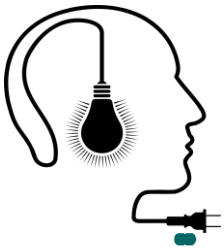

5. الاحتمالات

للشعب: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

من تقديم الأستاذ: شعبان اسامة

التمرين ❶ : للمراجعة

في امتحان يجيب تلميذ على أسئلة متعددة الاختيارات (OCM) يشمل سؤالين و لكل سؤال توجد ثلاثة أجوبة مقترحة من بينها يوجد جواب واحد صحيح فقط. لكل جواب صحيح يحصل التلميذ على 1+ و لكل جواب خاطئ يحصل على $-\frac{1}{2}$ و في حالة عدم الإجابة يحصل على 0.

التلميذ يجيب عشوائيا على السؤالين المطروحين عليه.السؤالين المطروحين عليه.

1) مثل كل المخارج الممكنة بواسطة شجرة احتمالات.

2).احسب احتمال أن تكون علامته في الامتحان أكبر تماما من 0.

ليكن X مجموع النقط المحصل عليها. إذا كان X سالباً يحصل التلميذ على 0.

3) عين القيم الممكنة لـ X ثم أعط قانون الأحتمال.

4) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X .

التمرين ❷ : للمراجعة

نقترح اللعبة التالية : يدفع اللاعب M دينارا ثم يرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات 12 وجها مرقمة من 1 الى 12

إذا ظهر رقم زوجي يحصل اللاعب على دينارين اثنين ، إذا ظهر أحد الأرقام 7 ، 9 ، 11 يحصل اللاعب على ثمانية

دنانير أما إذا ظهر أحد الأرقام 1 ، 3 ، 5 فإنه يحصل على ثلاثة دنانير

1- عين قيمة M حتى تكون اللعبة عادلة

2.إذا كان M = 4 ، هل المشاركة في هذه اللعبة هي لصالح اللاعب ؟

التمرين ❸ :

دفع لاعب xDA و أخذ حجري نرد عاديين و رماهما.إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين هو 7 ، يربح 20DA و إلا لا يربح أي شيئ .

كم يجب على اللاعب أن يدفع في البداية حتى تكون اللعبة عادلة.

التمرين ❹ :

1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$(4x^2+3x-1)(x^2-5x+6)=0 \quad \ldots\ldots (E)$$

2) كيس به أربع كريات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 . نسحب منه كرية واحدة و نرمز بـ P_i إلى إحتمال سحب الكرية التي تحمل الرقم i و نضع $P_1=3\alpha^2$ ، $P_2=\alpha^2$ ، $P_3=\alpha$ و $P_4=2\alpha$.

حدّد قيمة α .

3) نضع $\alpha=\frac{1}{4}$. أحسب إحتمالات الأحداث التالية :

A : " سحب كرية تحمل رقما فرديا " .

B : " سحب كرية تحمل الرقم 4 " .

C : " سحب كرية تحمل رقما أصغر أو يساوي 3 " .

D : " سحب كرية تحمل رقما حلا للمعادلة (E) " .

التمرين ❺ :

يتكون رقم الهاتف من 9 أرقام . الرقم الاول هو 0 و الأرقام الثمانية الاخرى كيفية .

1.ماعدد أرقام الهواتف الكلية ؟

2.ماعدد أرقام الهواتف التي تضم :

أ) 3 مرات الرقم 1 ؟

ب) على الأقل ثلاث مرات الرقم 1 ؟

ج) مرتين الرقم 5 ومرة واحدة الرقم 2 ؟

د) 5 أرقام زوجية فقط ؟

3.ما عدد أرقام الهواتف التي لا تضم الرقمين 6 و9؟

التمرين ❻ :حل في $\mathbb{N}^2$ الجمل التالية:

1) $\begin{cases} C_{x+1}^{y}=C_{x}^{y-1} \\ C_{x+y}^{2}=10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2C_{x}^{2}=C_{y}^{1} \\ C_{x+y-5}^{2}=4 \end{cases}$.

التمرين ❼ :

يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء .
نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد. ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

أ) كرة بيضاء ؟ ب) كرة بيضاء على الأقل ؟ ج) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = n^2 + 9n + 21$

ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$

التمرين ❽ :

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحادثتين A: " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ". و B: " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم

1) أ- أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ إحتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

ب - بيّن أن : $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين ❾ :

كيس به 7 كريات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و4 خضراء .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس .

I) 1)أحسب إحتمال الحادثة A: " سحب كريتين مختلفتين في اللون " .

2)أحسب إحتمال الحادثة B: " سحب كريتين من نفس اللون

II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).

فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، و إذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ،

و إذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه . و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α.

1) برّر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$

ثم عرّف قانون إحتماله .

2) بيّن أن الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X بدلالة α هو : $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$.

ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

التمرين ❿ :

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : -3 ، 2 ، 3 و كرية بيضاء مرقمة بـ : -1.

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد .

1) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A: " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .

B: " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " .

C: " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

أ - عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون إحتماله .

ب - أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

جـ - أحسب إحتمال الحادثة : "$X^2 - X > 0$" .

التمرين ⓫ :

كيس به 10 كرات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها : 3 حمراء ، 3 خضراء و 4 بيضاء .

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كرات في آن واحد .

ما إحتمال الحصول على :

أ - نفس اللون ؟

ب - الألوان الثلاثة ؟

جـ - كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين ❷ ❶ :

يحتوي وعاء على3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 و الأخريان تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فاثنتان منهما تحملان الرقم 2 و الأخريان تحملان الرقم 3 .

نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد و نحسب مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

1) ما إحتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 ؟

2) ما هو إحتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين ؟

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين ❸ ❶ :

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و كرية واحدة تحمل الرقم 2 و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 . (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين A و B حيث :

A : " سحب كريتين من نفس اللون " ، B : " سحب كريتين تحملان نفس الرقم "

1) بيّن أن إحتمال الحادثة A هو $P(A)=\frac{31}{66}$ و احسب إحتمال الحادثة B .

2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم ؟

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي و أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين ❹ ❶ :

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

1) عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع .

ما إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي ؟

التمرين ❺ ❶ :

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية . إختر الإجابة الصحيحة مبررا إختيارك .

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و كريتين سوداوين تحملان الرقمين1 ، 2 .

(الكريات لا نفرّق بينها عند اللمس)

نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا و في آن واحد.

X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .

1) قيم المتغيّر العشوائي X هي :

2) أ) $\{1;2;3\}$ ب) $\{0;2;3\}$ ج) $\{0;1;2\}$.

3) الأمل الرياضياتي $E(X)$ لـ X هو :

4) أ) $E(X)=\frac{4}{5}$ ب) $E(X)=\frac{6}{5}$ ج) $E(X)=\frac{11}{10}$.

5) إحتمال " الحصول على كريّة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة "

يساوي : أ) $\frac{7}{10}$ ب) $\frac{9}{10}$ ج) $\frac{3}{5}$.

6) إحتمال " باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1 "

يساوي : أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{1}{5}$.

التمرين ❻ ❶ :

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ،4 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام1 ، 2 ، 3 و كريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق عند اللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد3 كريات من هذا الكيس .

1) أحسب إحتمال الأحداث التالية :

A: " الحصول على كرية بيضاء واحدة " .

B: " الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر " .

C: " الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية " .

2) نعتبرالمتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية .

أ - عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون إحتماله .

ب - أحسب $P\left(X^2 - X \leq 0\right)$.

التمرين ❼ ❶ :

يحتوي صندوق على ثماني(08) كرات لا يمكن التميز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو موضح في الشكل المقابل:

نسحب عشوائيا و في أن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1.نعتبر الحدث A :"من بين الكرات الثلاثة المسحوبة لا توجد أي كرة تحمل العدد 0".

الحدث B :"جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 8".

بين أن: $P(A) = \frac{5}{14}$ و أن: $P(\mathrm{B}) = \frac{1}{7}$.

2.ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة.

أ-بين أن: $P\left(X = 16\right) = \frac{3}{28}$.

ب-الجدول المرفق أسفله يتعلق بقانون الاحتمال المتغير العشوائي .

أتمم الجدول معللا اجابتك.

x_i	0	4	8	16
$P\left(X = x_i\right)$	....	....	....	$\frac{3}{28}$

التمرين ❽ ❶ :

يحتوي صندوق على عشر كريات لا يمكن التميز بينها باللمس ثلاثة منها تحمل الرقم 0 وثلاثة أخرى تحمل الرقم π والأربعة المتبقية تحمل الرقم $\frac{\pi}{6}$.

نسحب عشوائيا وعلى التوالي دون إرجاع كرتان من الصندوق ونسجل العددين الظاهرين. نرمز لهذين العددين ب α و β.

1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة العدد $\cos\left(\alpha + \beta\right)$.

أ. عرف قانون الإحتمال لهذا المتغير العشوائي X.

ب. أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

2) نقوم الآن باللعبة الآتية: يربح اللاعب $100DA$ عند حصوله على $\cos\left(\alpha + \beta\right) = 1$ ويخسر $50DA$ في باقي الحالات.

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة.

أ. عين قانون الإحتمال لـ Y.

ب. يكرر اللاعب هذه اللعبة ثلاث مرات بحيث يعيد اللاعب الكرتين المسحوبتين إلى الكيس في كل مرة:

ما هو احتمال أن يربح اللاعب $150DA$.

التمرين ❾ ❶ :

صندوق يحتوي على x كرة بيضاء حيث $x \geq 2$ و 5 كرات حمراء .

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الصندوق.

1.أ-احسب الاحتمال $P(x)$ لسحب 3 كرات حمراء.

ب-عين العدد الطبيعي x لكي يكون $P(x) = \frac{5}{28}$

2.احسب الاحتمال $P'(x)$ لسحب كرة على الأكثر بيضاء.

3.نفرض أن $x = 5$ ، أحسب احتمال الحوادث التالية:

الحادثة A: "الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون".

الحادثة B: "من بين الكرات المسحوبة توجد على الأقل كرتان حمراوين".

الحادثة C: "سحب3 كرات بيضاء علما أن الحادثةA محققة".

التمرين ❷❶ :

ماهو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام:
1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 إذا كانت هذه الأرقام تتكون من :

1) 3 أرقام ؟

2) 3 أرقام مختلفة ؟

3) 6 أرقام مختلفة ؟

التمرين ❷❷ :

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 كرات حمراء و 4 خضراء

5 سوداء.

نسحب عشوائيا 3 كرات **على التوالي بالارجاع.**

1.احسب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب.

2.احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على ثلاثة كرات من نفس اللون "..

B :"الحصول على ثلاثة كرات من ألوان مختلفة".

C :"الحصول على كرتين من نفس اللون"

التمرين ❷❸ :

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 كرات حمراء و 4 خضراء

5 سوداء.

نسحب عشوائيا 3 كرات **على التوالي بدون بالارجاع.**

1.احسب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب.

2.احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على ثلاثة كرات من نفس اللون "..

B :"الحصول على ثلاثة كرات من ألوان مختلفة".

C :"الحصول على كرتين من نفس اللون"

التمرين ❷❹ :

يضم صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 الى 10 .

نسحب قريصتين على التوالي مع الإرجاع .

أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 .

التمرين ❷❺ :

لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمسابقة توظيف ، يسحب مترشح عشوائيا بالتتالي وبدون إرجاع بطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات ، ثمان بطاقات تتعلق بمادة الرياضيات وبطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية ، لايمكن التمييز بين البطاقات باللمس .

1 / نعتبر الحادثتين A و B حيث :

A هي الحادثة : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية "

B هي الحادثة : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين "

أحسب $P(A)$ و $P(B)$.

2 / ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية

أ . عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب . عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

جـ . أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

التمرين ❷❻ :

يحوي كيس أربع قريصات تحمل الأرقام 1، 2 ،3، a ($a \in \mathbb{N}$) .

نسحب قريصة واحدة و نعتبر P_k هو احتمال سحب القريصة ذات الرقم k

1.أحسب الأعداد الحقيقية P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a

إذا علمت أنها بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$ (تعطى كسورا غير قابلة للإختزال)

2. ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل قريصة مسحوبة بالرقم الذي تحمله . أوجد قيمة العدد a إذا علمت أن الامل الرياضياتي هو $\frac{43}{9}$

التمرين ❻❷ :

يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 الى 5 و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 .

- نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد .

1- أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A " الكرتان تحملان رقمين فرديين "

B " الكرتان من نفس اللون "

C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "

- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

2- ما إحتمال الحوادث التالية :

D " الكرتان من لونين مختلفين "

E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "

التمرين ❼❷ :

1) ما عدد الأعداد ذات 3 أرقام مختلفة مثنى مثنى و التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9 ؟

2) من بين هذه الأعداد . ما عدد الأعداد :

أ) الزوجية ؟

ب) مضاعفات 5 ؟

ج) الأصغر من 500 ؟

د) فردية؟

تحدون هذا الملف في صفحة