السنة الثالثة رياضيات 2021_2020

سلسلة تمارين المتتاليات

التمرين 1: ينسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، و لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$.

1- نعتبر المستقيمين (D) و (D') المعرفين بمعادلتيهما : $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x-2$ على الترتيب.

أ) مثل بيانيا (D) و (D') ثم مثل على محور الفواصل الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها).

ب) ما هو تخمينك حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها؟

ت) عين α فاصلة نقطة تقاطع (D) و (D').

ث) من أجل قيمة α المحصل عليها في السؤال السابق نضع:
$v_n=u_n-\alpha$

- أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.
- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.
- أدرس تقارب (v_n)، واستنتج تقارب المتتالية (u_n).
- استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n)، و تأكد من التخمين الذي وضعته سابقا.

2- أحسب المجموعين :

$S_1=v_0+v_1+v_2+...+v_n$

$S_2=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

التمرين 2: نعتبر المتتالية لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

1) أ- بين بالتراجع أن من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec u_n\prec 1$

ب – أدرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب) أحسب u_n بدلالة n ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين 3: (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$U_0=4$ و $U_{n+1}=\frac{9U_n-49}{U_n-5}$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n\neq 7$

2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n=\frac{1}{U_n-7}$

3) برهن أن (V_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

4) عبر عن V_n و U_n بدلالة n

5) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=V_0+V_1+....+V_n$

ثم استنتج بدلالة n المجموع :
$H_n=V_0U_0+V_1U_1+....+V_nU_n$

التمرين 4:

1) (u_n) متتالية حسابية متناقصة معرفة على بحدها الاول u_0 و أساسها r

أ- عين u_0 و r علما ان:

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24..........(1) \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=210......(2) \end{cases}$$

ب- أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب المجموع
$S'_n=u_0+u_1+.........+u_n$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n=e^{14-3n}$ حيث e أساس اللوغاريتم النيبري

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الاول v_0 ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ و ماذا تستنتج ؟

ب- أحسب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+.........+v_n$ ثم الجداء $P_n=v_0\times v_1\times.........\times v_n$

ج - أحسب u_{2011} ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$

التمرين 05: (u_n) متتاليةهندسية حدودها موجبة معرفة على IN^* حيث :

$$\begin{cases} \ln u_3+\ln u_7=2\ln 2+8 \\ \ln u_2-\ln u_6=-4 \end{cases}$$

1/ عين الحد الأول والأساس لهذه المتتالية وأحسب u_n بدلالة n

2/ نضع : $S_n=u_0+u_1+\cdots\cdots u_n$ ، أحسب S_n بدلالة n ، عين $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

3/ نضع : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$ ، برهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول والأساس

التمرين 06 : (u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي :

$u_0=e^3-1$ ومهما يكن العدد الطبيعي n :

$e^3u_{n+1}=1-e^3+u_n$

1/أحسب : u_1 , u_2 , u_3

2/أثبت أنه مهما يكن العدد الطبيعي n : $1+u_n>0$

3/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

4/ (v_n) متتالية عددية معرفة بـ $v_n = 2(1+u_n)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هند سية يطلب تعيين أساسها ، أكتب v_n بدلالة n

ب)نضع : $S_n = v_0+v_1+v_2\cdots\cdots v_n$ ، عين $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين 07: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1/ - أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فـــــــــــــإن : $u_n = 1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن : $0<u_n<1$

ج) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

2/ نضع : $x_n = u_1\times u_2\times\cdots\cdots u_n$

أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ ، ب- احسب: $\lim x_n$

3/ نضع : $v_n = \ln(x_n)$

أ- تحقق أن المتتالية (v_n) معرفة على IN^* ،

ب- أثبت أن المتتالية (v_n) متزايدة على IN^*

ج- أثبت أن المتتالية (v_n) محدودة

د- عين نهاية المتتالية (v_n) لما يؤول n إلى $+\infty$

3/ ضع : $y_n = v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots v_n$

أ- أكتب y_n بدلالة x_n

ب- عين نهاية المتتالية (y_n) لما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين 08: (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بالـــشـكل :

$u_0 = \dfrac{1}{4}$ ، $u_1 = \dfrac{1}{2}$ و $4u_{n+2} = 7u_{n+1}-3u_n$

1/ أحسب : u_2 و u_3

2 / نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1}-u_n$

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le v_n\le\dfrac{1}{4}$

ب) بين أن (v_n) متناقصة ، ماذا تستنتج

ج) برهن أن (v_n) متتالية هندسية ،عين أساسها وحدها الأول ثم عبر عن v_n بدلالة n

د/أحسب : $S_n = v_0+v_1+v_2\cdots\cdots v_{n-1}$ وإستنتج عــبـارة u_n بدلالة n

التمرين 09: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$$

1) أحسب $u_1;u_2;u_3$

2) أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge4$: $u_n\ge0$

أ- إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge5$: $u_n\ge n-3$

ج)إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = -2u_n+3n-\dfrac{21}{2}$

أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب-إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{2}n-\dfrac{21}{4}$

ج- أحسب بدلالة n المجموع : $s_n = u_o+u_1+...+u_n$

التمرين 10 : (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1-\dfrac{1}{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = 1-\sqrt{1-u_n}$$

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3. أثبت أنّ (u_n) متقاربة .
4. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \ln(1-u_n)$

- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.
- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
- أحسب الجداء π_n حيث: $\pi_n = (1-u_0)\times(1-u_1)\times\cdots\times(1-u_n)$.

التمرين 11: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2};\ u_1 = 1 \\ \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}+\dfrac{1}{u_n}\right) : n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{-1+4u_n}$
2. نعتبر (v_n) متتالية معرفة بـ $v_n = \dfrac{1}{u_n}-\dfrac{4}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ) بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 12 : (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$

1.برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 0$

2.لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$

- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
- أحسب المجموع S حيث: $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
- أحسب الجداء π_n حيث: $\pi_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$.

التمرين 13: نعتبر f دالة معرفة على □ $^+$ بالعبارة :
$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

1. أثبت أن: $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$ من أجل كل x من □ $^+$.
2. أثبت أن : f متزايدة تماما على □ $^+$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \leq \sqrt{3}$ فإن $f(x) \leq \sqrt{3}$.
3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على □ بـ $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
   - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $u_n \geq 0$.
   - برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.
   - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) , ثم استنتج أنها متقاربة
4. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على □ بـ $v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

- برهن أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n
- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n$ ثم $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

التمرين 14 : (u_n) متتالية عددية معرفة على □ كما يلي :
$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

I. أرسم في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى (c_f) الممثل للدالة f المعرفة على □ $^+$ حيث:
$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \quad \text{و المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = x$$

II. باستعمال الرسم السابق و دون حساب الحدود مثل على محور الفواصل الحدود $u_0 ; u_1 ; u_2$.

أ. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من □ : $1 \leq u_n \prec 4$

جـ. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

III. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على □ بالعلاقة : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

1. عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول v_0 .
2. نضع $\alpha = -4$

أ . اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب . أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 15 : (U_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول U_1 وأساسها q حيث : $\begin{cases} U_1 + 2U_2 + U_3 = 32 \\ U_1 \times U_2 \times U_3 = 216 \end{cases}$

1) أ- أحسب U_2 و q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول U_1

ب- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n

ج- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

2) (V_n) متتاليةعدديةمعرفةعلى ¥* كمايلي:
$$V_1 = 2 \quad \text{و} \quad V_{n+1} = \frac{3}{2}V_n + U_n$$

أ) أحسب V_2 و V_3

ب) نضع من اجل كل n غيرمعدوم: $W_n = \frac{V_n}{U_n} - \frac{2}{3}$

- بين أن (W_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
- أكتب W_n بدلالة بدلالة n ثم إستنتج V_n بدلالة n
- أحسب المجموع $S_n = w_1 + \cdots + w_n$ بدلالة n .

التمرين 16 : لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على □ * بـ :
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1) أحسب الحدود u_2, u_3, u_4 .

2) أ) أثبت أنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$

. ب) أثبت أن (u_n) متناقصة.

ج) إستنتج سلوك المتتالية (u_n) .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ) أثبت أن (v_n) هندسية ، عين أساسها وحدها الأول v_1 .

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_n = \frac{n}{2^n}$.

التمرين 17 :

i. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = -2u_n + 3$

➢ أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة

➢ أحسب بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

ii. نفرض $u_0 = 3$ ، و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 1$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

(3) أحسب، بدلالة n، المجموعين

$S = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و

$S' = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين 18 :

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 4U_n - 5 \end{cases}$.

1. أحسب الحدين U_1 ، U_2.
2. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = 3U_n + \beta$ حيث : β عدد حقيقي .

- عين قيمة β بحيث تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية .
- أكتب V_n بدلالة n ، ثم عبر عن U_n بدلالة n
- أحسب المجموع S حيث: $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$.
- أحسب الجداءات التالية : $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times ..... \times V_n$

التمرين 19:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة : $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1- لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

a) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = x$.

b) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;1]$.

إستنتج أنه إذا كان $x \in [0;1]$ فإن $f(x) \in [0;1]$.

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \in [0;1]$.

3- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n).

4- أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة . عين نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 20:

نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ ،

الجزء الأول: g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right]$

1. أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في الحالتين $0 < x < 1$ و $x > 1$.
2. أحسب نهايتي الدالة f عند $0, +\infty$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) .
3. أحسب $f'(x)$ واستنتج أن إشارتها من نفس إشارة الدالة g
4. إستنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
5. أرسم (C_f) والمستقيمين المقاربين

الجزء الثاني :

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0 \in [1;2]$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$

1. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;2]$ لدينا : $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$
2. برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n \in [1;2]$
3. بملاحظة أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ ، عين اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة

✓ نسمي العدد l نهايتها ، أحسب بدقة قيمة l .

التمرين21:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N^*}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1/ برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

2/ ادرس رتابة المتتالية (u_n) . استنتج أن (u_n) متقاربة احسب نهايتها

3/ نضـــع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = n(3-u_n)$

أ) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

جـ) جد نهاية المتتالية u_n من جديد

4/ احسب المجموعين : $S_1 = v_1 + v_2 + ... + v_n$ و $S_2 = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$

الأستـاذة : بـن صافـيـة