



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

7

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 27

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) أ/ بين أن لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من المجال $[1; +\infty[$:

$$(x - 1) + \ln x \geq 0$$

ب/ بين أنه من أجل كل من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ والمنحني (C_f) .

(4) عين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ، ثم اكتب

معادلة المستقيم (T) .

أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها.

(5) مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x) = x - 2m$$

(1) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{-\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{-\infty} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$.

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x}_{+\infty} + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{+\infty} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(2) أ/ تبين أن لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من $[1; +\infty[$:

$$: (x - 1) + \ln x \geq 0$$

نضع: الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب:

$$h(x) = x - 1 + \ln x$$

لدينا:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x}$$

لدينا: $h'(x) > 0$ ولدينا: $h(1) = 0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$

وأن لكل x من المجال $[1; +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$

ب/ تبين أنه من أجل كل من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

$x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $h(x)$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

(3) دراسة الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحنى (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln x \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \frac{1}{2} \ln x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

ومنه:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$\frac{1}{2} \ln x - 1$	-	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	+

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما: $]0; 1[\cup]e^2; +\infty[$
- (C_f) يقطع (D) في النقطتين: $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ و $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$
- (C_f) تحت (D) لما: $]1; e^2[$.

(4) تعيين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيه المماس (T) موازيا للمستقيم (D) :

المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$f'(a) = 1 \Rightarrow \frac{a - 1 + \ln a}{a} = 1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a - 1 + \ln a &= a \\ \Rightarrow \ln a &= 1 \\ \Rightarrow a &= e\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(e)(x - e) + f(e) \\ &= x - e + e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\ &= x\end{aligned}$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة ω(e; e)

(5) / تبين أنه من أجل كل x من]0; +∞[: $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x - 1 + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2 - \ln x}{x^2}\end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها:

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2 - \ln x)$

$$\begin{aligned}2 - \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = 2 \\ &\Rightarrow x = e^2\end{aligned}$$

ومنه:

x	0	e ²	+∞
f'(x)	-	0	+

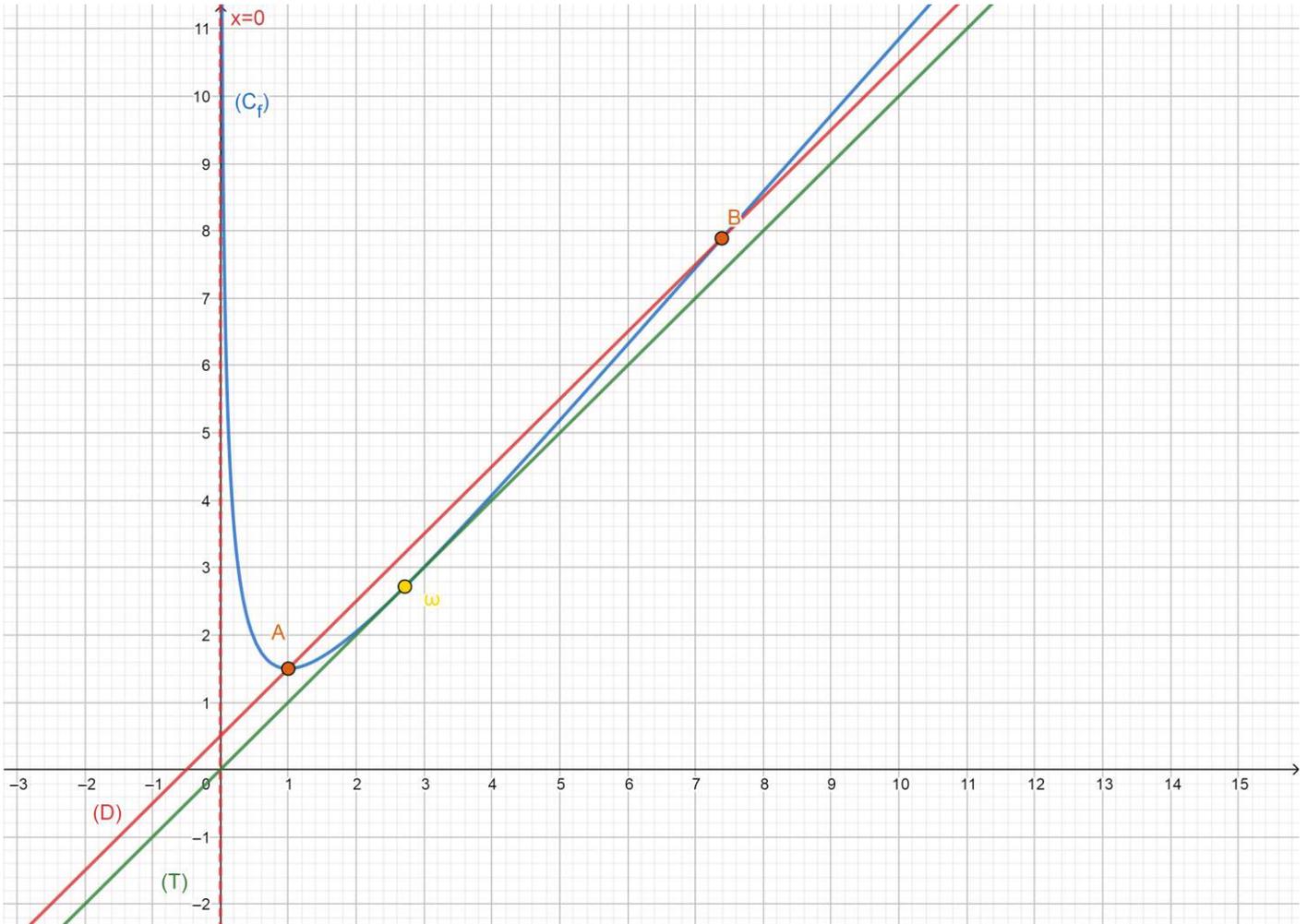
لدينا $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارتها

ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- **نرسم المستقيم المقارب: $x = 0$**
- **نرسم المستقيم المقارب المائل (D)**
- **نعين A و B نقط تقاطع (D) مع (C_f)**
- **نرسم المماس: (T)**
- **ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)**



(7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = x - 2m$ ومنه:

المعادلة لا تقبل حلول	$m > 0$	أي	$-2m < 0$	لما
المعادلة تقبل حل مضعف	$m = 0$	أي	$-2m = 0$	لما
المعادلة تقبل حلان	$-\frac{1}{4} < m < 0$	أي	$0 < -2m < \frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلان أحدهما مضعف	$m = -\frac{1}{4}$	أي	$-2m = \frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلان	$m < -\frac{1}{4}$	أي	$-2m > \frac{1}{2}$	لما

▶ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ◀