# الأعداد الأولـية

الكفاءات المستهدفة | الأستاذ :بوخلاط محمد

1) التعرف على أولية عدد طبيعي .
2) استعمال تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه .
3) استعمال تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر .
4) استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الاكبر .
5) استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر .
6) استعمال مبرهنة بيزو .
7) استعمال مبرهنة غوص ونتائجها .

**تعريف :** القول ان العدد الطبيعي $n$ عدد اولي معناه أن $n$ يقبل قاسمين بالضبط في Z : 1 و $n$ نفسه

**ملاحظات :**

1) العدد 0 غير أولي لأنه يقبل عدد غير منته من القواسم .
2) العدد 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو نفسه .
3) العدد 2 هو العدد الاولي الزوجي الوحيد .

**خواص :**

**خاصية 1 :** كل عدد طبيعي $n$ أكبر تماما من 1 ( $n \geq 2$ ) يقبل على الأقل قاسما أوليا .

**البرهان :** ليكن $n$ عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

*) إذا كان $n$ أوليا فإن $n$ يقسم $n$ وبالتالي الخاصية محققة .

*) إذا كان $n$ غير أولي فإن $n$ يقبل على الاقل قاسما يختلف عن 1 وعن $n$ . ليكن $p$ أصغر قاسم للعدد $n$ يختلف عن 1 وعن $n$ . نفرض أن $p$ غير أولي ومنه يوجد عدد طبيعي $d$ يقسم $p$ حيث $1 \prec d \prec p$ وبالتالي $d$ يقسم $n$ وهذا تناقض ( لأن $d \prec p$ و $p$ أصغر قاسم للعدد $n$ ) ومنه $p$ عدد أولي وعليه الخاصية محققة .

**خاصية 2 :**

كل عدد طبيعي $n$ غير أولي أكبر تماما من 1 ( $n \geq 2$ ) يقبل قاسما اوليا $a$ حيث $a \leq \sqrt{n}$

**البرهان :** ليكن $n$ عددا طبيعيا غير اولي أكبر تماما من 1 .

$n$ يقبل قاسما $d$ يختلف عن 1 و عن $n$ ومنه $n = d \times d'$ حيث $d'$ عدد طبيعي غير معدوم .

( لأن إذا كان $d' = 1$ فإن $d = n$ وهذا تناقض )

نفرض $d \leq d'$ ومنه $d^2 \leq d \times d'$ أي أن $d^2 \leq n$ وبالتالي $d \leq \sqrt{n}$ .

حسب الخاصية 1 : $d$ يقبل على الأقل قاسما أوليا $a$ وهو كذلك قاسم أولي للعدد $n$ .

بما أن لدينا $a \leq d$ و $d \leq \sqrt{n}$ نستنتج أن : $a \leq \sqrt{n}$ .

**خاصية 3 :** مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

**البرهان :**
نستعمل البرهان بالخلف
نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن $p$ أكبر عدد من مجموعة الاعداد الأولية .
ليكن $N$ جداء كل الاعداد الأولية من 2 الى $p$. أي $N=2\times3\times5\times..........\times p$ .
ليكن $N'$ العدد الطبيعي حيث أن : $N'=N+1$ باقي قسمة $N'$ على 2،3،5......... او $p$ تعطي الباقي دوما 1 . إذن $N'$ غير قابل للقسمة على 2،3،5......... او $p$ .
- إذا كان $N'$ اوليا فإن $N'\succ p$ وهذا تناقض .
- إذا كان $N'$ غير أولي فإن $N'$ يقبل قاسما أوليا أكبر من $p$ ( حسب الخاصية (1) وهذا تناقض
إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

## طرائـــــق

**تـمـريـن :**
في كل حالة من الحالات التالية أذكر إن كان العدد أوليا :
ا) 251 ب) 341 ج) 1023

**الـحـل :**
ا) $\sqrt{251}\approx15.84$ الأعداد الألية الأصغر من هي $13;11;7;5;3;2$ .
العدد 251 لا يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 5 وكذلك $251=7\times35+6$ و $251=11\times22+9$ و $251=13\times19+4$ بالتالي العدد 251 أولي .
ب) $\sqrt{341}\approx18.46$ الأعداد الألية الأصغر من 18 هي $17;13;11;7;5;3;2$ .
العدد 341 لا يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 5 وعلى 7 لكن يقبل القسمة على 11 وبالتالي 341 غير أولي .
ج) $\sqrt{1023}\approx31.98$ الأعداد الألية الأصغر من 31 هي $29;23;19;17;13;11;7;5;3;2$ .
العدد 1023 لا يقبل القسمة على 2 لكن يقبل القسمة على 3 وبالتالي 341 غير أولي .

**2) تحليل عدد الى جداء عوامل أولية :**

**مبرهنة :** كل عدد طبيعي غير أولي $n$ حيث يمكن تحليله الى جداء عوامل أولية

**البرهان:**
ليكن $n$ عددا طبيعيا أكبر من 1 .
$n$ عددا طبيعيا غير أولي فإن يقبل يقبل القسمة على عدد أولي $p_1$ $(p_1\geq2)$ على الأقل وبالتالي : $n=p_1\times n_1$ حيث $1\prec n_1\prec n$ .
- إذا كان $n$ أوليا فإن المبرهنة محققة .
- إذا كان $n$ غير اولي فإن $n$ يقبل القسمة على عدد أولي $p_1$ $(p_1\geq2)$ على الاقل وبالتالي : $n_1=p_1\times n_2$ حيث $1\prec n_2\prec n_1$ . $1\prec n_1\prec n$ نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول

على $n_i = 1$ ( عدد طبيعي ) . وعليه نحصل $n = p_1 \times p_2 \times .......... \times p_k$ ( $k$ عدد طبيعي )
يمكن للأعداد $p_1$ ، $p_2$ ، $p_3$ ،......، $p_k$ . أن تتكرر في التحليل .
وعليه نحصل على $n = {p_1}^{d_1} \times {p_2}^{d_2} \times {p_3}^{d_3} \times ........ \times {p_k}^{d_k}$ . حيث $d_1$ ، $d_2$ ، $d_3$ ،......، $d_k$ أعداد طبيعية .

**خاصية :** $a$ و $b$ عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1 .
يكون العدد $b$ قاسما للعدد $a$ إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل $b$ موجودا في تحليل $a$ وبأس إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل $a$ .

**البرهان :** $n$ عدد طبيعي أكبر تماما من 1 تحليله الى جداء عوامل أولية
$n = {p_1}^{d_1} \times {p_2}^{d_2} \times {p_3}^{d_3} \times ........ \times {p_k}^{d_k}$ .

- إذا كان $l$ قاسما للعدد $n$ فإن $n = l \times l'$ حيث $l'$ عدد طبيعي . إذن كل قاسم أولي للعدد $l$ هو قاسم أولي للعدد $n$ وبالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد $l$ يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل $n$ ، وكل عامل أولي في تحليل $l$ موجود في تحليل $n$ بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل $n$ .

إذن قواسم العدد $n$ هي الأعداد الطبيعية من الشكل ${p_1}^{d_1'} \times {p_2}^{d_2'} \times {p_3}^{d_3'} \times ........ \times {p_k}^{d_k'}$ حيث :
$0 \le d_1' \le d_1$ ، $0 \le d_2' \le d_2$ ، ......... ، $0 \le d_k' \le d_k$ .

- عكسيا ليكن $l$ عددا طبيعيا مكتوبا على الشكل ${p_1}^{d_1'} \times {p_2}^{d_2'} \times {p_3}^{d_3'} \times ........ \times {p_k}^{d_k'}$ يمكننا أن نكتب : $n = l\left({p_1}^{d_1'} \times {p_2}^{d_2'} \times {p_3}^{d_3'} \times ........ \times {p_k}^{d_k'}\right)$ .

لأن

$$\left({p_1}^{d_1-d_1'} \times {p_2}^{d_2-d_2'} \times {p_3}^{d_3-d_3'} \times .... \times {p_k}^{d_k-d_k'}\right)\left({p_1}^{d_1'} \times {p_2}^{d_2'} \times {p_3}^{d_3'} \times ... \times {p_k}^{d_k'}\right) = {p_1}^{d_1} \times {p_2}^{d_2} \times {p_3}^{d_3} \times ... \times {p_k}^{d_k}$$

ومنه $l$ يقسم $n$

## طرائـــــق

**تمريـن :**

1) حلل العدد 725 الى جداء عوامل اولية .
2) عين كل القواسم الموجبة للعدد 725 .
3) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2 - y^2 = 725$ .

**الحـل :**

1) تحليل العدد 725 .
$725 = 5^2 \times 29$
2) قواسم العدد 725 .
عدد قواسم العدد 725 هو $(2+1)(1+1) = 6$ .

للحصول على قواسم العدد $725$ نتبع مايلي : كل قواسم العدد $725$ هي من الشكل $5^{\alpha}\times 29^{\beta}$ حيث $0\le \alpha \le 2$ و $0\le \beta \le 1$ .

| | | |
|---|---|---|
| $5^0$ | $29^0$ | $5^0\times 29^0=1$ |
| | $29^1$ | $5^0\times 29^1=29$ |
| $5^1$ | $29^0$ | $5^1\times 29^0=5$ |
| | $29^1$ | $5^1\times 29^1=145$ |
| $5^2$ | $29^0$ | $5^2\times 29^0=25$ |
| | $29^1$ | $5^2\times 29^1=725$ |

3) تعين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2-y^2=725$ :

لدينا $x^2-y^2=725$ تكافيء $(x-y)(x+y)=725$ تكافيء $\begin{cases}x+y=1\\x-y=725\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+y=29\\x-y=25\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+y=5\\x-y=145\end{cases}$ يكافيء $\begin{cases}x=363\\y=-362\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=27\\y=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=75\\y=-70\end{cases}$ . الثنائية الوحيدة التي تحقق $x^2-y^2=725$ هي $(27;2)$ .

## المضاعف المشترك الاصغر لعددين :

$a$ عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ $M_a$ الى مجموعة مضاعفات العدد $a$ .

1) **تعريف :** $a$ و $b$ عددان طبيعيان غير معدومين . $M_a$ مجموعة مضاعفات $a$ و $M_b$ مجموعة مضاعفات $b$. $M_a\cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين $a$ و $b$ يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a\cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين $a$ و $b$ ونرمز له بـ $PPCM(a;b)$.

**ملاحظات :** 1) $PPCM(a;a)=a$ .

2) $PPCM(a;1)=a$ .

**مثال :**

تعين $PPCM(12;26)$ .

$M_{12}=\{0;12;24;36;48;60;72;84;96;108;120;132;144;156....\}$

و $M_{26}=\{0;26;52;78;104;130;156......\}$

وبالتالي $M_{12}\cap M_{26}=\{0;156;....\}$ إذن $PPCM(12;26)=156$ .

## تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين :

**تعريف :** $a$ و $b$ عددان صحيحان غير معدومين .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين $a$ و $b$ هو أصغر عدد طبيعي $m$ غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|;|b|)$ .

***خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :***

**خاصية :** $a$ و $b$ عددان طبيعيان غير معدومين . $k$ عدد صحيح غير معدوم $PPCM(ka;kb) = |k| PPCM(a;b)$ .

## طرائـــــق

***تمرين :***

$n$ عدد طبيعي أكبر من 3 .

نضع $a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9)$ و $b = (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)$ .

1) برهن أن $PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) PPCM(6;3)$ .

2) عين $PPCM(a;b)$ .

***الحل :***

1) نبرهن أن $PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) PPCM(6;3)$ :

لدينا :

$$PPCM(a;b) = PPCM\left((6n^2 - 24)(n^2 - 9);(3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)\right)$$

$$PPCM(a;b) = PPCM\left(6(n^4 - 13n + 36);3(n^4 - 13n + 36)\right)$$

$$PPCM(a;b) = (n^4 - 13n + 36) PPCM(3;6)$$

$$PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) PPCM(3;6)$$

.

تعين $PPCM(a;b)$ .

لدينا : $PPCM(3;6) = 6$ . وبالتالي $PPCM(a;b) = 6(n^2 - 4)(n^2 - 9)$ .

***حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية :***

**خاصية :** القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين $a$ و $b$ كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الاولية المشتركة في تحليلي العددين $a$ و $b$ بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس .

## حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية :

**خاصية :** المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين $a$ و $b$ كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الاولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين $a$ و $b$ بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأكبر أس .

## العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر :

**خاصية :** $a$ و $b$ عددان طبيعيان كلاهما أكبر من 1 : $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$ .

# طرائـــــق

**تمرين 1 :**
نضع $a=256$ و $b=5040$ باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية عين $PGCD(a;b)$ و $PPCM(a;b)$ .

**تمرين 2 :** عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a\times b=12000 \\ PPCM(a;b)=600 \end{cases}$ .

**تمرين 3 :** عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة :
$PPCM(a;b)=21\times PGCD(a;b)$

**الحل التمرين الاول :**
تحليل كلا من $a$ و $b$ الى جداء عوامل أولية : $a=256=2^8$ ، $b=5040=2^4\times 3^2\times 5\times 7$ .
اذن : $PGCD(a;b)=2^4=16$ و $PPCM(a;b)=2^8\times 3^2\times 5\times 7=80640$ .

**الحل التمرين الثاني:**
تعين كل الثنائيات $(a;b)$ : $\begin{cases} a\times b=12000 \\ PPCM(a;b)=600 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$ وبالتالي $PGCD(a;b)=\dfrac{a\times b}{PPCM(a;b)}$ أي $PGCD(a;b)=\dfrac{12000}{600}=20$ .وعليه نجد $\begin{cases} a\times b=12000 \\ PGCD(a;b)=20 \end{cases}$ .

لدينا : $PGCD(a;b)=20$ معناه $a=20k$ و $b=20k'$ حيث $k$ و $k'$ عددان صحيحان و $PGCD(k;k')=1$ .وعليه $a\times b=12000$ معناه $20k\times 20k'=12000$ أي $k\times k'=30$ .وبالتالي ثنائيات $(k;k')$ هي : $(1;30)$ ، $(30;1)$ ، $(5;6)$ ، $(6;5)$ ، $(2;15)$ ، $(15;2)$ ، $(10;3)$ ، $(3;10)$ .

إذن ثنائيات $(a;b)$ : $(20;600)$ ، $(600;20)$ ، $(100;120)$ ، $(120;100)$ ، $(40;300)$ ، $(300;40)$ ، $(100;60)$ ، $(60;100)$ .

## مبرهنة بيزو :

**مبرهنة :** يكون عددان صحيحان $a$ و $b$ أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان $u$ و $v$ حيث : $au+bv=1$ .

**ملاحظة :** الثنائية $(u;v)$ ليست وحيدة .

**خواص :**

1) إذا كان $d$ القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين $a$ و $b$ فإنه يوجد عددان صحيحان $u$ و $v$ حيث : $au+bv=d$ .

**البرهان :**

$a$ و $b$ عددان صحيحان غير معدومين وليكن $d$ قاسمهما المشترك الأكبر . نضع $a=da'$ و $b=db'$ حيث $a'$ و $b'$ عددان صحيحان أوليان فيما بينهما .اذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان $u$ و $v$ حيث $a'u+b'v=1$ بضرب الطرفين في $d$ نحصل على $da'u+db'v=1$ أي $au+bv=d$ .

2) إذا كان $a$ عددا أوليا فإن $a$ أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

**البرهان :**

ليكن $p$ عددا أوليا و $a$ عدد طبيعيا لا يقبل القسمة على $p$ ، نضع $PGCD(a;p)=d$ . بما أن $p$ أولي فإن $d=1$ أو $d=p$ و $d$ لا يقسم $a$ إذن $d=1$ ومنه $p$ أولي مع $a$ .

3) إذا كان $a$ عددا أوليا مع عددين صحيحين $b$ و $c$ فإن $a$ أولي مع جدائهما $b\times c$ .

**البرهان :**

ليكن $a$ عددا أوليا مع عددين صحيحين $b$ و $c$ إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة $u$، $v$ ، $u'$ و $v'$ حيث : $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$ نضرب طرفا لطرف نحصل على : $a(auu'+cuv'+bu'v)+bc(vv')=1$ أي وبالتالي حسب مبرهنة بيزو $a$ و $b\times c$ أوليان فيما بينهما .

## طرائـــــق

**تمرين 1 :**

$n$ عدد طبيعي أثبت أن العددين $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما حيث : $a=2n+3$ و $b=3n+5$ .

**الحل التمرين الاول :**

نحسب $-3a+2b$ .

$-3a+2b=-3(2n+3)+2(3n+5)=1$ .إذن $-3a+2b=1$ وبالتالي حسب مبرهنة بيزو $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما .

**تمرين 2 :**

$n$ عدد طبيعي غيرمعدوم . نضع $a=2n^2+4n+1$ و $b=n+2$ . باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما .

**الحل التمرين الثاني :**

لدينا : $a=2n(n+2)+1$ أي $a=2nb+1$ وبالتالي نجد $a-2nb=1$ وعليه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان 1 و $-2n$ بحيث $a-2nb=1$ وبالتالي $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما .

## مبرهنة غوص :

**مبرهنة :** $a$ ، $b$ و $c$ ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذاكان $a$ يقسم الجداء $bc$ وكان $a$ أوليا مع $b$ فإن $a$ يقسم $c$ .

**البرهان :** ليكن $a$ و $b$ عددان صحيحان أوليين فيما بينهما غير معدومين ، حسب مبرهنة بيزو يوجد عددين صحيحان $u$ و $v$ حيث : $au+bv=1$ . ليكن $c$ عددا صحيحا غير معدوم حيث يقسم الجداء $bc$. بضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في $c$ نحصل على $cau+cbv=c$ . وبما أن $a$ يقسم الجداء $bc$ اذن $a$ يقسم الجداء $bcv$ ولدينا $a$ يقسم الجداء $acu$ فإن $a$ يقسم $cau+cbv$ أي $a$ يقسم $c$ .

**خواص :**

1) $a$ و $b$ عددان طبيعيان غير معدومين و $p$ عدد أولي .
إذا كان $p$ يقسم الجداء $ab$ فإن $p$ يقسم $a$ أو $p$ يقسم $b$ .

**البرهان :**

$a$ و $b$ عددان طبيعيان غير معدومين و $p$ عدد أولي حيث $p$ يقسم الجداء $ab$ .
*) إذا كان $p$ يقسم $a$ تكون الخاصية محققة .
*) إذا كان $p$ لا يقسم $a$ فإن $p\gcd(a;p)=1$ لأن $p$ عدد أولي وقاسميه هما 1 و $p$ إذن $a$ و $p$ أوليان فيما بينهما .
وبما أن $p$ يقسم الجداء $ab$ وهو أولي مع $a$ وحسب مبرهنة غوص فإن $p$ يقسم .

2) $a$ ، $b$ و $c$ أعداد طبيعية غير معدومة .
إذا كان $a$ مضاعفا للعددين $b$ و $c$ وكان $b$ و $c$ أوليين فيما بينهما فإن $a$ مضاعفا للجداء $bc$

**البرهان :**

$a$ مضاعفا للعددين $b$ و $c$ يوجد عددين طبيعيين $k$ و $k'$ حيث $a=kb......(1)$ و $a=k'c$ .
اذن $kb=k'c$ .
العدد $c$ يقسم $k'c$ اذن $c$ يقسم $kb$ وبما أن $c$ أولي مع $b$ وحسب مبرهنة غوص فان $c$ يقسم $k$ .
اذن يوجد عدد طبيعي $k''$ حيث $k=k''c$ وبالتعويض في (1) نجد $a=k''cb$ وبالتالي $a$ مضاعف للعدد $kb.$ .

***تمرين :***

1) عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ : $7x-24y=0$.
2) تأكد أن الثنائية $(7;2)$ حل للمعادلة ذات المجهول $(x;y)$ : $7x-24y=1$ .
3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ : $7x-24y=1$.

***الحل التمرين :***

1) $7x-24y=0$ ومنه $7x=24y$ .

24 يقسم $24y$ و بالتالي 24 يقسم $7x$ بما أن 24 أولي مع 7 فإن حسب مبرهنة غوص 24 يقسم $x$ نضع $x=24k$ حيث $k$ عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $7x=24y$ نحصل على $7(24k)=24y$ و منه $y=7k$ .

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(24k;7k)$ حيث $k$ عدد صحيح .

**2)** $7\times7-24\times2=1$ و منه $(7;2)$ حل للمعادلة $7x-24y=1$ .

**3)** بطرح $1$ من طرفي المعادلة $7x-24y=1$ نحصل على $7x-24y-1=0$ .

و نعلم أن $7\times7-24\times2=1$ إذن $7x-24y-7\times7+24\times2=0$ . و منه $7(x-7)=24(y-2)$ .

$24$ يقسم $24(y-2)$ و بالتالي $24$ يقسم $7(x-7)$ بما أن $24$ أولي مع $7$ فإن حسب مبرهنة غوص $24$ يقسم $(x-7)$ نضع $(x-7)=24k$ حيث $k$ عدد صحيح أي $x=24k+7$

بالتعويض في المساواة $7(x-7)=24(y-2)$ نحصل على $7(24k)=24(y-2)$ ومنه $y=7k+2$ . الحلول هي الثنائيات من الشكل $(24k+7;7k+2)$ حيث $k$ عدد صحيح .

**ملاحظة :**

يمكن الحصول على الثنائية $(7;2)$ باستعمال الطريقة التالية (الطريقة ليست وحيدة )

لدينا : $7x-24y=1$ وبالتالي نجد : $24y+1=7x$ .

اذن نبحث عن العدد الصحيح $y$ حيث $24y+1$ مضاعف للعدد $7$ .

نأخذ $y=0$ و $y=1$ : نجد أن $24y+1$ ليس مضاعف للعدد $7$ .

نأخذ $y=2$ نجد : $24y+1=24\times2+1=49=7\times7$ وبالتالي $x=7$ .

اذن $(7;2)$ حل للمعادلة $7x-24y=1$ .