الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

8

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 28

التمريـــــن

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/بين أن:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) و المنحني (C_f) .

4) بين أن ω نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

5) اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ.

6) مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي حيث: $m > 0$.

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x - \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{me^{x}+2m}\right) = 0 \ldots (E)$$

◀ حل التمريـــن

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{2\overbrace{e^{2x}}^{0}+1}{\underbrace{e^{x}}_{0}+2}\right)\right]$$
$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\ln 2$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=-\ln 2$

ب/ تبيين أن: $f(x)=x+\ln 2+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$:

$$f(x)=\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{2e^{2x}\left(1+\frac{1}{2e^{2x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{2e^{2x}}{e^{x}}\right)+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2e^{2x}}}{1+\frac{2}{e^{x}}}\right)$$
$$=\ln(2e^{x})+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$
$$=\ln 2+x+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln 2+\underbrace{x}_{+\infty}+\underbrace{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)}_{0}\right]$$
$$=+\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{4e^{2x}(e^x+2)-e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)^2}\right)}{\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)}$$
$$=\frac{4e^{2x}(e^x+2)-e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$
$$=\frac{4e^{3x}+8e^{2x}-2e^{3x}-e^x}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$
$$=\frac{e^x(2e^{2x}+8e^x-1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$

لدينا:

$$\begin{cases} e^x>0 \\ e^x+2>0 \\ 2e^{2x}+1>0 \end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x}+8e^x-1)$:

$$2e^{2x}+8e^x-1=0$$

نضع $e^x=t$ أي $x=\ln t$

فنجد:

$$2t^2+8t-1=0$$

لدينا:

$$\Delta=b^2-4ac=64-4(2)(-1)=72=\left(6\sqrt{2}\right)^2$$

لدينا: $\Delta>0$ ومنه:

$$t_1=\frac{-8+6\sqrt{2}}{4}=-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$$
$$t_2=\frac{-8+6\sqrt{2}}{4}=-2-\frac{3}{2}\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=\ln t_1=\ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \\ x_2=\ln t_2\ \left(\text{غير ممكن}\right) \end{cases}$$

ولدينا أيضا $f(0)=0$ ومنه:

- <u>جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$		$\ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\ln 2$	$\searrow$	$f\left(\ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ/ تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته:

تذكير

إذا استطعنا كتابة عبارة دالة f على الشكل:

$$f(x) = y + \varphi(x)$$

حيث:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [\varphi(x)] = 0$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته y

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right) \\ &= x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right) \\ &= y + \varphi(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right) \\ y = x + \ln 2 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}} = 1$$
$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}e^{-2x} = 1+2e^{-x}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} = 0$$
$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow e^{-x} = 4$$
$$\Rightarrow -x = \ln 4$$
$$\Rightarrow x = -\ln 4$$

لدينا:

$$x > -\ln 4$$
$$\Rightarrow -x < \ln 4$$
$$\Rightarrow e^{-x} < 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} < 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 < 0$$
$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2\right) < 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} < 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} + 1 < 2e^{-x} + 1$$

لدينا: $2e^{-x}+1>0$ يمكن القسمة عليه

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}e^{-x}+1}{2e^{-x}+1} < 1$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{1}{2}e^{-x}+1}{2e^{-x}+1}\right) < 0$$

ومنه لما $x > -\ln 4$: $f(x) - y < 0$

بنفس الطريقة نجد أنه لما $x < -\ln 4$: $f(x) - y > 0$

ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in]-\infty; -\ln 4[$.
- (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات: $(-\ln 4\,; -\ln 2)$
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]-\ln 4\,; +\infty[$.

4) تبيين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

نحدد أولا نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = -\ln 2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي $\omega(-\ln 4\,; -\ln 2)$

ولدينا: $f(-\ln 4) = -\ln 2$ ومنه $\omega \in (C_f)$

5) كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا:

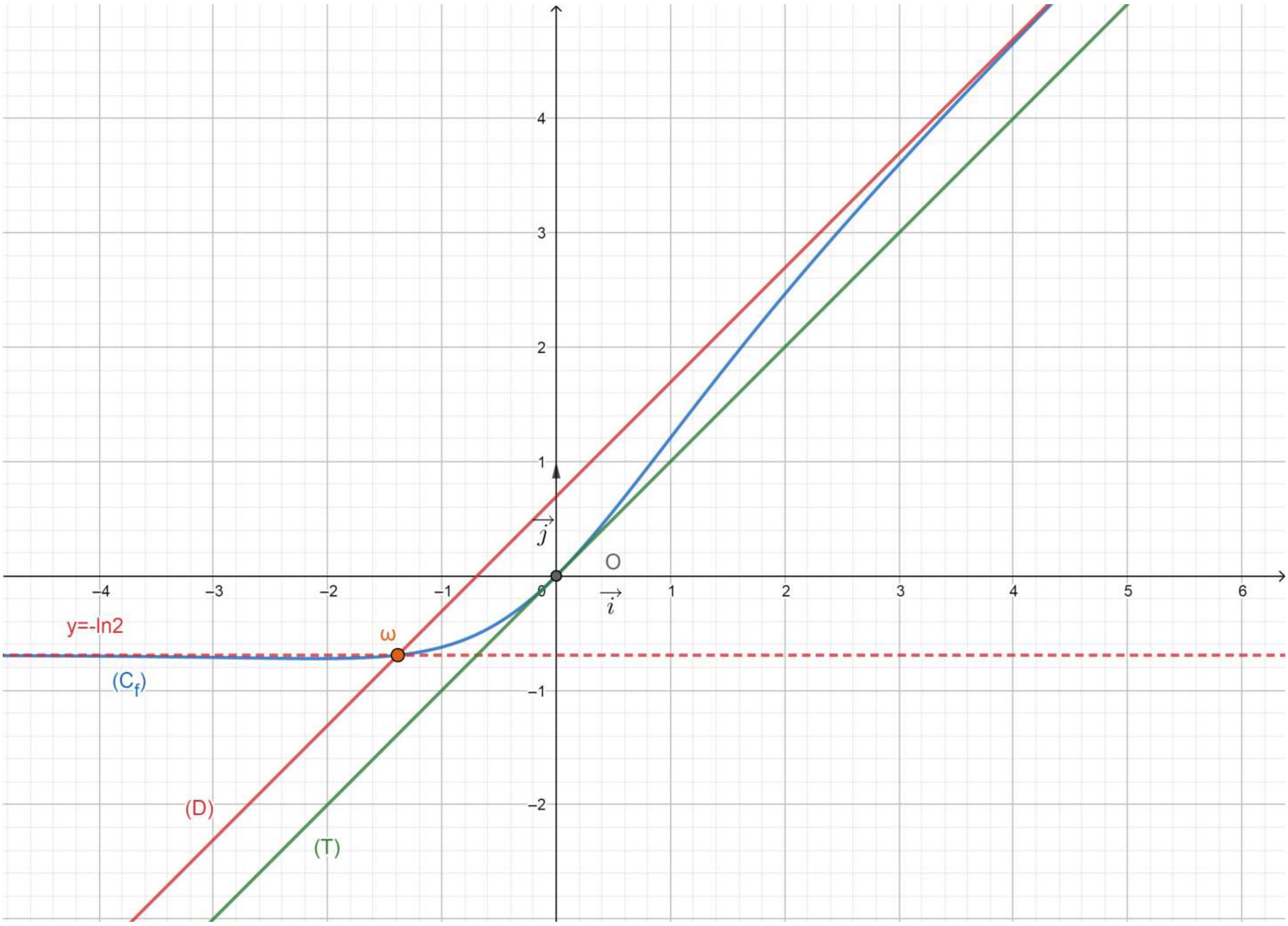
$$\begin{aligned}(T): y &= f'(0)(x-0) + f(0)\\ &= x\end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مماس للمنحني (C_f) عند المبدأ.

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $y = -\ln 2$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعيّن ω نقطة تقاطع المستقيمات المقاربة.
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x-\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{me^{x}+2m}\right)=0$$
$$\Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{m}\ \frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$
$$\Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{m}\right)+\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$
$$\Rightarrow x=-\ln m+f(x)$$
$$\Rightarrow f(x)=x+\ln m$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m=x+\ln m$$

ومنه:

لما	$\ln m<0$	أي	$m<1$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$\ln m=0$	أي	$m=1$	للمعادلة حل مضاعف

لما $0 < \ln m < \ln 2$ أي $1 < m < 2$ للمعادلة حلان

لما $\ln m = \ln 2$ أي $m = 2$ للمعادلة حل مضاعف

لما $\ln m > \ln 2$ أي $m > 2$ للمعادلة حل وحيد

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►