{(L)(2ms)} = \frac{1}{2} \,.\, 0.09\,(8.65 \,.\, 10^{-2})^2 = 3.37 \,.\, 10^{-4}\ J$$

4- طاقة الوشيعة في النظام الدائم :

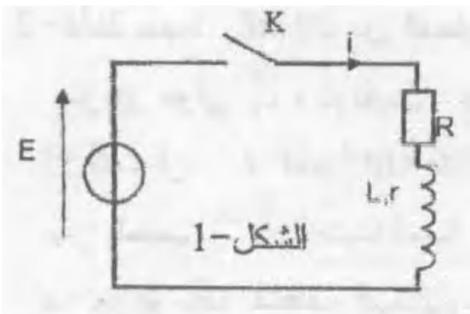
في النظام الدائم تكون طاقة الوشيعة أعظمية و عليه :

$$E_{(L)} = E_{(L)0} = \frac{1}{2} L.I_0^2 \quad \rightarrow E_{(L)} = 0.5 \,.\, 0.09\,(0.1)^2 = 4{,}5 \,.\, 10^{-4}\ J$$

التمرين (12) : (بكالوريا 2012 - رياضيات) (التمرين : 025 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نحقق الدارة الكهربائية (الشكل-1) المكونة من :

- مولد توتر كهربائي ثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 2V$.
- ناقل أومي مقاومته $R = 100\ \Omega$.
- وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها r .
- قاطعة K .



1- نغلق القاطعة K :

أ- اكتب العلاقة التي تربط التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيعة $u_b(t)$ و التوتر الكهربائي بين طرفي المقاومة $u_R(t)$ و E .

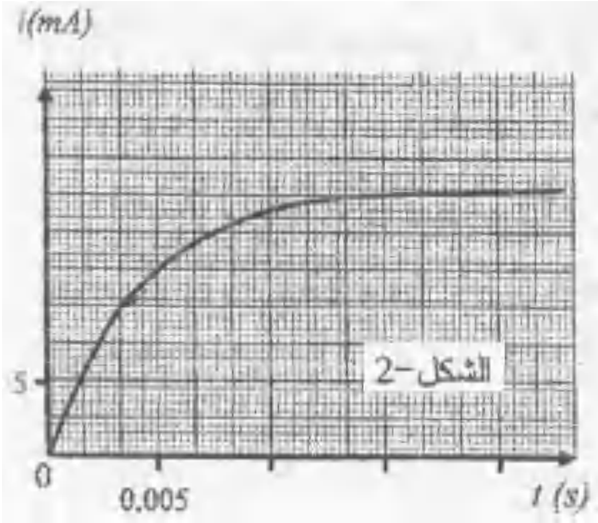
ب- جد عبارة $u_b(t)$ بدلالة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ ، ثم بدلالة $u_R(t)$.

جـ- استنتج المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_R(t)$ للدارة .

2- يعطى حل المعادلة التفاضلية التي يحققها بالشكل التالي :

$u_R(t) = A + Be^{-mt}$ حيث A و B و m ثوابت يطلب تعيينها

3- يسمح تجهيز الـ ExAO بمتابعة التطور الزمني لشدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة فنحصل على المنحنى البياني (الشكل-2)



لتكن I_0 شدة التيار الكهربائي الأعظمي في النظام الدائم .

أ- جد العبارة الحرفية للشدة I_0 .

ب- جد بيانيا قيمة الشدة I_0 ، ثم استنتج مقاومة الوشيعة r .

جـ- اكتب عبارة ثابت الزمن τ للدارة و بين بالتحليل البعدي أن τ متجانس مع الزمن .

د- جد بياينا قيمة τ ، ثم استنتج قيمة ذاتية الوشيعة L .

الأجوبة :

1- أ- العلاقة بين u_b و u_R و E :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

ب- عبارة u_b بدلالة i :

$$u_b = L\frac{di}{dt} + r\,i$$

- عبارة u_b بدلالة u_R :

- $u_R = R\,i \rightarrow i = \frac{1}{R}u_R$
- $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{d\,u_R}{dt}$

بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = L(\frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}) + r\,(\frac{1}{R}u_R)$$

$$u_b = \frac{L}{R}\frac{d\,u_R}{dt} + \frac{r}{R}u_R$$

جـ- المعادلة التفاضلية التي يحققها u_R :

بتعويض عبارة u_b الأخيرة في العبارة الأولى التي تحصلنا عليها بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{r}{R}u_R + u_R = E$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + (\frac{r}{R} + 1)\,u_R = E$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + (\frac{R+r}{R})\,u_R = E \quad \rightarrow \frac{du_R}{dt} + (\frac{R+r}{L})\,u_R = \frac{ER}{L}$$

2- تعيين الثوابت A و B و m :

- $u_R = A + Be^{-mt}$
- $\frac{du_R}{dt} = -B.m\,e^{-mt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-B.m\,e^{-mt} + \frac{R+r}{L}(A + B\,e^{-mt}) = \frac{ER}{L}$$

$$-B.m\,e^{-mt} + \frac{(R+r)A}{L} + \frac{(R+r)B}{L}e^{-mt} = \frac{ER}{L}$$

$$Be^{-mt}(-B.m + \frac{(R+r)B}{L}) + \frac{(R+r)A}{L} = \frac{ER}{L}$$

الحل المعطى هو حل المعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

- $-m + \frac{(R+r)}{L} = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{(R+r)}{L}$
- $\frac{(R+r)A}{L} = \frac{ER}{L} \quad \rightarrow A = \frac{ER}{R+r}$

- من الشروط الابتدائية : $t = 0 \rightarrow u_R = 0$ بالتعويض في عبارة u_R (حل المعادلة التفاضلية) :

$$0 = A + B\,e^{-m(0)} \quad \rightarrow A + B = 0 \;\rightarrow\; B = -A \;\rightarrow\; B = -\frac{ER}{R+r}$$

3- أ- العبارة الحرفية للشدة I_0

في النظام الدائم :

- $i = I_0 \;\rightarrow\; u_R = RI_0$
- $\frac{di}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{du_R}{dt} = 0$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{R+r}{L}(RI_0) = \frac{ER}{L} \quad \rightarrow I_0 = \frac{E}{R+r}$$

ب- قيمة I_0 :

من البيان مباشرة :

$$I_0 = 3.6 \times 5\;.\;10^{-3} = 1.8\;.\;10^{-2}\text{ A}$$

- قيمة r :

$$I_0 = \frac{E}{R+r} \rightarrow (R+r) = \frac{E}{I_0} \rightarrow r = \frac{E}{I_0} - R$$

$$r = \frac{2}{1.8 \cdot 10^{-2}} - 100 = 11.11\,\Omega$$

جـ- عبارة τ :

$$\tau = \frac{L}{R + r}$$

- إثبات أن τ متجانس مع الزمن :

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R_T]}$$

لدينا :

- $u_b = L\frac{di}{dt} \rightarrow [U] = [L]\frac{[I]}{[T]} \rightarrow [L] = \frac{[U][T]}{[I]}$
- $u_R = RI \rightarrow [U] = [R][I] \rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$

بالتعويض في عبارة $[\tau]$ نجد :

$$[\tau] = \frac{\frac{[U][T]}{[I]}}{\frac{[U]}{[I]}} = \frac{[U][T]}{[I]} \cdot \frac{[I]}{[U]} \rightarrow [\tau] = [T] = s$$

د- قيمة τ :

$t = \tau \;\rightarrow\; i = 0.63\,I_0 = 0.63 \cdot 1.8 \cdot 10^{-2} = 1.13 \cdot 10^{-2}$

بالإسقاط في البيان مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار نجد : $\tau \approx 4.3 \;.10^{-3}s = 4.3\,ms$

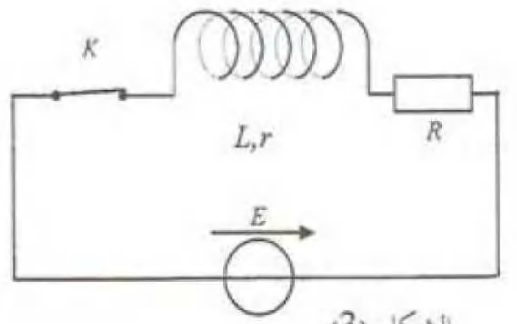
- قيمة L :

$$\tau = \frac{L}{R + r} \rightarrow L = \tau\,(R + r)$$

$$L = 4.3 \cdot 10^{-3}\,(100 + 11.11) \approx \;0.48\,H$$

التمرين (13) : (بكالوريا 2015 - رياضيات) (التمرين : 060 في بنك التمارين على الموقع) (*)

بهدف معرفة ذاتية وشيعة L و مقاومتها r نحقق التركيب الموضع بالشكل (3) حيث $R = 15\ \Omega$ و المولد ثابت التوتر قوته المحركة الكهربائية E .



الشكل (3)

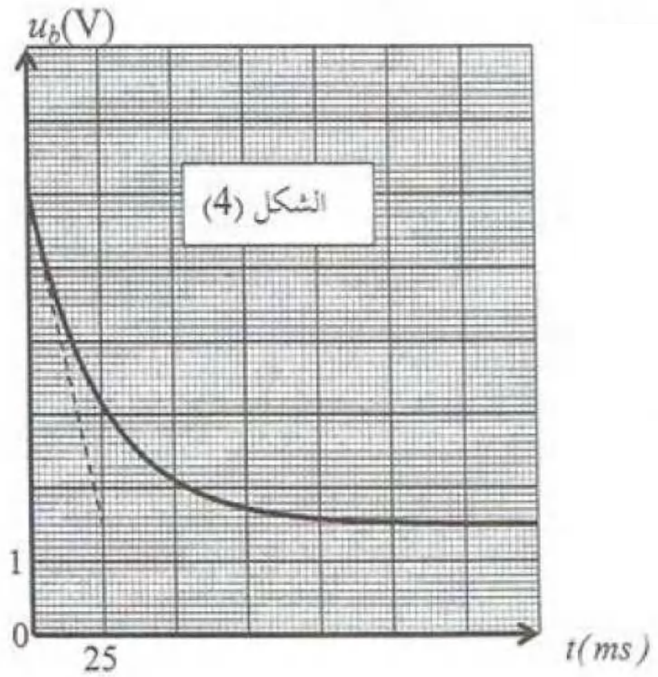
1- بتطبيق قانون جمع التوترات ، بين أن المعادلة التفاضلية لشدة التيار تكتب بالشكل : $\frac{di(t)}{dt} + \alpha\, i(t) = \beta$ ، حيث α، β ثابتان يطلب تحديد عبارتيهما مستغنيا بالمقادير التالية E ، r ، R ، L .

2- تحقق أن العبارة $i(t) = \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$ هي حلا للمعادلة التفاضلية .

3- بين أن عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة تعطى بالعلاقة :

$$u_b(t) = \frac{E}{E + r}\left(r + Re^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$$

4- باستعمال راسم اهتزازات ذي ذاكرة تحصلنا على بيان الشكل (4) الممثل لتغيرات ا بين طرفي الوشيعة بدلالة الزمن .



أ- أعد رسم الدارة موضحا كيفية توصيل راسم الاهتزازات لمشاهدة بيان الشكل (4) .

ب- بالاعتماد على البيان استنتج :
- القوة المحركة الكهربائية للمولد E .
- مقاومة الوشيعة r .
- ثابت الزمن τ للدارة .
- ذاتية الوشيعة L .

5- أ- اكتب العبارة اللحظية للطاقة المخزنة في الوشيعة $E_{(L)}$.

ب- أوجد قيمة هذه الطاقة في النظام الدائم .

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E$$

$$L\frac{di}{dt} + (r + R)\, i = E \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{r + R}{L} i = \frac{E}{L}$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$\alpha = \frac{R + r}{L} \quad , \quad \beta = \frac{E}{L}$$

2- التحقق من الحل :

- $i = \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$
- $\frac{di}{dt} = \frac{\beta}{\alpha}(0 - (-\alpha e^{-\alpha t})) = -\beta e^{-\alpha t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة :

$$\beta e^{-\alpha t} + \alpha.\frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) = \beta$$

$$\beta e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) = \beta$$

$$\beta e^{-\alpha t} + \beta - \beta e^{-\alpha t} = \beta \quad \rightarrow \beta = \beta$$

إذن الحل المعطى هو فعلا حل للمعادلة التفاضلية .

3- العبارة $u_b(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

$$u_b = E - u_R \rightarrow u_b = E - R.i$$

و مما سبق يمكن كتابة :

$$i = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

و منه :

$$u_b = E - R.\frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

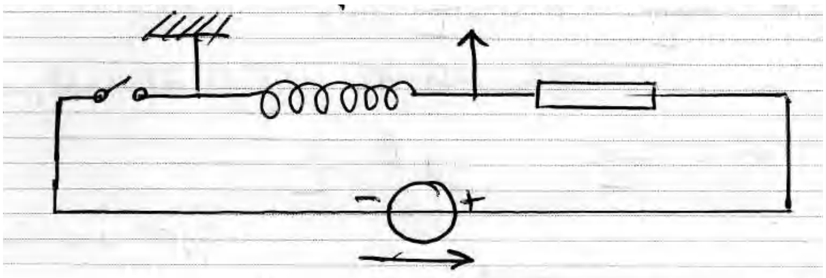
$$u_b = E - \frac{RE}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

$$u_b = E - \frac{RE}{R+r} + \frac{RE}{R+r}e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

$$u_b = \frac{RE + rE - RE}{R+r} + \frac{RE}{R+r}e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

$$u_b = \frac{rE}{R+r} + \frac{RE}{R+r}e^{-\frac{R+r}{L}t} \rightarrow u_b = \frac{E}{R+r}(r + Re^{-\frac{R+r}{L}t})$$

4- أ- كيفية وصل الدارة براسم الاهتزازات :



ب- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_{b(t)} + u_{R(t)}$$

عند اللحظة $t = 0$ نكتب :

$$E = u_{b(t=0)} + u_{R(t=0)}$$

لدينا :

▪ $t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{R(t=0)} = 0$

و من البيان :

▪ $u_{b(t=0)} = 6V$

و منه :

$$E = 6 + 0 \rightarrow E = 6B$$

قيمة r :

من العبارة $u_b(t)$:

$$u_{b(\infty)} = \frac{Er}{R + r}$$

و منه :

$$u_{b(\infty)}R + u_{b(\infty)}r = Er$$
$$u_{b(\infty)}R = Er - u_{b(\infty)}r$$
$$u_{b(\infty)}R = r(E - u_{b(\infty)}) \rightarrow r = \frac{u_{b(\infty)}.R}{E - u_{b(\infty)}}$$

من البيان في النظام الدائم ($t = \infty$) :

$$u_{b(\infty)} = 1,5\ V$$

و منه :

$$r = \frac{1,5.15}{6 - 1,5} = 5\,\Omega$$

▪ ثابت الزمن τ :

من البيان :

$$\tau = 25\ ms$$

قيمة L :

$$\tau = \frac{L}{R + r} \rightarrow L = \tau\,(R + r)$$
$$\tau = 25 \,.\, 10^{-3}\,(15 + 5) = 0,5\ H$$

5- أ- العبارة اللحظية لطاقة الوشيعة :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L\, i^2$$

لدينا :

$$i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$$

و منه :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L\, I_0^2\, (1 - e^{-t/\tau})^2$$

ب- قيمة الطاقة في النظام الدائم :

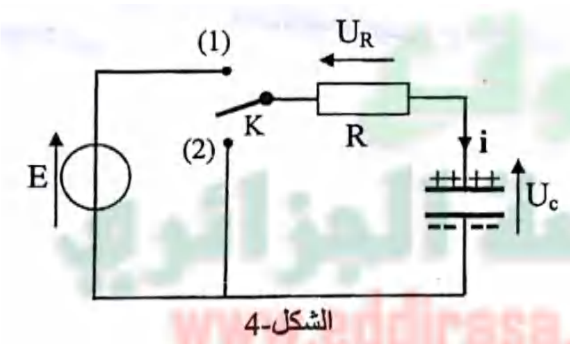
من العلاقة السابقة :

$$t = \infty \;\rightarrow\; E_{(L)} = \frac{1}{2} L.I_0^2$$

- $I_0 = \frac{E}{R + r} = \frac{6}{15 + 5} = 0{,}3\,A$
- $E_{(L)} = \frac{1}{2} 0{,}5\,.\,(0{,}3)^2 = 2{,}25.10^{-2}\ J$

IV – تمارين متنوعة

التمرين (14) : (بكالوريا 2016 - علوم تجريبية) (التمرين : 061 في بنك التمارين على الموقع) (**)



لغرض دراسة تطور التوتر الكهربائي بين طرفي مكثفة نركب الدارة الكهربائية الموضحة بالشكل-4 .

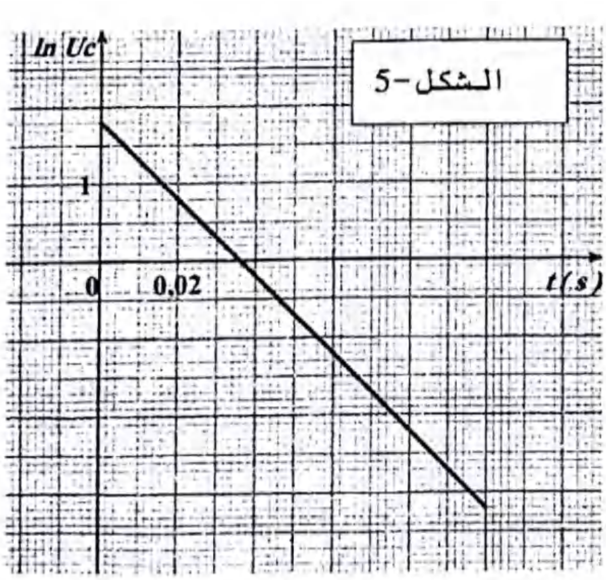
تتكون هذه الدارة من مولد للتوتر الثابت E ، ناقل أومي مقاومته $R = 10\ k\Omega$ ، مكثفة سعتها C و بادلة K .

نضع البادلة في الوضع (1) إلى غاية بلوغ النظام الدائم ، ثم نغير البادلة إلى الوضع (2) في اللحظة $t = 0$.

1- ما هي إشارة شدة التيار الكهربائي المبين في الدارة ؟ علل .

2- بين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي U_C بين طرفي المكثفة في هذه الدارة تعطى بالشكل :

$$U_C + \frac{1}{\alpha}\frac{dU_C}{dt} = 0$$



3- إذا كان حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل : $U_C = Ae^{-\alpha t}$ ، اوجد عبارتي الثابتين A و α بدلالة R ، C و E

4- يمثل الشكل-5 المنحنى البياني لتغيرات $\ln U_C$ بدلالة الزمن t .

أ- استنتج بيانيا عبارة الدالة $\ln U_C = f(t)$.

ب- بالمطابقة مع العلاقة النظرية الموافقة للمنحنى ، استنتج قيم كل من : α ، C و E .

5- احسب الطاقة المحولة إلى الناقل الأومي عند اللخظة $t = 2{,}5\ \tau$ ، ماذا تستنتج ؟ حيث τ هو ثابت الزمن المميز للدارة .

الأجوبة :

1- إشارة شدة التيار :

عند الشحن :

في هذه الحالة تزداد شحنة المكثفة و كون أن $i = \frac{dq}{dt}$ ، يكون $i > 0$ (مشتق دالة متزايدة موجب) .

عند الشحن :

في هذه الحالة تتناقص شحنة المكثفة و كون أن $i = \frac{dq}{dt}$ ، يكون $i < 0$ (مشتق دالة متناقصة سالب) .

2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_C + u_R = 0$$

$$u_C + R.i = 0 \rightarrow u_C + R.\frac{dq}{dt} = 0$$

$$u_C + R.\frac{d(C.u_C)}{dt} = 0 \qquad \rightarrow u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0$$

3- عبارة A و α :

- $u_C = Ae^{-\alpha t}$
- $\frac{du_C}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$Ae^{-\alpha t} + RC(-\alpha A\, e^{-\alpha t}) = 0$$

$$Ae^{-\alpha t}(1 + RC) = 0$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$1 - RC\alpha = 0$$

$$RC\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{RC}$$

من الشروط الابتدائية (تفريغ) :

$$t = 0 \rightarrow u_C = E$$

بالتعويض في العبارة $u_C = Ae^{-\alpha t}$ نجد :

$$E = Ae^{-\alpha(0)} \rightarrow A = E$$

4- أ- عبارة الدالة $\ln u_C = f(t)$:

المنحنى $\ln u_C(t)$ هو عبارة مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$$\ln u_C = at + b$$

- $a = -\frac{1,8}{1,8 . 0,02} = -50$
- $b = 1,8$

إذن العبارة هي :

$$\ln u_C = -50\,t + 1,8$$

ب- قيمة α ، C ، E :

$u_C = Ae^{-\alpha t} = E\,e^{-\alpha t}$

$\ln u_C = \ln E + \ln e^{-\alpha t}$

$\ln u_C = \ln E - \alpha t \rightarrow \ln u_C = -\alpha t + \ln E$

بالمطابقة مع العبارة الرياضية السابقة نجد :

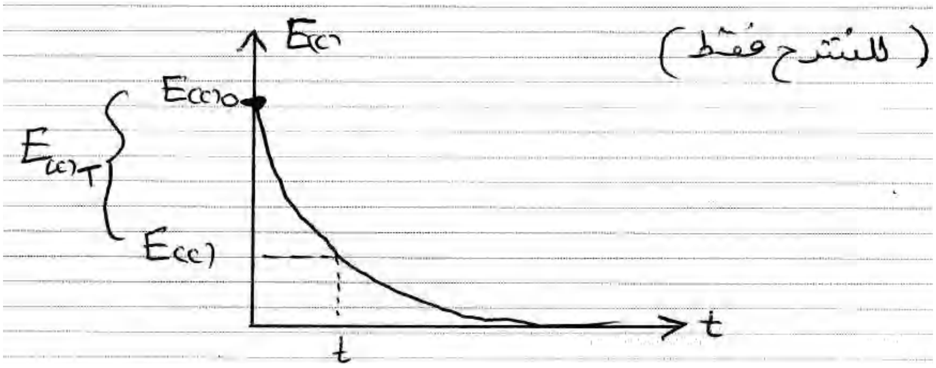
- $-\alpha = -50 \rightarrow \alpha = 50$
- $\ln E = 1{,}8 \rightarrow E = e^{1{,}8} \rightarrow E = 6V$

بمطابقة المعادلة التفاضلية المعطاة بالمعادلة التفاضلية المتحصل عليها نجد :

- $\frac{1}{\alpha} = RC \rightarrow C = \frac{1}{\alpha R} \rightarrow C = \frac{1}{50.10^4} = 2.10^{-6}F$

5- الطاقة المحولة إلى الناقل الأومي :

عند اللحظة $t = 0$ تكون طاقة المكثفة عظمى $E_{C0} = \frac{1}{2}CE^2$ و عند اللحظة t تكون طاقتها $E_C = \frac{1}{2}Cu_C^2$ ،



و تكون عندئذ حولت طاقة إلى الناقل الأومي قدرها E_{CT} حيث :

$E_{CT} = E_{C0} - E_C$

$E_{CT} = \frac{1}{2}CE - \frac{1}{2}Cu_C^2$

عند التفريغ لدينا : $u_C = Ee^{-\alpha t}$ $(\alpha = \frac{1}{\tau})$ و منه :

$E_{CT} = \frac{1}{2}CE - \frac{1}{2}C(E\,e^{-\frac{t}{\tau}})^2$

$E_{CT} = \frac{1}{2}CE - \frac{1}{2}CE^2\,e^{-\frac{2t}{\tau}} \rightarrow E_{CT} = \frac{1}{2}CE(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}})$

عند اللحظة $t = 2{,}5\tau$:

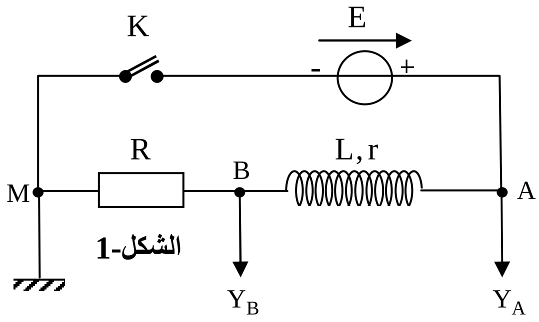
$E_{CT} = \frac{1}{2}CE(1 - e^{-\frac{2(2{,}5\tau)}{\tau}})$

$E_{CT} = \frac{1}{2}CE(1 - e^{-5}) \rightarrow E_{CT} = \frac{1}{2}CE = E_{C0}$

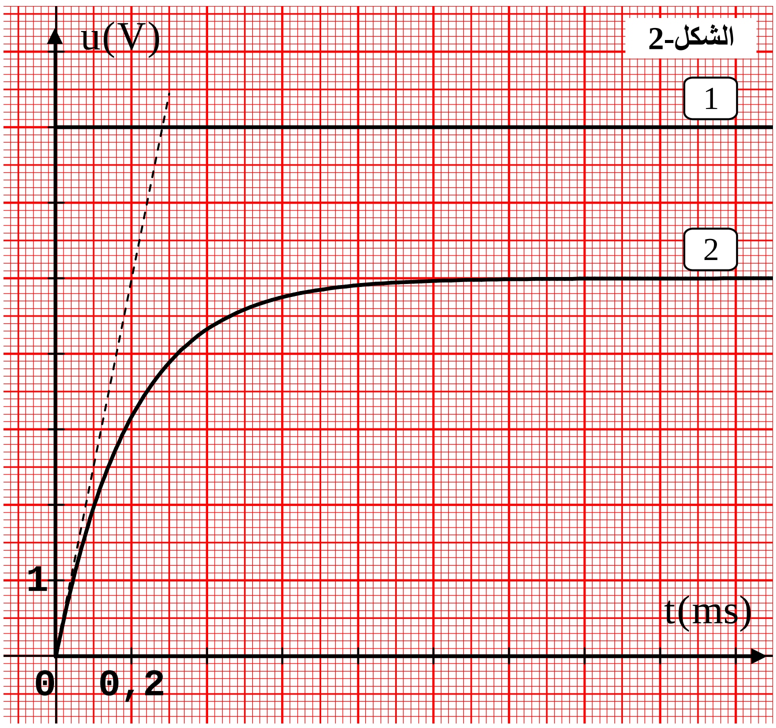
أي تحول المكثفة كل طاقتها التي اكتسب تها أثناء الشحن ، نستنتج أنه عند اللحظة $t = 2{,}5\tau$ تتفرغ المكثفة كليا .

التمرين (15) : (التمرين : 073 في بنك التمارين على الموقع) (**)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي و التي تتكون من مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ، قاطعة K ، ناقل أومي مقاومتة $R = 100\ \Omega$ ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r. توصل الدراة براسم اهتزاز مهبطي ذي مدخلين Y_A و Y_B (الشكل-1)
نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$ فيظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) .



الشكل-1



1- بين أن المنحنى (1) يمثل تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي .

2- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$ تكون من الشكل : $L\frac{di}{dt} + (R + r)\, i = E$ بالاعتماد على المنحنيين (1) ، (2) ، أحسب :

أ- القوة المحركة الكهربائية E .

ب- شدة التيار الكهربائي الأعظمي I_0 .

جـ- المقاومة الداخلية للوشيعة r .

4- من المنحنى الموافق للمدخل Y_B عين قيمة المقدار $\frac{di}{dt}$ عند اللحظة $t = 0$ ثم استنتج ذاتية الوشيعة L من دون الاستعانة بـ τ .

5- أوجد بطريقتين مختلفتين ثابت الزمن τ لهذه الدارة .

6- على نفس الشكل-2 المعطى بعد نقله على ورقة إجابتك ، أرسم بشكل كيفي المنحنى $u_{R'}$ الذي تشاهده على المدخل Y_B في حالة استبدال الوشيعة السابقة بوشيعة أخرى لها نفس المقاومة الداخلية و ذاتيتها $L' = 2L$.

الأجوبة :

I- المنحنى الموافق لكل مدخل :

- من خلال طريقة ربط راسم الاهتزاز بالدارة ، يظهر المدخل Y_A التوتر بين طرفي المولد في حين يظهر المدخل Y_B التوتر بين طرفي الناقل الأومي .

- من المنحنى (1) التوتر ثابت و هذا يتفق مع التوتر بين طرفي مولد التوتر الذي يكون التوتر بين طرفي ثابت ، إذن المنحنى (1) هو الذي يظهر على المدخل Y_A .

لدينا : $u_R = R.i$ ، و في ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة يكون :

$$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_R = R.i = 0$$

و هذا يتفق مع المنحنى (2) ، بمعنى أن المنحنى (2) يمثل التوتر بين طرفي الناقل الأومي و بالتالي هو الذي يظهر على المدخل Y_B .

2- المعادلة التفاضلية بدلالة i(t) :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E$$

$$L\frac{di}{dt} + (R + r)i = E \quad \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R + r}{L}i = \frac{E}{L}$$

3-أ- قيمة E :

التوتر بين طرفي مولد التوتر ثابت ، و من المنحنى (1) الذي يوافقه يكون : $E = 7\ V$.

ب- شدة التيار الأعظمية :

$$u_R = R.i$$

في النظام الدائم أين $i = I_0$ نكتب :

$$u_{R(\infty)} = RI_0 \ \rightarrow I_0 = \frac{u_R}{R}$$

من المنحنى (2) : $u_{R(\infty)} = 5V$ و منه :

$$I_0 = \frac{5}{100} = 0,05\,A$$

جـ- قيمة r :

$$I_0 = \frac{E}{R + r} \quad \rightarrow R + r = \frac{E}{I_0} \quad \rightarrow \quad r = \frac{E}{I_0} - R$$

$$r = \frac{7}{0,05} - 100 = 40\,\Omega$$

4- قيمة $\frac{di}{dt}$ عند $t = 0$:

$$u_R = R.i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \quad \rightarrow \frac{di}{dr} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$$

تمثل القيمة $\frac{du_R}{dt}$ ميل مماس المنحنى $u_R(t)$ (المنحنى 2) و بالتالي عند اللحظة $t = 0$ يكون :

- $(\frac{du_R}{dr})_{t=0} = \frac{5}{0,2.10^{-3}} = 2,5.10^4$
- $(\frac{di}{dr})_{t=0} = \frac{1}{R}(\frac{du_R}{dt})_{t=0} = \frac{1}{100}.2,5.10^4 = 250$

- ذاتية الوشيعة L :

من المعادلة التفاضلية يمكن كتابة :

$$L(\frac{di}{dt})_{t=0} + (R+r).(i)_{t=0} = E$$

$$L(\frac{di}{dt})_{t=0} = E - (R+r).(i)_{t=0} \quad \rightarrow L = \frac{E-(R+r).(i)_{t=0}}{(\frac{di}{dt})_{t=0}}$$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة $(i)_{t=0} = 0$ و لدينا : $(\frac{di}{dt})_{t=0} = 250$ ، إذن :

$$L = \frac{7-0}{250} = 2,8.10^{-2}\ H$$

5- قيمة τ :

طريقة (1) : (بيانيا)

$$t = \tau \rightarrow u_R = 0,63\ u_{Rmax} = 0,63\ .\ 5 = 2,15\ V$$

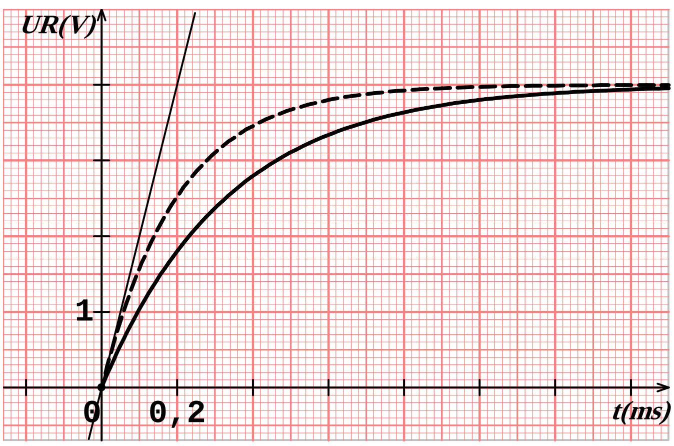
بالإسقاط في المنحنى (2) نجد : $\tau = 0,2\ ms$.

طريقة (2) : (حسابيا)

$$\tau = \frac{L}{R+r} = \frac{2,8.10^{-2}}{100+40} = 2.10^{-4}\ s = 0,2\ ms$$

6- المنحنى $u_R(t)$:

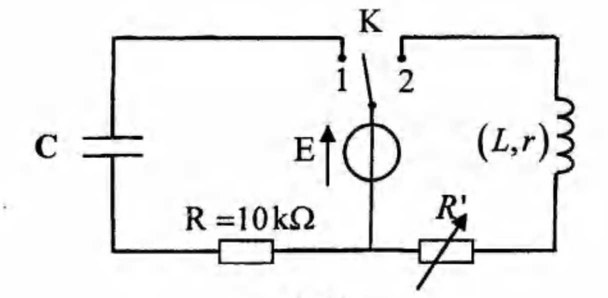
بازدياد L يزداد ثابت الزمن $\tau = \frac{L}{R+r}$ و بالتالي يزداد زمن بلوغ النظام الدائم فيكون :



التمرين (16) : (بكالوريا 2018 - علوم تجريبية) (التمرين : 075 في بنك التمارين على الموقع) (**)

بغرض معرفة سلوك و مميزات كل من مكثفة سعتها C و وشيعة مقاومتها r و ذاتيتها L ، نحقق التركيب التجريبي الكهربائي المبين في الشكل-4- و الذي يتكون من العناصر الكهربائية التالية :

- مولد ذي توتر ثابت ، قوته المحركة الكهربائية E .
- مكثفة فارغة سعتها C .
- وشيعة مقاومتها r و ذاتيتها L .
- ناقل أومي مقاومته $R = 10\ k\Omega$.
- مقاومة متغيرة R' .
- بادلة K .



الشكل-4-

1- نضع في اللحظة $t = 0$ البادلة K في الوضع (1) . أنقل مخطط الدارة على ورقة الإجابة ، و بين عليه جهة مرور التيار الكهربائي ثم مثل :

- أسهم التوترين بين طرفي المقاومة (u_R) و المكثفة (u_C) .
- كيفية توصيل الدارة براسم اهتزاز ذي ذاكرة لمعاينة التوتر الكهربائي بين طرفي المقاومة $u_R(t)$.

2- من القياسات المتحصل عليها و بواسطة برمجية مناسبة ، تمكنا من الحصول على النتائج المدونة في الجدول الآتي :

t(s)	0	5	10	15	20	25	30
$i\ (10^{-4}.A)$	6,00	3,63	2,22	1,34	0,81	0,50	0,30
$-\frac{du_R}{dt}(V.s^{-1})$	0,60	0,36	0,22	0,13	0,08	0,05	0,03

1-2 - بتطبيق قانون جمع التوترات جِد المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار $i(t)$ المار بالدارة .

2-2- أرسم البيان الممثل للدالة $(-\frac{du_R}{dt}) = f\ (u_R)$ ثم اكتب معادلته الرياضية .

3-2- استنتج قيمة كل من القوة المحركة الكهربائية E و سعة المكثفة C .

4-2- أحسب الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة في اللحظة $t = 25\ s$.

3- نضع الآن البادلة K في الوضع (2) في لحظة نعتبرها مبدأ لقياس الأزمنة $t = 0$.

1-3- جد المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار $i(t)$.

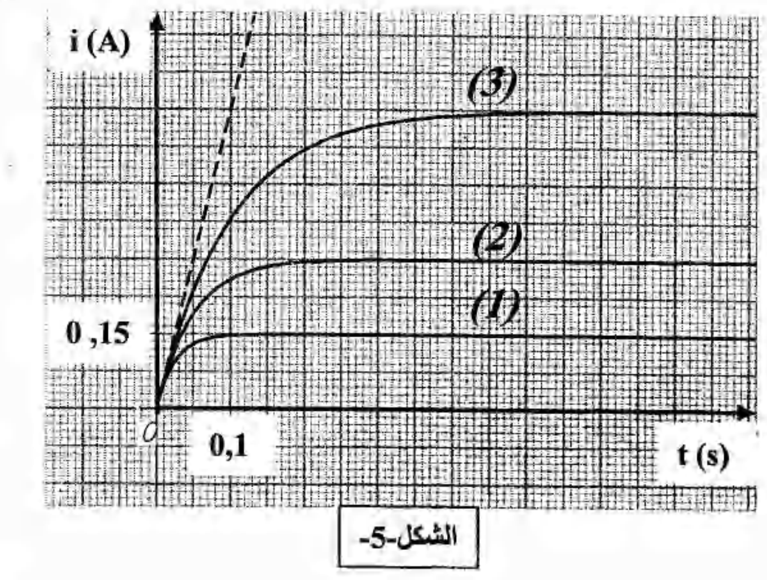
2-3- علما أن حل المعادلة التفاضلية السابقة هو من الشكل $i(t) = A(1 - e^{-Bt})$ ، جد العبارة الحرفية لكل من الثابتين A و B .

4- يمثل الشكل-5 منحنيات تغيرات شدة التيار الماء في الدارة بدلالة الزمن ، من أجل ثلاث قيم مختلفة للمقاومة R' المدونة في الجدول الآتي :

$R'(\Omega)$	8	18	38

4-1- أرفق كل منحنى بالمقاومة الموافقة مستعينا بعبارة شدة التيار في النظام الدائم ثم استنتج قيمة مقاومة الوشيعة r .

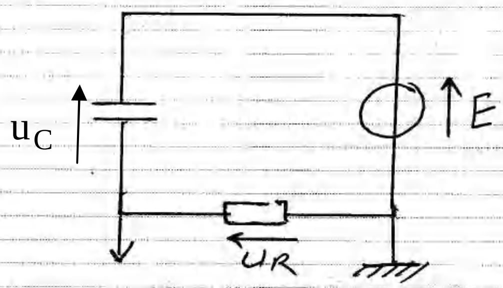
4-2- باستغلال المنحنى (3) : جد قيمة ذاتية الوشيعة L .



الشكل-5-

الأجوبة :

1- مخطط الدارة وتمثيل اسهم التوترات وجهة التوتر وكيفية توصيل الدارة براسم الاهتزازات :



2-1- المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_R(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$u_R + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

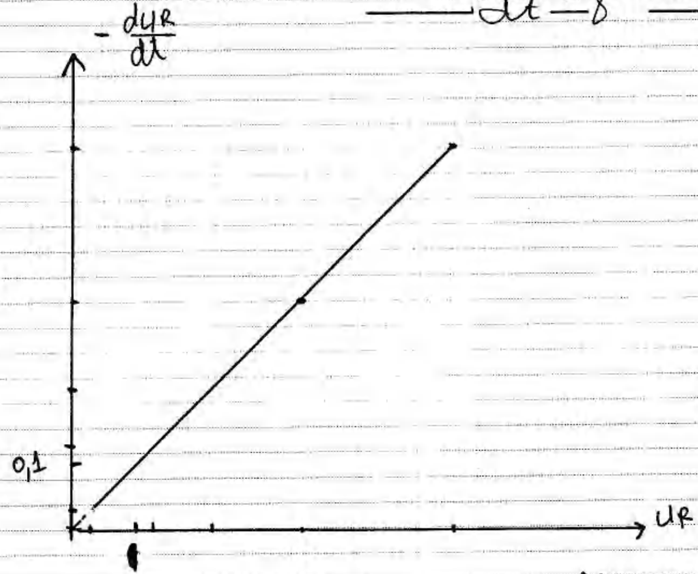
وحيث أن :

$$u_R = Ri \rightarrow i = \frac{u_R}{R}$$

تصبح :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0$$

2-2- البيان $-\frac{du_R}{dt} = f(u_R)$:



- المعادلة الرياضية للبيان :
البيان عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل : $-\frac{du_R}{dt} = a\, u_R$
حيث : a معامل .
- من البيان :

$a = \frac{0{,}6}{6} = 0{,}1 \ s^{-1}$

اذن معادلة البيان تكون كما يلي :

$-\frac{du_R}{dt} = 0{,}1\ u_R$

2-3- قيمة E :
حسب قانون جمع التوترات

$u_{R(t)} + u_{C(t)} = E$

عند اللحظة $t=0$ نكتب :

$u_{R(t=0)} + u_{C(t=0)} = E$

من الجدول :
$\bullet\ t=0 \rightarrow u_{R(t=0)} = 6V$
ومن الشروط الابتدائية :
$\bullet\ t=0 \rightarrow q_{(t=0)} = 0$
يصبح :
$6 + 0 = E \longrightarrow E = 6V$

- قيمة C :
- بيانيا :

$$-\frac{du_R}{dt} = 0{,}1\ u_R$$

- نظريا ومن خلال المعادلة التفاضلية السابقة :

$$-\frac{du_R}{dt} = \frac{1}{RC} u_R$$

بالمطابقة :

$$\frac{1}{RC} = 0{,}1 \longrightarrow C = \frac{1}{0{,}1 \times R}$$

$$C = \frac{1}{0{,}1 \cdot 10^4} = 10^{-3} F$$

2-4- الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t = 25s$:

$$E_{(c)(t)} = \frac{1}{2} C u_{C(t)}^2$$

عند اللحظة $t = 25s$ نكتب :

$$E_{(c)(25s)} = \frac{1}{2} C u_{C(25s)}^2$$

- وحسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R(t)} + u_{C(t)} = E$$

وعند اللحظة $t = 25s$ نكتب :

$$u_{R(25)} + u_{C(25s)} = E \rightarrow u_{C(25s)} = E - u_{R(25s)}$$

من الجدول $u_{R(25)} = 0{,}5V$ ومنه :

$$u_{C(25s)} = 6 - 0{,}5 = 5{,}5V$$

إذن :

$$E_{(c)(25s)} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} (5{,}5)^2 = 1{,}51 \cdot 10^{-2} J$$

3-1- المعادلة التفاضلية التي تحققها $i(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{b(t)} + u_{R(t)} = E$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E$$

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L} i = \frac{E}{L}$$

3-2- العبارة الحرفية لـ A و B :

- $i = A\left(1 - e^{-Bt}\right)$

- $\dfrac{di}{dt} = A\left(0 - \left(-Be^{-Bt}\right)\right) = ABe^{-Bt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$ABe^{-Bt} + \frac{R+r}{L}A\left(1 - e^{-Bt}\right) = \frac{E}{L}$$

$$ABe^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} + \frac{A(R+r)}{L}e^{-Bt}$$

$$Ae^{-Bt}\left(B - \frac{R+r}{L}\right)e^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن تكون :

- $B - \dfrac{R+r}{L} = 0 \longrightarrow B = \dfrac{R+r}{L}$

- $\dfrac{A(R+r)}{\cancel{L}} = \dfrac{E}{\cancel{L}} \longrightarrow A = \dfrac{E}{R+r}$

4-1- المنحنى الموافق لكل مقاومة ،

لدينا $I_0 = \dfrac{E}{R+r}$ ، من هذه العبارة كلما كانت المقاومة R أكبر كانت شدة التيار العظمى أقل وعلى هذا الأساس تكون :

المنحنى (1) $\longrightarrow R = 38\,\Omega$

المنحنى (2) $\longrightarrow R = 18\,\Omega$

المنحنى (3) $\longrightarrow R = 8\,\Omega$

3-2- العبارة الحرفية لـ A و B :

- $i = A(1 - e^{-Bt})$
- $\frac{di}{dt} = A(0 - (-Be^{-Bt})) = ABe^{-Bt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$ABe^{-Bt} + \frac{R+r}{L}A(1 - e^{-Bt}) = \frac{E}{L}$$

$$ABe^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} + \frac{A(R+r)}{L}e^{-Bt}$$

$$A e^{-Bt}\left(B - \frac{R+r}{L}\right)e^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن تكون :

- $B - \frac{R+r}{L} = 0 \rightarrow B = \frac{R+r}{L}$
- $\frac{A(R+r)}{\cancel{L}} = \frac{E}{\cancel{L}} \rightarrow A = \frac{E}{R+r}$

4-1- المنحنى الموافق لكل مقاومة ؟

لدينا $I_0 = \frac{E}{R+r}$ ، من هذه العبارة كلما كانت المقاومة R أكبر كانت شدة التيار العظمى أقل وعلى هذا الأساس تكون :

المنحنى (1) $\longrightarrow R = 38\,\Omega$

المنحنى (2) $\longrightarrow R = 18\,\Omega$

المنحنى (3) $\longrightarrow R = 8\,\Omega$

من أحد المنحنيات الثلاثة وليكن المنحنى (3) الذي يوافق $R = 8\,\Omega$ يكون $I_0 = 0{,}6\,A$ ومنه

$$r = \frac{6}{0{,}6} - 8 = 2\,\Omega$$

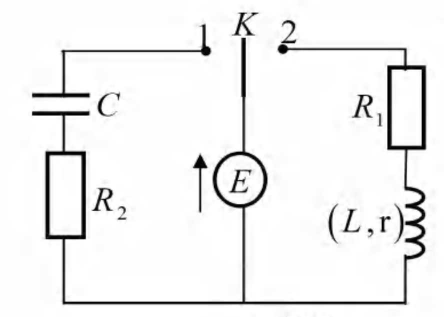
4-2- قيمة L :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = (R+r)\tau$$

من البيان : $\tau = 0{,}1\,A$ ومنه :

$$L = (8+2)\cdot 0{,}1 = 1\,H.$$

التمرين (17) : (التمرين : 076 في بنك التمارين على الموقع) (**)



الشكل1.

نحقق الدارة الكهربائية الممثلة في الشكل 1 باستعمال العناصر الكهربائية التالية :

- مولد مثالي للتوتر الكهربائي قوته المحركة الكهربائية E .
- ناقلان أوميان $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$.
- مكثفة فارغة سعتها C .
- وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها $r = 25\ \Omega$.
- بادلة k .

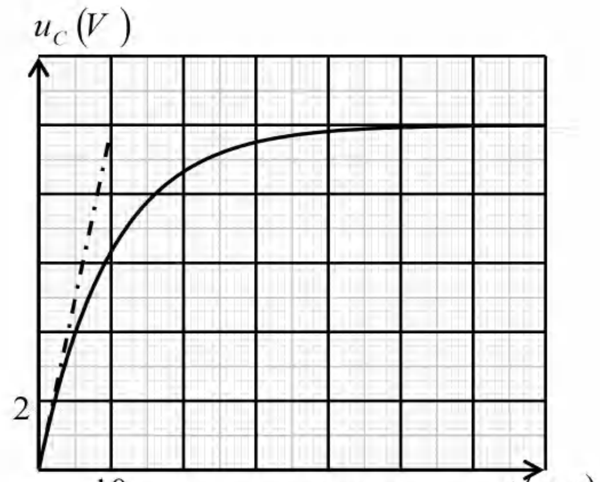
1. في اللحظة $t = 0$ نضع البادلة k في الوضع 1 .

1.1. اعد رسم دارة الشحن و مثل الجهة الاصطلاحية للتيار المار فيها و بين بسهم التوتر الكهربائي بين طرفي كل عنصر .

2.1. جِد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

3.1. بين أن $u_C = E\left(1 - e^{-t/R_2C}\right)$ حل للمعادلة التفاضلية .

2. بواسطة راسم اهتزاز مهبطي ذو ذاكرة بين أن كيفية توصيله بالدارة من أجل الحصول على البيان $u_C = f(t)$. الشكل2 .



الشكل2.

1.2. جِد ثابت الزمن τ للدارة و استنتج سعة المكثفة .

2.2. احسب الشحنة العظمى المخزنة في المكثفة .

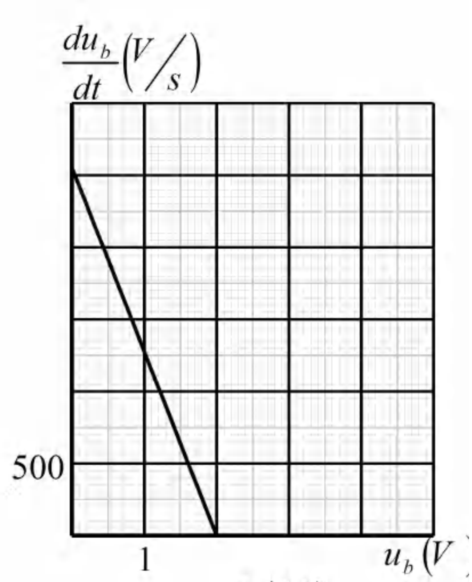
3.2. أعط تفسيرا مجهريا لظاهرة شحن مكثفة .

3. نضع البادلة في الوضع 2 في لحظة نعتبرها مبدأ للأزمنة . بين أن المعادلة التفاضلية للتوتر u_b بين طرفي الوشيعة تعطى بالعلاقة :

$$\frac{du_b}{dt} + \frac{1}{\tau}u_b = \frac{rE}{L}$$

حيث τ ثابت الزمن يطلب تعيين عبارته .

4- بواسطة برمجية مناسبة تمكنا من الحصول على البيان $\frac{du_b}{dt} = f(u_b)$ الشكل 3 .



الشكل3.

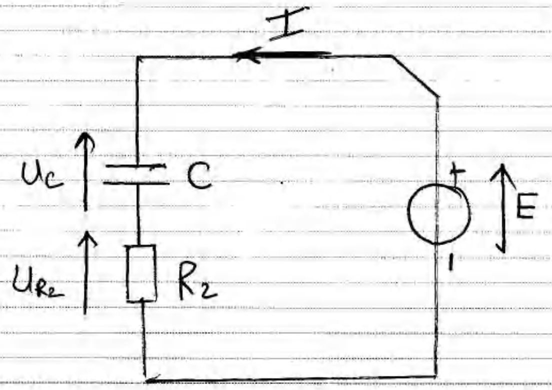
بتوظيف المعادلة التفاضلية لـ u_b و البيان $\frac{du_b}{dt} = f(u_b)$ جد قيمة كل من :

ثابت الزمن τ ، و استنتج ذاتية الوشيعة L .

5. أرسم كيفيا و في نفس المعلم البيانات الممثلة للتطورات $u_b(t)$ ، $u_R(t)$ و E .

الأجوبة :

1-1- دارة الشحن :



1-2- المعادلة التفاضلية التي يحققها $U_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$U_{R_2} + U_C = E$$

$$R_2 i + U_C = E$$

$$R_2 \frac{dq}{dt} + U_C = E$$

$$R_2 C \frac{du_C}{dt} + U_C = E \longrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R_2 C} U_C = \frac{E}{R_2 C}$$

1-3- التحقق من الحل :

$$U_C = E\left(1 - e^{-t/R_2C}\right)$$

$$\frac{du_C}{dt} = E\left(0 - \left(\frac{-1}{R_2 C} e^{-t/R_2C}\right)\right) = \frac{E}{R_2 C} e^{-t/R_2C}$$

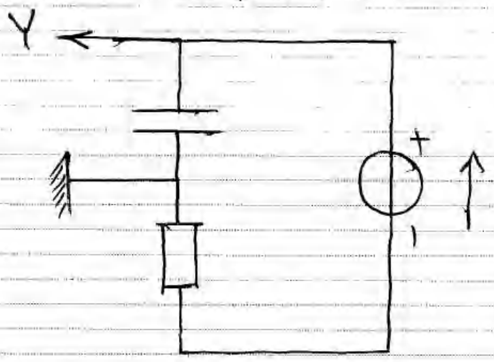
بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{R_2 C} e^{-t/R_2C} + \frac{1}{R_2 C} . E\left(1 - e^{-t/R_2C}\right) = \frac{E}{R_2 C}$$

$$\cancel{\frac{E}{R_2 C} e^{-t/R_2C}} + \frac{E}{R_2 C} - \cancel{\frac{E}{R_2 C} e^{-t/R_2C}} = \frac{E}{R_2} C \rightarrow \frac{E}{R_2 C} = \frac{E}{R_2 C}$$

أذن الحل المعطى هو فعلا حل للمعادلة التفاضلية .

2- كيفية وصل الدارة براسم الاهتزاز :



2-1- قيمة τ :

من بيان الشكل -2- : $\tau = 20\ ms$

- سعة المكثفة :

$$\tau = R_2 C \rightarrow C = \frac{\tau}{R_2} = \frac{10.10^{-3}}{100} = 10^{-4} F$$

2-2- الشحنة العظمى المخزنة في المكثفة :

$Q_{max} = C\, U_{cmax}$

من بيان الشكل-2 $U_{cmax} = 8V$ ومنه

$Q_{max} = 10^{-4} \times 8 = 8.10^{-4} C$

2-3- التفسير المجهري لظاهرة شحن المكثفة :

أثناء عملية الشحن يعمل المولد على نقل الالكترونات الحرة من اللبوس المتصل بالقطب الموجب للمولد إلى اللبوس الآخر و لأن العازل يمنع الالكترونات من المرور ، فيشحن اللبوس الأول ايجابا والثاني سلبا .

3- المعادلة التفاضلية بدلالة $U_b(t)$:

لدينا :

$$U_b = L\frac{di}{dt} + ri \quad ----(1)$$

حسب قانون جمع التوترات :

$$U_b + U_R = E$$

$$U_b + Ri = E \longrightarrow i = \frac{E - U_b}{R} \quad ---(2)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{dU_b}{dt} \quad ---(3)$$

بتعويض (2) ، (3) في (1) :

$$u_b = L\left(-\frac{1}{R}\frac{du_b}{dt}\right) + r\left(\frac{E-u_b}{R}\right)$$

$$u_b = -\frac{L}{R}\frac{du_b}{dt} + \frac{rE}{R} - \frac{r}{R}u_b$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_b}{dt} + u_b + \frac{r}{R}u_b = \frac{rE}{R}$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_b}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)u_b = \frac{Er}{R}$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_b}{dt} + \frac{R+r}{R}u_b = \frac{Er}{R}$$

نضرب الطرفين في $\frac{R}{L}$

$$\frac{du_b}{dt} + \frac{\cancel{R}}{L}\cdot\frac{R+r}{\cancel{R}}u_b = \frac{Er}{\cancel{R}}\cdot\frac{\cancel{R}}{L}$$

$$\boxed{\frac{du_b}{dt} + \frac{R+r}{L}u_b = \frac{Er}{L}}$$

4- قيمتي τ و L :

بيانيا : المنحنى $\frac{du_b}{dt} = f(u_b)$ هو مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$$\frac{du_b}{dt} = a\,u_b + b \quad \text{-----} \quad (1)$$

نظريا : واعتمادا على المعادلة التفاضلية السابقة :

$$\frac{du_b}{dt} = -\frac{R+r}{L}u_b + \frac{Er}{L}$$

$$\frac{du_b}{dt} = -\frac{1}{\tau}u_b + \frac{Er}{L} \quad \text{---} \quad (2)$$

بالمطابقة بين العلاقة البيانية (1) والنظرية (2) :

• $-\frac{1}{\tau} = a \longrightarrow \tau = -\frac{1}{a}$

• $\frac{Er}{L} = b \longrightarrow L = \frac{Er}{b} = \frac{U_{bmax}\cdot r}{b}$

من بيان الشكل-3 :

• $a = -\frac{5\times 500}{2\times 1} = -1250$

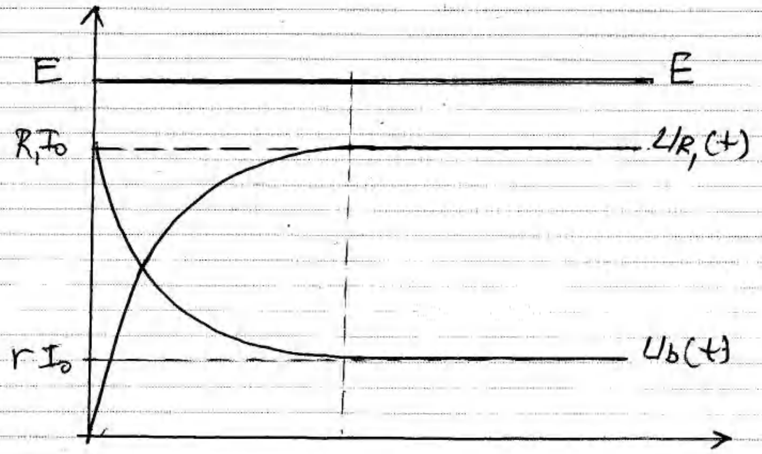
• $b = 5\times 500 = 2500$

إذن :

$\bullet\ \tau = -\frac{1}{-1250} = 8.10^{-4}s$

$\bullet\ L = \frac{10 \times 25}{2500} = 0,1\ H$

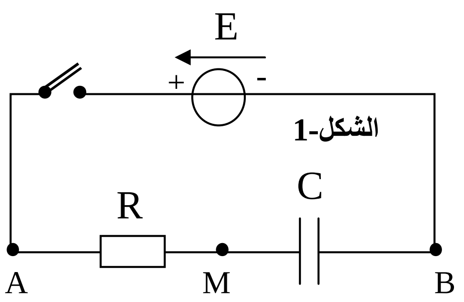
5- البيانات $u_b(t)$ ، $u_{R_1}(t)$ ، $E(t)$:



التمرين (18) : (التمرين : 031 في بنك التمارين على الموقع) (**)

I- نحقق الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) و التي تتألف من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 12\ V$ ، مكثفة سعتها $C = 120\ \mu F$ ، ناقل أومي مقاومته R .

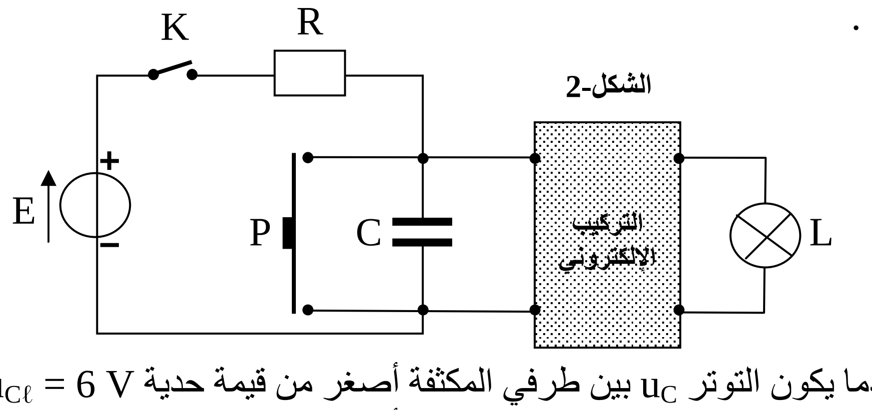
- نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$.



1- أوجد المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

2- تحقق من أن العبارة $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

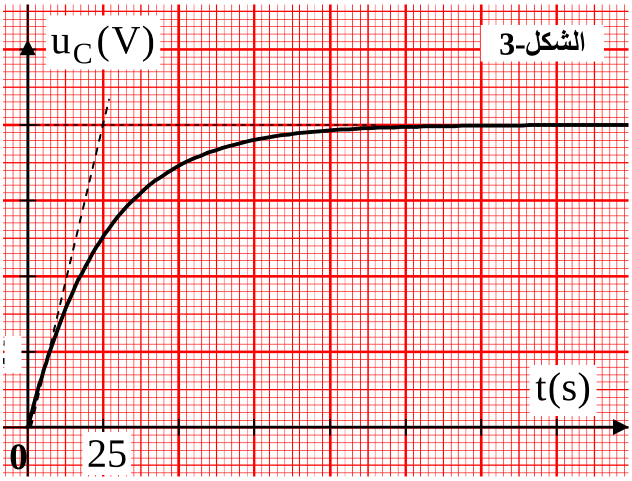
II- نصل مع ثنائي القطب RC السابق تركيب إلكتروني يتحكم في اشتعال مصباح ، فنحصل على (الشكل-2) الذي يمثل مخطط الدارة لميقاتية الإنارة (minuterie) .



- يشتعل المصباح عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أصغر من قيمة حدية $u_{C\ell} = 6\ V$.

- ينطفئ المصباح عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أكبر من قيمة حدية $u_{C\ell} = 6\ V$ أو يساويه .

- يتحكم في اشتعال المصباح بزر ضاغط P ، عندما نضغط عليه يدخل هذا الأخير في تلامس مع مربطي المكثفة و يسلك سلوك ناقل أومي مقاومته مهملة فتتفرغ المكثفة لحظيا (تصبح شحنتها معدومة بمجرد الضغط على الزر P) و عندما نرفع الضغط على الزرP في اللحظة $t = 0$ تصبح المكثفة موصولة مع المولد من جديد فتبدأ عملية شحن المكثفة إلى أن تشحن كليا ، منحنى (الشكل-3) يمثل تطور التوتر بين طرفي المكثفة بعد رفع الضغط على الزر P :



1- عين قيمة ثابت الزمن τ و أحسب مقاومة الناقل الأومي R .

2- المكثفة قبل الضغط على الزر P مشحونة تحت توتر قدره $E = 12V$ ، المصباح يكون منطفئ أم مشتعل . لماذا ؟

3- نضغط على الزر الضاغط P ، هل يشتعل المصباح ؟ برر إجابتك .

4- نرفع الضغط عن الزر P :

أ- أحسب مدة اشتعال المصباح قيمة t_ℓ .

ب- نريد الزيادة في مدة اشتعال المصباح . ما هو الحل الذي تقترحه برأيك مع الشرح .

الأجوبة :

I - 1 - المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$Ri + u_C = E \rightarrow R\frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R\frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

2- التحقق من الحل :

- $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$
- $\frac{du_C}{dt} = E(0 - (-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau})) = \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} \rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{RC}e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{RC}e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC}.E(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{E}{RC}e^{-t/\tau} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC}e^{-t/\tau} = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

II - 1- قيمة τ بيانيا :

يمثل τ لحظة تقاطع مماس المنحنى $u_C(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب $u_C = E$ و على هذا الأساس يكون : $\tau = 25\ s$.

- قيمة R :

$$\tau = RC \rightarrow R = \frac{\tau}{C}$$

$$R = \frac{25}{120\ .10^{-6}} = 2.08.\ 10^5\ \Omega$$

2- المصباح منطفئ لأن توتر المكثفة $u_C = 12\ V$ أكبر من التوتر الحدي $u_C = 6\ V$ ، علما أن المصباح يكون مشتعل عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أقل من التوتر الحدي $(u_C < u_\ell)$.

3- عندما نضغط على الزر P ينعدم التوتر بين طرفي المكثفة ، في هذه الحالة $u_C < u_\ell$ و عليه المصباح يشتعل .

4- أ- تطور حالة المصباح :

أ- حساب مدة اشتعال المصباح قيمة:

- مدة اشتعال المصباح t_ℓ هي لحظة بلوغ التوتر u_C بين طرفي المكثفة قيمته الحدية u_ℓ أي :

$$t = t_\ell \ \rightarrow\ u_C = u_\ell$$

بالتعويض في العبارة $u_C = E\,(1 - e^{-t/\tau})$ نجد :

$$u_\ell = E\,(1 - e^{-t_\ell/\tau}) \quad \rightarrow u_\ell = E - Ee^{-t_\ell/\tau} \quad \rightarrow Ee^{-t_\ell/\tau} = E - u_\ell$$

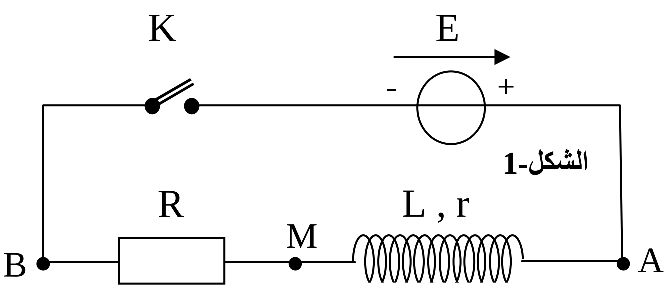
$$e^{-t_\ell/\tau} = \frac{E - u_\ell}{E} \quad \rightarrow -\frac{t_\ell}{\tau} = \ln(\frac{E - u_\ell}{E}) \quad \rightarrow \quad t_\ell = -\tau\,.\ln(1 - \frac{u_\ell}{E})$$

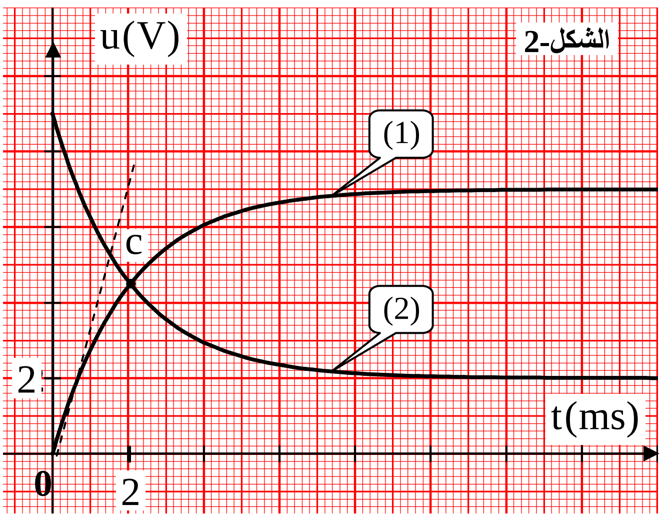
$$t_\ell = -25\,.\ln(1 - \frac{6}{12}) = 17.32\,s$$

5- الحل المقترح لزيادة مدة اشتعال المصباح :

لزيادة اشتعال المصباح نزيد من قيمة t_ℓ و هذا يتحقق بزيادة قيمة ثابت الزمن τ (عبارة t_ℓ السابقة) و لزيادة قيمة $\tau = RC$ نزيد من قيمة سعة المكثفة C أو مقاومة الناقل الأومي R أو كلاهما .

التمرين (19) : (التمرين : 030 في بنك التمارين على الموقع) (**)





الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) تتكون من العناصر التالية موصولة على التسلسل : مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 9\ V$ ، ناقل أومي مقاومته R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية $r = 10\ \Omega$.

في اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K ، بواسطة الـ ExAO يمكن الحصول على المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) و الممثلين لتغيرات التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي و التوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة .

1- ما هو الجهاز الذي يمكن وضعه بدلا من ExAO لتسجيل هذين المنحنيين البيانيين .

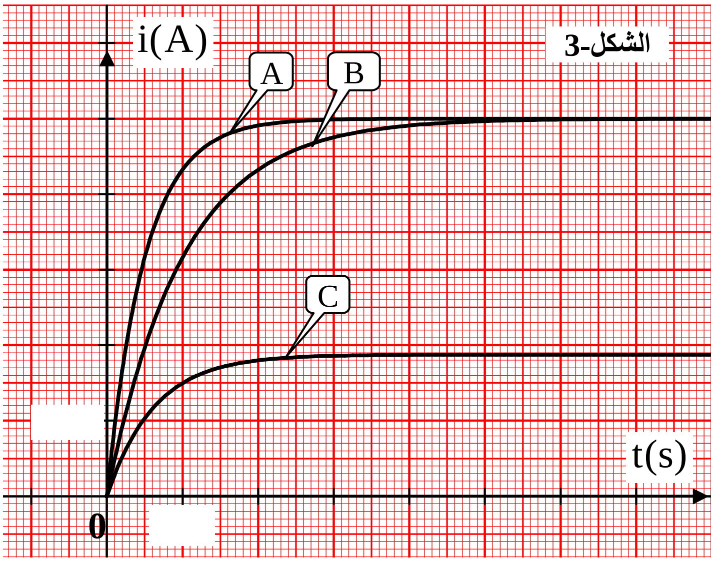
2- أي المنحنيين (1) ، (2) يمثل تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي و أيهما يمثل تغيرات التوتر u_b بين طرفي الوشيعة مع التعليل .

3- اعتمادا على المنحنيين البيانيين (1) ، (2) أوجد :

أ- مقاومة الناقل الأومي R .

ب- ذاتية الوشيعة من دون الاستعانة بقيمة ثابت الزمن τ .

جـ- ثابت الزمن τ (تأكد من صحة قيمة الذاتية L المحسوبة سابقا) .



3- المنحنيان (1) ، (2) يتقاطعان في النقطة c .

أ- أثبت أن ثابت الزمن يعبر عنه بالعلاقة :

$$\tau = \frac{t_c}{\ln(\frac{2R}{R-r})}$$

حيث t_c هي اللحظة الموافقة لنقطة التقاطع c ، و علما أن :

$$u_b = \frac{Er}{R+r} + \frac{ER}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ,$$

$$u_R = \frac{ER}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

ب- أحسب قيمة ثابت الزمن τ و تأكد من أنها توافق النتيجة المتحصل عليها سابقا .

4- نعيد التجربة ثلاث مرات من أجل قيم مختلفة لمقاومة الناقل الأومي R و قيم مختلفة لذاتية الوشيعة L مع تثبيت القوة المحركة الكهربائية E للمولد و المقاومة الداخلية r للوشيعة ، وفق الجدول التالي :

	التجربة (1)	التجربة (2)	التجربة (3)
L(mH)	15	10	20
R (Ω)	120	90	90

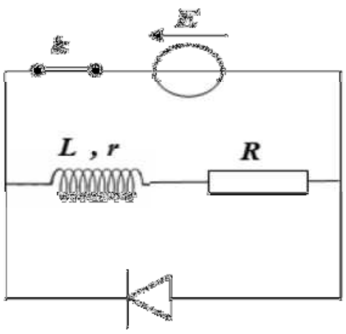
يبين (الشكل-3) المنحنيات البيانية (A) ، (B) ، (C) الممثلة لتطور شدة التيار الكهربائي i(t) بدلالة الزمن t بالنسبة للتجارب الثلاث من دون ترتيب :

- حدد دون حساب و مع التعليل المنحنى الموافق لكل تجربة .

التمرين (20) : (بكالوريا 2017 - رياضيات) (التمرين : 072 في بنك التمارين على الموقع) (**)

نحقق الدارة الكهربائية الموضحة في الشكل-2 باستعمال العناصر التالية:

- مولد مثالي للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 6\ V$.
- وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها الداخلية r.
- ناقل أومي مقاومته $R = 50\Omega$، قاطعة k وصمام ثنائي.



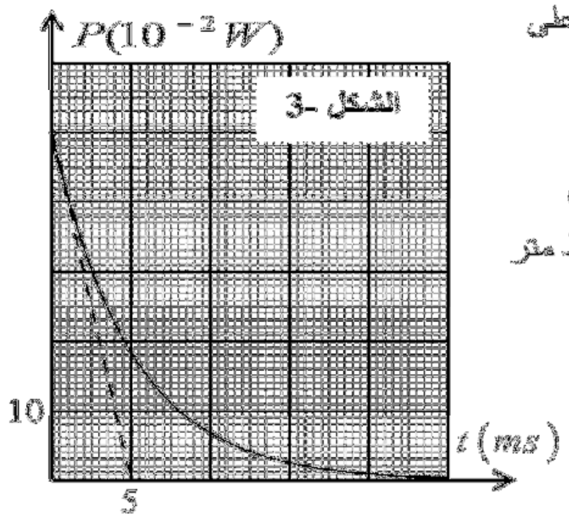
الشكل-2

نغلق القاطعة لمدة زمنية كافية لإقامة التيار.

1) عند اللحظة $t = 0$ نفتح القاطعة k. ما هي الظاهرة التي تحدث في الدارة؟

2) بتطبيق قانون جمع التوترات، جِدْ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر بين طرفي الناقل الأومي $u_R(t)$.

3) علما أن العبارة $u_R(t) = Ae^{-\frac{t}{\alpha}}$ (حيث A $(A \neq 0)$, α مقدارين ثابتين) حل للمعادلة التفاضلية حدّد عبارة كلا من A و α بدلالة المقادير المميزة للدارة ثم استنتج عبارة شدة التيار اللحظي $i(t)$.



4) اكتب عبارة الاستطاعة اللحظية $P(t)$ للتحويل الطاقوي الحادث على مستوى الناقل الأومي R بدلالة R، I_0(شدة التيار العظمى)، τ(ثابت الزمن للدارة) والزمن t.

5) سمحت المتابعة الزمنية لتطور الاستطاعة اللحظية $P(t)$ للتحويل الطاقوي الحادث على مستوى الناقل الأومي R بواسطة لاقط الواط متر برسم المنحنى الممثل في الشكل-3.

أ) برهن أنّ المماس للمنحنى البياني عند اللحظة $t=0$ يقطع محور الأزمنة في النقطة ذات الفاصلة $t'=\frac{\tau}{2}$ ثم استنتج قيمة ثابت الزمن τ للدارة.

ب) اعتمادا على بيان الشكل-3، احسب الشدة العظمى للتيار المار في الدارة.

ج) استنتج قيمة كل من مقاومة الوشيعة r وذاتيتها L .

6) أثبت أن زمن تناقص الاستطاعة الأعظمية المصروفة في الناقل الأومي R إلى النصف هو: $t_{1/2}=\frac{\tau}{2}\ln 2$ ، ثم أوجد قيمته.

تذكير: $P(t)=RI^2(t)$

الأجوبة :

1- الظاهرة التي تحدث في الدارة هي ظاهرة التحريض الذاتي .

2- المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_R(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b+u_R=0$$

$$L\frac{di}{dt}+ri+Ri=0$$

$$L\frac{di}{dt}+(R+r)i=0$$

لدينا :

$$u_R=Ri \longrightarrow i=\frac{u_R}{R}$$

$$\longrightarrow \frac{di}{dt}=\frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$$

ومنه يصبح :

$$\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt}+\frac{R+r}{R}u_R=0$$

بضرب الطرفين في $\frac{R}{L}$:

$$\frac{du_R}{dt}+\frac{\cancel{R}}{L}\frac{R+r}{\cancel{R}}u_R=0$$

$$\frac{du_R}{dt}+\frac{R+r}{L}u_R=0$$

3- عبارة A و B :

- $u_R = A e^{-t/\alpha}$
- $\frac{du_R}{dt} = -\frac{A}{\alpha} e^{-t/\alpha}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{A}{\alpha} e^{-t/\alpha} + \frac{R+r}{L}\left(A e^{-t/\alpha}\right) = 0$$

$$-\frac{A}{\alpha} e^{-t/A} + \frac{(R+r)A}{L} e^{-t/\alpha} = 0$$

$$A e^{-t/\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{(R+r)A}{L}\right) = 0$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$-\frac{1}{\alpha} + \frac{R+r}{L} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{L}{R+r}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow u_R = u_{Rmax} = R I_{max}$$

بالتعويض في العبارة $u_R(t)$:

$$R I_{max} = A e^{-\frac{0}{\alpha}} \rightarrow A = R I_{max} = \frac{RE}{R+r}$$

- عبارة شدة التيار اللحظي :

$$u_R = A e^{-t/\alpha}$$

وجدنا سابقا : $A = R I_{max}$ ، $\alpha = \frac{L}{R+r}$ ومنه :

$$u_R = R I_{max} e^{-\frac{R+r}{L}t} \quad \text{------} \ (1)$$

ولدينا :

$$u_R(t) = R i(t) \rightarrow i(t) = \frac{u_R(t)}{R} \quad \text{------} \ (2)$$

بتعويض (1) في (2) :

$$i(t) = \frac{R I_{max}}{R} e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

اذن :

$$i(t) = I_{max} e^{-\frac{R+r}{L}t} = I_{max} e^{-t/\tau}$$

حيث : $\tau = \frac{R+r}{L}$

4- عبارة الاستطاعة اللحظية للتحويل الطاقوي بمفعول جول $P(t)$:

$$P = U \times i = Ri \times i = Ri^2$$

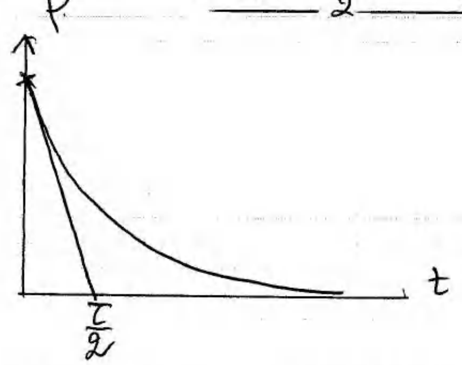
لدينا سابقا : $i = I_{max} e^{-t/\tau}$ ومنه :

$$P = R I_{max}^2 \left(e^{-t/\tau}\right)^2$$

$$P = R I_{max} e^{-2t/\tau} = P_{max} e^{-2t/\tau}$$

حيث : $P_{max} = R I_{max}$

5- اثبات أن مماس المنحنى عند اللحظة $t=0$ يقطع محور الأزمنة في : $t = \frac{\tau}{2}$



نكتب معادلة مماس المنحنى $P(t)$ عند اللحظة $t=0$ والتي من الشكل :

$$P = at + b$$

- $a = \left(\frac{dP}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\left(P_{max} e^{-2t/\tau}\right)}{dt}\right)_{t=0} = \left(P_{max} \frac{d e^{-2t/\tau}}{dt}\right)_{t=0}$

$$= \left(P_{max} \cdot -\frac{2}{\tau} e^{-2t/\tau}\right)_{t=0} = -\frac{2P_{max}}{\tau}$$

- $b = (P)_{t=0} = \left(P_{max} e^{-2t/\tau}\right)_{t=0} = P_{max}$

ومنه معادلة المماس تكون كما يلي :

$$P = -\frac{2P_{max}}{\tau} t + P_{max}$$

عند تقاطع المماس مع محور الأزمنة يكون $P=0$ ومنه

$$0 = -\frac{2P_{max}}{\tau}t' + P_{max}$$

$$\frac{2P_{max}}{\tau}t' = P_{max}$$

$$\frac{2}{\tau}t' = 1 \rightarrow t = \frac{\tau}{2}$$

- قيمة τ :

من البيان :

$$\frac{\tau}{2} = 5ms \rightarrow \tau = 10ms$$

ب- شدة التيار العظمى :

من البيان : $P_{max} = 50.10^{-2}W$ ولدينا :

$$P_{max} = RI_{max}^2 \rightarrow I_{max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}}$$

$$I_{max} = \sqrt{\frac{0,5}{50}} = 0,1A$$

جـ- قيمة r :

$$I_{max} = \frac{E}{R+r} \rightarrow R+r = \frac{E}{I_{max}}$$

$$r = \frac{E}{I_{max}} - R = \frac{6}{0,1} - 50 = 10\Omega$$

- قيمة L :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = \tau(R+r)$$

$$L = 10\times10^{-3}(50+10) = 0,6H$$

6- اثبات $t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln 2$:

$$P = P_{max}e^{-2t/\tau}$$

حسب تعريف $t_{1/2}$:

$$t = t_{1/2} \rightarrow P = \frac{P_{max}}{2}$$

بالتعويض :

$$\frac{\cancel{P_{max}}}{2} = \cancel{P_{max}}e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{2t_{1/2}}{\tau} \rightarrow -\ln 2 = -\frac{2t_{1/2}}{\tau}$$

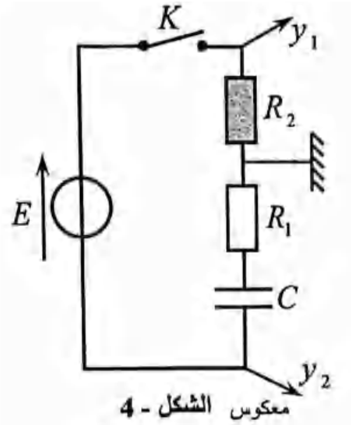
اذن :

$$t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln 2 .$$

قيمة $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \frac{10.10^{-3}}{2}\ln 2 = 3,46.10^{-3}s = 3,46ms$$

التمرين (21) : (بكالوريا 2016 - علوم تجريبية) (التمرين : 033 في بنك التمارين على الموقع) (***)

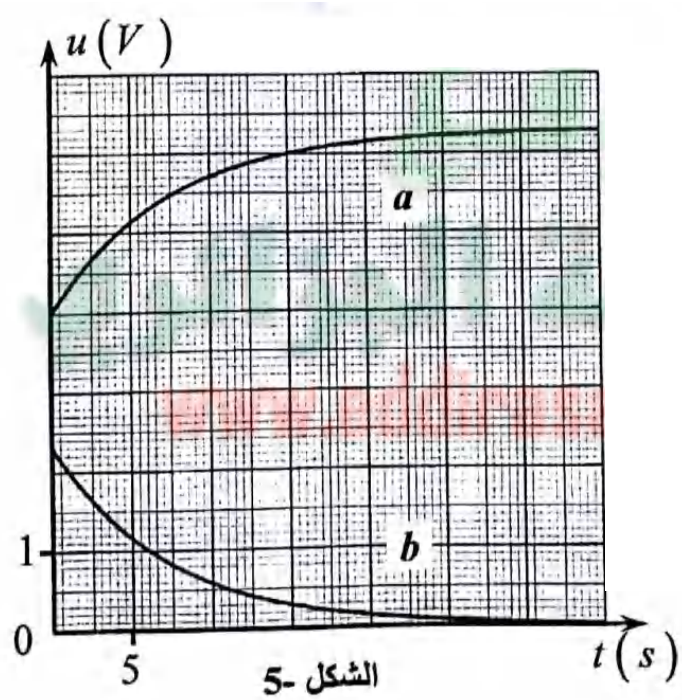


الشكل - 4

نركب الدارة الكهربائية الموضحة بالشكل-4 و المؤلفة من :
- مولد كهربائي للتوتر الثابت E .
- مكثفة غير مشحونة سعتها C .
- ناقلين أوميين $R_1 = 1\ k\Omega$ و R_2 غير معلومة .
- قاطعة K .

نوصل الدارة الكهربائية براسم اهتزاز مهبطي ذي ذاكرة كما موضح على الشكل-4 ثم نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0$ ، فنشاهد على الشاشة المنحنيين البيانيين (a) و (b) (الشكل-5) .

1- ارفق كل منحنى بالمدخل الموافق له مع التبرير .
2- اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة $i(t)$ للتيار الكهربائي في الدارة .
3- أوجد عبارة الشدة I_0 للتيار الأعظمي المار في الدارة .
4- استنتج عند اللحظة $t = 0$ عبارة التوتر بين طرفي الناقل الأومي R_2 بدلالة E ، R_1 و R_2 .
5- اعتمادا على البيانين ، استنتج قيمة كل من E ، I_0 ، R_2 و C .



الشكل -5

الأجوبة :

1- المنحنى الموافق لكل مدخل :
- في المدخل Y_1 يظهر التوتر $u_1 = u_{R2}$ بين طرفي الناقل الأومي R_2 .
- في المدخل Y_2 يظهر التوتر $|u_2| = u_{R1} + u_C$ بين طرفي الناقل الأومي R_1 و المكثفة معا .
- من خصائص ثنائي القطب RC .

$t = \infty \rightarrow\ i = 0$
$\rightarrow\ u_{R1} = R_1 i = 0$
$\rightarrow\ u_{R2} = R_2 i = 0$
$\rightarrow\ u_C = E$

و عليه :

$t = 0 \rightarrow u_1 = u_{R2} = 0$

$t = 0 \rightarrow u_2 = u_{R1} + u_C = E \neq 0$

إذن : المنحنى $b \leftarrow Y_1$

المنحنى $a \leftarrow Y_2$

2- المعادلة النفاضلية التي تحققها $i(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R2} + u_{R1} + u_C = E$$

$$R_2.i + R_1.i + \frac{q}{C} = E \rightarrow (R_1 + R_2)i + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$(R_1 + R_2)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

و حيث أن $\frac{dq}{dt} = i$ يصبح :

$$(R_1 + R_2)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}i = 0$$

3- عبارة I_0 :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R2} + u_{R1} + u_C = E \rightarrow R_2 i + R_1 i + u_C = E$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ ، $u_C = 0$ و منه :

$$R_2 I_0 + R_1 I_0 + 0 = E$$

$$(R_1 + R_2)I_0 = E \rightarrow I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

4- عبارة u_{R2} عند $t = 0$ بدلالة E ، R_1 ، R_2 :

$$u_{R2} = R_2.i$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ و منه :

$$u_{R2(t=0)} = R_2.I_0$$

و حيث أن $I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$ يصبح :

$$u_{R2(t=0)} = \frac{E.R_2}{R_1 + R_2}$$

5- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_1 + |u_2|$$

اعتمادا على المنحنى (a) الموافق للتوتر u_b و المنحنى (b) الموافق للتوتر u_1 :

- $t = 0 \rightarrow \begin{cases} u_1 = 2.3 \text{ V} \\ u_2 = 4 \text{ v} \end{cases} \rightarrow E = 2.3 + 4 = 6.3 \text{ V}$

أو :

▪ $t = \infty \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0\ V \\ u_2 = 6.3\ v \end{cases} \rightarrow E = 0 + 6.3 = 6.3\ V$

- قيمة I_0 :

$u_2 = u_{R1} + u_C \rightarrow u_2 = R_1.i + u_C$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ ، $u_C = 0$ و منه :

$$u_{2(t=0)} = R_1.I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R2(t=0)}}{R_1}$$

من المنحنى (a) الموفق لـ u_2 لدينا : $u_{2(t=0)} = 4\ V$ و منه :

$$I_0 = \frac{4}{10^3} \rightarrow I_0 = 4 \,.\, 10^{-3}\ A$$

قيمة R_2 :

طريقة (1) :

$u_{R2} = R_2.i$

عند اللحظة $t = 0$ أين $i = I_0$ يكون :

$$u_{R2(t=0)} = R_2.I_0 \rightarrow R_2 = \frac{u_{R2(t=0)}}{I_0}$$

من المنحنى (b) الموافق لـ u_1 لدينا : $u_{R2(t=0)} = 2.3\ V$ و منه :

$$R_2 = \frac{2.3}{4 \,.\, 10^{-3}} = 575\,\Omega$$

طريقة (2) :

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} \rightarrow R_1 + R_2 = \frac{E}{I_0} \rightarrow R_2 = \frac{E}{I_0} - R_1 \rightarrow R_2 = \frac{6.3}{4 \,.\, 10^{-3}} - 10^3 = 575\,\Omega$$

قيمة C :

نحسب أولا قيمة τ :

من المنحنى (b) الموافق لـ u_1 :

$t = \tau \rightarrow u_1 = 0{,}37\ u_{10} = 0.37 \,.\, 2{,}3 = 0.851\ V$

بالإسقاط مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار :

$\tau = 1{,}5 \,.\, 5 = 7.5\ s$

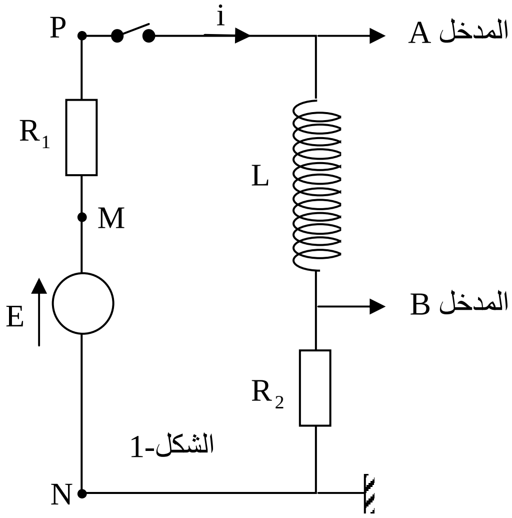
و لدينا :

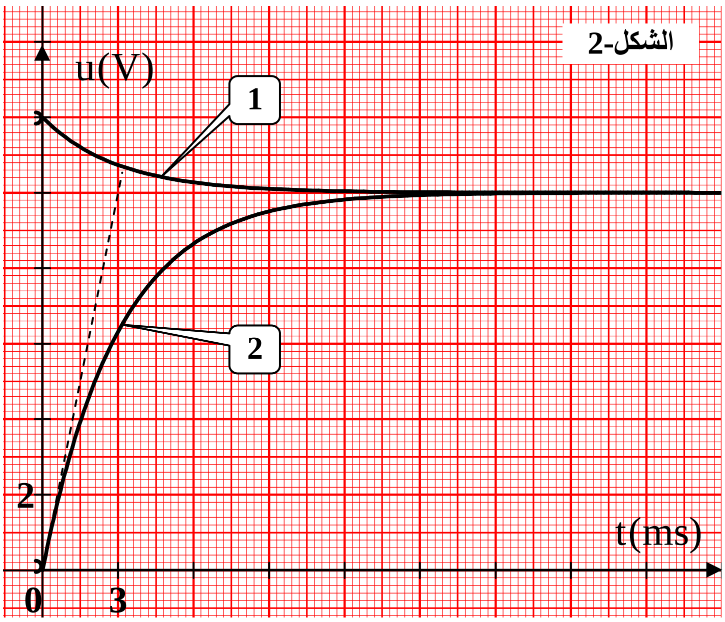
$$\tau = (R_1 + R_2)\,C \rightarrow C = \frac{\tau}{R_1 + R_2} \rightarrow C = \frac{7{,}5}{10^3 + 575} \approx 4{,}76 \,.\, 10^{-3}\ F$$

التمرين (22) : (التمرين : 034 في بنك التمارين على الموقع) (***)

الدارة الكهربائية الممثلة في (الشكل-1) تتكون من :
- مولد كهربائي للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E .
- وشيعة تحريضية ذاتيتها L و مقاومتها مهملة .
- قاطعة K .
- ناقلين أوميين مقاومتهما R_1 مجهولة و $R_2 = 40\ \Omega$.
- راسم اهتزاز ذو ذاكرة .

نوصل الدارة براسم الاهتزاز كما مبين في (الشكل-1) ثم نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$ فنشاهد على الشاشة المنحنيين (1) و (2) كما في (الشكل-2) .





1- إعتمادا على (الشكل-2) ، عين المنحنى الذي يمثل $u_{PN}(t)$ و المنحنى الذي يمثل $u_{R2}(t)$ مع التعليل .

2- اعتمادا على المنحنيين (1) ، (2) أوجد :

أ- القوة المحركة الكهربائية E للمولد .

ب- شدة التيار الأعظمي I_0 المار بالدارة .

3- أوجد المعادلة التفاضلية التي تعطي شدة التيار $i(t)$.

4- حل المعادلة التفاضلية السابقة هو $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ أوجد عبارتي الثابتين I_0 و τ بدلالة الثوابت المميزة

5- أوجد قيمة المقاومة R_1 و ذاتية الوشيعة L .

الأجوبة :

1- المنحنى الموافق لكل توتر :

▪ التوتر u_{PN} :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_{MB} + U_{PN}$$

$$u_{PN} = E + u_{MB} \rightarrow u_{PN} = E + u_{R1}$$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

$$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{PN} = E \neq 0$$

و هذا يتفق مع المنحنى C_1 .

التوتر u_{R2} :

$$u_{R2} = R_2.i$$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

$$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{R2} = 0$$

و هذا يتفق مع المنحنى C_2 .

2-أ- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$E = u_{R1} + u_{PN}$

$u_{PN} = E + u_{R1} \rightarrow u_{PN} = E - R.i_{(t)}$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{PN(t=0)} = E$

من المنحنى (C_1) الموافق لـ $u_{PN}(t)$:

$t = 0 \rightarrow u_{PN} = 6 . 2 = 12\ V \rightarrow E = 12\ V$

ب- قيمة I_0 :

$u_{R2} = R_2.i$

في النظام الدائم نكتب :

$$u_{R2(\infty)} = R_2.I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R2(\infty)}}{R_2}$$

من المنحنى (C_2) الموافق لـ $u_{R2}(t)$:

$u_{R2(\infty)} = 5 . 2 = 10\ V$

إذن :

$$I_0 = \frac{10}{40} = 0.25\ A$$

3- المعادلة التفاضلية بدلالة i(t) :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R1} + u_b + u_{R2} = E$$

$$R_1 i + L\frac{di}{dt} + R_2 i = E$$

$$L\frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)\, i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{L} i = \frac{E}{L}$$

4- عبارتي I_0 ، τ :

- $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$
- $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{R_1 + R_2}{L} I_0\,(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{R_1 + R_2}{L} I_0 - \frac{R_1 + R_2}{L} I_0\, e^{-t/\tau} = \frac{E}{L}$$

$$I_0\, e^{-t/\tau}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{R_1 + R_2}{L}\right) + \frac{(R_1 + R_2) I_0}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي تتحقق المساواة :

- $\frac{1}{\tau} - \frac{R_1 + R_2}{L} = 0 \rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{L} \rightarrow \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$
- $\frac{(R_1 + R_2)I_0}{L} = \frac{E}{L} \rightarrow I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$

5- قيمة R_1 :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{R1} + u_{PN} = E \rightarrow u_{PN} = E - u_{R1} \rightarrow u_{PN} = E - R_1 i$

في النظام الدائم $(t = \infty)$ أين يكون $i = I_0$ نكتب :

$u_{PN(\infty)} = E - R_1 I_0$

$R_1 I_0 = E - u_{PN(\infty)} \rightarrow R_1 = \frac{E - u_{PN(\infty)}}{I_0} \rightarrow R_1 = \frac{12 - 10}{0,25} = 8\,\Omega$

قيمة L :

من المنحنى (2) : $\tau = 3$ ms .

و لدينا سابقا :

$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} \rightarrow L = \tau\,(R_1 + R_2) \rightarrow L = 3 \,.\, 10^{-3}\,(8 + 40) = 1,44$ H

** الأستاذ : فرقاني فارس **
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم
الخروب - قسنطينة
Fares_Fergani@yahoo.Fr