

القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة

الأستاذ: بوخلاق محمد

الكفاءات المستهدفة

- 1 إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا آخر.
- 2 استعمال خواص قابلية القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة .
- 3 استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين .
- 4 استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين .
- 5 حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر

قابلية القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة :

1) تعريف : a و b عددان صحيحان و b غير معدوم . القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a . نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b .

أمثلة :

$$3|36 \quad (1)$$

$$(-3)|36 \quad (2)$$

$$5|(-55) \quad (3)$$

$$(-11)|(-66) \quad (4)$$

ملاحظة : في Z للعددين a و $(-a)$ نفس القواسم .

2) خواص :

خاصية 1: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

البرهان :

إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $b = ka$ و $c = k'b$ حيث k و k' أعداد صحيحة وبالتالي $c = (kk')a$ وبما أن (kk') عدد صحيح فإن a يقسم c .

خاصية 2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم .

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb .

البرهان :

إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح وبالتالي $mb = m(ka) = k(ma)$ وبما أن ma عدد صحيح فإن a يقسم mb .

خاصية 3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم .

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb .

البرهان :

إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح وبالتالي $mb = m(ka) = k(ma)$ وبما أن k عدد صحيح فإن ma يقسم mb .

طرائق

تمرين 1 :

عين الأعداد الصحيحة n حيث : 13 يقسم $(n+7)$.

الحل : $13|(n+7)$ يوجد عدد صحيح k حيث $n+7=13k$ إذن $n=13k-7$.
الأعداد الصحيحة n والتي تحقق 13 يقسم $(n+7)$: هي الأعداد الصحيحة من الشكل $n=13k-7$ حيث k صحيح .

تمرين 2 :

عين الأعداد الطبيعية n حيث : $(2n-9)$ يقسم 6 .

الحل : مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 6 هي $\{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$.
 $(2n-9)$ يقسم 6 معناه $(2n-9)=-6$ أو $(2n-9)=-3$ أو $(2n-9)=-2$ أو $(2n-9)=-1$ أو $(2n-9)=1$ أو $(2n-9)=2$ أو $(2n-9)=3$ أو $(2n-9)=6$. معناه $2n=7$ أو $2n=8$ أو $2n=10$ أو $2n=11$ أو $2n=12$ أو $2n=15$. معناه $n=3$ أو $n=4$ أو $n=5$ أو $n=6$.
معناه $n \in \{3; 4; 5; 6\}$.

تمرين 3 :

عين الأعداد الصحيحة n حيث :

$(4n+7)$ يقسم $(n+4)$.

الحل :

n عدد صحيح حيث : $(4n+7)$ يقسم $(4n+7)$ لأن $(4n+7)=1(4n+7)$ (1) ومن جهة أخرى $(4n+7)$ يقسم $(n+4)$ إذن $(4n+7)$ يقسم $4(n+4)$ وعليه يوجد عدد صحيح k بحيث :
 $(4n+7)=k(4n+16)$ (2) وبطرح (1) من (2) نجد :
 $(4n+7)-(4n+16)=k(4n+7)-(4n+16)$ معناه $9=(k-1)(4n+7)$ أي 9 يقسم $(4n+7)$.
مجموعة قواسم صحيحة للعدد 9 هي $\{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$.
إذن $(4n+7) \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$. معناه $4n \in \{-16; -10; -8; -6; -4; 2\}$ معناه $n \in \{-4; -2; -1\}$.
 $(4n+7)$ يقسم $(n+4)$ إذا وفقط إذا كانت $n \in \{-4; -2; -1\}$.

خاصية 4 : a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم .

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n . العدد a يقسم

$mb+nc$.

البرهان :

إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $b=ka$ و $c=k'a$ حيث k و k' عدنان صحيحان وعليه :

$$mb+nc = mka + nk'a = (mk + nk')a$$

بما أن $(mk + nk')$ عدد صحيح فإن a يقسم $(mb+nc)$.

القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة

(1) القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة:

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.
تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

البرهان:

العدد a إما مضاعف لـ b وإما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي يوجد q عدد صحيح وحيد حيث $qb \leq a < (q+1)b$ وبالتالي نستنتج من هذا أن $0 \leq a - qb < b$.

نضع $r = a - qb$ إذن $a = bq + r$ مع $0 \leq r < b$.

ملاحظة: يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح b غير معدوم . نجد : $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$.

(2) القاسم المشترك الأكبر لعددین طبيعین :

تعريف: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .
 $D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .
يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b . ونرمز له بالرمز $PGCD(a,b)$. (Plus Grand Commun Diviseur).

ملاحظات:

- مجموعة قواسم 0 هي الأعداد الصحيحة غير معدومة .
- $PGCD(a,a) = a$ و $PGCD(1;a) = 1$ و $PGCD(0;a) = a$ (غير معدوم)

مثال: $D_9 = \{1;3;9\}$ و $D_{12} = \{1;2;3;4;6;12\}$. وبالتالي $PGCD(9;12) = 3$.

طرائق

تمرين 1:

a و b عدنان صحيحان .

أثبت أن إذا كان 2 يقسم $a^2 + b^2$ فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

الحل:

2 يقسم $a^2 + b^2$ معناه يوجد عدد صحيح k بحيث : $a^2 + b^2 = 2k$.

لدينا : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2k + 2ab = 2(k+ab)$. بما أن $(k+ab)$ عدد صحيح

فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

تمرين 2:

عين الأعداد الصحيحة a و b حيث أن : $5ab - b^2 = 49$.

الحل :

لدينا : $5ab - b^2 = 49$ تكافئ $b(5a - b) = 49$. $(b$ و $(5a - b)$ قواسم للعدد 49) تكافئ ($(b = 49$ و $(5a - b) = 1$) أو $(b = 1$ و $(5a - b) = 49$) أو $(b = 7$ و $(5a - b) = 7$) أو $(b = -1$ و $(5a - b) = -1$) أو $(b = -49$ و $(5a - b) = -49$) أو $(b = -7$ و $(5a - b) = -7$) أو $(b = 7$ و $(5a - b) = -1$) أو $(b = -49$ و $(5a - b) = -1$) أو $(b = 7$ و $(a = 10)$) أو $(b = 1$ و $(a = 10)$) أو $(b = 49$ و $(a = 10)$) أو $(b = -1$ و $(a = 10)$) أو $(b = -49$ و $(a = 10)$) أو $(b = -7$ و $(a = -10)$) أو $(b = -1$ و $(a = -10)$) أو $(b = -49$ و $(a = -10)$) أو $(b = -7$ و $(a = -10)$) أو $(b = -1$ و $(a = -10)$) أو $(b = -49$ و $(a = -10)$) .
الأعداد الصحيحة a و b التي تحقق المعادلة $5ab - b^2 = 49$ هي الثنائيات $(10; 49)$ ، $(10; 1)$ ، $(-10; -1)$ ، $(-10; -49)$.

تمرين 3 : a عدد صحيح . باقي قسمة a على 12 هو 9 .

(1) ماهو باقي قسمة العدد a على 6 ؟

(2) ماهو باقي قسمة العدد a على 3 ؟

الحل :

باقي قسمة a على 12 هو 9 معناه يوجد عدد صحيح k بحيث : $a = 12k + 9$.

(1) باقي قسمة العدد a على 6 :

لدينا : $a = 12k + 9 = 2 \times 6k + 6 + 3 = 6(2k + 1) + 3 = 6k' + 3$ حيث $k' = (2k + 1)$. عدد

صحيح وبالتالي باقي قسمة العدد a على 6 هو 3 .

(2) باقي قسمة العدد a على 3 :

لدينا : $a = 12k + 9 = 3 \times 4k + 3 \times 3 = 3(4k + 3) = 3k'' + 0$ حيث $k'' = (4k + 3)$ عدد صحيح

وبالتالي باقي قسمة العدد a على 3 هو 0 .

تمرين 4 :

m و n عدنان طبيعيان باقي قسمتهما على 17 هما على الترتيب 8 و 12 . عين بواقي

القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $(n + m)$ ، nm ، و m^2 على 17 .

3) خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

خاصية 1: a و b عدنان طبيعيين غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b .
 . $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$

البرهان :

نضع $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(b;r) = d'$.
نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي إذن $r = a - bq$.
لدينا d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $(a - bq)$ أي d يقسم r . إذن نجد d قاسم مشترك للعددين b و r .
ومن جهة أخرى d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $(bq + r)$ أي d' يقسم a . إذن نجد d' قاسم مشترك للعددين a و b .
إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r وبالتالي $d = d'$ أي $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

خوارزمية إقليدس :

a و b عدنان طبيعيين غير معدومين حيث $a > b$ بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ مع $0 \leq r_1 < b$ حيث q_1 و b_1 عدنان طبيعيين .
(* إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a;b) = b$.
(* إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عدد طبيعيين .
(* إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = r_1$.
(* إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ حيث $0 \leq r_3 < r_2$ و r_3 و q_3 عدد طبيعيين .
(* نواصل هكذا حتى نجد باقيًا معدوماً . نسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه :
 . $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2) = \dots = PGCD(r_n;0) = r_n$

تسمى هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين **بطريقة خوارزمية إقليدس** .

خاصية 2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسامات خوارزمية إقليدس .

طرائق

تمرين 1 :

- (1) عين $PGCD(182;126)$.
 (2) باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد عددين صحيحين α و β حيث $182\alpha + 126\beta = 14$.

الحل :

- (1) تعين $PGCD(182;126)$.

الحاصل	1	2	14
المقسوم والقاسم	182	56	4
الباقي	56	4	0

إذن $PGCD(182;126) = 14$.

- (2) باستعمال خوارزمية إقليدس نبحت عن عددين صحيحين α و β حيث $182\alpha + 126\beta = 14$.
 لدينا $126 \times 1 - 56 \times 2 = 14$ إذن $126 \times 1 - (182 - 126) \times 2 = 14$ وبالتالي
 $182(-2) + 126(3) = 14$ إذن $(\alpha; \beta) = (-2; 3)$.

خاصية 3: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين k عدد طبيعي غير معدوم .

$$PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$$

البرهان :

نضع $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(ka; kb) = d'$. d و d' عدنان طبيعيان غير معدومين .
 لدينا d يقسم a ومنه kd يقسم ka ولدينا كذلك d يقسم b ومنه kd يقسم kb وبالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه يمكن كتابة $d' = k'(kd)$ حيث k' عدد طبيعي .

كذلك d' يقسم ka و kb ومنه $d' = k'(kd)$ يقسم ka و kb وبالتالي $k'd$ يقسم a و b وبالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b وبالتالي $k' = 1$ ومنه $d' = kd$.
 نتيجة : $PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$.

تعريف : a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .
 يكون العدنان و أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر

يساوي 1 .

خاصية 4 : a و b عدنان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b نضع $a = da'$ و $b = db'$. يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا وفقط إذا كان العدنان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

البرهان : a و b عدنان طبيعيان غير معدومين . d قاسمهما المشترك الأكبر .

$$(*) \text{ نضع } a = da' \text{ و } b = db'$$

$$\text{وعليه } d = PGCD(a; b) = PGCD(da'; db') = d \times PGCD(a'; b')$$

$$\text{بما أن } d \text{ غير معدوم فإن : } PGCD(a'; b') = 1$$

(*) عكسيا : نعتبر $PGCD(a'; b') = 1$. وبالتالي $PGCD(a; b) = k \times PGCD(a'; b') = d$.

3) تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين :

تعريف : a و b عددان صحيحان غير معدومين .
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث :
 $d = PGCD(|a|;|b|)$

خاصية : a و b عددان صحيحان غير معدومين و k عدد صحيح غير معدوم .
 $PGCD(ka; kb) = |k| \times PGCD(a; b)$

ملاحظة : a و b عددان صحيحان غير معدومين .
إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a; b) = |b|$

طرائق

تمرين 1 :

عين $PGCD(54; 82)$ ثم استنتج $PGCD(5400; 8200)$

الحل :

$$PGCD(54; 82) = 2 \quad (1)$$

$$PGCD(5400; 8200) = PGCD(54 \times 100; 82 \times 100) = 100 \times PGCD(54; 82) = 100 \times 2 = 200 \quad (2)$$

تمرين 2 :

عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث
$$\begin{cases} a + b = 72 \\ PGCD(a; b) = 9 \end{cases}$$

الحل :

بما أن $PGCD(a; b) = 9$ إذن $a = 9a'$ و $a = 9b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$$a + b = 72 \text{ معناه } 9a' + 9b' = 72 \text{ وبالتالي } a' + b' = 8$$

$$\text{وعليه } (a'; b') \in \{(1; 7), (3; 5), (5; 3), (7; 1)\}$$

خلاصة : مجموعة الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق الجملة : $\{(9; 63), (27; 45), (45; 27), (63; 9)\}$

ملاحظة : هناك ثنائيات $(a'; b')$ ، تحقق $a' + b' = 8$ لكن a' و b' ليست أولية فيما بينهما .

$$\text{مثلا } (4; 4)$$

تمرين 3 :

عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث
$$\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a; b) = 6 \end{cases}$$

الحل :

بما أن $PGCD(a;b)=6$ إذن $a=6a'$ و $a=6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما

$$a \times b = 72 \text{ معناه } (6a') \times (6b') = 360 \text{ وبالتالي } a' \times b' = 10$$

$$\text{وعليه } (a';b') \in \{(1;10), (2;5), (5;2), (10;1)\}$$

خلاصة : مجموعة الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق الجملة هي :

$$\{(6;60), (12;30), (30;12), (60;6)\}$$

تمرين bac 2008 :

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

(1) a و b عددان طبيعيين حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$

(أ) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

(ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $(n+5)$ مضاعفا للعدد 7

(ت) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$

(2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :

$$p=2n^2-7n-15 \text{ و } q=n^2-7n+10$$

(أ) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $(n-5)$

(ب) عين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$

الحل :

(1) (أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b :

لدينا : $a=n-2$ و $b=2n+3$. نلاحظ : $2n+3=2(n-2)+7$ أي $b=2a+7$ إذن

$$b-2a=7$$

نضع : $PGCD(a;b)=d$ وبالتالي d/b و d/a إذن d/b و $d/2a$ وبالتالي $d/(b-2a)$ أي

$$d/7$$

إذن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هي قواسم العدد 7 أي $\{1;7\}$.

(ب) نبين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $(n+5)$ مضاعفا للعدد 7 .

- إذا كان $(n+5)$ من مضاعفات 7 معناه يوجد عدد طبيعي k حيث $(n+5)=7k$ أي $n=7k-5$

بالتعويض في a و b نجد : $a=n-2=7k-5-2=7(k-1)=7k'$ و

$b=2n+3=2(7k-5)+3=14k-7=7(2k-1)=7k''$ وبالتالي العددين a و b من مضاعفات 7 .

- إذا كان العددين a و b من مضاعفات 7 . فإن $(b-a)$ ومن مضاعفات العدد 7 وبملاحظة

$$b-a=2n+3-(n-2)=n+5$$

(ت) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$

$PGCD(a;b)=7$ هذا يعني a و b من مضاعفات العدد 7 معناه أن $(n+5)$ من مضاعفات العدد 7

وبالتالي قيم n هي من الشكل $n=7k-5$ حيث k عدد طبيعي أكبر من 5 .

(2) (أ) نبين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $(n-5)$.

باستخدام طريقة هورنر .

معاملات $p(n)$		2	-7	-15
قيمة α جذر $p(n)$	5	0	10	15
معاملات هورنر		2	3	0

وبالتالي $p = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(2n+3)$.

معاملات $q(n)$		1	-7	10
قيمة α جذر $q(n)$	5	0	5	10
معاملات هورنر		1	-2	0

$q = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(n-2)$

إذن العددين p و q يقبلان القسمة على $(n-5)$.

ب) تعين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p; q)$.

$$PGCD(p; q) = PGCD((n-5)(2n+3); (n-5)(n-2))$$

$$\cdot PGCD(p; q) = (n-5)PGCD((2n+3); (n-2))$$

$$PGCD(p; q) = (n-5)PGCD(a; b)$$

- إذا كان $PGCD(a; b) = 7$ فإن $PGCD(p; q) = 7(n-5)$.

- إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ فإن $PGCD(p; q) = (n-5)$.