مَجْمُوعَةُ الأَعْدَادِ المُرَكَبَة

(خاص بالاقسام النهائية الرياضيات وتقني رياضي وعلوم تجريبية)

من إعداد الأستاذ : بوخلاط محمد

الكفاءات المستهدفة :

- ❖ إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.
- ❖ استعمال خواص مرافق عدد مركب.
- ❖ حساب الطويلة وعمدة لعدد مركب غير معدوم.
- ❖ ا لانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلي و العكس.
- ❖ التعبير عن خواص لأشكال هندسية باستعمال الأعداد المركبة.
- ❖ توظيف خواص الطويلة والعمدة لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- ❖ توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- ❖ حل معادلات من الدرجة الثانية.و حل معادلات يؤول حلها إلى حلّ معادلة من الدرجة الثانية.

مدخل :

1) المعادلة $x-2=0$ تقبل حلا في مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، $S=\{2\}$.

2) المعادلة $x+2=0$ لا تقبل حل في $\mathbb{N}$ بينما تقبل حلا في مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ، $S=\{-2\}$.

3) المعادلة $2x+1=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}$ بينما تقبل حل في مجموعة الاعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ ، $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

4) المعادلة $x^2-2=0$ لا تقبل حل في $\mathbb{Q}$ بينما تقبل حل في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$.

5) المعادلة $x^2+2=0$ لا تقبل حل في مجموعة $\mathbb{R}$.

6) اذن توجد مجموعة جديدة حيث المعادلة $x^2+2=0$ تقبل حلولا فيها ، تسمى هذه المجموعة **مجموعة الاعداد المركبة ويرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$**

تعريف : توجد مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$، تسمى مجموعة الاعداد المركبة تحقق الشروط التالية :
كل الاعداد الحقيقية تنتمي الى المجموعة $\mathbb{C}$.

ملاحظة :

- تحوي المجموعة $\mathbb{C}$ عنصرا يسمى عدد تخيلي ، يرمز بـ : i يحقق : $i^2=-1$.
- المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بنفس عمليتي الجمع والضرب في المجموعة $\mathbb{R}$.
- قواعد الحساب في المجموعة $\mathbb{C}$ هي نفسها في المجموعة $\mathbb{R}$.

الشكل الجبري لعدد مركب :

تعريف : كل عدد مركب z يكتب : $z=x+iy$ تسمى هذه الكتابة الشكل الجبري للعدد المركب z .
حيث x و y عددان حقيقيان .

ملاحظات و ترميز:

- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\mathrm{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\mathrm{Im}(z)$.
- إذا كان $y=0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x=0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما. أي $z=0$ يعني $x=0$ و $y=0$.

مثال :

1) $z_1=2+3i$ ، $\mathrm{Re}(z_1)=2$ و $\mathrm{Im}(z_1)=3$.
2) $z_2=21$ ، $\mathrm{Re}(z_2)=21$ و $\mathrm{Im}(z_2)=0$.
3) $z_3=-25i$ ، $\mathrm{Re}(z_3)=0$ و $\mathrm{Im}(z)=3$.

تساوي عددين مركبين :

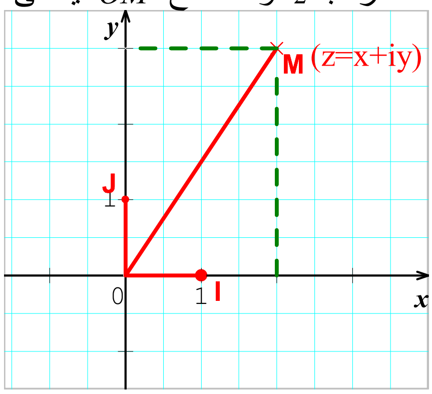
تعريف : يكون عددان مركبان z و z' متساويين اذا وفقط اذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي .

إلتمثيل الهندسي لعدد مركب:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

- إلى كل عدد مركب $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ ، $y\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$) نرفق النقطة M إحداثياها $(x;y)$ ، النقطة

M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب z .



- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z=x+iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ،لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب .
- المستوي يسمى المستوي المركب.

تمرين :

z عدد مركب حيث :

$z=\left(x^2+x\right)+i\left(x^2+y-1\right)$

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما .

الحل :

$z=0$ يعني $\begin{cases}x^2-x=0\\x^2+y-1=0\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

العمليات في مجموعة الأعداد المركبة:

1.مجموع وجداء عددين مركبين

تعريف: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث $z'=x'+iy'$

($x'\in\mathbb{R}$ و $y'\in\mathbb{R}$) .

1) $z+z'=x+x'+i\left(y+y'\right)$.

2) $z.z'=xx'-yy'+i\left(xy'+x'y\right)$.

- نتائج: $A\left(z_A\right)$ ، $B\left(z_B\right)$ و $C\left(z_C\right)$ نقط من : المستوي المزود بمعلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

1) $\overrightarrow{AB}\left(z_B-z_A\right)$.

2) $I\left(z_I\right)$ منتصف القطعة $[AB]$ يكافئ $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$.

$G\left(z_G\right)=Bary\left\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\right\}$ يكافئ $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ مع $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$F\left(z_F\right)$ مركز ثقل المثلث ABC يكافئ $z_F=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$.

تمرين 1 :

برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

الحل :

نبرّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

$$(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=\left[1+2i+i^2\right]^4=(2i)^4=2^4(i)^4=16\left(i^2\right)^2=16$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=\left(\frac{1-2i+i^2}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=\left(\frac{-2i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=\frac{(-2)^{2008}(i)^{2008}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2008}}=\frac{2^{2008}\left(i^2\right)^{1004}}{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{1004}}=\frac{2^{2008}}{2^{1004}}=\left(\frac{2^2}{2}\right)^{1004}=2^{1004}$$

وكلا من العددين حقيقين

تمرين :

المستوي مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u};\vec{v})$

نضع : $z_1 = x+1-i$ ؛ $z_2 = 1+i(y-1)$ حيث x و y عددان حقيقيان

عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق:

1) $z_1 \times z_2$ حقيقي 2) z_1+z_2 حقيقي 3) $(z_1^2-z_2^2)$ تخيلي صرف

الحل :

1) تعين مجموعة النقط M من المستوي : $z_1 \times z_2 \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$z_1 \times z_2 = (x+1-i)(1+i(y-1))$$

$$z_1 \times z_2 = x+y+i((x+1)(y-1)-1)$$

$z_1 \times z_2 \in \mathbb{R}$ يعني $\mathrm{Im}(z_1 \times z_2)=0$ يعني $xy-x+y-1=0$ يعني $y(x+1)-(x+1)=0$ يعني $(x+1)(y-1)=0$ يعني $x=-1$ أو $y=1$.

اذن مجموعة النقط هي اتحاد مستقيمين معادلتاهما : $x=-1$ ، $y=1$.

2) تعين مجموعة النقط M من المستوي : $z_1+z_2 \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$z_1+z_2 = (x+1-i)+(1+i(y-1))$$

$$z_1+z_2 = x+2+i(y-2)$$

$z_1+z_2 \in \mathbb{R}$ يعني $\mathrm{Im}(z_1+z_2)=0$ يعني $y-2=0$.

اذن مجموعة النقط هي مستقيم معادلته : $y-2=0$.

3) تعين مجموعة النقط M من المستوي : $(z_1^2-z_2^2)$ تخيلي صرف

لدينا :

$$z_1^2-z_2^2 = (x+1-i)^2-(1+i(y-1))^2$$

$$z_1^2-z_2^2 = x^2+2x+1-1-2i(x+1)-1+y^2-2y+1-2i(y-1)$$

$$z_1^2-z_2^2 = x^2+y^2+2x-2y+i(-2x-2y)$$

$(z_1^2-z_2^2)$ تخيلي صرف يعني $\mathrm{Re}(z_1^2-z_2^2)=0$ يعني $x^2+y^2+2x-2y=0$ يعني $(x+1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$.

اذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها $A(-1;1)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

مرافق عدد مركب:

1.تعريف.

تعريف: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$).
العدد المركب $x-iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

خواص مرافق عدد مركب.

خواص مباشرة من التعريف:

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.
- $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$.

المرافق و العمليات : z عدد مركب و مرافقه $\overline{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\overline{z'}$.

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. $(n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.مع $z \neq 0$.
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.مع $z' \neq 0$.

تمرين رقم 11 ص144 :

كتابة الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري .

$z_1 = \frac{4-6i}{3+2i}$ ؛ $z_2 = \frac{5+15i}{1+2i}$ ؛ $z_3 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$ ؛ $z_4 = \frac{1+i}{1-i}$.

$z_1 = \frac{4-6i}{3+2i} = \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = -2i$ ، $z_2 = \frac{5+15i}{1+2i} = \frac{(5+15i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 7+i$ ،

$z_3 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = \frac{3-\sqrt{3}}{12} + i\frac{3+\sqrt{3}}{12}$ ، $z_4 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i$.

تمرين رقم 15 ص 145 :

الحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية (تعطى الحلول على الشكل الجبري)

أ - $(1-i)z = 3+i$.

يعني $z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$.

ب - $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$.

يعني $3z - (1+i)z = -1 - 2i + 2 - i$ يعني $(2-i)z = 1-3i$ يعني $z = \frac{1-3i}{2-i} = \frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = 1-i$

جـ - $(3-4i)z^2 = iz$

يعني $(3-4i)z^2 - iz = 0$ يعني $((3-4i)z - i)z = 0$ يعني $z = 0$ أو $((3-4i)z - i) = 0$ يعني $z = 0$

أو $z = \frac{i}{3-4i} = \frac{i(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3i-4}{25} = -\frac{4}{25} + i\frac{3}{25}$.

د - $\frac{z+1}{z-1} = 2i$.($z \neq 1$)

يعني $(z+1)=2i(z-1)$ يعني $z+2iz=-2i-1$ يعني $z(1+2i)=-2i-1$ يعني

$$z=\frac{(-2i-1)}{(1+2i)}=-\frac{(2i+1)}{(1+2i)}=-1$$

تمرين رقم 16 ص145 :

الحل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ - $2\overline{z}=-1+i$ تعني $\overline{z}=\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ يعني $z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

ب - $(2z+1-i)(i\overline{z}+i-2)=0$ يعني $2z+1-i=0$ أو $i\overline{z}+i-2=0$ يعني $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ أو

$\overline{z}=-1-2i$ يعني $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ أو $z=-1+2i$

جـ - $\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=i$ يعني $\frac{\overline{z-1}}{\overline{z+1}}=i$ يعني $\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}=i$ يعني $\frac{z-1}{z+1}=-i$ يعني $z-1=-i(z+1)$ يعني

$z+iz=1-i$ يعني $z=\frac{1-i}{1+i}=-i$ $(z\neq-1)$

تمرين جزء من بكالوريا :

عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β .

الحل :

$\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ تعني $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ \overline{2\alpha+\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ تعني $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ 2\alpha+\beta=-3+2i\sqrt{3}\end{cases}$ بالجمع نجد :

$4\alpha=-6+2i\sqrt{3}$ يعني $\alpha=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ بالتعويض في احدى المعادلتين نجد : $-3+i\sqrt{3}-\beta=-3$

يعني $\beta=i\sqrt{3}$.

تمرين رقم : 108 ص 152

$z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq1$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث $L=\frac{z+2i}{z-1}$.

1) كتابة العدد المركب L على الشكل الجبري .

لدينا $L=\frac{z+2i}{z-i}$ يعني :

$$L=\frac{x+iy+2i}{x+iy-i}=\frac{x+i(y+2)}{x+i(y-1)}=\frac{(x+i(y+2))(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}$$

$$L=\frac{x^2+(y+2)(y-1)+i(x(y+2)-x(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$L=\frac{x^2+(y+2)(y-1)}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{3x}{x^2+(y-1)^2}$$

2) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

يكون L حقيقيا يعني $3x=0$ و $(x;y)\neq(0;1)$ يعني $x=0$ و $(x;y)\neq(0;1)$ وبالتالي مجموعة النقط هي مستقيم معادلته $x=0$ ماعدا النقطة $A(0;1)$.

3) نبرهن أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

تخيليا صرفا يعني $x^2+(y+2)(y-1)=0$ و $(x;y)\neq(0;1)$ يعني $x^2+y^2+y-2=0$ و $(x;y)\neq(0;1)$ يعني $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ و $(x;y)\neq(0;1)$

وبالتالي مجموعة النقط هي دائرة مركزها $\omega\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{3}{2}$ ما عدا النقطة $A(0;1)$.

الطويلة و عمدة عدد مركب.

1.الطويلة عدد مركب.

تعريف: z عدد مركب حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان).

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

أمثلة : $|2+3i|=\sqrt{13}$ ، $|-2-3i|=\sqrt{13}$ ، $|5i|=\sqrt{25}$ ، $|-5|=\sqrt{25}$.

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM=|z|$

خواص طويلة عدد مركب.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

- $|\overline{z}|=|z|$.
- $|-z|=|z|$.
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$. مع $z'\neq 0$
- $|z^n|=|z|^n$.
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$. (المتباينة الثلاثية).

ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB=|z_B-z_A|$.

تمرين : رقم 34 ص146

تعيّن ثمّ نمثّل مجموعة النقط M ذات اللاحقة المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ - $|z+1+2i|=|z-4|$.

$|z+1+2i|=|z-4|$ تكافيء $|z-(-1-2i)|=|z-4|$ تكافيء $|z-z_A|=|z-z_B|$ يعني $AM=BM$ حيث $A(-1;-2)$ و $B(-4;0)$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

ب - $|z-3i|=2$.

$|z-3i|=2$ تكافيء $|z-z_C|=2$ تكافيء $MC=2$ حيث $C(0;3)$.

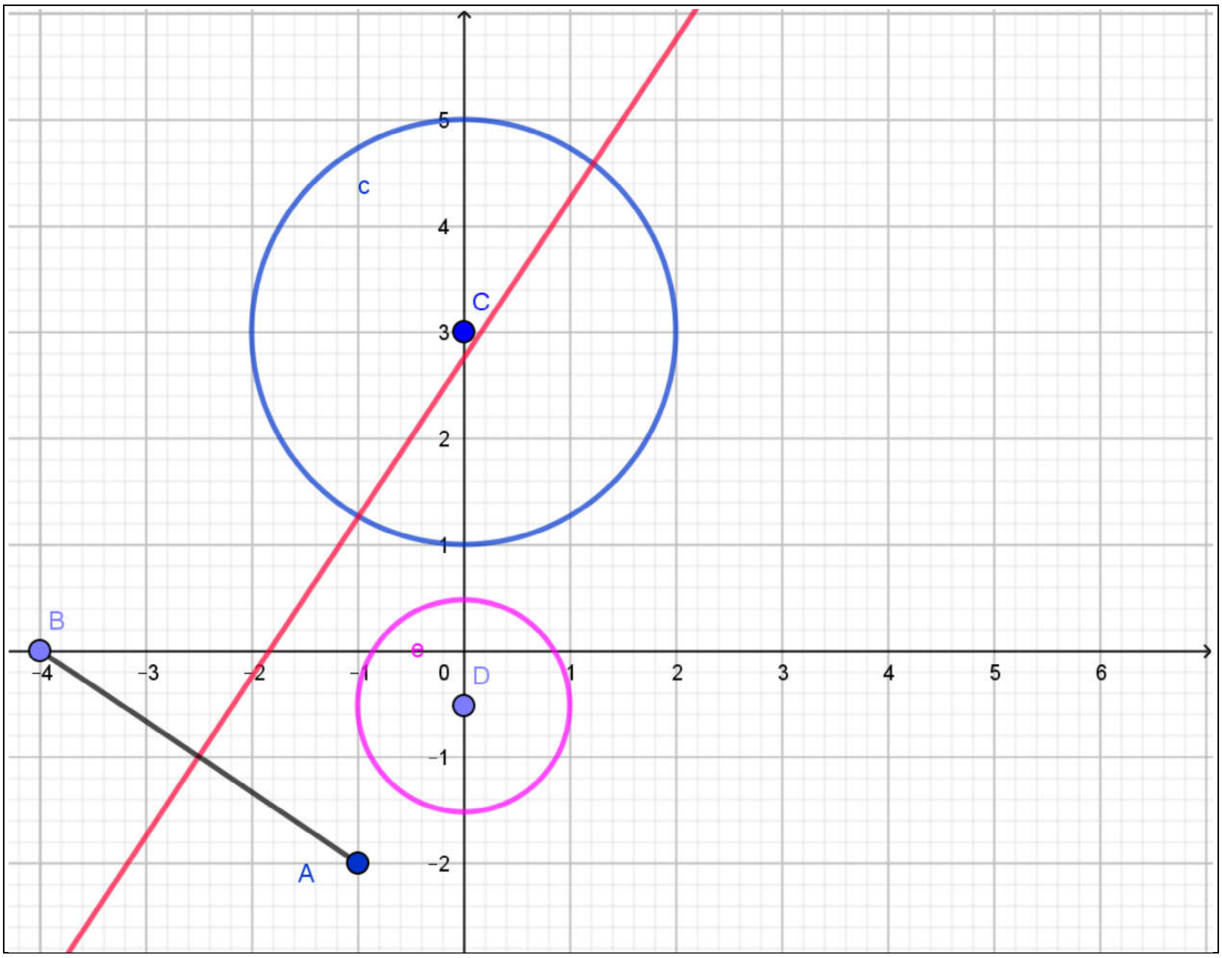
اذن مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها $r=2$.

جـ - $|2z-i|=2$

$|2z-i|=2$ يعني $\left|2\left(z-\frac{1}{2}i\right)\right|=2$ يعني $\left|\left(z-\frac{1}{2}i\right)\right|=1$ يعني $MD=1$ حيث $D\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

اذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها D ونصف قطرها $r=1$.

ملاحظة : هناك طريقة أخرى للحل



تمرين رقم 35 ص 146

يعطى العدد المركب α حيث :

$\alpha=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) حساب α^2 ثم α^4 .

لدينا :

$$\alpha^2=\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\alpha^2=2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}-2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\alpha^2=-2\sqrt{2}-2i\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$\alpha^2=-2\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}$$

$$\alpha^2=-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=-2\sqrt{2}(1+i)$$

ومن جهة أخرى : $\alpha^4=(\alpha^2)^2=\left(-2\sqrt{2}(1+i)\right)^2=16i$.

2) حساب $|\alpha^4|$ ثم استنتج $|\alpha|$.

$|\alpha^4|=16$ اذن $|\alpha|^4=2^4$ ومنه $|\alpha|=2$.

3) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|\alpha z|=6$.

$|\alpha z|=6$ يعني $|\alpha|\times|z|=6$ يعني $|z|=3$ يعني $OM=3$ وبالتالي مجموعة النقط هي دائرة مركزها O ونصف قطرها $r=3$.

تعيين الجدرين التربيعيين لعدد مركب :

تعريف:
ω عدد مركب. يسمى حلا المعادلة $z^2=\omega$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد ω .

أمثلة :
- الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما $2-i$ و $-2+i$.
- الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $-3i$ و $3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران .

تمرين: عين الجذرين التربيعيين للعدد : $z=3+4i$.

الحل: ليكن $\omega=x+iy$ جذرا تربيعيا لـ z . أي $z=\omega^2$.

$\omega^2=x^2-y^2+2xyi$.

$|\omega^2|=|\omega|^2=x^2+y^2$ ، $|z|=|3+4i|=\sqrt{25}=5$.

$z=\omega^2$ يعني $\begin{cases} x^2+y^2=5........1 \\ x^2-y^2=3.......2 \\ 2xy=4.....3 \end{cases}$ بجمع المعادلتين 1 و 2 نجد :

$2x^2=8$ يعني $x=-2$ أو $x=2$.

اذا كان $x=-2$ بالتعويض في3 نجد : $y=-1$.

اذا كان $x=2$ بالتعويض في3 نجد : $y=1$.

اذن : $w=-2-i$ أو $w=2+i$.

الحل في مجموعة الاعداد المركبة، معادلة من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية :

مبرهنة:

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$ حيث a ، b و c أعداد مركبة و $a\neq 0$

$\Delta=b^2-4ac$ مميزها .

- إذا كان $\Delta=0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z=-\dfrac{b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta\neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين :

$$z'=\frac{-b-\omega}{2a} \quad \text{و} \quad z"=\frac{-b+\omega}{2a}$$

حيث ω جذر تربيعي لِـ Δ .

ملاحظة:

1) إذا كان z' و $z"$ حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2+bz+c=a(z-z')(z-z")$$

2) حلا معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{Z}$ مترافقان .

تمرين رقم 56 ص147

الحل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ - $2z^2-6z+5=0$.

حساب المميز : $\Delta=-4=(2i)^2$ ، $z_1=3-i$ ، $z_2=3+i$.

ب - $z^2-5z+9=0$.

حساب المميز : $\Delta=-11=\left(i\sqrt{11}\right)^2$ ، $z_1=5-i\sqrt{11}$ ، $z_2=5+i\sqrt{11}$.

جـ - $z^2+z+1=0$.

حساب المميز : $\Delta=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ ، $z_1=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_2=-1+i\sqrt{3}$.

د - $z^2-2z+3=0$.

حساب المميز : $\Delta=-9=(3i)^2$ ، $z_1=2-3i$ ، $z_2=2+3i$.

هـ - $z^2=z+1$ تكافيء $z^2-z-1=0$

حساب المميز : $\Delta=5$ ، $z_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ، $z_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

و - $z^2+3=0$ تكافيء $z^2=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ يكافيء $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$.

تمرين رقم 57 ص147

الحل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية:

أ - $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$.

ب - $z^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)z+2\left(\sqrt{2}+2\right)=0$.

جـ - $z^2-2(\cos\theta)z+1=0$ حيث θ عدد حقيقي .

د - $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$ حيث θ عدد حقيقي .

الحل :

أ - $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$.

حساب المميز : $\Delta=-64=(8i)^2$ ، $z_1=4\sqrt{3}-4i$ ، $z_2=4\sqrt{3}+4i$.

ب - $z^2-2(1+\sqrt{2})z+2(\sqrt{2}+2)=0$.

حساب المميز : $\Delta=4$ ، $z_1=2\sqrt{2}$ ، $z_2=2\sqrt{2}$.

جـ - $z^2-2(\cos\theta)z+1=0$ حيث θ عدد حقيقي .

حساب المميز : $\Delta=4\cos^2\theta-4=4(\cos^2\theta-1)=-4\sin^2\theta=(2i\sin\theta)^2$ ، $z_1=2\cos\theta-2i\sin\theta$ ، $z_2=2\cos\theta+2i\sin\theta$.

د - $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$ حيث θ عدد حقيقي .

حساب المميز : $\Delta=4\sin^2\theta-4=4(\sin^2\theta-1)=-4\cos^2\theta=(2i\cos\theta)^2$ ، $z_1=2\sin\theta-2i\cos\theta$ ، $z_2=2\sin\theta+2i\cos\theta$.

تمرين رقم 151 ص 157 .

من أجل كل عدد مركب z ، نضع :

$p(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$.

1) a عدد حقيقي . نعبر بدلالة a عن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $p(ia)$.

$$p(ia)=(ia)^4-10(ia)^3+38(ia)^2-90ai+261$$
$$p(ia)=a^4+10a^3i-38a^2-90ai+261$$
$$p(ia)=a^4-38a^2+261+i(10a^3-90a)$$

2) تعين قيم a التي يكون من أجلها $p(ia)=0$.

$p(ai)=0$ يعني $\begin{cases}a^4-38a^2+261=0\\10a^3-90a=0\end{cases}$

$10a^3-90a=0$ يعني $10a(a^2-9)=0$ يعني $a=0$ أو $a=-3$ أو $a=3$.

بالتعويض في المعادلة $a^4-38a^2+261=0$ نجد : $a=0$ لا يحقق المعادلة ، $a=-3$ لا يحقق المعادلة ، $a=3$ يحقق المعادلة .

حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $z=-3i$ و $z=3i$.

3) تعين عددين حقيقيين b و c حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ,

$p(z)=(z^2+9)(z^2+bz+c)$.

$z^4-10z^3+38z^2-90z+261=(z-3i)(z+3i)(z^2+az+b)$ تكافيء

$$p(z)=(z^2+9)(z^2+az+b)$$

تكافيء $p(z)=(z^2+9)(z^2+az+b)=z^4+az^3+(b+9)z^2+9az+9b$ بالمطابقة نجد : $\begin{cases}a=-10\\9b=261\end{cases}$

يعني $\begin{cases}a=-10\\b=29\end{cases}$ وعليه نجد : $p(z)=(z^2+9)(z^2-10z+29)$.

4) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

$p(z)=0$ يكافيء $(z^2+9)(z^2-10z+29)=0$ يكافيء $z=-3i$ أو $z=3i$ أو $z^2-10z+29=0$

نحسب المميز نجد :

حساب المميز : $\Delta=-16=(4i)^2$ ، $z_1=5-2i$ ، $z_2=5+2i$.

حلول المعادلة : $\{5-2i;5+2i;-3i;3i\}$.

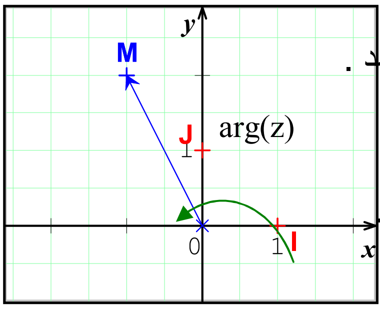
الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

عمدة عدد مركب غير معدوم.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ لتكن M صورة z .

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg(z)$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$.



ملاحظات: • كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمد .

إذا كان θ عمدة لِـ z فإن $\theta+2k\pi$ عمدة لِـ z .

و نكتب $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$.

• A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ أي

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\arg(z_B)-\arg(z_A)$

• $\arg(z_B-z_A)=(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})$.

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومين.

$\bullet\ \arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$. $\bullet\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.

$\bullet\ \arg(z^n)=n\arg(z)$. $n\in\mathbb{N}^*$ $\bullet\ \arg(\bar{z})=-\arg z$

الانتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري والعكس :

1.تعريف و خواص .

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. تعلم نقطة M بإحداثييها الديكارتية $(x;y)$ أو بإحداثييها القطبية $(r;\theta)$. $OM=r$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})=\theta$ ، و لدينا $x=r\cos(\theta)$ و $y=r\sin(\theta)$.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم .العدد z يكتب على الشكل $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ حيث : $r=|z|$ و $\theta=\arg(z)$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لِـ z .يمكن كتابة $z=[r;\theta]$.

ملاحظة: • إذا كان $z=x+iy$ ، $\cos(\theta)=\frac{x}{r}$ و $\sin(\theta)=\frac{y}{r}$.

خاصية: يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة و عمدتان متوافقتان بترديد 2π .

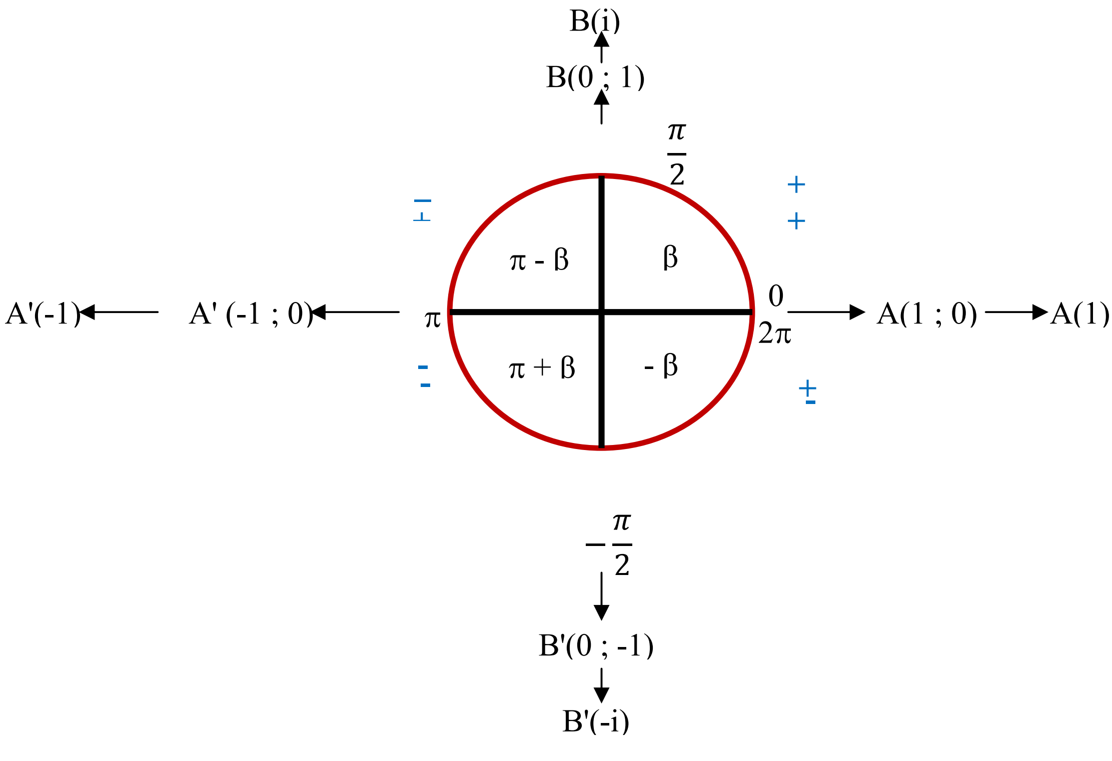
خاصية: إذا كان $z=\lambda\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ و كان $\lambda>0$ فإن $\lambda=|z|$ و $\theta=\arg(z)$.

ملاحظة :

1) جدول القيم الشهيرة :

β	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$
$\cos\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
$\sin\beta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	-1
$\tan\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0		0	

(ميزة كل ربع الدائرة المثلثية



تمرين :

كتابة على الشكل المثلثي :

1) $z_1 = 1+i$

$|z_1| = \sqrt{2}$ ، نضع θ_1 عمدة لـ z_1 اذن :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ نستنتج أن : $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

اذن : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $z_2 = 3-3i$

$|z_2| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ، نضع θ_2 عمدة لـ z_2 اذن :

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ نستنتج أن : $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$

اذن : $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) $z_3 = -\sqrt{3}+i$

$|z_3| = 2$ ، نضع θ_3 عمدة لـ z_3 اذن :

$$\begin{cases} \cos\theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$ نستنتج أن : $\theta_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

اذن : $z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

4) $z_4 = -1-i\sqrt{3}$

$|z_4| = 2$ ، نضع θ_4 عمدة لـ z_4 اذن :

$$\begin{cases} \cos\theta_4 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ نستنتج أن : $\theta_4 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

اذن : $z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

5) $Z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

$|Z| = \frac{|4+4i|}{|1-i\sqrt{3}|} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$ ، نضع θ_5 عمدة لـ $4+4i$ و θ_6 عمدة لـ $1-i\sqrt{3}$ اذن :

$$\begin{cases} \cos\theta_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ نستنتج أن : $\theta_5 = \dfrac{\pi}{4}$

اذن : $z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$$\begin{cases} \cos\theta_6 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_6 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ نستنتج أن : $\theta_6 = -\dfrac{\pi}{3}$

اذن : $z_6 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

الخلاصة :

$\arg Z = \dfrac{\arg z_5}{\arg z_6} = \arg z_5 - \arg z_6 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12}$.

اذن : $Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)$

تمرين رقم 39 ص 146 :

في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، نعين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

أ - $z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ يكافيء $z = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ وبالتالي $|z| = 4$ و $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}$.

ب - $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ تكافيء $z = 3\left(-\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ تكافيء

$z = 3\left(\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ تكافيء $z = 3\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$ وبالتالي $|z| = 3$ و

$\arg z = \dfrac{4\pi}{3}$.

جـ - $z = \sqrt{5}\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$z = \sqrt{5}\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$ تكافيء $z = \sqrt{5}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ تكافيء

$z = \sqrt{5}\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ وبالتالي $|z| = \sqrt{5}$ و $\arg z = \dfrac{2\pi}{3}$.

د - $z = \sin\dfrac{\pi}{6} - i\cos\dfrac{\pi}{6}$.

تكافيء $z=\left(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)$ تكافيء $z=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

تكافيء $z=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ وبالتالي $z=\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ و $|z|=1$

$\arg z=-\frac{2\pi}{3}$.

ترميز أولر :

تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$. حيث $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.
هذا الترميز يسمى ترميز أولر.

2.الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.

تعريف: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z=re^{i\theta}$.
هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z .

3.قواعد الحساب على الشكل الأسي.

خواص: θ و θ' عددان حقيقيان.

- $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}$.
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$.
- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

تمرين رقم 50 ص 147 :

كتابة الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

1) $z=2-2i$

$|z|=2\sqrt{2}$ ، نضع θ عمدة لـ z اذن :

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ نستنتج أن : $\theta=-\frac{\pi}{4}$.

اذن : $z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) $z=-3\sqrt{3}+3i$

$|z|=6$ ، نضع θ عمدة لـ z اذن :

$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$ نستنتج أن : $\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

اذن : $z=6e^{i\frac{3\pi}{4}}$

3) $z=\frac{5}{4}i$

$z=\frac{5}{4}i=\frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$

4) $z=-1$

$z=-1=e^{i\pi}$

تمرين رقم 54 ص 147

اعطاء شكلا أسيّا لكل من الأعداد المركبة التالية .

1) $z=\left(2\sqrt{3}+6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left|2\sqrt{3}+6i\right|=4\sqrt{3}$ ، $\arg\left(2\sqrt{3}+6i\right)=\frac{\pi}{3}$ وبالتالي $2\sqrt{3}+6i=4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

اذن: $z=\left(2\sqrt{3}+6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=4\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) $z=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\left(1+i\right)e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

3) $z=\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z=\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}=-\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\pi}\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\frac{5\pi}{4}}$

4) $z=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

. $z=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=3e^{-i\frac{\pi}{7}}$

4. دستور موافر.

خواص: z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:
$\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.

تمرين : رقم 123 ص154 .

$z_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_2=-\frac{1}{2}i$.

1) حساب الطويلة و عمدة للعدد المركب z_1-2iz_2 .

$z_1-2iz_2=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-i)$ ، $\left|z_1-2iz_2\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\arg\left(z_1-2iz_2\right)=-\frac{\pi}{4}$

2) تعين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(z_1-2iz_2\right)^n$ تخيليا صرفا .

$z_1-2iz_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ اذن $\left(z_1-2iz_2\right)^n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}n\right)\right)$

$\left(z_1-2iz_2\right)^n$ تخيليا صرفا يعني $\cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right)=0$ يعني $\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)=0$ يعني $\frac{\pi}{4}n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يعني

$n=2+4k$ مع $n\in\mathbb{N}$.

المعادلة الوسيطية لدائرة – لنصف مستقيم :

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$

خاصية : Ω نقطة ثابتة من المستوي ذات اللاحقة z_Ω ، θ عدد حقيقي ، r عدد حقيقي موجب تماما ، (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=z_\Omega+re^{i\theta}$.

1) اذا كان r ثابت و θ يمسح $\mathbb{R}$ ، المجموعة (F) هي دائرة مركزها r ونصف قطرها Ω ، تسمى المعادلة $z=z_\Omega+re^{i\theta}$ معادلة وسيطية للدائرة (F) .

2) اذا كان r يمسح $\mathbb{R}_+^*$ و θ ثابت ، المجموعة (F) هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه Ω وموجه بالشعاع $\vec{V}$ حيث $\left(\overrightarrow{OI};\vec{V}\right)=\theta$ ، المعادلة $z=z_\Omega+re^{i\theta}$ تسمى معادلة وسيطية لنصف المستقيم المفتوح (F).

تمرين :

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس ، عين مجموعة النقط ذات اللاحقة ثم مثلهابيانيا في كل حالة :

1) $|iz-5|=|z-4+3i|$ (2 $\arg(z-3i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

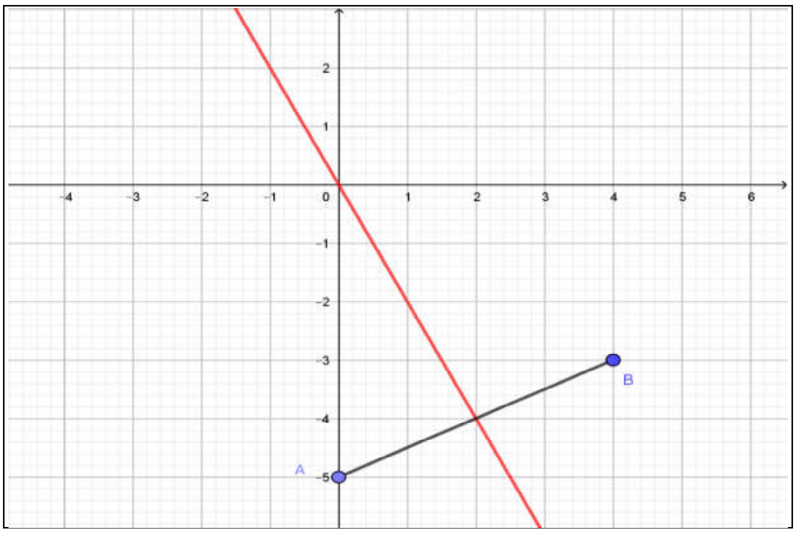
3) $\arg\frac{z+1}{z-2i}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ (4 $z=2-3i+re^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث r يمسح $\mathbb{R}_+^*$

5) $z=2-3i+2e^{i\theta}$ حيث θ يمسح $\mathbb{R}$.

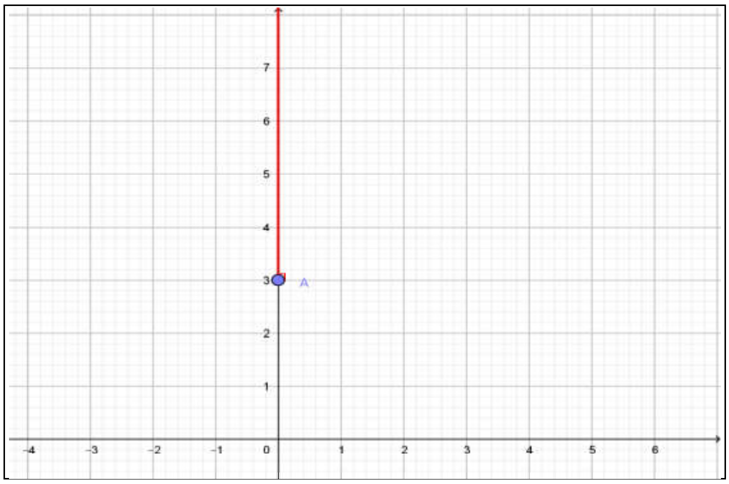
الحل :

1) $|iz-5|=|z-4+3i|$ تكافيء $\left|i\left(z-\frac{5}{i}\right)\right|=|z-4+3i|$ تكافيء $|i|\left|\left(z-\frac{5}{i}\right)\right|=|z-(4-3i)|$ تكافيء

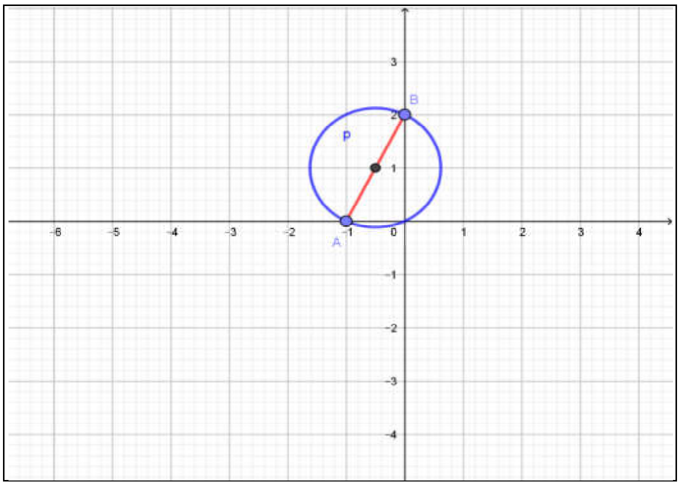
$|(z+5i)|=|z-(4-3i)|$ تكافيء $|(z-(-5i))|=|z-(4-3i)|$ تكافيء $AM=BM$ حيث $A(0;-5)$ و $B(4;-3)$ وبالتالي مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.



2) $\arg(z-3i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ يكافيء $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $A(0;3)$ وبالتالي مجموعة النقط هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيه له $\vec{v}$ حيث $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}$. لا يشمل المبدأ

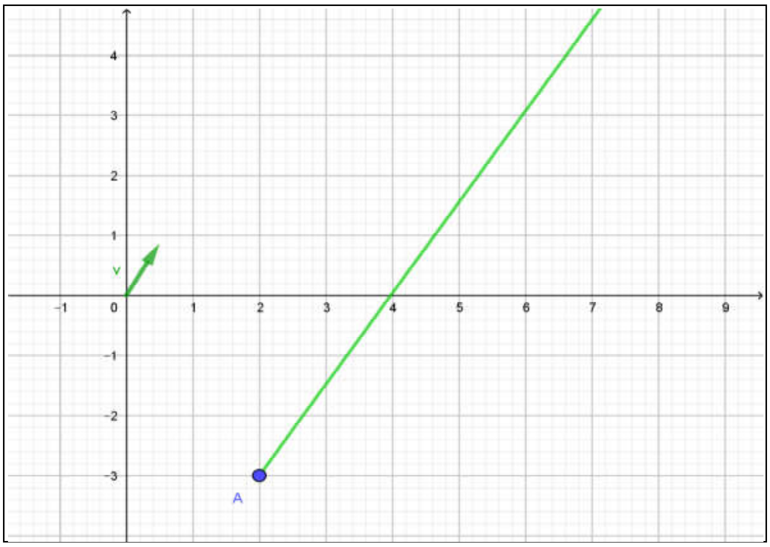


3) $\arg\frac{z+1}{z-2i}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ تكافيء $\arg\frac{z-(-1)}{z-2i}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ تكافيء $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $A(-1;0)$ و $B(0;2)$. اذن مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطة B .



4) $z=2-3i+re^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث r يمسح $\mathbb{R}_+^*$

نضع $z=x+iy$ وبالتالي نجد $x+iy=2-3i+r\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ يعني $\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}r \\ y=-3+\frac{1}{2}r \end{cases}$ مع r يمسح $\mathbb{R}_+^*$ ، وهو التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم مبدؤه النقطة $A(2;-3)$ وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

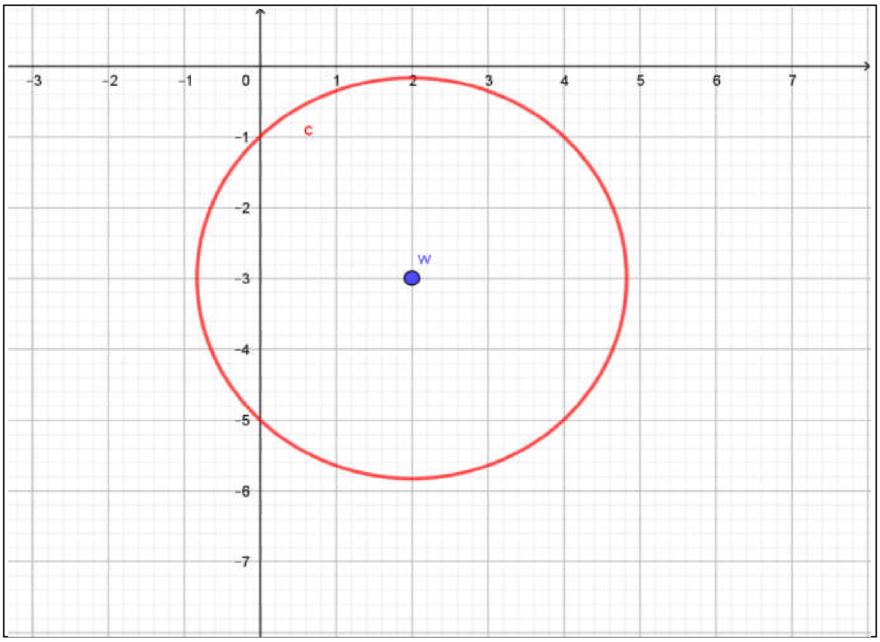


5) $z=2-3i+2e^{i\theta}$ حيث θ يمسح $\mathbb{R}$.

نضع : $z=x+iy$ وبالتالي نجد $x+iy=2-3i+2(\cos\theta+i\sin\theta)$ اذن : $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=-3+2\sin\theta\end{cases}$ يعني

$\begin{cases}x-2=2\cos\theta\\ y+3=2\sin\theta\end{cases}$ وبالتالي $(x-2)^2+(y+3)^2=8=\left(\sqrt{8}\right)^2$.

اذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها $\omega(2;-3)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{8}$.



تمرين :

θ عدد حقيقي .

1) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي z حيث : $z^2-2z\sin\theta+1=0$

2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.

A و B نقطتان لا حقاتاهما $z_A=\sin\theta-i\cos\theta$ و $z_B=\sin\theta+i\cos\theta$ على الترتيب .

عين قيم العدد الحقيقي θ حيث يكون المثلث OAB متقايس الاضلاع .

الحل :

1) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي z حيث : $z^2-2z\sin\theta+1=0$

$\Delta=4\sin^2\theta-4=4(\sin^2\theta-1)=-4\cos^2\theta=(2i\cos\theta)^2$.

$z_1=\dfrac{2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}=\sin\theta-i\cos\theta$ ، $z_2=\sin\theta+i\cos\theta$.

2) تعيين قيم العدد الحقيقي θ حيث يكون المثلث OAB متقايس الاضلاع .

يكون المثلث ABC متقايس الاضلاع اذا وفقط اذا كان : $AB=OA=OB$ يعني $AB^2=OA^2=OB^2$.

$A(\sin\theta;\cos\theta)$ ، $B(\sin\theta;-\cos\theta)$ ، $\overrightarrow{AB}(0;-2\cos\theta)$ ، $\overrightarrow{OA}(\sin\theta;\cos\theta)$ ، $\overrightarrow{OB}(\sin\theta;-\cos\theta)$

$AB^2=2|\cos\theta|$ ، $OA^2=1$ ، $OB^2=1$.

$AB^2=OA^2=OB^2$ يعني $2|\cos\theta|=1$ يعني $|\cos\theta|=\dfrac{1}{2}$ يعني $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ أو $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ يعني

$\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $\theta=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ مع k عدد صحيح .