# السلسلة رقم 01

# النهايات والاستمرارية

- حساب النهايات بمختلف الطرق
- المستقيمات المقاربة
- الاستمرارية
- مبرهنة القيم المتوسطة

## التمرين رقم 01

في كل حالة ممّا يلي، احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف $D_f$ ثمّ فسّر -إن أمكن- النتائج بيانيا.

1. $f(x)=\dfrac{3x^3+x-4}{(3-x)^2}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$
2. $f(x)=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}-1}$ ، $D_f=[0;1[\cup]1;+\infty[$
3. $f(x)=x-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ ، $D_f=]-2;+\infty[$
4. $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x+8}{1-x}}$ ، $D_f=]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$
5. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4x+3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1;3\}$
6. $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$ ، $D_f=\mathbb{R}$
7. $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x^2-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$
8. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+4x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-2;0\}$

## التمرين رقم 02

باستعمال طريقة مناسبة ، احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x-3}-x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-3x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{x^2+x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}x-1+2\sqrt{1-x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+3+\sqrt{4x^2+x-13}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{2}x$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^4-x^2+2}-\left(x^2+x+1\right)$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}}$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$
15. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$
16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-x}+2x-1}{\sqrt{2+x^2}}$
17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$
18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-x}+2x-1}{\sqrt{2+x^2}}$
19. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+4x^2-8x+3}$

20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-2x^2+x+15}{(x-3)^2}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+|x-1|-1}{x^2-x}$

22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{15-2x}}$

23. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$

24. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

25. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{2021}-1}{x}$

28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4}$

29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$

30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

33. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)$

36. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-3}\left(3x-\sqrt{x^2+2x}\right)$

37. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

38. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

39. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^3+x^2}{x}\right)\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

40. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^3+1\right)$

## التمرين رقم 03

باستعمال مبرهنات المقارنة (الحدّ من الأعلى، الحدّ من الأسفل، الحصر)، احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+\sin 2x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sin x}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1+\sin x\right)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2+x\cos x\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 3x+\cos 2x}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5\cos x+1\right)$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\cos x}{\sqrt{x}+1}$

## التمرين رقم 04

$f$ دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$x^2\le x^2+x+1\le(x+1)^2$ و $x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$

2) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$1-\dfrac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ، عيّن عندئذ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

## التمرين رقم 05

$f$ دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{4\sin x+3x}{x-1}$$

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$:

$$f(x)=\frac{4\sin x+3}{x-1}+3$$

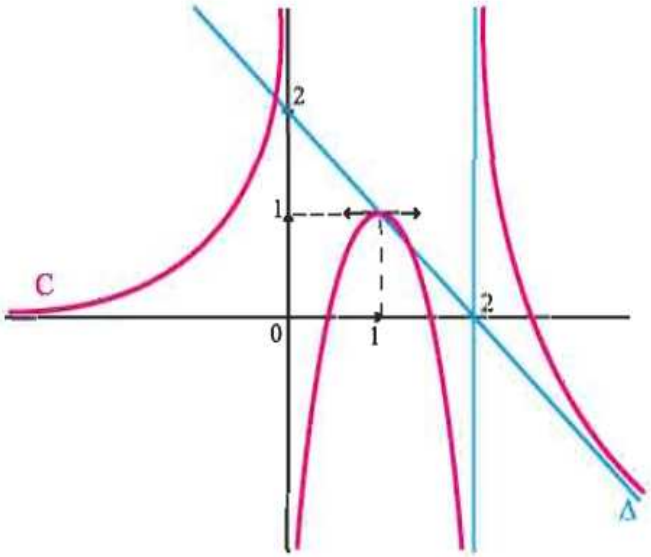
2) أثبت أنّ: $|4\sin x+3|\le 7$ ، ثمّ استنتج أنّ :

$$|f(x)-3|\le \frac{7}{x-1}$$

3) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

## التمرين رقم 06

في الشكل الموالي: $(C)$ التمثيل البياني لدالة $f$ و $(\Delta)$ مستقيم مقارب له بجوار $+\infty$.




بقراءة بيانية أجب على الأسئلة التالية:

1) جد معادلة المستقيم $(\Delta)$.

2) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to2^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x)+x\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)\right]^2 \quad , \quad \lim_{x\to0} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{\substack{x\to2\\ <}} f\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)$$

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، وجود وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$ .

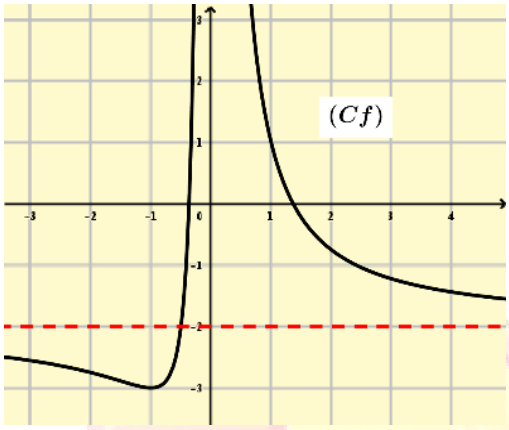
## التمرين رقم 07

- في كل حالة من الحالات التالية وبقراءة بيانية:

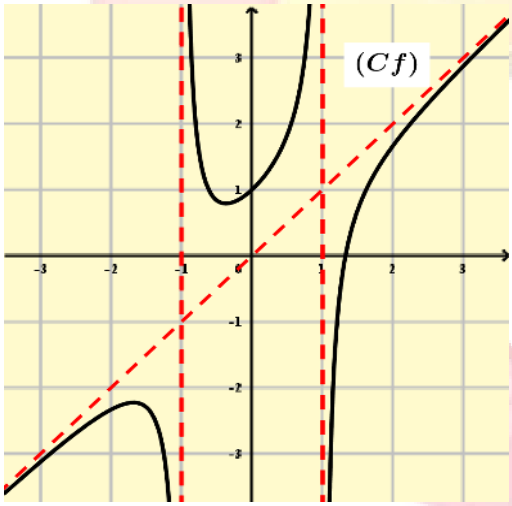
1) عين النهايات عند أطراف مجموعة التعريف للدالة $f$ .

2) عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C_f)$ مع تحديد الوضع النسبي له في حالة مقارب أفقي أو مائل.

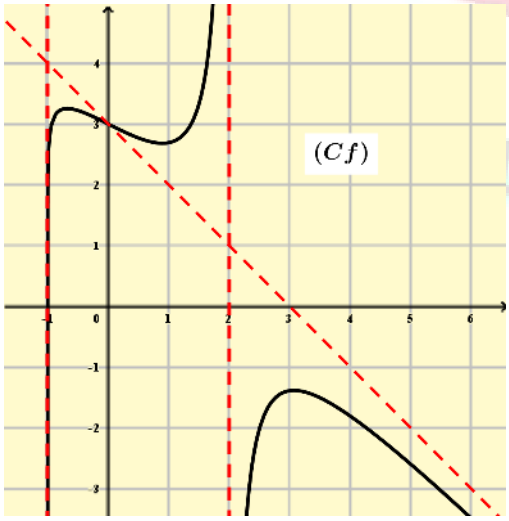
الحالة 01




الحالة 02




الحالة 03



## التمرين رقم 08

أثبت في كل حالة من الحالات التالية أنّ $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ منحنى الدالة $f$، ثمّ ادرس الوضع النسبي بينهما.

1. $f(x)=3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$ ، $(\Delta): y=3x+7$
2. $f(x)=\dfrac{-x^2+3x+5}{x+1}$ ، $(\Delta): y=-x+4$
3. $f(x)=\dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ ، $(\Delta): y=x-3$

## التمرين رقم 09

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2x+1} & ;x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} & ;x>0 \end{cases}$$

1) بيّن أنّ الدالة $f$ مستمرة عند $0$.
2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، ثمّ بيّن أنّ $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ يقبل في جوار $-\infty$ مقاربا مائلا نطلب معادلته.
3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، فسّر النتيجة بيانيا.

## التمرين رقم 10

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4+x^2}-2} & ;x\neq 0 \\ g(0)=\ell \end{cases}$$

- عيّن قيمة العدد الحقيقي $\ell$ حتى تكون $g$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

## التمرين رقم 11

$f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$.

1) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
2) ادرس استمرارية $f$ عند $-\dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{1}{2}$.
3) بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta): y=3x$ و $(\Delta'): y=-x$ مقاربان مائلان لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب، ثمّ حدّد الوضع النسبي مع كل منهما.

## التمرين رقم 12

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & ;x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{3} & ;x\le 2 \end{cases}$$

- عيّن قيمتي العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون $f$ مستمرة عند $2$.

## التمرين رقم 13

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & ;x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+5x-2}-x & ;x\ge 1 \end{cases}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتائج بيانيا.
2) أثبت أنّ $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
3) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ حيث $\alpha\in\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$.

ب- استنتج أنّ: $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$.

4) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ كما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & ;x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[ \\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

- بيّن أنّ $g$ مستمرة على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

## التمرين رقم 14

1) $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x)=2x^3-3x^2-1$$

أ- ادرس تغيرات الدالة $h$.

ب- بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]1;2[$ ، ثمّ أعط حصرا لـ $\alpha$ سعته $10^{-1}$.

ج- استنتج حسب قيم $x$ إشارة $h(x)$.

2) لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$$

أ- احسب نهايات الدالة $f$ ، فسّر بيانيا النتائج المحصل عليها.

ب- أثبت أنّ: $f(\alpha)=\frac{2}{3}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2+1}\right)$ ، ثمّ جد حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب $10^{-2}$.

## التمرين رقم 15

1) $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3-3x+5$$

أ- ادرس تغيرات الدالة $g$.

ب- بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ يحقّق $g(\alpha)=0$ ، ثمّ تأكد أنّ $-2,3<\alpha<-2,2$.

ج- حدّد حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

2) لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$$

أ- ادرس تغيرات الدالة $f$.

ب- أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\beta$ حيث $\beta\in]-4;-3[$.

ج- جد حصرا للعدد $\beta$ سعته $10^{-2}$.

د- استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

هـ- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{-3\alpha(\alpha-5)}{4}$ ، ثمّ أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

## التمرين رقم 16

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$f(x)=ax+b+\frac{x}{x^2-1}$ مع $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

جدول تغيرات الدالة $f$ يعطى كما يلي:

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{-3\sqrt{3}+2}{2}$ | ↘ | $1$ | ↘ | $\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$ | ↗ |

1) باستعمال المعطيات أعلاه، بيّن أنّ: $a=b=1$.

2) أكمل الجدول بحساب النهايات.

3) أ- احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right]$ ، فسّر النتيجة بيانيا.

ب- ادرس الوضع النسبي لـ $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ والمستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x+1$.

4) بيّن أنّه لكل $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ : $f(-x)+f(x)=2$ ، ماذا نستنتج ؟

5) أ- أثبت أنّ $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث $0,7<\alpha<0,8$.

ب- شكّل جدول إشارة الدالة $f$.

6) أنشئ $(C_f)$ في معلم متعامد منجانس.

دبرها في بالك مليح:
النجاحات الباهرة لا تصنع بين عشية وضحاها..
بل هي نتاج إرادة قوية واجتهاد دائم
وإيمان راسخ في قدرتك على فعلها...