الدالة الأسية واللوغارتمية

الأقسام النهائية العلمية

الكفـــاءات المستهدفة   الأستاذ : بوخلاط محمد

- توظيف خواص الدالة الأسية النيبرية .
- حل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية ، الدوال اللوغارتمية .

حل النشاط 1 ص76 :

2) *) نبين أن h دالة ثابتة على $\mathfrak{R}$. ثم استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathfrak{R}$ ، $f(x)f(-x)=1$ (3)

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$: $h'(x)=f'(x)\times f(-x)-f'(-x)\times f(x)$.

بما ان $f'=f$ فان $h'(x)=f(x)\times f(-x)-f(-x)\times f(x)=0$.

وبالتالي الدالة h ثابتة على $\mathfrak{R}$.

بما ان الدالة h ثابتة على $\mathfrak{R}$ فانه من اجل كل x من $\mathfrak{R}$: $h(x)=\alpha$ حيث α ثابت حقيقي .

لدينا : $h(0)=\alpha$ ومن جهة أخرى نجد $h(0)=f(0)\times f(0)=1$ وعليه : $\alpha=1$.

اذن من اجل كل x من $\mathfrak{R}$: $h(x)=\alpha=1$ أي من أجل كل x من $\mathfrak{R}$ ، $f(x)f(-x)=1$ (3)

*) نبرهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathfrak{R}$ ، $f(x)\neq 0$ (4)

نفرض أنه يوجد عدد x_0 حقيقي ، $f(x_0)=0$.

لكن لدينا : $h(x_0)=f(x_0)\times f(-x_0)=0$.تناقض حسب الاجابة الأولى

وبالتالي من اجل كل x من $\mathfrak{R}$ ، $f(x)\neq 0$ (4)

3) *) نبين أن k دالة ثابتة على $\mathfrak{R}$.

الدالة k قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$: $k'(x)=\dfrac{g'(x)\times f(x)-g(x)\times f'(x)}{[f(x)]^2}$.

بما ان $f'=f$ و $g'=g$ فان $k'(x)=\dfrac{g(x)\times f(x)-g(x)\times f(x)}{[f(x)]^2}=0$.

وبالتالي الدالة k ثابتة على $\mathfrak{R}$.

*) استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathfrak{R}$ ، $g(x)=f(x)$.

بما ان الدالة k ثابتة على $\mathfrak{R}$ فانه من اجل كل x من $\mathfrak{R}$: $k(x)=\beta$ حيث β ثابت حقيقي .

لدينا : $k(0)=\beta$ ومن جهة أخرى نجد $k(0)=\dfrac{g(0)}{f(0)}=1$ وعليه : $\beta=1$.

اذن من اجل كل x من $\mathfrak{R}$: $h(x)=\alpha=1$ أي من أجل كل x من $\mathfrak{R}$ ، $\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$.

أي من أجل كل x من $\mathfrak{R}$ ، $g(x)=f(x)$.

4) *) بين أن i دالة ثابتة على $\Re$ و أنه من أجل كل x من $\Re$، $i(x)=f(y)$.

الدالة i قابلة للاشتقاق على $\Re$: $i'(x)=\dfrac{f'(x+y)\times f(x)-f'(x)\times f(x+y)}{[f(x)]^2}$.

بما ان $f'=f$ فان $i'(x)=\dfrac{f(x+y)\times f(x)-f(x)\times f(x+y)}{[f(x)]^2}=0$.

وبالتالي الدالة i ثابتة على $\Re$.

بما ان الدالة i ثابتة على $\Re$ فانه من اجل كل x من $\Re$: $i(x)=\theta$ حيث θ ثابت حقيقي .

لدينا : $i(0)=\theta$ ومن جهة أخرى نجد $i(0)=\dfrac{f(y)}{f(0)}=f(y)$ وعليه : $\theta=1$.

اذن من اجل كل x من $\Re$: $i(x)=\theta=f(y)$.

*) استنتاج أنه من أجل كل x من $\Re$ و من أجل كل y من $\Re$، $f(x+y)=f(x)f(y)$ (5)

لدينا من اجل كل x من $\Re$: $i(x)=\theta=f(y)$.

أي من أجل كل x من $\Re$، $\dfrac{f(x+y)}{f(x)}=f(y)$.

أي من أجل كل x من $\Re$ و من أجل كل y من $\Re$، $f(x+y)=f(x)f(y)$ (5)

*) استنتاج أنه من أجل كل x من $\Re$ و من أجل كل y من $\Re$، $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ (6)

لدينا : $f(x-y)=f(x+(-y))=\dfrac{f(x)}{f(-y)}=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ (باستعمال (3) : $f(-y)=\dfrac{1}{f(y)}$)

5) *) تعين الدالة المشتقة للدالة j.

الدالة j قابلة للاشتقاق على $\Re$: $j'(x)=\dfrac{nf'(nx)\times[f(x)]^n-f(nx)\times nf'(x)\times[f(x)]^{n-1}}{\left[(f(x))^n\right]^2}$

بما ان $f'=f$ فان $j'(x)=\dfrac{nf(nx)\times[f(x)]^n-f(nx)\times nf(x)\times[f(x)]^{n-1}}{\left[(f(x))^n\right]^2}=0$.

وبالتالي الدالة j ثابتة على $\Re$.

بما ان الدالة j ثابتة على $\Re$ فانه من اجل كل x من $\Re$: $i(x)=\mu$ حيث μ ثابت حقيقي .

*) استنتج أنه من أجل كل x من $\Re$، $f(nx)=[f(x)]^n$ (7)

لدينا من اجل كل x من $\Re$: $i(x)=\mu$ حيث μ ثابت حقيقي .

اذن : $i(0)=\mu=\dfrac{f(0)}{[f(0)]^n}=1$.

وعليه : من اجل كل x من $\Re$: $i(x)=1$.

أي : من اجل كل x من $\Re$: $\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}=1$.

أي : من أجل كل x من $\Re$، $f(nx)=[f(x)]^n$ (7)

تعريف: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ الدالة الأسية (النيبيرية). و نرمز إليها بالرمز" exp ".
من أجل كل x من $\mathfrak{R}$، $f(x)=\exp(x)$

6) كتابة باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)، ... ، (7)

من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$\exp'(x)=\exp(x)$......(1) و $\exp(0)=1$.....(2) و $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.....(3) و

$\exp(x)\neq 0$.....(4) و $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.....(5) و

$\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.....(6) و $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$.....(7) .

الدالة الأسية

1. عموميات

يسمح النشاط الأول من استخلاص النتائج التالية:

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.
نرمز إلى هذه الدالة بالرمز" exp " و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

نتائج: * $\exp(0)=1$.

* من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp'(x)=\exp(x)$.

2. خواص جبرية :

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

(1) $\exp(x)\neq 0$ (2) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ (3) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

(4) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. (5) $\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$.

البرهان: أنظر النشاط الأول.

3. العدد e و الترميز e^x :

*) العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.

*) من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\left[\exp(1)\right]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$

تقرأ e^x: " أسية x ".

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x ، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

*) $e^0=1$ *) $\exp'(x)=e^x$ *) $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$

*) $e^{x+y}=e^x e^y$ *) $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ *) $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

تمرين :

بسط العبارات التالية :

1) $\dfrac{2e^2\times e}{\sqrt{e}}$. 2) $\dfrac{3\sqrt{e}}{e^3\times e^{-1}}$ 3) $e^{-10x}\times\left(e^{-x+1}\right)\times\left(e^{3x}\right)^3$

4) $\left(\dfrac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)$.

الحل :

1) $\dfrac{2e^2\times e}{\sqrt{e}}=2e^{\frac{5}{2}}$.

2) $\dfrac{3\sqrt{e}}{e^3\times e^{-1}}=3e^{-\frac{3}{2}}$.

3) $e^{-10x}\times\left(e^{-x+1}\right)\times\left(e^{3x}\right)^3=e^{-3x+2}$.

4) $\left(\dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right)=\dfrac{e^{16x}-1}{4e^{8x}}$.

تمرين 2 :

f الدالة العددية المعرفة على $\Re$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ و (Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

بين انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f(-x)+f(x)=1$.

فسر بيانيا هذه النتيجة .

الحل :

من اجل كل عدد حقيقي x: $f(-x)+f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{e^{-x}+e^x+2}{e^{-x}+e^x+2}=1$.

تذكير: f دالة معرفة على D و (Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) لإثبات أن المستقيم (d) ذو معادلة $x=a$ هو محور تناظر (Cf) يمكن اتباع احدى الطرق التالية :

*) لكل x من D يكون $2a-x$ من D و $f(2a-x)=f(x)$.

*) لكل x من D يكون $a-x$ من D و $a+x$ من D و $f(2a-x)=f(x)$.

*) نقوم بتغير المعلم بحيث نضع : $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$.

تصبح $y = f(x)$ تعني $Y = f(X+a)$ هذه الاخيرة تعرف دالة g .

نبرهن أن g دالة زوجية .

2) لإثبات أن النقطة $A(a;b)$ هي مركز تناظر (Cf) يمكن اتباع احدى الطرق التالية :

*) لكل x من D يكون $2a-x$ من D و $f(2a-x)+f(x)=2b$.

*) لكل x من D يكون $a-x$ من D و $a+x$ من D و $f(a-x)+f(a+x)=2b$.

*) نقوم بتغير المعلم بحيث نضع : $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$.

تصبح $y = f(x)$ تعني $Y = f(X+a)-b$ هذه الاخيرة تعرف دالة g .

نبرهن أن g دالة فردية.

تفسير النتيجة بيانيا : لدينا $f(-x)+f(x)=1$ يعني $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times\frac{1}{2}$.

اذن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر المنحنى (Cf) .

الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$

1. حلول المعادلة $f' = kf$

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.
توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ بحيث $f' = kf$ و $f(0)=1$. f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$.

البرهان:

الوجود: لتكن f الدالة المعرفة على $\Re$ بـ $f(x)=e^{kx}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا من أجل كل x من $\Re$، $f'(x)=ke^{kx}=kf(x)$ كما أن $f(0)=e^0=1$.

و بالتالي الدالة f تحقق $f'=kf$ و $f(0)=1$.

الوحدانية: نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للاشتقاق على $\Re$ بحيث $g'=kg$ و $g(0)=1$. نعتبر الدالة h المعرفة على $\Re$ بـ $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$. الدالة h قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا من أجل كل x من $\Re$،

$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{[f(x)]^2}=\frac{kg(x)f(x)-kf(x)g(x)}{[f(x)]^2}=0$. إذن h ثابتة على $\Re$ مع

$h(0)=\frac{g(0)}{e^0}=1$ و منه من أجل كل x من $\Re$، $h(x)=1$. إذن من أجل كل x من $\Re$، $g(x)=f(x)$.

2. دوال تحول المجموع إلى جداء :

مبرهنة: الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على $\Re$ بحيث:
من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=f(x)f(y)$
هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

البرهان:

لتكن f دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على $\Re$ بحيث: من أجل كل x، y من $\Re$،

$f(x+y)=f(x)f(y)$

بأخذ $x=0$ و $y=0$ نحصل على $f(0)=[f(0)]^2$ أي $f(0)[1-f(0)]=0$ أي $f(0)=0$ أو $f(0)=1$

إذا كان $f(0)=0$ فإن من أجل كل x من $\Re$، $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=f(x)\times 0=0$ مما يعني أن f معدومة و هذا مرفوض و بالتالي $f(0)=1$.

من أجل كل y ثابت، لدينا من أجل كل x من $\Re$، $f(x+y)=f(x)f(y)$. باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على: من أجل كل x من $\Re$، $f'(x+y)=f'(x)f(y)$. من أجل $x=0$ لدينا:

$f'(y)=f'(0)f(y)$

بوضع $k=f'(0)$ يكون لدينا من أجل كل y من $\Re$، $f'(y)=kf(y)$. إذن $f'=kf$ و $f(0)=1$

و منه حسب المبرهنة السابقة لدينا من أجل كل x من $\Re$، $f(x)=e^{kx}$.

عكسيا: لتكن f الدالة المعرفة على $\Re$ بِ $f(x)=e^{kx}$. باستعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية نحصل على:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=e^{k(x+y)}=e^{kx+ky}=e^{kx}\times e^{ky}=f(x)f(y)$

تمرين رقم 15 ص 102 :

1. أ- نبين أن $f(0)=1$.

لدينا : من أجل كل عددين حقيقيين x وy : $f(x+y)=f(x)f(y)$.

بوضع $x=0$ و $y=0$ نجد : $f(0)=f(0)f(0)$ يعني $[f(0)]^2-f(0)=0$ يعني $f(0)[f(0)-1]=0$ يعني $f(0)=0$ أو $f(0)=1$ وبما أن f غير معدومة فان $f(0)=1$.

ب- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)\times f(-x)=1$.

بوضع $y=-x$ نجد : $f(x-x)=f(x)f(-x)$.

لكن : $f(x-x)=f(0)=1$.

وبالتالي نجد : $f(x)\times f(-x)=1$.

2. أ- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$.

بوضع $x=\frac{z}{2}$ و $y=\frac{z}{2}$ نجد : $f\left(\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\right)=f\left(\frac{z}{2}\right)f\left(\frac{z}{2}\right)$.

أي : $f(z)=f\left(\frac{z}{2}\right)f\left(\frac{z}{2}\right)$.

اذن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$.

ب- استنتاج إشارة الدالة f.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$.

أي من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0$.

اذن f موجبة تماما على $\Re$.

دراسة الدالة الأسية

1. اتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x>0$.

البرهان: من أجل كل x من $\Re$ ، $e^x=e^{2\times\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ و بما أن $e^x\neq 0$ فإن من أجل كل x من $\Re$ ، $e^x>0$.

خاصية2: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\Re$.

البرهان: من أجل كل x من $\Re$ ، $\exp'(x)=e^x$ و منه من أجل كل x من $\Re$ ، $\exp'(x)>0$.

نتائج:
- من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a<e^b$ يعني $a<b$ و $e^a=e^b$ يعني $a=b$.
- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.

2. النهايات

خواص: $(1)\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. $(2)\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

البرهان:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=e^x-1$.

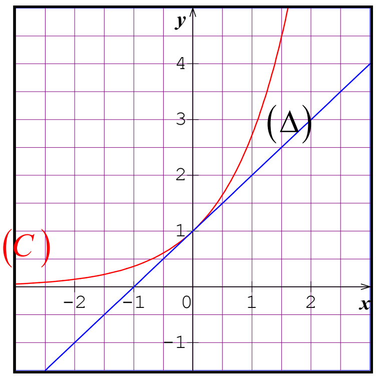
و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $e^x\geq 1$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$.

إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f(x)\geq 0$ أي $e^x\geq x$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x=\frac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

3. جدول تغيرات- التمثيل البياني

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
e^x	0	1	$+\infty$



- المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.
- لدينا $\exp'(0)=1$ و $e^0=1$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $(\Delta): y=x+1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(0+x)-\exp(0)}{x}=\exp'(0)=1$ إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

نتيجة: الدالة $x\mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto e^x$ بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x\approx 1+x$.

تمرين :

حل في $\Re$ المعادلات والمتراجحات :

1) $e^{4x}+1=0$.

2) $e^{x^2}-e=0$.

3) $e^{1+x^2}\leq e^{2x}$.

4) $e^{x^2}\times e^{x}<\left(e^{2}\right)^{3}$.

الحل :

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.
المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)}$ تعني $u(x)\geq v(x)$.

1) $e^{4x}+1=0$ يعني $e^{4x}=-1$ وبالتالي المعادلة لا تقبل حل في $\Re$.

2) $e^{x^2}-e=0$ يعني $e^{x^2}=e^{1}$ يعني $x^2=1$ يعني $x=1$ أو $x=-1$.

3) $e^{1+x^2}\leq e^{2x}$ يعني $1+x^2\leq 2x$ يعني $1+x^2-2x\leq 0$ يعني $(1-x)^2\leq 0$ يعني $x=0$.

4) $e^{x^2}\times e^{x}<\left(e^{2}\right)^{3}$ يعني $e^{x^2+x}<e^{6}$ يعني $x^2+x<6$ يعني $x^2+x-6<0$ يعني $(x+3)(x-2)<0$ يعني $x\in\left]-3;2\right[$.

دراسة الدالة $\exp\circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ $f(x)=e^{x-2}$.

- لدينا $\lim_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty$ و بما أن $\lim_{X\to 0}e^{X}=0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}e^{(x-2)}=0$ أي $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.
- لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}e^{(x-2)}=+\infty$ أي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\exp$ " متزايدة تماما على $\Re$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ $f(x)=e^{5x^2-2}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\Re$ بـ $u(x)=5x^2-2$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;0\right]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;0\right]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن الدالة f متزليدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على $\Re$ فإن الدالة المركبة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\Re$ بِـ $f(x)=e^{x^3}$ هي $f'(x)=3x^2e^{x^3}$.
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\Re^*$ بِـ $g(x)=e^{x^3-\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=\left(3x^2-\frac{1}{x^2}\right)e^{x^3-\frac{1}{x}}$.

تمرين رقم 49 ص 105 :

1) أ) دراسة تغيرات الدالة f.

لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

الدالة قابلة للاشتقاق على $\Re$ و : $f'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$.

الدالة متزايدة تماما على $\Re$.

ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.فسر النتائج هندسيا.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

يوجد مستقيمين مقاربين معادلتاهما $y=0$ و $y=1$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0 ↗	$1/2$	↗ 1

2) نبين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C).

لكل x من $\Re$ و $-x$ من $\Re$ و :

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{\frac{1}{e^{x}}}{1+\frac{1}{e^{x}}}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\ .$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{1+e^{x}}{1+e^{x}}=1=\frac{1}{2}(1)$$

اذن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C).

3) تعين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة A .

$$T: y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\ .$$

4) أ) نبين أنه من أجل كل x من $\Re$: $g'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$.

الدالة قابلة للاشتقاق على $\Re$ و :

$$g'(x)=\frac{1}{4}-f'(x)$$

$$g'(x)=\frac{1}{4}-\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$$

$$g'(x)=\frac{1+2e^{x}+e^{2x}-4e^{x}}{4(1+e^{x})^2}\ .$$

$$g'(x)=\frac{(e^{x}-1)^2}{4(1+e^{x})^2}$$

ب) جدول تغيرات الدالة g .

$g'(x)=0$ يعني $(e^x-1)^2=0$ يعني $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج) استنتاج إشارة g على $\Re$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

د) استنتاج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم T .

ندرس اشارة الفرق : $f(x)-y=-g(x)$.

(C) فوق T على المجال $]-\infty;0[$.

(C) تحت T على المجال $]0;+\infty[$.

(C) يقطع T في النقطة O .

5) رسم T و (C).