التمرين 1:

لتكن (E) مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حيث : $11x+3y=65$

[1] ♦ عيّن الثنائية $(x_0;y_0)$ من (E) والتي تحقق $2x_0^2-3y_0=11$

[2] ♦ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $11x+3y=65$

[3] ♦ عيّن الثنائيات $(x;y)$ من (E) حيث $x>-5$ و $y>-5$

التمرين 2:

♠ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $8x-6y=22$ ......(1)

[1] ♦ بيّن أن المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

[2] ♦ عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) والذي تحقق $x_0-y_0=3$

[2] ♦ حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (1)

♠ نعتبر a و b عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حلا للمعادلة (1)

نضع $pgcd(a;b)=d$

[1] ♦ عيّن القيم الممكنة لـ d

[2] ♦ عيّن الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق المعادلة (1) و $pgcd(a;b)=11$.

التمرين 3:

[1] ♦ حلل العدد 320 إلى جداء عوامله الأولية ثم عيّن قواسمه الطبيعية .

[2] ♦ x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما، أثبت أن xy و $(x+y)$ أوليان فيما بينهما .

[3] ♦ a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث : $7(a+b)^2=320m$ حيث $m=PPCM(a;b)$. عيّن القيم الممكنة للعددين a و b

التمرين 4:

[1] ♦ حل المعادلة : $6x+2y-18=0$ ......(1) ذات المجهولين الصحيحين x و y

[2] ♦ ماهي كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة السابقة حيث x و y طبيعيان معا؟

[3] ♦ نفرض الأن أن y طبيعي ، ولا يهمنا x.

بيّن أن : $2011^y-1\equiv 0[7]$

[3] ♦ α,β,γ أعداد طبيعية غير معدومة ، حيث يكتب y في النظام ذي الأساس 5 هكذا: $4\alpha 0$ وفي النظام ذي الأساس 4 هكذا: $1\alpha\beta\alpha$

أكتب كل القيم الممكنة لـ y في النظام العشري .

التمرين 5:

♠ نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث :

$11x-5y=2$

[1] ♦ أ) ♠ أثبت أنه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y\equiv 4[7]$

ب) ♠ استنتج حلول المعادلة (E)

[2] ♦ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نضع :

$a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ) ♠ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك للعددين a و b

ب) ♠ عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=2$

ج) ♠ استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليين فيما بينها .

[2] أ) ♠ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 10

ب) ♠ استنتج رقم أحاد العدد 2^{2016}

ج) ♠ عيّن كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول المعادلة (E) وتحقق : $2^{y-2x}\equiv 8[10]$

التمرين 6:

♠ نعتبر المعادلة $3x-4y+5=0$.....(1) حيث x و y مجهولان طبيعيان

[1] ♦ عيّن تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 7^n على 5 .

[2] ♦ بيّن أنه مهما كان n من N فإن : $(7^{2010}+2010+1)$ يقبل القسمة على 5.

[3] ♦ من أجل $y=2$، استنتج حلا خاصا لـ (1)، ثم جد جميع حلولها $(x;y)$ في N^2

[4] ♦ إذا كان $(x;y)$ حلا لـ (1)، ماهو باقي قسمة العدد 7^{x+3} على 5

التمرين 7:

♠ تذكير : من أجل كل عددين a و b نقول أن a يوافق b بترديد 7 ونكتب $a\equiv b[7]$ إذا وجد عدد صحيح k حيث $a=b+7k$

[1] ♦ سؤال من الدرس :

أ) ♠ لتكن a، b، c و d أعداد صحيحة . أثبت أنه إذا كان : $a\equiv b[7]$ و $c\equiv d[7]$ فإن $ac\equiv bd[7]$

ب) ♠ استنتج أنه من أجل كل عددين صحيحين غير معدومين a و b :

إذا $a\equiv b[7]$ فإنه من أجل عدد طبيعي n: $a^n\equiv b^n[7]$

[2] ♦ من أجل $a=2$ ثم من أجل $a=3$ أوجد عدد طبيعي n غير معدوم يحقق : $a^n\equiv 1[7]$

أ) ♠ ليكن a عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 7 أثبت أن $a^6\equiv 1[7]$

ب) ♠ حدد أصغر عدد طبيعي غير معدوم k يحقق $a^k\equiv 1[7]$ من أجل $2\leq a\leq 6$

ج) ♠ من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$A_n=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$ بيّن أن : $A_{2011}\equiv 6[7]$

التمرين 8:

[1] ♦ أ) ♠ عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة (E): $8x - 5y = 3$.

ب) ♠ ليكن m عدد صحيح بحيث يوجد عددان صحيحان $(p;q)$ يحققان : $m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$

- بيّن أن الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E) واستنتج أن $m \equiv 9[40]$

جـ) ♠ عيّن أصغر عدد صحيح m أكبر من 200

[2] ♦ ليكن n عدد طبيعي

أ) ♠ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $2^{3k} \equiv 1[7]$

ب) ♠ ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2016} على 7.

[3] ♦ ليكن a و b عددان طبيعيان كلاهما أصغر من 9 مع $a \neq 0$

نعتبر العدد N حيث $N = a \times 10^3 + b$

نذكر أن N يكتب في النظام العشري : $N = \overline{a00b}^{10}$

[4] ♦ نريد تعيين الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

- تحقق أن $10^3 \equiv -1[7]$ ثم استنتج كل الأعداد المطلوبة N

التمرين 9:

[1] ♦ جد جميع الثنائيات المرتبة $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $x^3 - y^3 = 631$.

[2] ♦ أ) ♠ ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد 111 على 7

ب) ♠ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 10^n على 7

[3] ♦ α عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كما يلي :

$\alpha = \overline{999888777666555444333222111}$

أ) ♠ بيّن أن α يكتب بدلالة العدد 111.

ب) ♠ ماهو باقي قسمة العدد α على 7

التمرين 10:

[1] ♦ أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي قسمة العدد : 3^n على 10 .

[2] ♦ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$2013^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0[10]$

[3] ♦ عيّن الأعداد الطبيعية n حيث : $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$ و $10 < n \leq 25$

[4] ♦ ليكن العدد A مكتوب $\overline{xx02102}$ في النظام ذي الأساس 3 ومكتوب $\overline{y67y}$ في النظام ذي الأساس 9

أ) ♠ عيّن x و y

ب) ♠ أكتب A في النظام العشري

جـ) ♠ أكتب A في النظام ذي الأساس 7

التمرين 11:

(U_n) متتالية معرفة على بـ: $U_0 = 0$، $U_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$

[1] ♦ أحسب U_2 و U_3.

[2] ♦ برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_{n+1} = 4U_n + 1$

♦ تحقق أن : U_n عدد طبيعي ، ثم استنتج أن : U_n و U_{n+1} أوليان فيما بينهما .

[3] ♦ (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

أ) ♠ بيّن أن المتتالية (V_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .

ب) ♠ أكتب V_n ثم U_n بدلالة n.

[4] ♦ أ) ♠ أحسب $PGCD((4^6 - 1); (4^5 - 1))$

ب) ♠ عين من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD((4^{n+1} - 1); (4^n - 1))$

[5] ♦ أ) ♠ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 7.

ب) ♠ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{3n}$

جـ) ♠ عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n + 8n$ يقبل القسمة على 7

التمرين 12:

α و β عددان طبيعيان اوليان في ما بينهما .

[1] ♦ عيّن α و β علما أن: $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ و $\alpha > \beta$

[2] ♦ لتكن المتتالية الهندسية (U_n) التي حدها الأول U_0 وأساسها q حيث U_0 و q عددان أوليان فيما بينهما و $U_0 < q$

أ) ♠ أوجد U_0 و q حيث يكون : $35U_0^2 + 19U_1 - U_0q^3 = 0$

نفرض في مايلي : $U_0 = 6$ و $q = 7$

[3] ♦ أ) ♠ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$

ب) ♠ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية العدد 7^n على 5. استنتج قيم n حيث : $S_n \equiv 0[30]$

التمرين 13:

في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ نعتبر المعادلة $6x - 9y + 15 = 0$ ......(1)

[1] ♦ هل تقبل (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$ ؟

[2] ♦ لاحظ أن : $-5 = -2 - 3 = -5$، واستنتج حلا خاصا لـ (1)

[3] ♦ حل (1) في $\mathbb{Z}^2$.

[4] ♦ لتكن $(x;y)$ حلول (1) الطبيعية ، ونضع : $L = 1432^x - 2 \times 2011^{3y}$

♠ ادرس باقي قسمة كل من 2^n، 4^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n، ثم بيّن أن $L \equiv 0[7]$

التمرين 14:

[1] ♦ تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ و استنتج أن $5^{2016} \equiv 1[7]$

[2] ♦ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = 1+5+5^2+5^2+....5^n$

أ) ♠ بين أنه من أجل n من $\mathbb{N}$ فإن : $4S_n = 5^{n+1} - 1$

استنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما .

ب) ♠ ليكن العدد الصحيح a، بيّن أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا و فقط كان $S_n \equiv 2a[7]$

ج) ♠ بيّن أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7

د) ♠ عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n

[3] ♦ ليكن العدد الطبيعي n عدد طبيعي غير معدوم ،نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة

$5^n x + S_n y = 1$ .... (E) تحقق أن $(5;-4)$ حل للمعادلة (E)

ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

التمرين 15:

$[I]$ ♦ نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : (E) ... $2019x - 1440y = 3177$

[1] ♦ أ) ♠ بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب) ♠ بيّن أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $673x - 480y = 1059$

[2] ♦ أ) ♠ جد حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث

$x_0^2 + 480y_0 = 969$ مع $x_0 \geq 0$

ب) ♠ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E)

[3] ♦ عين قيم العدد الصحيح λ التي تحقق الجملة (S) حيث :

$$(S)...\begin{cases} \lambda \equiv -59[673] \\ \lambda \equiv 1000[480] \end{cases}$$

التمرين 16:

♦ نعتبر المعادلة $(1)...\ 4x - 13y = 7$ حيث x و y عددان صحيحان

[1] ♦ عيّن الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0 - y_0 = 4$

[2] ♦ حل المعادلة (1)

[3] ♦ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x و y.

أ) ♠ ماهي القيم الممكنة للعدد d إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1)

ب) ♠ عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) بحيث يكون $d = 7$.

ج) ♠ عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1)

التي تحقق $\begin{cases} d = 7 \\ x + y < 400 \end{cases}$

التمرين 17:

[1] ♦ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد : 5^n على 7 .

[2] ♦ عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد

$19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1$ قابلا للقسمة على العدد 7.

[3] ♦ N عدد طبيعي يكتب $\overline{1xx0}$ في النظام ذي الأساس 5 حيث x عدد طبيعي .

أ) ♠ عيّن قيم x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35.

ب) ♠ أكتب N في النظام العشري

التمرين 18:

[1] ♦ عيّن الأعداد الصحيحة x التي تحقق : $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$

[2] ♦ أ) ♠ أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9 ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي أن: $7^{2n} \equiv 4^n[9]$

ب) ♠ استنتج تبعا لقيم n باقي القسمة الاقليدية لـ 4^n على 9

[3] ♦ أ) ♠ ماهو باقي قسمة العدد $5^{2017} + 25^{2018}$ على 9

ب) ♠ عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد : $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعف للعدد 9

[4] ♦ عين الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث : $7^x + 4^x \equiv 2[9]$

التمرين 19:

♠ n عدد طبيعي وليكن العدد $\alpha(n)$ حيث : $\alpha(n) = 9^n + 13^n$

[1] ♦ أوجد بواقي قسمة العددين 9^n و 13^n على 7. ثم استنتج بواقي قسمة العددين $\alpha(2008)$ و $\alpha(1429)$ على 7

[2] ♦ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $219x - 146y = 73$

[3] ♦ حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية $\begin{cases} x \equiv 0[3] \\ x \equiv 1[2] \end{cases}$

[4] ♦ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\alpha(n)$ مضاعف لـ 7

التمرين 20:

[1] ♦ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة العدد 2^n على 5

[2] ♦ عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5.

[3] ♦ بين أن العدد 131 أولي

[4] ♦ عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$

حيث $d = PGCD(a,b)$ و $m = PPCM(a,b)$

[5] ♦ عين قيم n بحيث يكون : $7 < n < 15$ $\alpha(n)$ ثم استنتج الثنائيات (a,b).