ملخص المتتاليات

المتتالية الحسابية

إثبات أن المتتالية (U_n) حسابية

لإثبات إن المتتالية (U_n) متتالية حسابية يكفي إثبات أن:

$$U_{n+1} - U_n = r$$

حيث r هو ثابت حقيقي (مستقل عن n) يدعى أساس المتتالية الحسابية (U_n).

كتابة U_n بدلالة n حالة خاصة

كتابة U_n بدلالة n أو إيجاد عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية (U_n). تعطى بالعلاقة: $U_n = U_p + (n-p)r$

حيث : p دليل الحد المعطى (معلوم)

r أساس المتتالية الحسابية (U_n).

خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية

إذا كانت a ، b و c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن: $2b = a + c$ (الوسط الحسابي).

(ضعف الحد الأوسط يساوي مجموع الحدين الآخرين).

حساب مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية

حساب مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية.

$$S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots\cdots + U_n$$

يعطى بالعلاقة:

$$S_n = \frac{(n-p+1)(U_p + U_n)}{2}$$

حيث : p دليل الحد الأول في المجموع

n دليل الحد الأخير في المجموع.

المتتالية الهندسية

إثبات أن المتتالية (V_n) هندسية

لإثبات إن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يكفي إثبات أن:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$$

حيث q هو ثابت حقيقي (مستقل عن n) يدعى أساس المتتالية الهندسية (V_n).

كتابة V_n بدلالة n

كتابة V_n بدلالة n أو إيجاد عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (U_n). تعطى بالعلاقة: $V_n = V_p \times q^{n-p}$

حيث : p دليل الحد المعطى (معلوم)

q أساس المتتالية الهندسية (V_n).

خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية

إذا كانت a ، b و c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن: $b^2 = a \times c$ (الوسط الهندسي).

(مربع الحد الأوسط يساوي جداء الحدين الآخرين).

حساب مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

حساب مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية.

$$S_n = V_p + V_{p+1} + \cdots\cdots + V_n$$

يعطى بالعلاقة:

$$S_n = \frac{V_p}{1-q}(1 - q^{n-p+1})$$

حيث : p دليل الحد الأول في المجموع

n دليل الحد الأخير في المجموع.

q أساس المتتالية الهندسية (V_n).

إثبات أن متتالية ليست حسابية وليست هندسية

لإثبات أن المتتالية (U_n) ليست حسابية وليست هندسية نتبع الخطوات التالية:

1. نحسب الحدود U_0 ، U_1 و U_2.
2. إذا كان: $\boxed{U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0}$ فإن المتتالية (U_n) ليست حسابية.
3. إذا كان: $\boxed{\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}}$ فإن المتتالية (U_n) ليست هندسية.

إتجاه تغيّر متتالية عددية

الحالة العامة :

لدراسة إتجاه تغيّر متتالية (U_n).
ندرس إشارة الفرق $\boxed{U_{n+1} - U_n}$.

1. إذا كان: $\boxed{U_{n+1} - U_n > 0}$ فإنّ المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
2. إذا كان: $\boxed{U_{n+1} - U_n < 0}$ فإنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.
3. إذا كان: $\boxed{U_{n+1} - U_n = 0}$ فإنّ المتتالية (U_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.
4. إذا كانت المتتالية (U_n) متزايدة تماما أو متناقصة تماما نقول أنها رتيبة تماما.

حالة خاصة :

إذا كانت (U_n) متتالية معرفة على بـ U_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n: $\boxed{U_{n+1} = aU_n + b}$ حيث $(a \neq 1)$ و b عددان حقيقيان.

1. إذا كان : $\boxed{a < 0}$ (سالب) فإن المتتالية (U_n) غير رتيبة.
2. إذا كان : $\boxed{a < 0}$ (موجب) فإنّ إشارة الفرق $\boxed{U_1 - U_0}$ تحدّد إتجاه تغيّر (U_n).

أ) إذا كان $\boxed{U_1 - U_0 > 0}$ (موجب) فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب) إذا كان $\boxed{U_1 - U_0 < 0}$ (سالب) فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

تقارب متتالية :

لتكن (U_n) متتالية عددية

1. (U_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى $(U_n < a)$ فهي متقاربة.
2. (U_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل $(U_n > b)$ فهي متقاربة.
3. إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ ،حيث l عدد حقيقي فهي متقاربة.

قواعد خاصة بحساب نهاية متتالية

1. إذا كان: $q > 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. إذا كان: $-1 < q < 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
3. إذا كان: $q = 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
4. إذا كان: $q \leqslant 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ غير موجودة.

سؤال وجواب

السؤال: أوجد العدد الحقيقي حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة.
كيفية الإجابة: نقوم بإستبدال كلا من U_n و U_{n+1} بالعدد α في العلاقة التراجعية أي $(U_{n+1} = U_n = \alpha)$ نتحصل على معادلة للمجهول الحقيقي α نقوم بحل المعادلة للإيجاد قيمة العدد α.

السؤال: أوجد U_0 حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة.
كيفية الإجابة: نقوم بإستبدال كلا من U_n و U_{n+1} بالعدد U_0 في العلاقة التراجعية أي $(U_{n+1} = U_n = U_0)$ نتحصل على معادلة للمجهول الحقيقي U_0 نقوم بحل المعادلة للإيجاد قيمة العدد U_0.

تمارينات مقترحة

الشكل الأول

التمرين الأول:

I. نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{5}{3}U_n - \frac{1}{3}$.

1) أحسب الحدود U_1 ، U_2 و U_3.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \geqslant \frac{1}{2}$.

II. لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n - \frac{1}{2}$.

1) بيّن أنّ المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) عبر عن V_n بدلالة n، ثم إستنتج U_n بدلالة n.

3) نضع: $S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n$ و $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

- أحسب بدلالة n المجموع S_n ، ثم إستنتج المجموع S'_n بدلالة n.

التمرين الثاني:

نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{2}$.

1) أحسب الحدود U_1 ، U_2 و U_3.

2) لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n + \alpha$.

- عيّن قيمة α العدد التي تكون من أجلها المتتالية (V_n) هندسية.

3) نضع: $\alpha = 1$.

أ) عبر عن V_n بدلالة n، ثم إستنتج U_n بدلالة n.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n).

جـ) عيّن نهاية المتتالية (U_n).

د) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثالث:

نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} - 1$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > -2$.

2) أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج؟.

3) لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ) عيّن قيمة α العدد التي تكون من أجلها المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) عبر عن V_n بدلالة n، ثم إستنتج U_n بدلالة n.

جـ) عيّن نهاية المتتالية (U_n).

التمرين الرابع:

I. نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$.

- عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة.

II. بفرض أن $\alpha = 2$ في كل مايلي:

1) أحسب الحدود U_1 و U_2.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n < 3$.

3) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج؟.

III. لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n - 3$.

1) بيّن أنّ المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) عبر عن V_n بدلالة n، ثم إستنتج U_n بدلالة n.

3) أحسب نهاية المتتالية (U_n).

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

التمرين الخامس:

I. نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $5U_{n+1} = 3U_n - 4$.

1) أحسب الحدود U_1 ، U_2 و U_3.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_n > -2$.

3) أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n)، ماذا تستنتج؟.

II. لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n + 2$.

1) بيّن أنّ المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) عبر عن V_n بدلالة n، ثم إستنتج U_n بدلالة n.

3) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

التمرين السادس:

نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_n < 2$.

ب) عيّن إتجاه تغير المتتالية (U_n)،ثمّ إستنتج أنها متقاربة.

2) لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = 2U_n - 4$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0.

ب) جد عبارة V_n بدلالة n، ثم إستنتج U_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

التمرين السابع:

I. نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 12$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = 3 + \frac{1}{4}U_n$.

1) أحسب الحدود U_1 ، U_2 و U_3.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$4 \leqslant U_n \leqslant 12$.

3) أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n).

4) بيّن أنّ المتتالية (U_n) متقاربة، ثمّ أحسب نهايتها.

II. لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أكتب V_n بدلالة n، ثم إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي: $U_n = 8\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$
ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) نفرض في كل ما يلي: $\alpha = 4$.

4) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث:
$S'_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

التمرين الثامن:

نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = 3U_n - 2$.

1) أحسب U_1 ، U_2 و U_3 ، ثمّ خمن إتجاه تغير المتتالية (U_n).

2) لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_{n+1} - U_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين وحدها الأول V_0.

ب) عيّن V_n بدلالة n، ثم إستنتج أنّ المتتالية (U_n) متزايدة.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:
$S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n$.

أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_n = S_n + U_0$ ثم إستنتج U_n بدلالة n.

التمرين التاسع:

نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{1}{2}(3U_n - 1)$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_n < 1$.

ب) عيّن إتجاه تغير المتتالية (U_n)،ثمّ إستنتج أنها متقاربة.

2) لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n - 1$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0.

ب) جد عبارة V_n بدلالة n، ثم إستنتج U_n بدلالة n.

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

ب) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث:
$P_n = V_0 \times V_1 \times \cdots\cdots \times V_n$.

التمرين العاشر:

نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2$.

1) أ) أحسب الحدود U_1 و U_2.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_n < 8$.

2) أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n)، ثمّ إستنتج أنّها متقاربة.

3) لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ) بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n:
$V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$.

ب) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسيةأساسها $\frac{3}{4}$ يطلب تعيين وحدها الأول V_0.

جـ) نضع: $\alpha = 8$ ، عبر عن V_n بدلالة n، ثم إستنتج من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n - 8$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

تمارينات مقترحة

الشكل الثاني

التمرين الأول:

في أول جانفي من سنة 2005 بلغ عدد سكان مدينة 100000 نسمة كل سنة يتزيد عدد السكان 5% بإعتبار المواليد الجدد والموتى هناك 4000 مهاجر يمكنهم الإقامة كل سنة في هذه المدينة من أجل كل عدد طبيعي n نسمي U_n عدد سكان المدينة في أول جانفي $2005+n$

1) أ) أحسب الحدود U_1 ، U_2 و U_3.

ب) هل المتتالية (U_n) حسابية؟ هندسية؟ برر إجابتك.

جـ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_{n+1}=1.05U_n+4000$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n=U_n+80000$.

أ) أثبت أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ إستنتج أنّ :
$U_n=180000\times(1.05)^n-80000$

جـ) قدّر عدد السكان سنة 2021.

التمرين الثاني:

في بداية جانفي 2001 أودع شخص رصيد $10000.DA$ في بنك يقدم فوائد مركبة نسبتها "5 سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ $1500.DA$ في نهاية كل سنة (يعد حساب الفوائد).
نرمز بـ إلى رصيد هذا الشخص بداية جانفي $2001+n$.

1) أ) عيّن U_0 ، ثمّ أحسب U_1 و U_2.

ب) هل المتتالية (U_n) حسابية؟ هندسية؟ برر إجابتك.

جـ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_{n+1}=1.05U_n-1500$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (U_n).

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n=U_n-30000$.

أ) بيّن أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ إستنتج U_n بدلالة n.

جـ) أحسب نهاية المتتالية (U_n).

5) إبتداءا من أي سنة لايستطيع هذا الشخص سحب البلغ المعتاد؟

التمرين الثالث:

I. لتكن المتتاليتان العدديتان (U_n) و (V_n) المعرفتان كما يلي: $U_0=50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$U_{n+1}=0.7U_n+6$ و $V_n=U_n-20$.

1) برهن أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية أساسها 0.7 وحدها الأول V_0 يطلب تعيينه، ثمّ أكتب V_n بدلالة n.

2) أ) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام لـ (U_n).

ب) عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

II. تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكسب 600 مشترك جديد.

نعتبر مئة هي الوحدة ونرمز بـ U_n لعدد المشتركين سنة $2016+n$ أي $U_0=50$.

1) ماهو عدد المشتركين سنة 2017؟، ثمّ في سنة 2018؟.

2) أ) برّر العبارة: $U_{n+1}=0.7U_n+6$.

ب) إبتداءا من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك.

التمرين الرابع:

بيّنت دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا.
علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000.
نعتبر أن الألف هو الوحدة ونرمز بـ: U_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي: $U_0 = 50$

1) أحسب U_1 و U_2.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_{n+1} = 0.95U_n + 3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (U_n) ليست حسابية وليست هندسية.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $V_n = 60 - U_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ إستنتج U_n بدلالة n.

جـ) قدّر عدد العمال سنة 2017.

د) حدّد إتجاه تغيّر المتتالية (U_n).

هـ) أحسب نهاية المتتالية (U_n). هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟.

التمرين الخامس :

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغ من المال قدره 50000.DA في صندوق التوفير والإحتياط.
يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.
يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغ قدره 5000.DA (بعد حساب الفوائد).
يرمز U_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي $2008+n$.

1) أ) أحسب كلا: U_0 ، U_1 و U_2.

ب) هل المتتالية (U_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟برر إجابتك.

جـ) بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_{n+1} = 1.05U_n - 5000$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n = U_n - 100000$

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_n = -50000 \times (1.05)^n + 100000$.

3) أ) ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب) إبتداءا من سنة لاتسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

التمرين السادس :

بعد إصدار الدولة الجزائرية لقانون التقاعد الجديد في جانفي 2017، لاحظنا أن عدد كبير من موظفي التربية لولاية ميلة أودعوا ملفات التقاعد لدى مصلحة الصندوق الوطني. ولما قامت بدراسة هذه الوضعية، وجدت أن في 31 أوت 2016 بلغ عدد موظفي التربية لولاية ميلة 20000 موظفا وخلال كل سنة من السنوات القادمة سيحال 10% منهم إلى التقاعد، وبهدف تعديل عدد موظفيها مع إحتياجات القطاع لهذه الولاية، قررت توظيف 1500 موظف جديد خلال كل سنة.
نرمز من أجل كل عدد طبيعي n بـ U_n إلى عدد موظفي التربية لهذه الولاية في 31 أوت من سنة $2016+n$.

1) عيّن U_0 ، ثمّ أحسب U_1 و U_2 .

2) أ) بيّن أنّه ن أجل كل عدد طبيعي n:
$U_{n+1} = 0.9U_n + 1500$.

ب) هل يرتفع عدد الموظفين من سنة إلى أخرى؟ برر إجابتك.

3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $V_n = U_n - 15000$.

- بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.هل متقاربة؟.

4) أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n.

التمرين السابع:

لاحظ رئيس مركز رياضي أنّه في كل سنة، المركز يفقد 32% من أعضاءه ويستقبل 800 عضو جديد.
في سنة 2005 أحصى المركز الرياضي 1600 عضو.
نرمز بـ U_n إلى عدد الأعضاء في المركز في سنة $2005+n$.

1) تحقق أنّ: $U_1 = 1888$ ، ثمّ أحسب U_2.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_{n+1} = 0.68U_n + 800$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n = 2500 - U_n$

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) عبّر عن V_n بدلالة n ، ثمّ إستنتج U_n بدلالة n.

4) أحسب مجموع أعضاء المركز الرياضي من سنة 2005 إلى سنة 2021.

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n:
$S_n = U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_n$

التمرين الثامن:

في أول سبتمبر 2015، بلغ عدد تلاميذ إحدى الثانويات 300 تلميذ وفي السنة الموالية(أول سبتمبر 2016) لاحظ مدير الثانوية ان من تلاميذ يواصلون دراستهم بالمؤسسة وكذلك يلتحق بها 150 تلميذ جديد.
بفرض أن تطور عدد التلاميذ يتواصل بنفس الوتيرة خلال السنوات العشر القادمة.
نرمز بـ U_n إلى عدد تلاميذ الثانوية سنة $2015+n$ حيث n عدد طبيعي.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:
$U_{n+1} = 0.75U_n + 150$ ، ثمّ إستنتج أنّ:
$U_{n+1} - 600 = \frac{3}{4}(U_n - 600)$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n = U_n - 600$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) عبّر بدلالة n عن V_n و U_n.

3) أ) ماهو عدد تلاميذ هذه الثانوية المتوقع سنة 2018، وعددها سنة 2020؟.

ب) إبتداءا من أي سنة يصبح عدد تلاميذ هذه الثانوية أقل من 570 تلميذ.

التمرين التاسع :

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ $70000.DA$ ، في شهر جانفي إستهلك منه 80% وإبتداء من شهر فيفري قرّر تخفيض مبلغ الإستهلاك شهريا بنسبة 5% من مبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله.

1) أ) ما مبلغ المستهلك في شهر جانفي؟.

ب) حدّد المبلغ المستهلك في شهر فيفري.

2) نضع: U_1 المبلغ المستهلك في شهر جانفى و U_n المبلغ المستهلك في الشهر n، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

- عبّر U_{n+1} عن بدلالة U_n وإستنتج أنّ (U_n) متتالية هندسية أساسها 0.95.

3) أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n.

4) أ) أحسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019.

ب) أوجد المبلغ المدخر خلال السنة.

تمارينات مقترحة

الشكل الثالث ومتفرقات

التمرين الأول :

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n = 4n + 2$.

1) أحسب الحدود: U_0 ، U_1 ، U_2 و U_{10}.

2) بيّن أن (U_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3) إستنتج إتجاه تغيّر المتتالية (U_n).

4) تحقق أن حد 2010 من حدود 1(U_n) ، مارتبته؟.

5) أحسب المجموع S بحيث:

$$S = U_{1830} + U_{1831} + \cdots\cdots + U_{1962}$$

التمرين الثاني :

(U_n) متتالية حسابية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالحدين: $U_3 = -8$ و $U_8 = 12$.

1) عيّن أساسها r وحدها الأول U_1

2) أكتب U_n بدلالة n.

3) تحقق أن حد 812 من حدود (U_n) ، مارتبته؟.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث:

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_n$$

التمرين الثالث :

(U_n) متتالية حسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $U_2 = 11$ و $U_7 = 31$.

1) عيّن أساسها r وحدها الأول U_0

2) أكتب U_n بدلالة n.

3) تحقق أن حد 483 من حدود (U_n) ، مارتبته؟.

4) أحسب المجموع S بحيث:

$$S = 3 + 7 + +11 + \cdots\cdots + 483$$

التمرين الرابع :

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_1.

1) أحسب إذا U_2 علمت: $U_1 + U_3 = 12$.

2) أحسب إذا U_4 علمت: $U_3 + U_4 + U_5 = 30$.

3) عيّن الأساس r والحد الأول U_1 للمتتالية (U_n).

4) أكتب عبارة U_n بدلالة n ، ثمّ عيّن n بحيث يكون $U_n = 32$.

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث:

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_n$$

التمرين الخامس :

(U_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب q وحدها الأول $U_0 = 3$.

1) أحسب الأساس q إذا علمت: $U_5 = 4U_3$.

2) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعيn: $U_n = 3 \times 2^n$

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث:

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_n$$

، ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 32$.

التمرين السادس :

(U_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب q وحدها الأول U_0.

1) عيّن الأساس q وحدها الأول U_0 إذا علمت: $U_5 = 576$ و $U_3 = 144$.

2) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعيn: $U_n = 18 \times 2^n$

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث:

$$S_n = U_0 + U_2 + \cdots\cdots + U_n$$

، ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 1134$.

التمرين السابع :

(V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $V_0 = 18$ والعلاقة: $V_0 + V_1 + V_2 = 38$.

1) بيّن أنّ أساس المتتالية (V_n) هو $\frac{2}{3}$

2) أ) أكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n.

ب) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (V_n).

جـ) أحسب نهاية (V_n).

3) نضع: $S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_{n-1}$

أ) أحسب S_n بدلالة n ، ثمّ إستنتج نهاية S_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

ب) جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = \frac{3510}{81}$.

التمرين الثامن :

(U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول U_0 وبالعلاقة: $U_2 + 2U_5 = 27$ و $U_0 = \frac{9}{2}$.

1) أحسب حدها الأول U_0 وأساسها r.

2) أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n.

3) بيّن أن 2019 حد من حدود المتتالية (U_n) ، ثم أحسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث:

$S_1 = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots\cdots + U_{1344}$

$S_2 = U_2 + U_4 + U_6 + \cdots\cdots + U_{1344}$

- إستنتج حساب المجموع S_3 حيث:

$S_3 = U_1 + U_3 + U_5 + \cdots\cdots + U_{1343}$

التمرين التاسع :

(U_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $U_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > -3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

جـ) إستنتج أنّ المتتالية (U_n) متقاربة.

2) لتكن (V_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $V_0 = 6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n) = 18$.

أ) بيّن أنّ:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n) = \frac{V_0}{1-q}$.

ب) أحسب الأساس q ، ثمّ عيّن عبارة الحد العام V_n بدلالة n

جـ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$U_n = V_n - 3$ إستنتج عبارة U_n بدلالة n.

التمرين العاشر :

(U_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $U_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1$.

1) أ) أحسب: U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4.

ب) هل المتتالية (U_n) رتيبة على $\mathbb{N}$ ؟ برر إجابتك.

2) أ) بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n :

$U_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(U_n - 4)$.

ب) إستنتج أن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - 4$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

جـ) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ U_n بدلالة n.

د) بيّن أنّ (U_n) متقاربة.

3) بإستعمال عبارة U_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب).