تمـــاريـــن و مشكـــــلات:

التمرين 1

ضع علامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة× أمام كل جملة خاطئة:

1 – إذا كانت F دالة أصلية لدالة f على مجال I
فإن f هي الدالة المشتقة للدالة F .

2 – الدالة: $x \mapsto x^3 - 5x$ هي الدالة الأصلية الوحيدة
للدالة: $x \mapsto 3x^2 - 5$ على $\mathbb{R}$.

3 – كل دالة مستمرة على مجال يمكن تعيين دالتها الأصلية.

4 – إذا كانت F دالة أصلية لدالة f فإن F^2 دالة أصلية
للدالة f^2 .

5 – الدالة F' هي دالة أصلية للدالة F''.

6 – كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دالة أصلية وحيدة
تنعدم عند عدد x_0 من I .

7 – الدالة $x \mapsto \sin 2x$ هي الدالة الأصلية للدالة
$x \mapsto \cos 2x$ على $\mathbb{R}$.

8 – الدالة $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على $\mathbb{R}$.

9 – الدالة الأصلية لدالة كثير حدود هي دالة كثير حدود.

10 – الدالة: $f^{(n)}$ هي إحدى الدوال الأصلية للدالة f .

11 – الدالة: $x \mapsto \cos x + \sin x$ هي الدالة الأصلية
للدالة: $x \mapsto \sin x - \cos x$.

12 – إذا كانتا F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة f على مجال I
فإنه من أجل كل عدد x من I: $h(x) - g(x) = k$ و $k \in \mathbb{R}$.

13 – الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ لا تقبل دوال أصلية على المجال $]0;+\infty[$

14 – توجد دالة كثير حدود إحدى دوالها الأصلية هي نفسها.

15 – الدالة $x \mapsto x^3$ هي الدالة الأصلية التي تنعدم عند 0

للدالة $x \mapsto 3x^2$

16 – إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فهي تقبل دالة أصلية وحيدة على هذا المجال .

17 – كل دالة معرفة على مجال I تقبل دالة أصلية على I.

18 – كل دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ تقبل دوال أصلية

على $[a;b]$.

19 – الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto (x^2+1)^2$ هي الدوال

$x \mapsto \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + k$ ، $k \in \mathbb{R}$

20 – الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هي الدوال :

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + k$$

التمرين2

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي معينا مجال الدراسة :

1) $f(x) = 2x - 1$

2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

3) $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 4$

4) $f(x) = x^4 - x^3$

5) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

9) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

10) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos^3 x}$

التمرين3

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي معينا مجال الدراسة

1) $f(x) = x^2\left(x^3+1\right)^2$

2) $f(x) = (x+1)\left(x^2+2x-1\right)^3$

3) $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{\left(x^2-2x+4\right)^3}$

5) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$

6) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

8) $f(x) = \cos 2x - \sin 3x$

9) $f(x) = \sin x . \cos^3 x$

10) $f(x) = \cos 2x . \sin 2x$

التمرين4

عين الدالة الأصلية $\boldsymbol{F}$ للدالة $\boldsymbol{f}$ على المجال I التي تحقق $\boldsymbol{F}(0)=0$

في كل حالة مما يلي :

1) $f(x)=sim\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ؛ $I=]-1;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^3}$ ؛ $I=]-\infty;-2[$

4) $f(x)=x^n-1\ ;\ n\in\mathbb{N}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

6) $f(x)=x+1-\frac{1}{(x+1)^2}$ ؛ $I=]-1;+\infty[$

7) $f(x)=\sin x.\cos^n x$ ؛ $I=\mathbb{R}$ ، $n\in\mathbb{N}$

8) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)^3}$ ؛ $I=]-\infty;-2[$

التمرين5

نعتبر الدالة $\boldsymbol{f}$ حيث : $f(x)=\sin^3 x$

1) عين الدوال الأصلية $\boldsymbol{F}$ للدالة $\boldsymbol{f}$.

2) استنتج الدالة الأصلية $\boldsymbol{H}$ للدالة $\boldsymbol{f}$ و التي تأخذ القيمة 2 من أجل $x=0$

التمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^3-3x}{(x-1)^2}$$

1) عين D_f مجموعة التعريف للدالة f .

2) بين أنه من أجل كل عدد x من D_f فإن:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3) عين الدوال الأصلية F للدالة f على $]1;+\infty[$.

4) استنتج الدالة الأصلية H التي تنعدم عند $x=2$ للدالة f على $]1;+\infty[$.

التمرين 7

1) ادرس تغيرات الدالة g حيث: $g(x)=\sqrt{3-2x}$

2) نعتبر الدالة f حيث:

$f(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{3-2x}$ عين الأعداد الحقيقية α و β و γ بحيث تكون f دالة أصلية للدالة g على المجال $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$.

3) أنشئ التمثيل البياني للدالة g.

التمرين 8

نعتبر الدالة f : $f(x)=\sin x+\sin^3 x$

1) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

2) بين أنه يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f''(x)+\alpha f(x)=\beta \sin x$

3) استنتج الدوال الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

4) استنتج الدالة الأصلية H للدالة f بحيث : $H\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

التمرين 9.

f دالة فردية و مستمرة على $\mathbb{R}$. F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

G دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x)=F(x)-F(-x)$

بين أن G دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

التمرين 10.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

(C) تمثيلها البياني .

1 – ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}_+$

2 – بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا.

3 – لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ و التي تنعدم عند 0 . بين أن F موجودة.

4 – استنتج اتجاه تغير الدالة F .

5 – نعرف على $\mathbb{R}_+$ الدالتان H و K كما يلي :

$$H(x)=F(x)-x \quad \text{و} \quad K(x)=F(x)-\frac{2}{3}x$$

- ادرس اتجاه تغير الدالتان H و K على $\mathbb{R}_+$.
- استنتج أنه من أجل كل عدد x حيث $x\geq 0$
فإن : $\frac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$.
- استنتج $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

6 – استنتج أن المعادلة $F(x)=\pi$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$.

– بين أن: $\pi\leq\alpha\leq\frac{3}{2}\pi$

التمرين 11

نعتبر المعادلة التفاضلية : $y' = x^2+\frac{1}{(x+1)^2}...(1)$

- عين حلا للمعادلة التفاضلية (1).
- استنتج الحل الذي ينعدم من أجل $x=0$.
- نضع : $y=f(x)$. عين الدالة f .
- ادرس تغيرات الدالة f .
- ادرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل لتغيرات الدالة f .
- أنشئ (C) بعد حساب : $f(1), f(2), f(0), f(-2)$.

التمرين 12.

عين الحل الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x=2$ للمعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$$ ، حيث $x \in \mathbb{R}$.

– بوضع: $y = f(x)$. ادرس اتجاه تغير الدالة f .

– ادرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل لتغيرات f .

– احسب كل من: $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-2)$, $f(-4)$, $f(-5)$

أعطي القيم مدورة إلى 10^{-2} ثم أنشئ (C).

الحـــلــــــــــول:

التمرين 1

1) √	2) ×	3) ×	4) ×
5) √	6) ×	7) ×	8) ×
9) √	10) ×	11) √	12) √
13) ×	14) √	15) √	16) ×
17) ×	18) √	19) ×	20) √

التمرين 2

تعيين الدوال الأصلية :

1) لدينا : $f(x)=2x-1$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=x^2-x+k \quad ,k\in\mathbb{R}$$

2) لدينا : $f(x)=x^2-4x+3$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+k \quad ,k\in\mathbb{R}$$

3) لدينا : $f(x)=-3x^3+5x^2-4$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-4x+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$$

4) لدينا : $f(x)=x^4-x^3$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$$

5) لدينا : $f(x)=\frac{4}{x^2}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}^*$

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و عليه تقبل دوال أصلية F على كل منهما معرفة بالعبارة:

$$F(x)=\frac{-4}{x}+k,k\in\mathbb{R}.$$

6) لدينا : $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}^*$

الدالة f هي مجموع دالتين ناطقتين فهي مستمرة على مجموعة التعريف و عليه فهي دوال أصلية على كل من المجالين :

$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$ معرفة بالعبارة :

$$F(x)=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2x^2}+k \quad ,k\in\mathbb{R}$$

7) لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}_+^*$

الدالة f هي مقلوب دالة صماء مستمرة و عليه فهي مستمرة على D_fو منه تقبل دوال أصلية F حيث :

$$F(x)=2\sqrt{x}+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$$

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ و منه : $D_f=]1;+\infty[$

الدالة f مستمرة لأنها مقلوب مركب دالتين مستمرتين و عليه تقبل دوال أصلية F حيث : $F(x)=2\sqrt{x-1}+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$

9) $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية F

و لدينا: $f(x)=\cos 2x$

و منه : $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$

10) لدينا: $f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos^3 x}$

ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R} : \cos x\neq 0\}$

إذن: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$

أي : $D_f=\left]\frac{\pi}{2}+k\pi \; ; \; \frac{\pi}{2}+(k+1)\frac{\pi}{2}\right[\; , k\in\mathbb{R}$

و عليه f مستمرة على D_f لأنها حاصل قسمة مركب دوال مثلية

و كثيرات حدود تقبل دوال أصلية F

و لدينا : $f(x)=\frac{2\sin x.\cos x}{.\cos^3 x}=\frac{2\sin x}{.\cos^2 x}=-2.\frac{-\sin x}{[\cos x]^2}$

و منه : $F(x)=-2\times\frac{-1}{\cos x}+k$

إذن : $F(x)=\frac{2}{\cos x}+k$ حيث k ثابت حقيقي.

التمرين 3

تعيين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي :

1) لدينا: $f(x)=x^2\left(x^3+1\right)^2$ و $D_f=\mathbb{R}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{3}.3x^2\left(x^3+1\right)^2$

إذن: $F(x)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\left(x^3+1\right)^3+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$

أي : $F(x)=\frac{1}{9}(x^3+1)^3+k$

2) لدينا : $D_f=\mathbb{R}$ ؛ 2) $f(x)=(x+1)(x^2+2x-1)^3$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}.(2x+2)(x^2+2x-1)^3$

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}(x^2+2x-1)^4+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$

أي : $F(x)=\frac{1}{8}(x^2+2x-1)^4+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$.

3) لدينا : $D_f=\mathbb{R}$ ؛ $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2+1}+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$.

4) لدينا : $D_f=\mathbb{R}$ ؛ $f(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x+4)^3}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2}$

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2-2x+4}+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$.

5) لدينا : $D_f=\mathbb{R}$ ؛ $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}$

إذن : $k \in \mathbb{R}$; $F(x) = \frac{1}{4} \times \sqrt{x^4 + 1} + k$.

6) لدينا : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ؛ $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

و منه : $f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$

إذن : $k \in \mathbb{R}$; $F(x) = \sqrt{x^2 - 1} + k$.

7) لدينا : $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ؛ $D_f = \mathbb{R}$

إذن : $\lambda \in \mathbb{R}$; $g(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \lambda$

8) لدينا : $f(x) = \cos 2x - \sin 3x$ ؛ $D_f = \mathbb{R}$

إذن : $k \in \mathbb{R}$; $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + k$

9) لدينا : $f(x) = \sin x . \cos^3 x$ ؛ $D_f = \mathbb{R}$

إذن : $k \in \mathbb{R}$; $F(x) = \frac{1}{4} \cos^4 x + k$

10) لدينا : $f(x) = \cos 2x . \sin 2x$ ؛ $D_f = \mathbb{R}$

و منه : $f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \sin 2x . \cos 2x$

و عليه : $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$

إذن : $F(x) = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{4} \cos 4x + k$

أي : $F(x)=\frac{-1}{8}\cos 4x+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$

التمرين 4

تعيين الدوال الأصلية :

1) لدينا : $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}+\lambda$

أي : $g(x)=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ ومنه : $-2+0+\lambda=0$ أي: $\lambda=2$

إذن: $g(x)=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+2$.

2) لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ؛ $I=]-1;+\infty[$

و منه : $f(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

إذن : $g(x)=2\sqrt{x+1}+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ ومنه : $2+\lambda=0$ أي : $\lambda=-2$

إذن : $g(x)=2\sqrt{x+1}-2$.

3) لدينا : $f(x)=\frac{1}{(x+2)^3}$ ؛ $I=]-\infty;-2[$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{2(x+2)^2}+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ و منه: $-\frac{1}{8}+\lambda=0$ أي: $\lambda=\frac{1}{8}$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{2(x+2)^2}+\frac{1}{8}$.

4) لدينا : $f(x)=x^n-1 \; ; \; n\in\mathbb{N}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

إذن : $g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}-x+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ و منه : $0-0+\lambda=0$ أي : $\lambda=0$

إذن : $g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}-x$.

5) لدينا : $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

إذن : $g(x)=\tan x+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ و منه: $\tan 0+\lambda=0$ أي: $\lambda=0$

إذن : $g(x)=\tan x$.

6) لدينا : 6) $f(x)=x+1-\frac{1}{(x+1)^2}$ ؛ $I=]-1\,;+\infty[$

إذن : $g(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{x+1}+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ و منه: $1+\lambda=0$ أي: $\lambda=-1$

إذن : $g(x)=\frac{x^2}{2}+x\frac{1}{x+1}-1$.

7) لدينا : $f(x)=\sin x.\cos^n x$ $I=\mathbb{R}$

و منه : $f(x)=-1\times(-\sin x)(\cos x)^n$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}x+k$

لكن: $g(0)=0$ و منه: $\frac{-1}{n+1}+k=0$ أي: $k=\frac{-1}{n+1}$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}x+\frac{1}{n+1}$

8) لدينا : $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)^3}$ ؛ $I=]-\infty\ ;\ -2[$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{x+2}-\frac{1}{2(x+2)^2}+k$

لكن: $g(0)=0$ و منه: $\frac{-1}{2}-\frac{1}{8}+k=0$ أي: $k=\frac{5}{8}$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{n+2}-\frac{1}{2(n+2)^2}+\frac{5}{8}$.

التمرين 5

1 – تعيين الدوال الأصلية للدالة f :

لدينا : $\sin^3 x=\sin x.\sin^2 x=\sin x(1-\cos^2 x)$

وعليه : $f(x)=\sin x-\sin x.\cos^2 x$

إذن : $g(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+k$

2 – استنتاج h حيث : $h(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+k$

مع : $h(0)=2$ ومنه: $-1+\frac{1}{3}+k=0$ أي: $k=\frac{2}{3}$

إذن : $h(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{3}$.

التمرين 6

1 – مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2 – تعيين a,b,c :

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + (-2a+b)x^2 + (a+2b)x + b + c}{(x-1)^2}$$

و منه : $\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=0 \\ a-2b=-3 \\ b+c=0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a=1 \\ b=+2 \\ c=-2 \end{cases}$

و عليه : $f(x) = x + 2 - \dfrac{2}{(x-1)^2}$

3 – تعيين الدوال الأصلية g :

$$f(x) = x + 2 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

و منه : $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \dfrac{2}{x-1} + \lambda$ ؛ $\lambda \in \mathbb{R}$.

4– استنتاج الدالة الأصلية h حيث : $h(2) = 0$

لدينا : $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \dfrac{2}{x-1} + \lambda$

و منه : $h(2)=2+4+2+\lambda$ أي : $h(2)=\lambda+8$

إذن: $\lambda+8=0$ و منه: $\lambda=-8$

إذن: $h(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{2}{x-1}-8$.

التمرين 7

1- دراسة تغيرات g : $D_f=\left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-2x}=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ <}} g(x)=0$

$$g'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}=\frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$$

و منه: $g'(x)<0$ و عليه g متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $\frac{3}{2}$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

2- تعيين : α,β,γ :

f دالة أصلية للدالة g تكافئ : $f'(x)=g(x)$ و لدينا :

$$f'(x)=(2\alpha x+\beta)\sqrt{3\text{-}2x}+\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\times\frac{-2}{2\sqrt{3\text{-}2x}}$$

$$=(2\alpha x+\beta)\sqrt{3\text{-}2x}-\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\frac{\sqrt{3\text{-}2x}}{3\text{-}2x}$$

$$f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(3-2x)\sqrt{3-2x}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{3-2x}}{3-2x}$$

$$=\frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x}\left(6\alpha x-4\alpha x^2+3\beta-2\beta x-\alpha x^2-\beta x-\gamma\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3-2x}}{3-2x}\times\left[-5\alpha x^2+(6\alpha-3\beta)x+3\beta-\gamma\right]$$

تكون f دالة أصلية للدالة g إذا و فقط إذا كان :

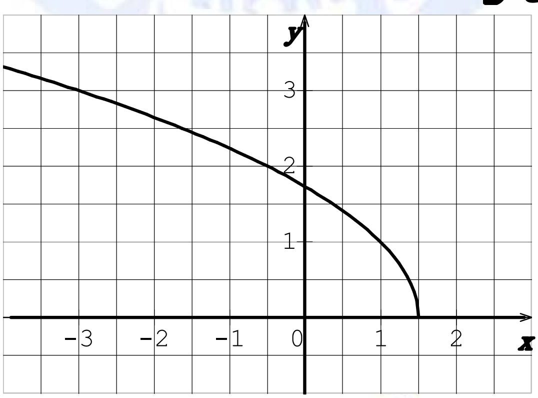
$$\frac{-5\alpha x^2+(6\alpha-3\beta)x+3\beta-\gamma}{3-2x}=1$$

و عليه : $-5\alpha x^2+(6\alpha-3\beta)x+3\beta-\gamma=3-2x$

و منه : $\begin{cases}-5\alpha=0\\6\alpha-3\beta=-2\\3\beta-\gamma=3\end{cases}$ و عليه : $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=\dfrac{2}{3}\\\gamma=-1\end{cases}$

و منه : $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}x-1\right)\sqrt{3-2x}$

3 – إنشاء بيان g :



التمرين 8

1) حساب $f(x)$ و $f'(x)$:

لدينا : $f(x)=\cos x+3\cos x\sin^2 x$

و منه : $f(x)=\cos x\left(3+\sin^2 x\right)$

$$f'(x)=-\sin x\left(3+\sin^2 x\right)+\cos x\left(2\cos x\sin x\right)$$

$$f'(x)=\sin x\left[-3-\sin^2 x+2\cos^2 x\right]$$

2) نبين وجود α و β : $f'(x)+\alpha f(x)=\beta\sin x$

$$-3\sin x-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x+\alpha\sin x+\alpha\sin^3 x=\beta\sin x$$

$$(\alpha-3)\sin x-\sin^3 x+2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)\times\alpha\sin^3 x=\beta\sin x$$

$$(\alpha-3)\sin x-\sin^3 x+2\sin x-2\sin^3 x+\alpha\sin^3 x-\beta\sin x=0$$

$$(\alpha-\beta-1)\sin x+(\alpha-3)2\sin^3 x=0$$

و منه : $\begin{cases}\alpha-3=0\\ \alpha-\beta-1=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\end{cases}$

إذن: $f'(x)+3f(x)=2\sin x$

3) إيجاد الدوال الأصلية F للدالة f :

مما سبق : $f(x)=\frac{1}{3}\left(-f'(x)+2\sin x\right)$

و عليه : $k\in\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{3}\left(-f(x)-2\cos x\right)+k$

إذن: $F(x)=\frac{1}{3}\left(\cos x.\left(3+\sin^2 x\right)-2\cos x\right)+k$

أي : $F(x)=\frac{1}{3}\left(\cos x+\cos x.\sin^2 x\right)+k$

4) تعيين الدالة الأصلية H حيث : $H\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

لدينا : $H(x)=\frac{1}{3}\left(\cos x+\cos x\sin^2 x\right)+k$

ومنه : $H\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi}{2}\right)+k$

لكن: $H\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ ومنه : $k=1$

وعليه : $h(x)=\frac{1}{3}\cos x\left(1+\sin^2 x\right)+1$

التمرين 9

نبين أن G دالة ثابتة على $\mathbb{R}$:

لدينا : $G(x)=F(x)-F(-x)$

و لدينا : F دالة أصلية للدالة f و منه : $F'(x)=f(x)$

و بما أن f فردية فإن : $f(-x)=f(x)$

لدينا : $G(x)=F'(x)-(-1)F'(-x)$

$$G(x)=F'(x)+F'(-x)$$

$$G(x)=f(x)+f(-x)$$

$$G(x)=f(x)-f(x)=0$$

و عليه : $G(x)=\lambda$ حيث : λ عدد ثابت.

التمرين 10

1 – دراسة تغيرات f على $\mathbb{R}_+$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ ومنه : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=1$

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-2x-x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

و منه f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[0;1]$

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1

2– نبين أن (C) يقبل مستقيم مقارب :

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ فإن $y=1$ معادلة مستقيم مقارب.

3- نبين أن F موجودة وبما أنها دالة ناطقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها وعليه فهي مستمرة على $\mathbb{R}_+$ و منه f تقبل دالة أصلية F و هذه الدالة وحيدة لأنها تأخذ القيمة 0 عند 0.

4- استنتاج تغير الدالة F:

لدينا : $F'(x) = f(x)$ حيث : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

لكن : $\dfrac{2}{3} \le f(x) \le 1$ وعليه : $F'(x) > 0$

ومنه F متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

5- دراسة اتجاه تغير H :

لدينا: $H'(x) = F'(x) - \dfrac{2}{3} = f(x) - \dfrac{2}{3}$ لكن $f(x) \ge \dfrac{2}{3}$

و منه: $H'(x) \ge 0$ وعليه H متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$.

- دراسة اتجاه تغير k :

$K'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1$ ؛ $f(x) \le 1$

$K'(x) \le 0$ و عليه K متناقصة تماما على $\mathbb{R}_+$

- استنتاج أن: $\dfrac{2}{3}x \le F(x) \le x$

لدينا: $f(x) \ge \dfrac{2}{3}$ ولدينا: $f(x) \le 1$

و منه: $F(x) \le x$ إذن: $\dfrac{2}{3}x \le F(x) \le x$

- استنتاج النهاية:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3}x = +\infty$ و عليه : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

6- استنتاج أن المعادلة $F(x)=\pi$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$:

الدالة F مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$ و بما أن $\pi \in \mathbb{R}_+$

فإن يوجد عدد وحيد α بحيث $f(\alpha)=\pi$

حسب نظرية القيم المتوسطة

- نبين أن $\pi \le \alpha \le \frac{3}{2}\pi$

لدينا : $\frac{2}{3}\pi \le F(\pi) \le \pi$ حيث : $\frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \le F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \le \frac{3\pi}{2}$

ومنه : $\pi \le F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \le \frac{3\pi}{2}$ إذن : $F(\pi) \le \pi \le F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

وعليه $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$ حسب نظرية التزايدات المنتهية.

التمرين 11

- حل المعادلة التفاضلية هو :

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x+1}+\lambda \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- تعيين الحل f حيث $f(0)=0$:

لدينا : $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x+1}+\lambda$ وبما أن : $f(0)=0$

فإن : $0=-1+\lambda$ ومنه : $\lambda=1$

وعليه : $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x+1}+1$

- دراسة التغيرات للدالة f :

$D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x+1}+1=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x+1}+1=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=x^2+\frac{1}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد x من D_f لدينا: $f'(x)>0$

إذن f متزايدة تماما على كل من المجالين: $]-1;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

– دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

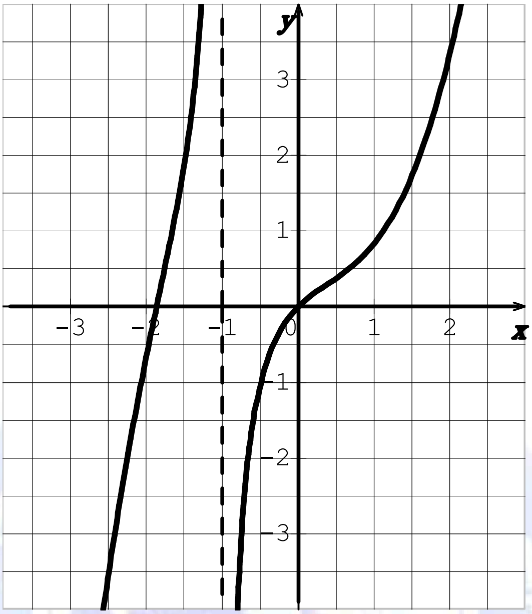
لدينا أربعة فروع لانهائية و مستقيم مقارب معادلته : $x=-1$

و لدينا : $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{3}-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x}=+\infty$

وعليه (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$
وآخر عند $-\infty$.

– إنشاء (C): $f(1)=\frac{5}{6}$ ؛ $f(2)=\frac{10}{3}$ ؛ $f(-2)=\frac{-2}{3}$

$f(0)=0$.



التمرين 12

- تعيين f :

لدينا : $y' = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$ و منه : $y' = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}$

وهي من الشكل : $y' = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

وعليه : $y = \sqrt{g(x)} + c = \sqrt{x^2+2x+8} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

إذن : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

لكن : $f(2) = 1$ وعليه : $\sqrt{(2)^2 + 2(2) + 8} + c = 1$

إذن : $4 + c = 1$ أي : $c = -3$

و عليه : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} - 3$

– دراسة تغيرات f :

$$D_f =]-\infty;+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$$

إشارة المشتق :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

و متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$.

– جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-1) = \sqrt{7} - 3 \quad ؛ \quad f(-1) \simeq -0,35$$

– دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة يوجد فرعان لانهائيان:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}{x} - \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+8}-3-x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+2x+8}-(x+3)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(x+3)\right]}{\left[\sqrt{x^2+2x+8}+x+3\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2+2x+8\right)-\left(x+3\right)}{\sqrt{x^2+2x+8}+x+3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+8-x^2-6x-9}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1+\frac{3}{x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[-4-\frac{1}{x}\right]}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1+\frac{3}{x}\right]} = -2$$

و عليه : $y = x-2$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}{x} - \frac{2}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}{x} - \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}-\frac{3}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+8}-3+x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+2x+8}-(x+3)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(-x+3)\right]}{\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(-x+3)\right]}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+2x+8\right)-\left(-x+3\right)^2}{\sqrt{x^2+2x+8}-x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+8-x^2+6x-9}{\sqrt{x^2+2x+8}-x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x-1}{\sqrt{x^2+2x+8}-x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(8-\frac{1}{x}\right)}{x\left[-\sqrt{1+x+x^2}-1+x\right]}=-4$$

ومنه: $y=-x-4$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

الحساب:

$f(0)=\sqrt{8}-3$ ومنه : $f(0)\simeq-0,17$

$f(2)=\sqrt{16}-3=1$

$f(3)=\sqrt{23}-3$, $f(3)\simeq1,80$

$f(-2)=\sqrt{8}-3$, $f(-2)\simeq-0,17$

$f(-4)=1$

$$f(-5) \simeq 1,80 \quad , \quad f(-5) = \sqrt{23} - 3$$

إنشاء (C) :