

الهندسة في الفضاء

التمرين 01 :

في الفضاء المنسوب الي معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة $A(1; 2; -3)$ والشعاع \vec{r} .

- 1- اكتب معادلة المستوى (p) الذي يشمل A ويعامد \vec{i} .
- 2- تحقق أن النقطة $C(-1; 1; 1)$ لا تنتمي الي المستوى (p) .
- 3- احسب المسافة بين النقطة C والمستوي (p) .
- 4- احسب المسافة بين النقطة $D(1; 0; 1)$ والمستوي (p) ماذا تستنتج؟

التمرين 02 :

في الفضاء نعتبر النقط: $A(-1; -1; -1)$ ، $B(2; 3; -2)$ ، $C(-1; 3; -1)$ والشعاع \vec{r} .

- 1- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (OAB) .
- 2- عين المعادلة الديكارتية للمستوي (p) الذي يشمل C ويكون \vec{i} شعاعا ناظميا له.
- 3- عين نقط تقاطع المستوي (OAB) والمستوي (p) .

التمرين 03 :

في الفضاء المنسوب الي معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط: $A(1; 0; -1)$ ، $B(-1; 4; 1)$ ، $C(2; 3; 3)$ ، $D(2; 1; 5)$.

- 1- بين أن الشعاع \vec{r} عمودي علي المستوي (ABC) .
- 2- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- 3- بين أن $ABCD$ هو رباعي أوجه.
- 4- احسب مساحة المثلث ABC .
- 5- احسب المسافة d بين النقطة D والمستوي (ABC) .
- 6- احسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$.

التمرين 04 :

في الفضاء المنسوب الي معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط: $A(3; -1; 2)$ ، $B(4; -1; -1)$ ، $C(2; 3; 3)$.

والمستوي (p) الذي معادلته الديكارتية: $x + y - 1 = 0$

- 1- بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.
- 2- بين ان الشعاع \vec{r} ناظمي للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية له.
- 3- بين ان المستويين (p) و (ABC) متقاطعان.
- 4- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (p) و (ABC) .
- 5- احسب المسافة بين O والمستقيم (Δ) .
- 6- استنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها O والمماسة للمستقيم (Δ) .

التمرين 05:

$A(-1;2;0)$ ، $B(-3;4;2)$ ، $C(1;-2;-1)$ ثلاث نقط من الفضاء حيث :

- 1) بين أن النقط A ، B ، C تعين مستوى.
- 2) عين الشعاع الناطمي للمستوي (ABC) .
- 3) عين المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) .
- 4) عين المسافة بين النقطة $D(1;2;-1)$ والمستوي (ABC) .

التمرين 06:

نعتبر النقط $A(1;0;-1)$ ، $B(2;2;3)$ ، $C(3;1;-2)$ ، $D(-4;2;1)$:

- 1) أثبت أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته.
- 2) بين أن الشعاع r_1 ، r_2 ، r_3 ، r_4 ناطمي للمستوي (ABC) .
- 3) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- 4) عين حجم رباعي الوجوه $DABC$.

التمرين 07:

$(P): x+y-2z-1=0$ ، $(Q): x+y+z=0$ مستويان معادلتهما :

1. أثبت أن (P) و (Q) متعامدان .
2. عين المسافة بين النقطة $A(2;1;2)$ و كل من (P) و (Q) .
3. استنتج المسافة بين A و مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) .

التمرين 08:

1. عين معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها النقطة $I(0;1;-1)$ ونصف قطرها 2 .
2. عين معادلة سطح الكرة (S') ذات القطر $[AB]$ حيث : $A(-1;2;1)$ ، $B(1;-6;-1)$.
3. عين معادلة المستوي المماس لسطح الكرة (S') في A .

التمرين 09:

1. عين مجموعة النقط (E) للنقط M حيث : $\|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\|$
2. عين مجموعة النقط (F) للنقط M حيث : $\|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = AB$
3. عين مجموعة النقط (G) للنقط M حيث : $\|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$

التمرين 10:

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء عين في كل حالة مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MB}) = 0 \quad 1.$$

$$(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - \vec{MB}) = 0 \quad 2.$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MA} = 0 \quad 3.$$

التمرين 11:

في الفضاء المنسوب الي معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط: $A(1; 4; 1)$ ، $B(0; 2; 1)$ ، $C(1; 6; 0)$ وليكن سطح الكرة (S) التي مركزها $\omega(1; 1; 1)$ ونصف قطرها 3 .

- 1- بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامة .
- 2- اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)
- 3- اكتب معادلة سطح الكرة (S)
- 4- احسب $d(\omega; (ABC))$.
- 5- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من ω والعمودي علي (ABC)
- 6- بين أن المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) عين مركزها ونصف قطرها

التمرين 12:

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(3; 1; 3)$ و $B(-6; 2; 1)$ والمستوي ذو المعادلة :
 $x + 2y + 2z = 0$

الجواب الأول	الجواب الثاني	الجواب الثالث
مستوي من الفضاء	سطح كرة	مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\ 4\vec{MA} - \vec{MD}\ = 4$ هي :
$\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$	إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (P) هي :
يقطع المستوي (P) في دائرة	مماس للمستوي (P)	لا يقطع المستوي (P)
من نفس المستوي ومتوازيان	من نفس المستوي ومقاطعان	ليس من نفس المستوي
المستقيم (d) مستقيم من الفضاء يشمل وشعاع توجيهه $\vec{u}(1; 2; -1)$ و المستقيم (d') مستقيم معرف كما يلي : $(d') : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$		

التمرين 13:

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة $A(-1; 2; 3)$ و (D) مستقيم تمثيله الوسيطي

$$(D): \begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2y \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

1. عين معادلة ديكرتية للمستوي (P) الذي يشمل A وعمودي علي (D) .
2. تحقق أن النقطة $B(-3; 3; -4)$ تنتمي إلى المستقيم (D) .
3. احسب المسافة d_B بين النقطة B والمستوي (P) .
4. عبر عن المسافة d بدلالة كل من d_B والطول AB واستنتج القيمة المضبوطة للمسافة d .
5. لتكن M نقطة من (D) ، أكتب AM^2 بدلالة t وأوجد إذن قيمة المسافة d .

التمرين 14:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط: $A(3; -2; 2)$ ، $B(6; 1; 5)$ ، $C(6; -2; -1)$

- (1) أثبت أن المثلث ABC قائم في A .
- (2) ليكن (p) مستوي في الفضاء معادلته $x + y + z - 3 = 0$ أثبت أنه عمودي علي (AB) في النقطة A .
- (3) عين معادلة المستوي (P') العمودي علي (AC) ويشمل A .
- (4) لتكن $D(0; 4; -1)$ نقطة من الفضاء اثبت أن (AD) عمودي علي المستوي (ABC) .
- (5) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABDC$.
- (6) أثبت أن $BDC = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$.
- (7) أحسب مساحة BDC واستنتج المسافة بين A والمستوي (BDC) .

التمرين 15:

الفضاء منسوب الي معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة: $A(2; 0; 2)$ والمستوي (P) ذو المعادلة: $x + y - z - 3 = 0$

- 1- حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي علي المستوي (P)
- 2- حدد احاثيات B نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (P)
- 3- نعتبر سطح الكرة (S) الذي مركزه النقطة A والذي يتقاطع مع المستوي (P) وفق الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 2
- 4- حدد نصف قطر سطح الكرة (S)
- 5- اكتب معادلة ديكرتية للسطح (S)

شكوت إلى وكيع سوء حفظي..... فأرشدني إلى ترك المعاصي

	الجواب الأول	الجواب الثاني	الجواب الثالث
السطر 1	$A(-1;3;2) \in (D)$	$B(2;-1;-1) \in (D)$	$C(3;1;-4) \in (D)$
السطر 2	(D) شعاع توجيهه $\vec{u}(1,2,3)$	(D) شعاع توجيهه $\vec{v}(-2,1,1)$	(D) شعاع توجيهه $\vec{w}(3,1,4)$
السطر 3	(D) محتوي في (p)	(D) يوازي تماما (p)	(D) يقطع (p)
السطر 4	$A'(1;3;-2) \in (P)$	$B'(1;3;2) \in (P)$	$C'(1;3;-1) \in (P)$
السطر 5	المستوي (Q_1) الذي معادلته $x + 2y - 3z + 1 = 0$ يعامد المستوي (p)	المستوي (Q_2) الذي معادلته $-4x + 5y + 2z + 3 = 0$ يعامد المستوي (p)	المستوي (Q_3) الذي معادلته $-3x + 2y - z - 1 = 0$ يعامد المستوي (p)
السطر 6	المسافة بين النقطة $M(-1;-3;2)$ والمستوي (p) هي $\sqrt{14}$	المسافة بين النقطة $M(-1;-3;2)$ والمستوي (p) هي 14	المسافة بين النقطة $M(-1;-3;2)$ والمستوي (p) هي $2\sqrt{3}$

التمرين 19:

نعتبر النقط من الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $2x + y - 2z + 4 = 0$ والنقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$.

- (1) بين أن النقط A ، B ، C تعين مستوي ويبين أن هذا المستوي هو (P) .
- (2) بين أن المثلث ABC قائم .
- (3) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل O ويعامد المستوي (P) .
- (4) احسب المسافة OK حيث K هي المسقط العمودي للنقطة O على (P) .
- (5) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.
- (6) نسمي G مرجح الجملة $\{(O;3), (A;4), (B;1), (C;1)\}$.
 - I هي مركز ثقل المثلث ABC . بين أن G تنتمي إلى (OI) .
 - عين المسافة بين G والمستوي (P) .

التمرين 20:

نعتبر النقط من الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $A(1;-1;3)$ ، $B(0;3;1)$ ،

$C(6;-7;-1)$ ، $D(2;1;3)$ ، $E(4;-6;2)$

(1) أثبت أن E مرجح الجملة $\{(A;2), (B;-1), (C;1)\}$.

(2) عين المجموعة (γ) للنقط M من الفضاء حيث : $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 2\sqrt{21}$

(3) بين أن النقط A ، B ، C تعين مستوي .

- 4) أثبت أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD) ، ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABD) .
 5) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC) .
 6) عين إحداثيات H نقطة تقاطع (EC) و المستوي (ABD) .
 7) أثبت أن المستوي (ABD) والمجموعة (γ) متقاطعان في دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
 8) علما أن قياس الزاوية $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DA})$ هو $\frac{\pi}{4}$ أحسب حجم رباعي الوجوه $EABD$.
 9) عين معادلة كل من (P) و (P') المستويان المماسان للمجموعة (γ) والعموديان على المستقيم (EC) .

التمرين 21:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $C(3;2;4)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $A(2;1;3)$

- I- بين أن A و B و C ليست على استقامة واحدة .
 II- التمثيل الوسيط للمستقيم (d) هو :

$$(d) : \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

- 1- بين أن (d) يعامد المستوي (ABC) .
 2- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 III- H هي تقاطع (d) و (ABC) .

- 1- بين أن H هي مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; -1), (C; 2)\}$.
 2- عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء حيث :

$$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء حيث : $\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \sqrt{29}$

بورة 2012 عت

الفضاء منسوب الي المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة : $14x + 16y + 13z - 47 = 0$

والنقط : $C(-1;3;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $A(1;-2;5)$.

- 1) أ - تحقق ان النقط A ، B و C ليست في استقامة .
 ب- بين ان المستوي (ABC) هو (P)
 2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
 3) أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$
 ب- تحقق ان النقطة $D(-1; -2; \frac{1}{4})$ تنتمي الي المستوي (Q)
 ت- احسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB)

نعتبر في الفضاء المنسوب الي المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط : $A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ،

$$\text{حيث } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases} \text{ والمستوي } (P) \text{ ذا المعادلة : } 2y + z + 1 = 0 \text{ وليكن } (\Delta) \text{ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : } y = 2 + \beta$$

β وسيط حقيقي

- 1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوي في المستوي (P)
- 2) بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي
- 3) أ - احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (P)
ب- بين أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم .
ت- بين أن $ABCD$ رباعي وجوه ، ثم احسب حجمه

الفضاء منسوب الي المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط : $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ ، $D(1;1;1)$

- 1) أ - تحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا
ب- بين أن $\vec{n}(1,1,1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)
ت- اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)
- 2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;2), (C;-1)\}$
أ- احسب احداثيات G
ب- ولتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء تحقق : $\|\vec{MA} + \vec{MD} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$ بين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$
ت- اثبت أن معادلة (Γ) هي : $6x - 4y + 2z + 3 = 0$
- 3) بين أن المستويين يتقاطعان و (Γ) وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له

الفضاء منسوب الي المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط : $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ ، $D(1;1;4)$

- 1) تحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا وأن $x - y + z - 1 = 0$ معادلة ديكرتية له .
- 2) بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع ، ثم تحقق أن مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة
- 3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي علي المستوي (ABC) والذي يشمل النقطة D
- 4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D علي المستوي (ABC)
أ- عين احداثيات النقطة E ثم احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)
ب- عين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$
- 5) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الفضاء منسوب المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2, 1, -1)$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{وليكن } (\Delta') \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى التالي :}$$

- 1 أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)
ب-بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .
- 2 أ- بين أن النقطة $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ')
ب- تحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .
ت- استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ') .
- 3 لتكن N نقطة إحداثياتها $(-2+t; 2+t; t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ ولتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $h(t) = AN^2$
أ- بين أن النقطة N تنتمي الى المستقيم (Δ') ، ثم اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t
ب- استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي يكون من اجلها المسافة AN أصغر ما يمكن ، ثم قارن بين القيمة الصغرى للدالة h والمسافة AB

- 1- نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط : $A(1;1;2)$ ، $B(1;0;-2)$ ، $C(-6;0;-1)$
- بين أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرمل له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكرتية له
- 2- لتكن S مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$
- بين S ان هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R
- 3- G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة : $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{v}$
أ- عين إحداثيات النقطة G ثم تأكد أنها تنتمي إلى S
ب- اكتب معادلة المستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G

الفضاء منسوب الي المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين : $A(3;-2;2)$ ، $B(0;4;-1)$

1. اكتب معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل A و $\vec{u}(1, 0, -1)$ شعاع ناظمي له
2. (P_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1)
أ- بين أن شعاع ناظمي للمستوي (P_2) $\vec{v}(1, 1, 1)$
ب- أكتب معادلة للمستوي (P_2)
3. نعتبر النقطتين C و D حيث $C(6;1;5)$ و D معرفة بـ : $\vec{CD}(0, 0, -6)$
أ- بين أن المثلث ACD قائم في A واحسب مساحته
ب- بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD)
ت- أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$