التحضير لبكالوريا 2021

3.

الدالة اللوغاريتمية

شعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

من تقديم الأستاذ شعبان أسامة

.1

عين مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

.2

اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

1) $\ln 14-\ln 7$ 2) $\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{2}{3}$ ؛

.3

اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

- $A=\ln a-\ln b+2\ln c$
- $B=\dfrac{1}{2}\ln a-\dfrac{3}{2}\ln b+\ln\dfrac{a}{b}$
- $C=\ln(a+1)-\dfrac{1}{2}\ln b+\dfrac{3}{2}\ln(a+b)$

.4

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=\ln(2x-3)$

2) $\ln(x^2-1)=\ln(x+5)$

3) $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)=0$

4) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

5) $\ln x+\ln(4-x)=\ln(2x-1)+\ln 3$

6) $\ln(x+1)=-1+\ln(x-1)$

.5

حل المتراجحات التالية:

1) $\ln(3x)<\ln(4x+8)$

2) $\ln(x^2)<\ln(3x-2)$

3) $\ln(2x^2)>\ln(6-4x)$

4) $\ln(x^2+x-2)>0$

5) $\ln(x-1)+\ln(x-2)>2\ln(5-x)$

.6

نعتبر كثير الحدود p للمتغير الحقيقي x حيث:

$p(x)=x^4-25x^2+144$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=0$

2) استنتج حل المعادلة:

$$(\ln x)^4-25(\ln x)^2+144=0$$

.7

1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} x^2+2y=16 \\ \ln\dfrac{x}{y}=-\ln 3 \end{cases}$$

2) أ- حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية: $\begin{cases} 4x+y=5 \\ 8x-4y=4 \end{cases}$

ب- استنتج حل الجملة التالية في $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \ln x^4y^7-2\ln y^3=5 \\ \ln\dfrac{x^6}{y^4}+\ln x^2=4 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \ln(x+1)^4+\ln y=0 \\ \ln x^2+\ln\dfrac{1}{y}=\ln x \end{cases}$$

.7

ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0;+\infty[$

1) $\ln x-\ln 3$ 2) $(\ln x+1)(\ln x-1)$

3) $\ln x(\ln x-1)$ 4) $2x\ln(1-x)$

5) $-x^2\ln(x+1)$

.8

احسب النهايات في كل حالة من الحالات المقترحة:

$\lim_{x\to+\infty} 2x+\ln x$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln x$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} 3-2\ln x$ ؛

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} x+5-\ln x$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3+\ln x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln\left(x^2\right)}$

$\lim_{x\to+\infty}(3-x)\ln x$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x\right)\ln(-x)$

$\lim_{x\to+\infty}(x^2+\ln x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)$ $\lim_{x\to+\infty} x-4+\ln x$ ،

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} x-4+\ln x$ $\lim_{x\xrightarrow{>}0}(3(\ln x)^2-\ln x)$ ،

$\lim_{x\to+\infty}(1-(\ln x)^2)$ $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1+2\ln x}{x}$ ،

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} x^2+\ln x-1$

.9

تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال المعطى ثم احسب دالتها المشتقة

1) $f\left(x\right)=\left(\ln x\right)^2+\ln x$ ، $D=]0;+\infty[$

2) $f\left(x\right)=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}$ ، $D=]0;+\infty[$

3) $f\left(x\right)=x\ln|x|-2x+3$ ، $D=]-\infty;0[$

.10

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;2]$ بـ:

$$f\left(x\right)=2x^2-3-\ln x$$

$(\mathcal{C})$ هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\|=5cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$

1. ادرس نهاية الدالة f عند 0 ، فسر النتيجة هندسيا.
2. شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. عين معادلة المماس T للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 1.
4. ارسم T و $(\mathcal{C})$.

.11

لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x+1+2\left[\ln x-\ln(x-1)\right]$$

نسمي $(\mathcal{C})$ إلى التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس الوحدة $1cm$

1.بين أنه من أجل كل $x\in]1;+\infty[$: $f(x)=x+1+2\ln\frac{x}{x-1}$

2.عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3.ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4.احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$.استنتج أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ يطلب تعيين معادلة له .

ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم Δ.

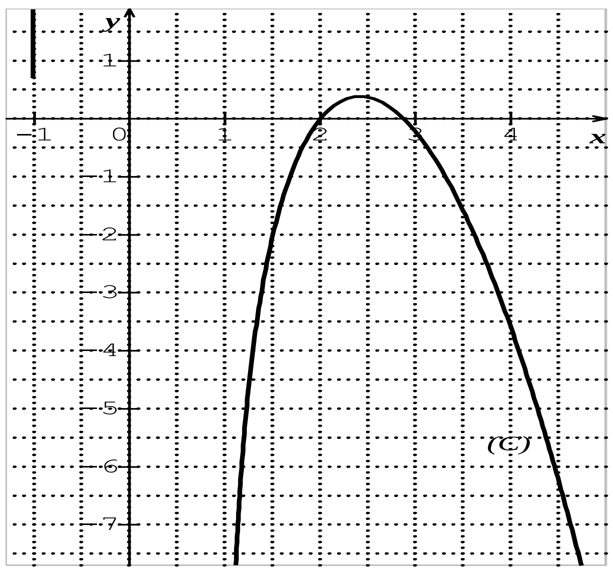
5. ارسم بعناية المنحني $(\mathcal{C})$.

.12

I). الدالة g معرفة على المجال $]1;+\infty[$ كمايلي :

$$g(x)=-x^2+2x+4\ln\left(x-1\right)$$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . (الشكل المقابل)



1. بقراءة بيانية حدد عدد حلول المعادلة $g\left(x\right)=0$.
2. احسب $g\left(2\right)$.
3. بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2,87;2,88[$. ($2,87\prec\alpha\prec2,88$) .
4. استنتج حسب قيم x ، إشارة $g\left(x\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

II).

نعتبر f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-3+4\frac{\ln\left(x-1\right)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أ) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}1} f\left(x\right)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج) احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x-3\right)\right]$ واستنتج أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$.

د) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (Γ) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ) بين أنه من اجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$

$$f'(x)=-\frac{g\left(x\right)}{\left(x-1\right)^2}$$

(f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (Γ). (نأخذ $f(\alpha)=3.9$) .

.13

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1) احسب $\lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)$.

2) بين أن $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

4) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2}<\alpha<0$.

7) أرسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ) ؟

8) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}x+m$

.14 <u>جزء من بكالوريا 2015- الموضوع 2- شعبة: تسيير و اقتصاد</u>

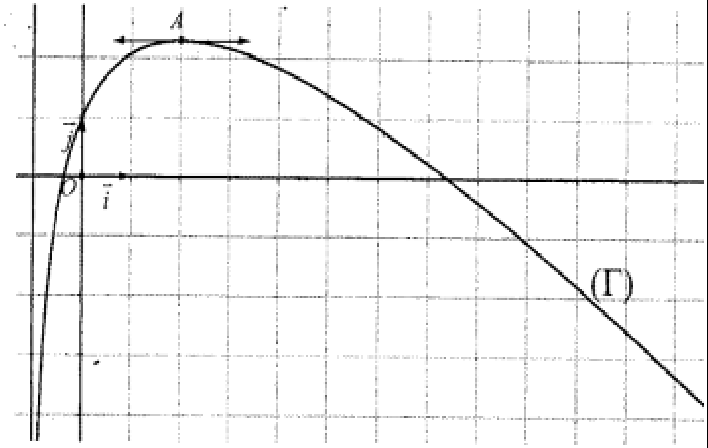
المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f دالة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=ax+b+3\ln(x+1)$ حيث a و b عددان حقيقيان .

(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل المقابل ، يقبل في النقطة $A(2;-1+3\ln3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

1) بقراءة بيانية :

أ - ضع تخمينا حول $\lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.



ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2) باستعمال المعطيات المتوفرة ، جد قيمة كل من a و b.

II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x)=-x+1+3\ln(x+1)$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر.

2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يعطى : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=0$)

3) أ - عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x$ ، ثم أكتب معادلة للمماس (T) .

ب - استنتج بيانيا ، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين موجبين تماما .

4) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$

أ - أحسب $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

ب - لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل ،

بيّن أن : $\alpha\in]7,37;7,38[$ و $\beta\in]-0,37;-0,36[$.

.15 <u>جزء من بكالوريا 2018- الموضوع 1- شعبة: تسيير و اقتصاد</u>

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-2;8[$ بـ : $f(x)=\ln(x+2)+\ln(-x+8)-\ln16$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نأخذ الوحدة البيانية : $2cm$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2;8[$ و فسّر النتيجتين بيانيا .

2) تحقق أنه من أجل كل x من $]-2;8[$: $f'(x)=\frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$. (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

3) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2;8[$ و شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

5) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-2;8[$: $(6-x)$ ينتمي إلى $]-2;8[$ و $f(6-x)=f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

6) أرسم المنحنى (C_f) .

.16

I)- لتكن u دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $u(x)=\ln x-2$ ، (C_u) المنحنى الممثل للدالة u في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. استنتج طريقة لانشاء (C_u) انطلاقا من منحنى دالة مرجعية يطلب تعينها.
2. أنشئ (C_u).

II)- لتكن g دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=\ln x+x-3$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعين حصرا له سعته 10^{-1} .
3. استنتج اشارة $g(x)$.

III)- لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$. ، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم السابق.

1 .أدرس تغيرات الدالة f .

2 .برهن أن $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ثم استنج حصرا ل $f(\alpha)$.

3 .أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_u) و (C_f).

4 .احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-u(x)]$ ثم فسرهذه النتيجة بيانيا .

5 .عين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

6 .أنشئ (C_f) في المعلم السابق.

.17

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي :

$$f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$.

(C_f) التمثيل البياني في المستوي المنسوب الى معلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{\overset{<}{x\to 0}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ،

$$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل المنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4. بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

5 . أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

6. أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بين ان $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بين ان المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين احداثيتها.