نهايات دوال ناطقة

تمرين01:

أحسب النهايات التالية :

$1)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}\right)$ ، $2)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+5x+2}{x-1}\right)$ ، $3)\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2+3x+1}{(x-2)^2}\right)$ ، $4)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+2x-3}\right)$

$5)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2+2x+3}{2x^2+4x-5}\right)$ ، $6)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x^2-2x+3}{3x+2}\right)$ ، $7)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x^2-4x+3}\right)$ ، $8)\ \lim\limits_{a\to 0}\left(\dfrac{(x+a)^2-x^2}{a}\right)$

$9)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+2+3+.....+n}{n}\right)$ ، $10)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+2+2^2+.....+2^n}{2^{n+1}-1}\right)$

نهايات دوال صمّاء

تمرين02:

أحسب النهايات التالية :

$1)\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-2x+3}\right)$ ، $2)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$ ، $3)\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x-4}{\sqrt{x+2}}\right)$ ، $4)\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\right)$

$5)\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{x-2}\right)$ ، $6)\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}4}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x-4}\right)$

حساب نهاية باستعمال العدد المشتق

تمرين03:

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

$1)\ \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3-27}{x-3}\right)$ ، $2)\ \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)$ ، $3)\ \lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{\sin x}{x-\pi}\right)$ ، $4)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right)$

$5)\ \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{f^2(x)-f^2(2)}{x-2}\right]$ و $f(2)=1$ ، $f'(2)=3$

حساب نهاية دوال مركّبة

تمرين04:

باستعمال نهاية الدالة المركبة أحسب النهايات التالية :

$1)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+1}\right)$ ، $2)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{\dfrac{4x+5}{2x+1}}\right)$ ، $3)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$ ، $4)\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

حساب نهاية باستعمال مبرهنة الحصر

تمرين05:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$: $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ و ثم استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

تمرين06: مبرهنة الحصر

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\Re$ كمايلي : $f(x)=x^3+5\cos x+1$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $x^3-4\le f(x)\le x^3+6$ ثم استنتج : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

تمرين07: مبرهنة الحصر

1) برهن أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $1\le 2+\sin x\le 3$ و $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le 1$.

2) f دالة معرفة على $\Re$ بـ : $f(x)=\frac{x}{2+\sin x}$. أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3) g دالة معرفة على $\Re^*$ بـ : $g(x)=\frac{2+\sin x}{x}$. أدرس نهايتي الدالة g عند 0 من اليسار ثم عند 0 من اليمين.

تمرين08: نهاية غير منتهية

1) أحسب نهاية الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند العدد 1.

2) أوجد عدد حقيقيا α بحيث إذا كان : $x\in\,]1-\alpha\,;1+\alpha[$ فإن : $f(x)>10^3$.

تمرين09: نهاية منتهية

1) أحسب نهاية الدالة f المعرفة على $]+\infty;\frac{1}{4}[$ بـ : $f(x)=\frac{6x-1}{4x-1}$ عند $+\infty$.

2) أوجد عدد حقيقيا A بحيث إذاكان : $x>A$ فإن : $f(x)\in\,]1{,}4\,;1{,}6[$.

تمرين10: المستقيمات المقاربة

1) بين أن المنحنى (γ) الممثل للدالة f يقبل المستقيم (Δ) كمستقيم مقارب.

$f(x)=\frac{x-3}{x-1}$ و $(\Delta): x=1$ ؛ $f(x)=\frac{5x+3}{x+2}$ و $(\Delta): y=5$ ؛ $f(x)=2x+3-\frac{7}{x+2}$ و $(\Delta): y=2x+3$

تمرين11: المستقيمات المقاربة

2) نعتبر الدالة المعرّفة على $\Re-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$.

1) عين الأعداد الحقيقية : a ؛ b ؛ c ؛ d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$.

2) استنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مائلا (Δ) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

3) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

تمرين12: المستقيمات المقاربة

❖ نعتبر الدالة المعرّفة على $\Re-\{-2\}$ بـ : $f(x)=\frac{(x-1)^2(x+1)}{x+2}$ و الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ : $g(x)=x^2-3x+5$

1) عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\Re-\{-2\}$ يكون : $f(x)=g(x)+\frac{a}{x+2}$.

2) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ ثم فسّر بيانيا النتيجة.

تمرين 13: الاستمرارية: دالة ذات شكل واحد

1) f دالة معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ; \quad x\neq 2 \\ f(x)=3 & ; \quad x=2 \end{cases}$. أدرس استمرارية الدالة f عند $x=2$.

تمرين 14: الاستمرارية: دالة ذات قيمة مطلقة

1) f دالة معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|}{2x}+x^2+\dfrac{1}{2} & ; \quad x\neq 0 \\ f(x)=1 & ; \quad x=0 \end{cases}$. أدرس استمرارية الدالة f عند $x=0$.

تمرين 15: الاستمرارية: دالة ذات شكلين

1) f دالة معرفة كمايلي : $\alpha \in \Re$; $\begin{cases} f(x)=\alpha+1 & ; \quad 2\leq x<3 \\ f(x)=x+\alpha-2 & ; \quad 3\leq x<5 \end{cases}$. أدرس استمرارية الدالة f عند $x=3$.

تمرين 16: الاستمرارية: مسألة عكسية

1) f دالة معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4+x^2}-2} & ; \quad x\neq 0 \\ f(x)=a & ; \quad x=0 \end{cases}$.تحقق أنه من أجل $x\neq 0$: $f(x)=\sqrt{4+x^2}+2$.

2) استنتج قيمة a حتى تكون f مستمرة على $\Re$.

تمرين 17: مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x)=k$

1) برهن باستعمال نظرية القيم المتوسطة أن المعادلة : $x^3-6x=-3$ تقبل **حلاً على الأقل** في المجال $[-1\ ;\ 2]$.

تمرين 18: مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x)=0$

1) برهن باستعمال نظرية القيم المتوسطة أن المعادلة : $x^3+5x-2=0$ تقبل **حلا وحيدا** α في المجال $[0\ ;\ 1]$.

تمرين 19: مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x)=x$

1) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0\ ;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$.

1) بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $D=[0\ ;2]$.

2) لتكن الدالة g المعرفة على D بـ : $g(x)=f(x)-x$. بين أن لدالة g متناقصة تماما على المجال D .

3) حسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D . فسّر النتيجة هندسيا.

تمرين 20: مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x)=g(x)$

❖ نعتبر الدالتين : $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=-x^3$.

1) بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

حيث : $-\dfrac{7}{8}<x_0<-\dfrac{3}{4}$.

❖ أحسب النهـايات التاليـة :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2+2x+2}\right)$, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}\right)$, 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3-x+3}{x^2+2}\right)$, 4) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}\right)$

5) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x-2}\right)$, 5) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+3x-4}\right)$, 7) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{5x^2+3x+1}{(x-3)^2}\right)$, 8) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-3}\left(\dfrac{3x+7}{-x^2-2x-4}\right)$

9) $\lim\limits_{n\to a}\left(\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a3}\right)$, 10) $\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}\right)$, 11) $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x+1}\right)$,12) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt{3x^2-2x-1}\right)$

13) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$, 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x}\right)$, 15) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)$,16) $\lim\limits_{x\longrightarrow7}\left(\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right)$

17) $\lim\limits_{n\to0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right)$, 18) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)$, 19) $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-a}{x-a}\right)$, 20) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)$

❖ باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

21) $\lim\limits_{x\to7}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\right)$, 22) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\left(-x^3+3x-1\right)^5-1}{x-1}\right)$, 23) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\cos(2x)}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$, 24) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1}-1}\right)$

❖ باستعمال نهاية دالة مركبة أحسب النهايات التالية :

25) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}\right)$, 26) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, 27) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x+1}{4x+3}\right)$, 28) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^3$

❖ باستعمال نهاية حصر دالتين أحسب النهايات التالية :

29) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2\cos\left(\dfrac{\pi}{x-1}\right)$, 30) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-4(-1)^x}{x}\right)$

1) من أجل $x<0$ قارن بين : $(x+3\sin x)$ و $(x+3)$ ثم استنتج : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3\sin x)$ .31

2) من أجل $x>0$ قارن بين : $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$ ثم استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5}-x\right)$. 32

توسّع أكثر

أحسن التمارين فى الكتاب

فرض الثلاثي الأول

تمرين01:

1) f دالة معرفة على المجال $I=[0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3x+1}}$.

2) برهن أنه من أجل كل $x\geq 0$: $x \leq \sqrt{x^2+3x+1} \leq x+2$.

3) استنتج انه من أجل $x>0$: $1-\dfrac{2}{x+2} \leq f(x) \leq 1$.

4) ماهي نهاية الدالة f عند $+\infty$ ؟

5) فسر هندسيا هذه النهاية ؟.

تمرين02:

❖ f دالة معرفة كمايلي : $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta & ; \ x\leq 3\\ \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} & ; \ x>3\end{cases}$.

1) عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون : الدالة f مستمرة عند $x_0=3$ و (C_f) يشمل النقطة $A\left(-2;-\dfrac{4}{3}\right)$.

تمرين03:

❖ f و g دالتان معرفتان كمايلي : $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{5}{x-1}$.

1) عيّن D_f و D_g مجموعة تعريف الدالتان f و g .

2) بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $3<x_0<4$.

تمرين04:

f دالة معرفة كمايلي : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{3|x^2-x|}{x^2+x-2}\\ f(x)=1 \ ; \ x=1\end{cases}$.

1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

2) أكتب عبارة f دون رمز القيمة المطلقة .

3) أدرس استمرارية الدالة f عند كل من : $x=-2$ ؛ $x=1$ ؛ $x=3$.

اختبر معلوماتك : إجابـــــــة مختصـــــــــــرة :

النهاية	01	02	03	04	05	06	07	08
النتيجة	$\frac{1}{2}$	0	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
النهاية	09	10	11	12	13	14	15	16
النتيجة	$\frac{a-1}{3a^2}$	$3x^2$	$+\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{56}$
النهاية	17	18	19	20	21	22	23	24
النتيجة	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{a}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{6}$	-2	0	2
النهاية	25	26	27	28	29	30	31	32
النتيجة	0	$+\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	0	0	$-\infty$	$+\infty$

أحسن التمارين في الكتاب المدرسي.

01 – 02 : نهاية منتهية و غير منتهية

12 -14 -19 : نهاية منتهية و غير منتهية

30 -31 -32 - 33 - 34 -38 -39 : نهاية دالة مركبة و النهايات بالمقارنة

42 - 43 -45: الاستمرارية.